Медицинская статистика

Специальность «Лечебное дело»

# Проверка статистических гипотез

# Критерии согласия

# Определение статистической гипотезы

**Статистическая гипотеза** - предположение о виде распределения или о неизвестных параметрах генеральной совокупности, которое может быть проверено на основании выборочных данных

Статистическая гипотеза о виде распределения - **критерий согласия**

Статистическая гипотеза

Простая

Сложная

Основная $H_0$

Альтернативная $H_1$

## Виды гипотез

Основная гипотеза (нулевая) H0 - та гипотеза, которую выдвигают

Альтернативная гипотеза (первая) H1 - гипотеза, противоречащая основной.

Простая гипотеза - гипотеза, содержащая только одно предположение.

Например: H0: $\mu=5$

Сложная гипотеза - гипотеза, состоящая из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Например: H0: $\mu < 5$

# Алгоритм работы с гипотезой

1. Формулировка основной и альтернативной гипотез
2. Определение уровня значимости (альфа $\alpha$)
3. Работа с критерием
   - 3.1 Вручную
   - 3.2 В программе статистического анализа
4. Принятие решения об основной гипотезе
5. Формулировка выводов

# Примеры статистических гипотез

Пример 1. Критерий согласия

$H_0$: Генеральная совокупность распределена по нормальному закону

$H_1$: Генеральная совокупность распределена не по нормальному закону

Пример 2. Простая статистическая гипотеза

$H_0$: Дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой

$H_1$: Дисперсии двух нормальных совокупностей не равны между собой

Пример 3. Простая статистическая гипотеза

$H_0$: Математическое ожидание нормального распределения равно 3

$H_1$: Математическое ожидание нормального распределения не равно 3

Пример 4. Сложная статистическая гипотеза

$H_0$: Математическое ожидание нормального распределения меньше 3

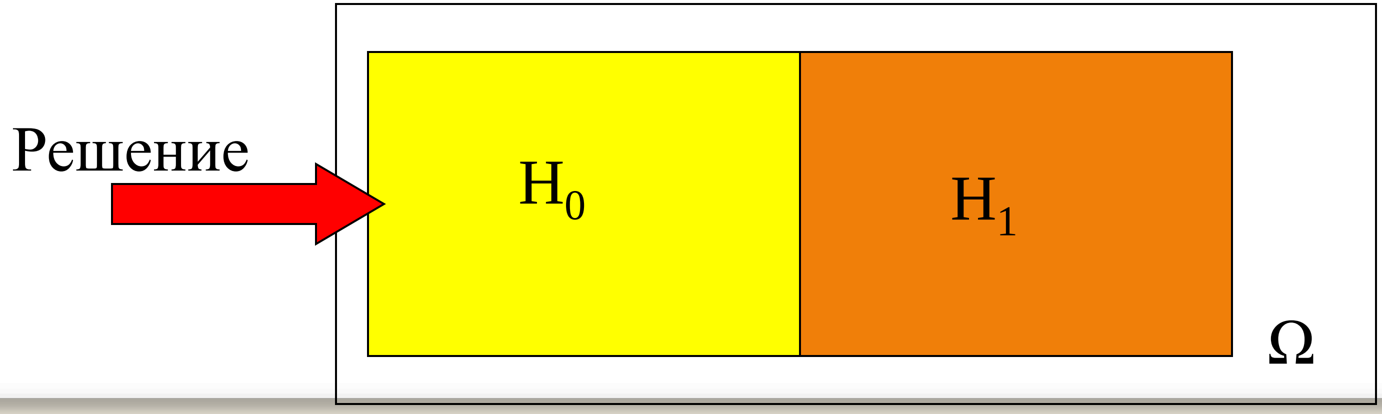
$H_1$: Математическое ожидание нормального распределения не меньше 3

# Как и какую гипотезу принять?

Так как имеется две противоположные гипотезы (основная и альтернативная), то необходимо выбрать одну. Решение о том, какую гипотезу выбрать принимается на основании сравнения двух величин: **р** с Альфа (**α**) или **наблюдаемого значения критерия** с **теоретическим значением критерия**.

