МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №3
з курсу “Дискретна математика”

Моделювання основних операцій для числових множин

Виконав:
ст. гр. КН-110
Помірко Олег

Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 2018

Тема: Побудова матриці бінарного відношення

Мета роботи: набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Декартів добуток множин A і B (позначається $A\times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b\in B$. При цьому вважається, що $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Потужність декартова добутку дорівнює $|A\times B| = |A| \times |B|$.

Приклад. Довести тотожність $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Розв'язання.

Нехай $(x, y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow$

$(x, y)\in(A\times B)\ \&\ (x, y)\in(C\times D) \Leftrightarrow$

$(x \in A\ \&\ y \in B)\ \&\ (x \in C\ \&\ y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A\ \&\ x \in C)\ \&\ (y \in B\ \&\ y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A\cap C)\ \&\ (y \in B \cap D) \Leftrightarrow (x, y)\in(A\cap C)\times(B \cap D)$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку $A\times B$ (тобто $R \subset A\times B$).

Якщо пара (a,b) належить відношенню R , то пишуть

$(a, b)\in R$, або aRb .

Областю визначення бінарного відношення $R \subset X\times Y$ називається множина $\delta_R = \{x \mid \exists y\ (x, y)\in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y \mid \exists x\ (x, y)\in R\}$ ($\exists$- існує).

Для скінчених множин бінарне відношення $R \subset A\times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m\times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, а $n = |B|$.

Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, & якщо\ (a_i,b_j)\in R, \\ 0, & якщо\ (a_i,b_j)\notin R. \end{cases}$

Приклад. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де

$R = \{(x, y) | x\in M\ \&\ y\subset M\ \&\ x\in y\}$,

$M = \{x \mid x\in Z\ \&\ x \le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

Розв'язання.

Згідно з означенням матриці відношення, розв'язок має вигляд

	∅	{-1}	{0}	{1}	{-1,0}	{-1,1}	{0,1}	{-1,0,1}
-1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1

Приклад. Зобразити відношення графічно, де R - множина дійсних чисел, та знайти його область визначення та область значень:

1. $\alpha_1 = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ |2x + y| \le 4 \ \& \ x \ge 0\}$;

2. $\alpha_2 = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ x^2 + 2x - y^2 \le 0\}$.

Розв'язання.

Зображення відношення α_1 зводиться до графічного розв'язання системи нерівностей $\begin{cases} 2x + y \le 4, \\ 2x + y \ge -4. \end{cases}$

Розв'язок цієї системи з врахуванням останньої умови зображено на рис. 2.1. Область визначення $\delta_{\alpha_1} = [0; \infty)$, область значень $\rho_{\alpha_1} = (-\infty; 4]$.

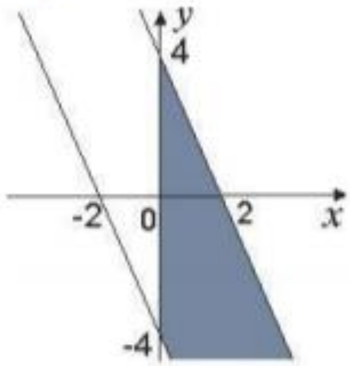


Рисунок 2.1

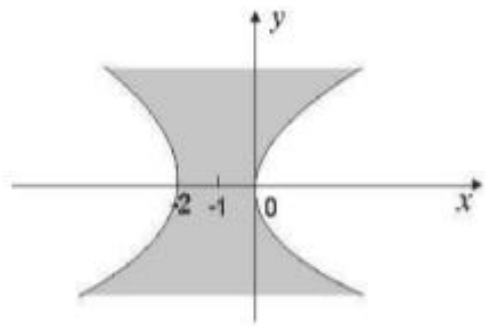


Рисунок 2.2

Для побудови області, яка відповідає відношенню α_2, знаходимо границю цієї області $x^2 + 2x - y^2 = 0$, або $(x+1)^2 - y^2 = 1$. Це є рівняння гіперболи з центром симетрії в точці (-1; 0) та дійсною та уявною піввісями, рівними 1. Тому відношенню α_2 відповідає частина площини, зображена на рис. 2.2. Область визначення $\delta_{\alpha_2} = R$, область значень $\rho_{\alpha_2} = R$.

