Disciplina - MTM5512
Geometria Analítica/ Turma 02208
Prof. Ricardo Misturini
Prova 3 - 02/12/2015

Soluções:

1. Como os focos estão alinhados horizontalmente a equação é da forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, onde (h, k) é o centro da elipse e a e b são tais que $a^2 = b^2 + c^2$ onde c é tal que $2c$ é a distância entre os focos. Ou seja $(h, k) = (3, 2)$ e $c = 2$. Como a excentricidade é $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, concluímos que $a = 4$, e então $b^2 = a^2 - c^2 = 12$. Logo, a equação da elipse é $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{12} = 1$.

2. Completando quadrados, vemos que a equação $x^2 - 2y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ é equivalente a $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$. Logo, temos a equação de uma hipérbole com centro em $(1, -1)$ com abertura na direção horizontal. Além disso, a distância entre os focos é dada por $2c$ onde c é tal que $c^2 = 4+2 = 6$. Logo os focos são os pontos $F_1 = (1-\sqrt{6}, -1)$ e $F_2 = (1+\sqrt{6}, -1)$.

3. Lembre que a parábola é o conjunto dos pontos equidistantes do foco e da reta diretriz. Então, usando a dica, temos que a parábola é formada pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y|}{\sqrt{2}}$. Ambos os lados da equação são positivos. Elevando-os ao quadrado, "abrindo os parêntesis" e agrupando os termos semelhantes, vemos que a equação é equivalente a $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$.

4. (a) Completando quadrados, vemos que a equação $x^2+y^2-2x-4y-4z+5 = 0$ é equivalente a $z = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4}$. Portanto, se trata de um parabolóide helíptico (circular) com vértice no ponto $(1, 2, 0)$ com eixo paralelo ao eixo z.

   (b) A interseção de $\mathcal{S}$ com o plano de equação $z = -1$ é formada pelos pontos $(x, y, -1)$ que satisfazem a equação $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} = -1$. Mas note que o lado esquerdo da equação não pode ser negativo. Portanto, essa interseção é o conjunto vazio.

   (c) A interseção de $\mathcal{S}$ com o plano de equação $z = 1$ é formada por pontos $(x, y, 1)$ que satisfazem a equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Ou seja, os pontos formam uma circunferência parelela ao plano xy com centro no ponto $(1, 2, 1)$ e raio igual a 2.

5. Por estar em posição padrão, o elipsóide tem equação da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Mas queremos que os pontos do plano $x = 0$ satisfaçam $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$, então a equação deve ser da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$. Agora, usando que o ponto $(2, 0, 0)$ pertence ao elipsóide, obtemos $\frac{2^2}{a^2} = 1$, logo $a^2 = 4$ e a equação é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$.