Решение принимаются относительно **основной гипотезы**. В случае ее принятия, альтернативная гипотеза отвергается, в случае отвержения основной гипотезы, принимается альтернативная.

Судьба альтернативной гипотезы - **пассивность**.



# Ошибки первого и второго родов

**Из двух противоположенных предположений истинно может быть <u>только одно</u>.**

Принять правильное предположение не есть ошибка.

Так как все решения принимаются относительно основной гипотезы, будем предполагать, что она может быть верна или не верна, Тогда:

| | Принять $H_0$ | Отвергнуть $H_0$ |
|---|---|---|
| $H_0$ верна | Не ошибка | Ош. I рода |
| $H_0$ не верна | Ош. II рода | Не ошибка |

**Ошибка первого рода: отвергнуть верную основную гипотезу** (альфа $\alpha$)

**Ошибка второго рода: Принять неверную основную гипотезу** ($\beta$, $1-\beta$ = мощность критерия)

# Уровень значимости (Альфа)

**Вероятность** совершить ошибку первого рода (отвергнуть основную гипотезу, в то время как она верна) - **уровень значимости.**

*Максимально приемлемая для исследователя вероятность ошибочно отклонить нулевую гипотезу, когда на самом деле она верна*

$\alpha = P_{H0}(H1)$ - *вероятность принять H1 в то время как верна H0*

Уровень значимости может различаться в различных исследованиях, что зависит от возможных последствий от принятия ошибочного решения.

Общепринятые уровни значимости:

$\alpha$ = 0,05= 5% «значимый» (Достаточен в биомедицинских исследованиях)

$\alpha$ = 0,01= 1% «высоко значимый»

# Понятие статистического критерия

Для проверки гипотез в различных видах анализа применяются различные статистические критерии.

**Статистический критерий** - правило, в соответствии с которым принимается или отвергается основная гипотеза.

Статистический критерий это:

- случайная величина
- при истинности основной гипотезы имеет распределение известное, затабулированное заранее (Стьюдент, Фишер, Пирсон, Гаусс-Лаплас и др.)

Наблюдаемое значение критерия - значение критерия, вычисленное по данным выборки.

Критическое значение критерия - значение критерия, полученное из таблицы, построенной из предположения, что основная гипотеза верна.

Статистические критерии

80% биомед. Данных !!!

| Параметрические | Непараметрические |
| --- | --- |
| Применимы только к нормальным выборкам, извлеченным из нормально распределенных ГС. Необходимо доказать с помощью критериев согласия. | Могут быть использованы к данным, не проверенным на нормальность, или к данным, распределенным не нормально. Менее чувствительные критерии |

# Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки

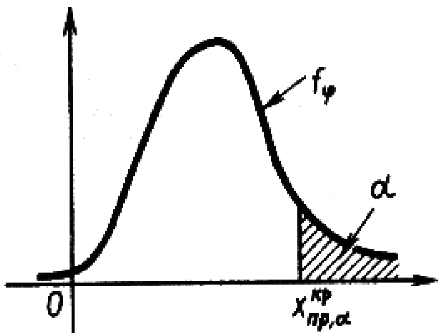
Как уже было сказано, статистический критерий это случайная величина. Распределение критерия известно заранее (Стьюдент, Пирсон и т.д.)

После выбора определенного критерия множество всех возможных значений критерия следует разбить на два неперекрывающихся подмножества:  первое содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается (критическая область), второе - при которых принимается (область принятия гипотезы).

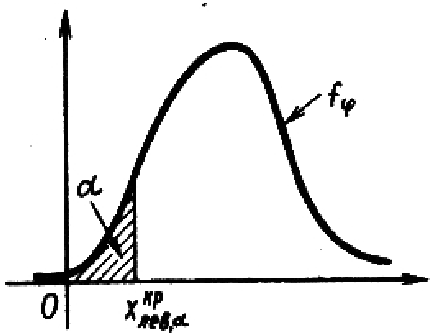
Критические точки - точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Возможны три вида расположения критической области (в зависимости от вида нулевой и альтернативной гипотез, вида и распределения критерия)

