2. (15 pontos) O conjunto dos vetores da forma $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, com $a + 2b - c = 0$, constitui um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$? E o conjunto dos vetores da forma $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$? Justifique.

Se $g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} // a+2b-c=0$ é subespaço de $\mathbb{R}^3 \to$ I. $\forall x, y \in g \to x+y \in g$

II. $\forall x \in g$ e $\alpha \in \mathbb{R} \to \alpha x \in g$

III. $0 \in \mathbb{R}^3 \to 0 \in g$

I. Sendo $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

$x+y = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix} \to a+d+2(b+e) = c+f \to j+2k = l \therefore x+y \in g$

II. $\alpha x \to \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix} \to \alpha a + 2\alpha b = \alpha c \to j+2k = l \therefore \alpha x \in g$

III. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0+20=0 \therefore 0 \in g$

Por g satisfazer todas as condições, g é um subespaço de $\mathbb{R}^3$

Se V é subconjunto de $\mathbb{R}^3 \to$ // $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

I. $0 \in \mathbb{R}^3 \to 0 \in V$

II. $\forall x, y \in V \to x+y \in V$

III. $\forall x \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R} \to \alpha x \in V$

: Porém, é impossível representar $0 \in \mathbb{R}^3$ como uma combinação linear de $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ contradizendo as propriedades de um subespaço e portanto V não é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

3. (10 pontos) Mostre que o vetor $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pertence ao espaço gerado por $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$. Determine $[w]_{\mathcal{B}}$.

Se $\omega \in \mathcal{B} \to \omega = C_1\mathcal{B}_1 + C_2\mathcal{B}_2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $\quad 2c_2 = -2 \to c_2 = -1$

$c_1 = 1 - c_2 \to c_1 = 2$

De forma que,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $[\omega]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$