Aluno(a): Gustavo Olegário

4. (15 pontos) O conjunto $W = \{1 - t^3, (1-t)^2, 1-t, 1\}$ pode ser considerado uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_3$, isto é, o espaço vetorial dos polinômios de grau não superior a três? Justifique.

Se W é base de P_3 $\Rightarrow$ W é l.i. e W é gerador de P_3.

Para verificar se W é gerador de P_3 fazemos: $at^3+bt^2+ct+d \in P_3$

$v = c_1(1-t^3) + c_2(1-t)^2 + c_3(1-t) + c_4 = c_1 - c_1 t^3 + c_2(1-2t+t^2) + c_3 - c_3 t + c_4$

$= c_1 - c_1 t^3 + c_2 - 2c_2 t + c_2 t^2 + c_3 - c_3 t + c_4 = c_1 - c_1 t^3 + c_2 - 2c_2 t + c_2 t^2 + c_3 - c_3 t + c_4$

$at^3+bt^2+ct+d = -c_1 t^3 + c_2 t^2 + (-2c_2 - c_3)t + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

$\therefore$ $a = -c_1$, $b = c_2$, $c = -(2c_2+c_3)$, $d = c_1+c_2+c_3+c_4$; mostrando que W gera P_3.

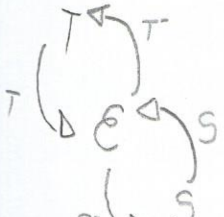
Além disso, temos que W é l.i.. Para verificar isso utilizamos Wronskiano:

$$W[(1+t^3),(1+t^2),(1+t),1] = \begin{vmatrix} 1-t^3 & (1-t)^2 & 1-t & 1 \\ -3t^2 & 2(t-1) & -1 & 0 \\ -6t & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$$

$W[\,] \neq 0 \therefore$ O conjunto é l.i

Sendo W l.i., e gerador de P_3, temos que W é uma base de P_3

5. (15 pontos) Sejam $S = \{v_1, v_2\}$ e $T = \{w_1, w_2\}$ bases ordenadas para o espaço vetorial $\mathcal{P}_1$ (polinômios reais de grau não superior a 1), onde $w_1 = t$, $w_2 = t - 1$. Se a matriz de transformação da base S para a base T é dada por $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determine a base S.



$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = {}^{T}[\,]_S$

$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

${}^{T}[\,]_S = T^{-1} S$

$T\,{}^{T}[\,]_S = S$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = S \therefore$ $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$S = \{t+1, 5t-2\}$