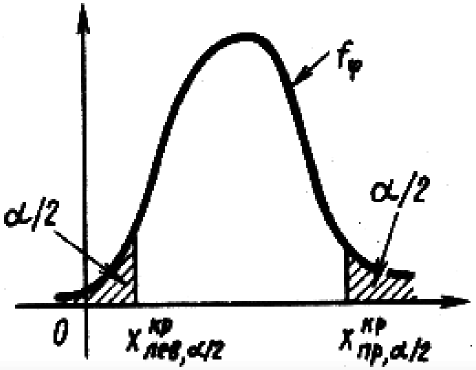
Правосторонняя критическая область (рассмотрим)




Левосторонняя критическая область




Двусторонняя критическая область



## Универсальная схема работы с критерием

Как уже указывалось, работа с критерием является третьим шагом алгоритма проверки гипотезы.

Два подхода

**Работа с критерием вручную**

Сравнение наблюдаемого и критического значений критерия

**Работа с критерием в программе**

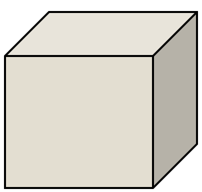
Сравнение p-level с уровнем значимости

# Работа с критерием вручную

**1**

Данные выборки

Критерий «черный ящик» (формула)



**Наблюдаемое значение критерия**

(t набл , χ2набл)

**2**

Степени свободы

Уровень значимости

Таблица значений критерия

**Критическое значение критерия**

(tкр., χ2кр.)

**3**

**Сравнение:**

Если: *набл > *крит, то
$H_0$ Отвергать,
$H_1$ Принимается

Если: *набл < *крит, то
$H_0$ нет оснований отвергать,
$H_1$ Отвергается

## Работа с критерием в программе стат. обработки

Ввод данных в программу

Выбор критерия

Значение p-level
($\alpha$ -эксперим.)

Вероятность истинности основной гипотезы, вычисленная на основании введенных данных

Уровень значимости ($\alpha$)

Вероятность отвергнуть основную гипотезу в то время, как она верна. Принят исследователем (0,05)

$<$

?

$>$

$H_0$ верна

Отвергнуть верную $H_0$

# Правила принятия решения об основной гипотезе

Если p-level > $\alpha$, то <u>нет оснований отвергать $H_0$</u>, ее следует принять, при этом $H_1$ будет отвергнута

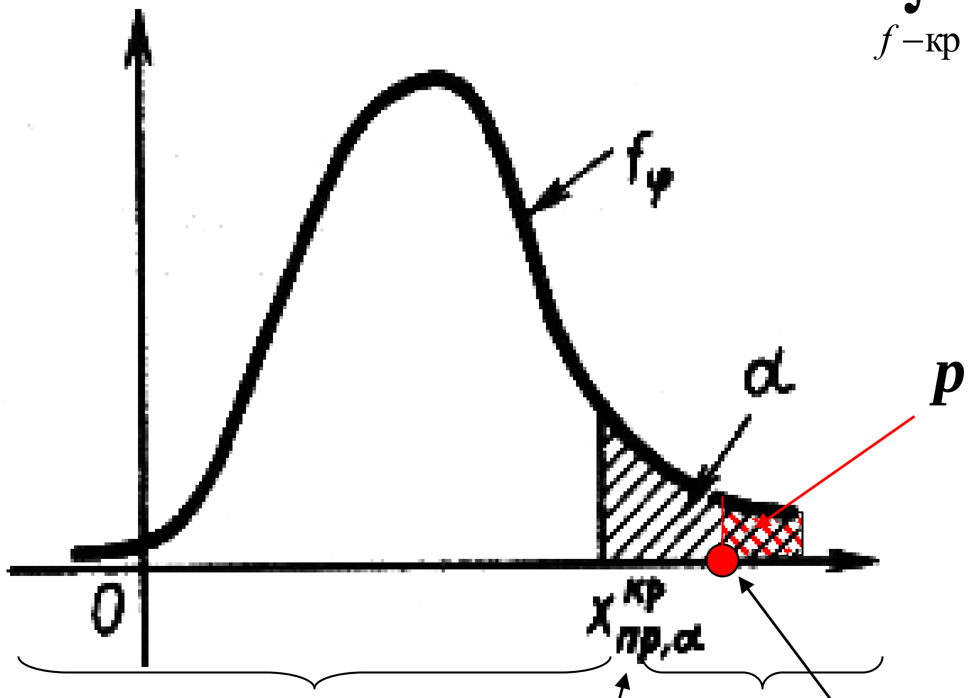
Если p-level < $\alpha$, то <u>$H_0$ следует отвергнуть</u>, при этом $H_1$ будет принята