Види бінарних відношень.

Нехай задано бінарне відношення R на множині $A^2 : R \subseteq A \times A = \{(a, b) | a \in A, b \in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa, тобто $(a,a) \in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині.

2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa, тобто $(a,a) \notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.

3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb слідує bRa, тобто якщо $(a,b) \in R$ то і $(b,a) \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc . Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c \in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc . Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то $(a, c) \notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Приклад. На множині $A = \{1,2,3,4,5\}$ задано відношення $R = \{(a, b) | a, b \in A, a + b - \textit{парне число}\}$. Визначити тип даного відношення.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Очевидно, що дане відношення є:

- рефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться одиниці);
- симетричним ($\sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{24} = \sigma_{42}$ та інші);
- транзитивним ($(1,3) \in R$,$(3,5) \in R \Rightarrow (1,5) \in R$; $(1,5) \in R$, $(5,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ та інші).

Приклад. Які властивості на множині $A = \{a, b, c, d\}$ має бінарне відношення $R = \{(a, b), (b, d), (a, d), (b, a), (b, c)\}$.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Дане відношення є:

- антирефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться нулі);
- не симетричним, так як $\sigma_{23} = 1$, а $\sigma_{32} = 0$;
- не антисиметричним, так як $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$;
- не транзитивним, тому що $\sigma_{12} = 1$, $\sigma_{23} = 1$ та $\sigma_{13} = 0$.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому кожен елемент множини X зв'язаний з єдиним елементом множини Y. Функція записується наступним чином: якщо $f \subseteq X \times Y$, то $f: X \to Y$. Множину X називають областю визначення, а Y – множиною значень функції.

Областю значень функції називається підмножина Y, яка складається з образів всіх елементів $x \in X$. Вона позначається символом $f(X)$.

Оскільки для кожного $x \in X$ існує єдиним образом визначений $y \in Y$, такий що $(x, y) \in f$, то записують $y = f(x)$ та говорять, що функція f відображує множину X на множину Y, а $f(x)$ називають образом x при відображенні f або значенням функції, яка відповідає аргументу x.

<u>Види функціональних відношень</u>

1. Функція називається ін'єктивною (ін'єкцією), якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$.

Функція ін'єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається сюр'єктивною (сюр'єкцією), якщо для кожного $y^* \in Y$ знайдеться такий $x^* \in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається бієктивною (бієкцією), якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна одночасно. Таку функцію ще називають взаємно-однозначним відображенням.

<u>Приклад.</u> Визначити, які з зображених функцій ін'єктивні, сюр'єктивні або бієктивні.

Рисунок 2.3

Рисунок 2.4

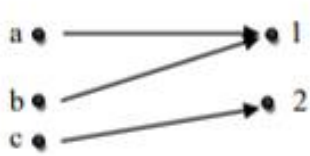


Рисунок 2.5

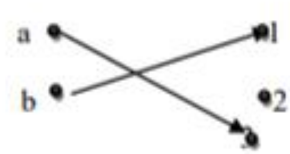


Рисунок 2.6

Розв'язання.

1. Рисунок 2.3. Дана функція не ін'єктивна, тому що значення $1 \in Y$ відповідає a та $b \in X$. Функція не є сюр'єктивною, тому що у елемент $2 \in Y$ нічого не переходить;

2. Рисунок 2.4. Дана функція ін'єкнивна, тому що різним аргументам відповідають різні значення. Функція сюр'єктивна, тому що множина її значень співпадає з областю значень. У даному випадку маємо бієктивну функцію;

3. Рисунок 2.5. Дана функція не інє'ктивна, тому що значення 1 функція приймає як для a так і для b. Функція сюр'єктивна, тому що множина Y співпадає з областю значень функції, тобто для кожного $y \in Y$ існує відповідний аргумент x з області визначення, що $y = f(x)$;

4. Рисунок 2.6. Дана функція ін'єктивна, але не сюр'єктивна.

