Disciplina - MTM5512
Geometria Analítica/ Turma 02208
Prof. Ricardo Misturini
Prova 2 - 26/10/2015

Nota: ____________

Nome: ____

Instruções:

1. Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova.
2. Não é permitido o uso de calculadoras, celulares e similares.
3. Coloque seu nome em todas as folhas de resposta.

Questões:

1. (2pt) Considere os vetores $U = (1, 1, 1)$ e $V = (2, 0, 3)$.

(a) Os vetores U e V são paralelos? Justifique sua resposta.

(b) Os vetores U e V são ortogonais? Justifique sua resposta.

(c) Exiba um vetor N simultaneamente ortogonal a U e V.

2. (3pt) Sejam $A = (0, 1, 3)$, $B = (1, 2, 4)$ e $C = (2, 1, 6)$.

(a) Explique por que os pontos A, B, e C não são colineares.

(b) Calcule a área do triângulo ABC.

(c) Seja π o plano que contém A, B e C. Obtenha uma equação geral para o plano π.

(d) Seja r a reta que passa pela origem $(0, 0, 0)$ e é perpendicular ao plano π. Obtenha equações paramétricas para a reta r.

(e) Encontre as coordenadas do ponto de interseção entre a reta r e o plano π.

(f) Calcule a distância entre o plano π e a origem $(0, 0, 0)$.

3. (2pt) Seja r_1 a reta com equações paramétricas

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Obtenha equações paramétricas para a reta r_2 que é paralela à reta r_1 e passa pelo ponto $P_2 = (3, 3, 7)$.

(b) Obtenha uma equação geral para o plano que contém as retas r_1 e r_2.

4. (2pt) Considere os planos

$$\pi_1 : x + y + z - 2 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x + 3z - 4 = 0.$$

(a) Verifique o ponto $P = (2, 0, 0)$ pertence a ambos os planos.

(b) Encontre equações paramétricas para a reta de interseção entre os planos π_1 e π_2.

5. (1pt) Encontre uma equação geral do plano formado pelos pontos equidistantes aos pontos $A = (2, 3, 4)$ e $B = (3, 2, 1)$.

Soluções:

1. (a) Não, pois V não é múltiplo escalar de U. Isto é, as coordenadas de U e V não são proporcionais.

   (b) Não, pois $U \cdot V = 5 \neq 0$.

   (c) Por exemplo, $N = U \times V = (3, -1, -2)$.

2. (a) Note que $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 3)$. Note que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ coincidem com os vetores U e V da questão 1. Os pontos não são colineares porque esses vetores não são paralelos.

   (b) Área $= \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{||(3,-1,-2)||}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

   (c) O vetor $N = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3, -1, -2)$ é ortogonal ao plano. Logo, podemos escrever a equação na forma $3x - y - 2z + d = 0$. Usando o fato de que $A \in \pi$, concluímos que $d = 7$. Assim, obtemos a equação $3x - y - 2z + 7 = 0$.

   (d) Podemos tomar $N = (3, -1, -2)$ como o vetor diretor da reta r. Como ela passa pela origem, obtemos as equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (e) Um ponto genérico da reta é da forma $(3t, -t, -2t)$. Devemos encontrar t de modo que esse ponto pertença ao plano π, ou seja, de modo que $3(3t) - (-t) - 2(-2t) + 7 = 0$. Essa igualdade é satisfeita quando $t = -\frac{1}{2}$. Logo, o ponto de interseção é o ponto $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

   (f) A distância entre a origem $(0, 0, 0)$ e o plano π coincide com a distância entre a origem e o ponto encontrado no item anterior. Logo, a distância é $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

3. (a) $r_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + t \\ z = 7 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

   (b) Note que o vetor diretor da reta r_2 é $U = (1, 1, 1)$. O ponto $P_1 = (1, 3, 4)$ pertence à reta r_1 e o ponto $P_2 = (3, 3, 7)$ pertence à reta r_2. Em particular, P_1 e P_2 pertencem ao plano que contém estas retas. Sendo assim, $V = \overrightarrow{P_1P_2} = (2, 0, 3)$ é paralelo ao plano. Logo $N = U \times V = (3, -1, -2)$ é um vetor ortogonal ao plano. Logo, podemos escrever a equação na forma $3x - y - 2z + d = 0$. Usando o fato de que P_1 pertence ao plano, concluímos que $d = 8$. Assim, obtemos a equação $3x - y - 2z + 8 = 0$.

4. (a) Basta observar que $(x, y, z) = (2, 0, 0)$ satisfaz as equações de ambos os planos: $2 + 0 + 0 - 2 = 0$ e $2(2) + 3(0) - 4 = 0$.

   (b) Os vetores $N_1 = (1, 1, 1)$ e $N_2 = (2, 0, 3)$ são ortogonais aos planos π_1 e π_2 respectivamente. Logo, podemos tomar $N_1 \times N_2 = (3, -1, -2)$ como o vetor diretor da reta de interseção entre π_1 e π_2. Como P pertence à reta, obtemos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico equidistante aos pontos A e B. Então $||\overrightarrow{AP}|| = ||\overrightarrow{BP}||$ ou, equivalentemente $||\overrightarrow{AP}||^2 = ||\overrightarrow{BP}||^2$. Isto é,

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2.$$

Expandindo os quadrados e reagrupando os termos obtemos a equação $2x - 2y - 6z + 15 = 0$.

Solução alternativa: O vetor $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -3)$ é ortogonal ao plano. Logo, podemos escrever a equação na forma $x - y - 3z + d = 0$. O ponto médio do segmento AB é $M = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Como M pertence ao plano, obtemos $d = \frac{15}{2}$. Dessa forma, obtemos a equação $x - y - 3z + \frac{15}{2} = 0$, que é equivalente à equação obtida anteriormente.