UNO(A): Gustavo Olegário

(15 pontos) Determine uma base para o núcleo da transformação linear $T : M_{2\times2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b, c-d)$.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. A norma do máximo de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é o maior número dentre os valores absolutos de suas componentes, isto é, se $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, então

$$\|v\|_{\max} = max\{|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|\}. \tag{1}$$

(a) (10 pontos) Mostre que de fato a norma do máximo define uma normal.

(b) (5 pontos) Para $u = (3, -2)$ e $v = (-1, 1)$, determine a distância $d(u, v)$ em relação a essa norma.

(c) (5 pontos) Em relação a essa norma do máximo, represente o lugar geométrico dos vetores unitários de $\mathbb{R}^2$, ou seja, a bola de $\mathbb{R}^2$ em relação à norma do máximo.

a)

Suponha que $|v_j|$ seja o max, então

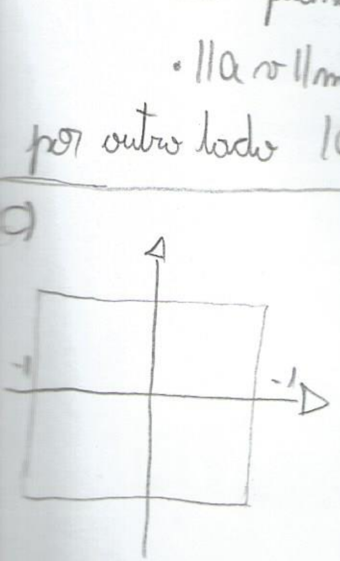
$\|v\|_{max} = |v_j| \geq 0 \; (\forall v_j)$

exceto quando $v_j = 0$, e com isso $v = (0, 0, \ldots, 0)$, neste caso $\|V\|_{max} = 0$

• $\|av\|_{max} = |a| \, \|v\|_{max}$; $av = (av_1, av_2, \ldots, av_n) \therefore \|aV\|_{max} = |av_j|$

por outro lado $|a| \, \|V\|_{max} = |a| \cdot |V_j| = |av_j|$ //

c)



$u = (x, y)$

um vetor arbitrário, unitário

$(\|u\| = 1)$

$\|u\| = 1 \iff u = (x, 1), \; -1 \leq x \leq 1$

$u = (x, -1), \; -1 \leq x \leq 1$