Варіант № 7

1. Чи є вірною рівність: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$

Нехай $(x , y) \in (A \times D) \cap (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times D) \ \& \ (x, y) \in (B \times C) \Leftrightarrow$
$(x \in A \ \& \ y \in D) \ \& \ (x \in B \ \& \ y \in C) \Leftrightarrow (x \in A \ \& \ x \in B) \ \& \ (y \in C \ \& \ y \in D) \Leftrightarrow$
$(x \in A \cap B) \ \& \ (y \in C \cap D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$.

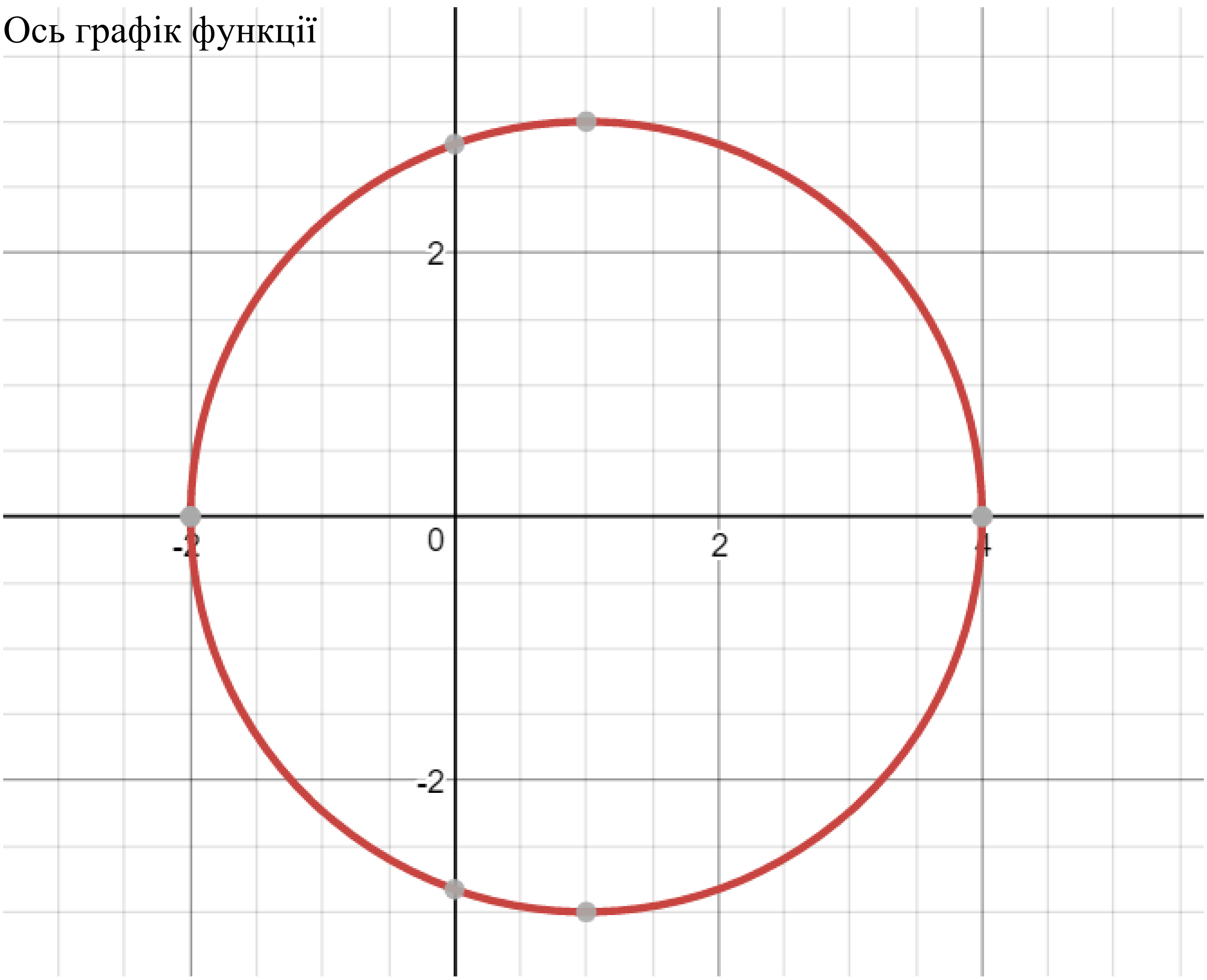
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^{A} \times 2^{B}$: $R = \{(x, y) \mid x \subset A \ \& \ y \subset B \ \& \ x \subset y\}$,
де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$.

