6. (15 pontos) Se o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é formado por vetores linearmente independentes, então prove que o conjunto $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ onde $w_1 = 8\,v_1 + v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ e $w_3 = v_3 - 2\,v_1$ também linearmente independente.

$S = \{V_1, V_2, V_3\}$ é l.i. $T = \{8v_1 + v_2,\ v_2 - v_3,\ v_3 - 2v_1\}$ é l.i.

Se $T$ é l.d. $8v_1 + v_2$ pode ser escrito como combinação linear de $v_2 - v_3$ e $v_3 - 2v_1$

e portanto $8v_1 + v_2 = c_1(v_2 - v_3) + c_2(v_3 - 2v_1) = c_1 v_2 - c_1 v_3 + c_2 v_3 - 2c_2 v_1$

$8v_1 + v_2 = -2c_2 v_1 + c_1 v_2 + (c_2 - c_1)v_3$ de forma que $c_1$ e $c_2$ são tais que:

$$\begin{cases} c_1 = c_2 \\ -2c_2 = 8 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

O que é um absurdo $(-4 \neq 1)$ e, portanto $T$ não é l.d., e sim, l.i.

7. (15 pontos) Assinale as sentenças com V, se a sentença for verdadeira, ou F, se ela for falsa. Justifique aquelas que forem falsas.

(a) ( V ) Uma base para o espaço das matrizes simétricas de ordem 2×2 é $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

(b) ( F ) Os vetores $u = (2,1,2)$, $v = (0,1,0)$ são linearmente dependentes.

(c) ( F ) As coordenadas do vetor $v = t^3$ em relação à base $\{1, 2-t, t^2+1, 1+t+t^3\}$ são $(-3,1,2,1)$.

b) Se $u$ e $v$ são l.d. $\Rightarrow v = Ku$, $K \in \mathbb{R}$, porém não existe tal $K$ para $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2K\\K\\2K\end{pmatrix}$. Logo, $v$ e $u$ são necessariamente l.i.

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$v = t^3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

Boa prova!

$\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$