Если наблюдаемое значение критерия < критического значения, то <u>нет оснований отвергать $H_0$</u>, ее следует принять, при этом $H_1$ будет отвергнута (Область принятия гипотезы)

Если наблюдаемое значение критерия > критического значения, то <u>$H_0$ следует отвергнуть</u>, при этом $H_1$ будет принята (критическая область)

# Связь значений критерия и уровня значимости и p-level

$$\alpha = \int_{f-\text{кр}}^{+\infty} f(x)dx \qquad p = \int_{f-\text{набл}}^{+\infty} f(x)dx$$




Область принятия основной гипотезы

Критическая область

Критическая точка

Наблюдаемое значение критерия

*F-набл > F-крит*

$p < \alpha$

*H0 отвергают*

*F-набл < F-крит*

$p > \alpha$

*H0 принимают*

## Проверка гипотезы о виде распределения

**Критерий согласия - предположение о виде распределения генеральной совокупности**

**Работаем по алгоритму:**

1. Формулировка гипотез

2. Определение уровня значимости

3. Работа с критерием (критерий Колмогорова-Смирнова и Критерий Пирсона)

4. Выводы

# 1. Формулировка гипотез

Задача критерия согласия - проверить, согласуются ли имеющиеся данные с тем или иным видом распределения (чаще, с нормальным).

**Основная гипотеза ($H_0$)** любого критерия согласия формулируется следующим образом: Различия между имеющимися данными и теоретическим распределением случайны (Исследуемые данные распределены также как и теоретические), тогда

**Альтернативная гипотеза ($H_1$)** формулируется так: Различия между имеющимися данными и теоретическим распределением не случайны (Исследуемые данные распределены не также как и теоретические).

## 2. Определение уровня значимости

Пусть уровень значимости равен 0,05 (5%)

# 3. Работа с критерием

1. **Критерий Пирсона.** (Правомерно, если число наблюдений (*n)* > 50). Из n значений оценивают математическое ожидание и стандартное отклонение, а затем разбивают ряд на m классов m=sqrt(n). Для каждого полученного класса определяют абсолютную частоту h попавших в него значений и сопоставляют его с теоретической частотой (ht). Из эмпирических и теоретических частот получают выражение:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(h_i - h_{ti})^2}{h_{ti}}$$

Далее, сравнивают наблюдаемое значение хи-квадрат, полученное по формуле, со значением критического хи-квадрат, взятого из таблицы.

## 3. Работа с критерием

2. Критерий Колмогорова-Смирнова. Аналогичным образом, по соответствующей технике вычисляют значение $d_{max}$ и сравнивают его с $d_{крит.}$

## 4. Вывод

Если $d_{max} > d_{крит}$ ($\chi^2{}_{набл} > \chi^2{}_{теор}$) Основная гипотеза отвергается, следовательно принимается альтернативная о том, что данные распределены не нормально (не согласно теоретическому распределению)

Если $d_{max} < d_{крит}$ ($\chi^2{}_{набл} < \chi^2{}_{теор}$) Основная гипотеза не отвергается, следовательно данные распределены нормально (согласно теоретическому распределению)

# Проверка гипотезы о равенстве среднего совокупности определенному числовому значению при неизвестной дисперсии

Рассмотрим задачу. Было объявлено, что ежемесячные затраты на бензин составляют 1200 руб. Автовладелец не согласен с такой цифрой. Он опросил 16 коллег и получил, что средние расходы составляют 1000 рублей со стандартным отклонением 400 руб.

Вычислить, чему равно p (альфа экспериментальная).

