Disciplina - MTM5512
Geometria Analítica/ Turma 02208
Prof. Ricardo Misturini
**Prova 1 - 09/09/2015**

Nota: __________

**Nome:** ______________________________ **Matrícula:** __________

## Instruções:

**1.** Interpretação do enunciado faz parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova.
**2.** As questões devem ser respondidas a caneta.
**3.** Não é permitido o uso de calculadoras, celulares e similares.
**4.** Coloque seu nome em todas as folhas de resposta.

## Questões:

**1.** (2pt) Sejam $A$, $B$, $C$ matrizes $2 \times 2$ tais que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \det(C) = 2$$

Calcule:
(a) $A(B+C)$ (b) $B^tA^t$ (c) $\det(A)$ (d) $\det(B)$

**Solução:**

(a) $A(B+C) = AB + AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $B^tA^t = (AB)^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) Note que $\det(AC) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = -3$. Por outro lado, sabemos que $\det(C) = 2$ e que $\det(AC) = \det(A)\det(C)$. Ou seja, $-3 = 2\det(A)$. Portanto, $\det(A) = -\frac{3}{2}$.

(d) Usando a mesma ideia do item anterior, observando que $\det(AB) = 1$ e $\det(A) = -\frac{3}{2}$, concluímos que $\det(B) = -2/3$.

**2.** (2pt) Determine todos os possíveis valores de $a$, se existirem, de modo que o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2-1)x_3 &= a-1 \end{cases}$$

(a) não tenha solução

(b) tenha infinitas soluções

(c) tenha uma única solução

**Solução:**
A matriz aumentada correspondente a esse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & a^2-1 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Através de operações elementares sobre as linhas ($L_2 - L_1 \to L_2$ e $L_3 - L_1 \to L_3$ ), notamos que o sistema é equivalente ao sistema cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{bmatrix}.$$

Com isso, percebemos que

(a) O sistema não tem solução se $a^2 - 4 = 0$ e $a - 2 \neq 0$. Ou seja, o sistema não tem solução se $a = -2$.

(b) O sistema tem infinitas soluções se $a^2 - 4 = 0$ e $a - 2 = 0$. Ou seja, o sistema tem infinitas soluções se $a = 2$.

(c) O sistema tem solução única se $a^2 - 4 \neq 0$. Ou seja, o sistema tem solução única se $a \notin \{-2, 2\}$.

**3.** (2pt) Encontre, se existir, a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

**Solução:**
Consideremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $L_2 - 2L_1 \to L_2$ e $L_3 - L_1 \to L_3$, vemos que essa matriz é equivalente por linhas a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, fazendo $L_1 - 2L_2 \to L_1$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A$ é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**4.** (2pt) Exiba o conjunto solução do sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 2 \end{cases}$$

**Solução:**
A matriz aumentada correspondente a esse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 - 2L_1 \to L_2$ e $L_3 - L_1 \to L_3$, vemos que o sistema é equivalente ao sistema cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora fazendo $L_3 - L_2 \to L_3$ obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, o sistema é equivalente ao seguinte sistema com apenas duas equações:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 - 3x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Podemos escolher $x_3$ livremente e depois resolver de baixo pra cima em termos de $x_3$. Dessa forma obtemos o conjunto solução

$$S = \{(-2 - 10t, 1 + 3t, t) \; : \; t \in \mathbb{R}\}$$

OBS. Essa não é a única forma de parametrizar o conjunto das infinitas soluções.

**5**. (2pt) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre todos os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais existe $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que satisfaz

$AX = \lambda X$

**Solução:**

A equação $AX = \lambda X$ é equivalente à equação homogêna $(A - \lambda I)X = 0$. Para que essa equação tenha solução além da trivial $X = [0, 0, 0, 0]^t$ é necessário e suficiente que a matriz $(A - \lambda I)$ não seja invertível. Para que $(A - \lambda I)$ não seja invertível é necessário e suficiente que $\det(A - \lambda I) = 0$. Agora, notemos que

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda)(4-\lambda)$$

e isso é igual a zero se, e somente se, $\lambda \in \{1, 2, -3, 4\}$.