	∅	{1}	{2}	{4}	{1,2}	{1,4}	{2,4}	{1,2,4}
∅	1	1	1	1	1	1	1	1
{1}	0	1	0	0	1	1	0	1
{2}	0	0	1	0	1	0	1	1
{1,2}	0	0	0	0	1	0	0	1

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ x^2 - 2x + y^2 = 8\}$, де R - множина дійсних чисел.

Ось графік функції



4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A=\{a,b,c,d,e\}$, яке є антирефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	1
b	1	0	1	1	1
c	1	1	0	1	1
d	1	1	1	0	1
e	1	1	1	1	0

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ y = (x-2)^{-2}\}.$$

Дане відношення є функціональним при $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$

Дане відношення є бієктивним при $x \in (2;+\infty)$або $x \in (-\infty;2)$

Додаток:

7. $\rho = \{(a, b) | a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ a < 3b\};$

```
#include
<stdio.h>
        #include <math.h>


        int main(void)
        {
          int size;
          printf("Input size of arrays:\n ");
          scanf("%d", &size);
          printf("\n");
          int array1[size];
          int array2[size];





          for (int i=0; i<size; i++)
          {
            printf("Array1[%d]=\n", i);
            scanf("%d", &array1[i]);
          }
          printf("\n");
          for (int i=0; i<size; i++)
          {
            printf("Array2[%d]=\n", i);
```

```
  scanf("%d", &array2[i]);
}


printf("\nArray1 is:{");
for (int i=0; i<size; i++)
{
  printf("%d ", array1[i]);
}
printf("\b}\n\nArray2 is:{");
for(int i=0; i<size; i++)
{
  printf("%d ", array2[i]);
}
printf("\b}\n");
int array3[size][size];
for (int i=0; i<size; i++)
{
  for (int j=0; j<size; j++)
  {
    if (2*array1[i]<3*array2[j])
    {
      array3[i][j]=1;
    }
    else
    {
      array3[i][j]=0;
    }
  }
}
printf("\nMatrix is:\n");
for (int i=0; i<size; i++)
{
  printf("(");
  for (int j=0; j<size; j++)
  {
    printf("%d ", array3[i][j]);
  }
  printf("\b)\n");
}
int refl=0;
for (int i=0; i<size; i++)
{
  if (array3[i][i]==1)
  {
    refl++;
  }
```

```
}
if (refl==size)
{
  printf("Relation is reflexivity\n");
}
else if (refl<size && refl>0)
{
  printf("Relation is not reflexivity\n");
}
else if (refl==0)
{
  printf("Relation is antireflexivity\n");
}
int symm=0;
for (int i=0; i<size; i++)
{
  for (int j=0; j<size; j++)
  {
    if (array3[i][j]==array3[j][i])
    {
      symm++;
    }
  }
}
if (symm==pow(size,2))
{
  printf("Relation is symmetric\n");
}
else if (symm<pow(size,2) && symm>size)
{
  printf("Relation is not symmetric\n");
}
else if (symm==size)
{
  printf("Relation is antisymmetric\n");
}
int m=1,n=1;
for (int i=0; i<size; i++)
{
  for (int j=0; j<size; j++)
  {
    for (int k=0; k<size; k++)
    {
      if (i!=j && j!=k && i!=k)
      {
       if (array3[i][j]==1 && array3[j][k]==1 && array3[i][k]==0)
       {
```

```
          m=0;
        }
        else if (array3[i][j]==1 && array3[j][k]==1 && array3[i][k]==1)
        {
          n=0;
        }
       }
     }
   }
 }
 if (m==1)
 {
   printf ("Relation is transitivity\n");
 }
 else if (n==1)
 {
   printf ("Relation is antitranzitivity\n");
 }
 else
 {
   printf ("Relation is not tranzitivity\n");
 }
 scanf("%d",& size);
 return 0;
}
```