Решение. Действуем по алгоритму:

1) Формулировка гипотез:

H0: x-сред. = $\mu$ (Средние ГС и выборки одинаковые)

H1: x-сред. $\neq \mu$ (Средние ГС и выборки различаются)

2) Определение уровня значимости $\alpha$=0,05

3) работа с критерием

# 3) работа с критерием

Так как дисперсия генеральной совокупности не известна, применим критерий Стьюдента:

$$t\_набл = \sqrt{n}\frac{|\bar{x} - \mu|}{s}$$

**Шаг 1**. Определение наблюдаемого значения критерия.

$$t\_набл = \sqrt{n}\frac{|\bar{x} - \mu|}{s} = \sqrt{16}\frac{|1000 - 1200|}{400} = 2$$

**Шаг 2.** Определение критического значения критерия. t_крит находим по таблице распределения Стьюдента. Для этого требуется знать:

- уровень значимости (α) 0,05

- степени свободы. У распределения Стьюдента 1 степень свободы, равная кол-во наблюдений минус1 (k=n-1) k=16-1=15

# Нахождение критической точки

## Таблица 5. Значения функции $t_k(x)$

Степень свободы

| x | k | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| 0 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |
| 0,1 | 0,5317 | 0,5353 | 0,5367 | 0,5374 | 0,5379 | 0,5388 | 0,5392 | 0,5393 |
| 0,2 | 0,5628 | 0,5700 | 0,5729 | 0,5744 | 0,5753 | 0,5773 | 0,5779 | 0,5782 |
| 0,3 | 0,5928 | 0,6038 | 0,6081 | 0,6104 | 0,6119 | 0,6148 | 0,6159 | 0,6164 |
| 0,4 | 0,6211 | 0,6361 | 0,6420 | 0,6452 | 0,6472 | 0,6512 | 0,6526 | 0,6533 |
| 0,5 | 0,6476 | 0,6667 | 0,6743 | 0,6783 | 0,6809 | 0,6861 | 0,6878 | 0,6887 |
| 0,6 | 0,6720 | 0,6953 | 0,7046 | 0,7096 | 0,7127 | 0,7191 | 0,7213 | 0,7224 |
| 0,7 | 0,6944 | 0,7218 | 0,7328 | 0,7387 | 0,7424 | 0,7501 | 0,7527 | 0,7540 |
| 0,8 | 0,7148 | 0,7462 | 0,7589 | 0,7657 | 0,7700 | 0,7788 | 0,7819 | 0,7834 |
| 0,9 | 0,7333 | 0,7684 | 0,7828 | 0,7905 | 0,7953 | 0,8054 | 0,8088 | 0,8106 |
| 1 | 0,7500 | 0,7887 | 0,8045 | 0,8130 | 0,8184 | 0,8296 | 0,8334 | 0,8354 |
| 1,4 | 0,8026 | 0,8518 | 0,8720 | 0,8829 | 0,8898 | 0,9041 | 0,9091 | 0,9116 |
| 1,8 | 0,8386 | 0,8932 | 0,9152 | 0,9269 | 0,9341 | 0,9490 | 0,9540 | 0,9565 |
| 2 | 0,8524 | 0,9082 | 0,9303 | 0,9419 | 0,9490 | 0,9633 | 0,9680 | 0,9704 |
| 2,5 | 0,8789 | 0,9352 | 0,9561 | 0,9666 | 0,9728 | 0,9843 | 0,9877 | 0,9894 |
| 3 | 0,8976 | 0,9523 | 0,9712 | 0,9800 | 0,9850 | 0,9933 | 0,9955 | 0,9965 |
| 3,5 | 0,9114 | 0,9636 | 0,9803 | 0,9876 | 0,9914 | 0,9971 | 0,9984 | 0,9989 |
| 4 | 0,9220 | 0,9714 | 0,9860 | 0,9919 | 0,9948 | 0,9987 | 0,9994 | 0,9996 |

k=15

$\alpha$ =0.05

Значения интегралов

$$1-\alpha = \int_{-\infty}^{x} t_k(x)dx$$

$\boxed{\text{t-крит} = 1,8}$

## **Вывод**

Сравнивая наблюдаемое значение критерия **(2)** и критическое значение критерия **(1,8),** делаем вывод, что т.к. наблюдаемое значение превосходит критическое, то оно попадает в критическую область, следовательно основную гипотезу следует отклонить и принять альтернативную гипотезу о том, что средние различаются.

Однако, возвращаясь к задаче, требовалось определить значение p (p-level), т.е. Вероятность того, что верна H0.

Обратимся к той же таблице:

# Нахождение p-level по известному значению критерия

Имеем

t=2

k=15

$$1 - p = \int_{-\infty}^{2} t_{15}(x)dx = 0{,}968$$

**Ответ:**

p=1 - 0.968 = 0.032

**p < α**

**Таблица 5. Значения функции $t_k(x)$**

| x | k | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| 0 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 | 0,5000 |
| 0,1 | 0,5317 | 0,5353 | 0,5367 | 0,5374 | 0,5379 | 0,5388 | 0,5392 | 0,5393 |
| 0,2 | 0,5628 | 0,5700 | 0,5729 | 0,5744 | 0,5753 | 0,5773 | 0,5779 | 0,5782 |
| 0,3 | 0,5928 | 0,6038 | 0,6081 | 0,6104 | 0,6119 | 0,6148 | 0,6159 | 0,6164 |
| 0,4 | 0,6211 | 0,6361 | 0,6420 | 0,6452 | 0,6472 | 0,6512 | 0,6526 | 0,6533 |
| 0,5 | 0,6476 | 0,6667 | 0,6743 | 0,6783 | 0,6809 | 0,6861 | 0,6878 | 0,6887 |
| 0,6 | 0,6720 | 0,6953 | 0,7046 | 0,7096 | 0,7127 | 0,7191 | 0,7213 | 0,7224 |
| 0,7 | 0,6944 | 0,7218 | 0,7328 | 0,7387 | 0,7424 | 0,7501 | 0,7527 | 0,7540 |
| 0,8 | 0,7148 | 0,7462 | 0,7589 | 0,7657 | 0,7700 | 0,7788 | 0,7819 | 0,7834 |
| 0,9 | 0,7333 | 0,7684 | 0,7828 | 0,7905 | 0,7953 | 0,8054 | 0,8088 | 0,8106 |
| 1 | 0,7500 | 0,7887 | 0,8045 | 0,8130 | 0,8184 | 0,8296 | 0,8334 | 0,8354 |
| 1,4 | 0,8026 | 0,8518 | 0,8720 | 0,8829 | 0,8898 | 0,9041 | 0,9091 | 0,9116 |
| 1,8 | 0,8386 | 0,8932 | 0,9152 | 0,9269 | 0,9341 | 0,9490 | 0,9540 | 0,9565 |
| 2 | 0,8524 | 0,9082 | 0,9303 | 0,9419 | 0,9490 | 0,9633 | 0,9680 | 0,9704 |
| 2,5 | 0,8789 | 0,9352 | 0,9561 | 0,9666 | 0,9728 | 0,9843 | 0,9877 | 0,9894 |
| 3 | 0,8976 | 0,9523 | 0,9712 | 0,9800 | 0,9850 | 0,9933 | 0,9955 | 0,9965 |
| 3,5 | 0,9114 | 0,9636 | 0,9803 | 0,9876 | 0,9914 | 0,9971 | 0,9984 | 0,9989 |
| 4 | 0,9220 | 0,9714 | 0,9860 | 0,9919 | 0,9948 | 0,9987 | 0,9994 | 0,9996 |

# Список вопросов, затронутых в лекции

- Статистическая гипотеза
- Критерий согласия
- Виды гипотез
- Алгоритм работы с гипотезой
- Ошибки первого и второго родов
- Уровень значимости (Альфа)
- Понятие статистического критерия
- Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки
- Правила принятия решения об основной гипотезе
- Связь значений критерия и уровня значимости и p-level
- Проверка гипотезы о виде распределения
- Проверка гипотезы о равенстве среднего совокупности определенному числовому значению при неизвестной дисперсии

Лекция закончена!!!

До новых встреч...