WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA
WYKŁAD 11: ŁAŃCUCHY MARKOWA. MACIERZ PRZEJŚCIA.

Definicja 1. **Łańcuchem Markowa** *nazywamy ciąg zmiennych losowych* $X_0, X_1, X_2, \ldots$ *taki, że dla dowolnych wartości* $i_0, i_1, \ldots, i_n$ *zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \ldots, X_0 = i_0\right) = \mathbb{P}\left(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}\right).$$

Zwykle przyjmujemy, że wszystkie wartości zmiennych losowych X_i należą do **zbioru stanów łańcucha** $S = \{1, 2, \ldots, s\}$. Interesować nas będą wyłącznie **jednorodne** łańcuchy Markowa, tzn. takie, w których dla każdego $t = 1, 2, \ldots$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(X_t = j | X_{t-1} = i\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right).$$

Definicja 2. **Macierzą przejścia** *(jednorodnego) łańcucha Markowa nazywamy macierz* $\Pi = [p_{ij}]$*, gdzie*

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right)$$

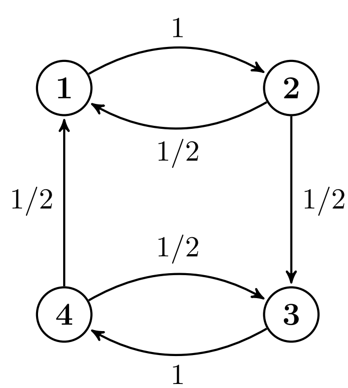
oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i *do stanu* j*.*

Uwaga 1. Suma wyrazów w każdym z wierszy macierzy Π (oraz Π^t) jest zawsze równa 1.

Przykład 1. Niech $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$, zadanym poniższą macierzą przejścia Π.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Możemy wówczas zareprezentować ten łańuch Markowa za pomocą grafu skierowanego G z wagami, gdzie wierzchołki odpowiadają stanom łańcucha $(X_i)_{i=0}^{\infty}$, czyli $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, natomiast każda krawędź skierowana (i, j) odpowiada sytuacji gdy ze stanu i możemy dojść do stanu j po jednym kroku z niezerowym prawdopodobieństwem $p_{ij} > 0$. Wówczas wagą takiej krawędzi jest właśnie wartość tego prawdopodobieństwa, czyli p_{ij}.



Definicja 3. *Dla łańcucha Markowa* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$*, rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X_0 *nazywać będziemy* **rozkładem początkowym** *tego łańcucha.*

Twierdzenie 1. *Niech* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejścia* Π*, a przez* $\bar{\rho}^i$ *oznaczmy rozkład zmiennej losowej* X_i*, dla* $i = 0, 1, \ldots$*. Wtedy dla każdego* $k, t = 0, 1, \ldots,$ *zachodzi*

$$\bar{\rho}^{t+1} = \bar{\rho}^t \Pi = \bar{\rho}^0 \Pi^{t+1},$$

a także

$$\bar{\rho}^{t+k} = \bar{\rho}^t \Pi^k.$$

dowód. *Przypomnijmy, że mamy do czynienia z łańcuchem jednorodnym, który ma s stanów. Pokażemy na początek, że dla dowolnego rozkładu początkowego $\bar{\rho}^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0, \ldots, \rho_s^0)$, rozkład $\bar{\rho}^1 = (\rho_1^1, \rho_2^1, \ldots, \rho_s^1)$ po jednym kroku, czyli rozkład zmiennej losowej X_1, dany jest przez $\bar{\rho}^0\Pi$. Rzeczywiście, dla $i = 1, 2, \ldots, s$ mamy:*

$$\rho_i^1 = \mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{P}(X_0 = j) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i | X_0 = j) = \sum_{j=1}^{s} \rho_j^0 p_{ji} = \left(\bar{\rho}^0\Pi\right)_i.$$

A zatem:

$$\bar{\rho}^1 = \bar{\rho}^0\Pi.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie (pamiętając, że $\bar{\rho}^{t+1}$ to rozkład po jednym kroku gdy startujemy od rozkładu $\bar{\rho}^t$) otrzymujemy:

$$\bar{\rho}^{t+1} = \bar{\rho}^t\Pi = (\bar{\rho}^{t-1}\Pi)\Pi = \ldots = \bar{\rho}^0\Pi^{t+1}.$$

Podobnie

$$\bar{\rho}^{t+k} = \bar{\rho}^{t+k-1}\Pi = (\bar{\rho}^{t+k-2}\Pi)\Pi = \ldots = \bar{\rho}^t\Pi^k.$$

Twierdzenie 2. *Niech $\Pi^{(t)} = [p_{ij}^{(t)}]$, gdzie $p_{ij}^{(t)}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w dokładnie t krokach. Wtedy $\Pi^{(t)} = \Pi^t$.*

dowód. *Oznaczmy wyrazy macierzy Π^t przez $\tilde{p}_{ij}$. Chcemy wyznaczyć $p_{ij}^{(t)}$, czyli prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w dokładnie t krokach. A zatem przyjmijmy jako rozkład początkowy rozkład $\bar{\rho}^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0, \ldots, \rho_s^0)$, gdzie $\rho_i^0 = 1$, a pozostałe pozycje są równe 0. Przyjęcie takiego rozkładu początkowego możemy zinterpretować jako start z i-tego stanu. Teraz prawdopodobieństwo, że startując ze stanu i po t krokach znajdziemy się w stanie j dane jest jako j-ta pozycja w rozkładzie $\bar{\rho}^t$ zmiennej losowej X_t. Na mocy Twierdzenia 1 otrzymujemy:*

$$p_{ij}^{(t)} = (\bar{\rho}^t)_j = (\bar{\rho}^0\Pi^t)_j = (\tilde{p}_{i1}, \tilde{p}_{i2}, \ldots, \tilde{p}_{is})_j = \tilde{p}_{ij},$$

skąd otrzymujemy $p_{ij}^{(t)} = \tilde{p}_{ij}$. Ponieważ dwie macierze są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy wyrazy na odpowiadającyhch pozycjach są sobie równe, z dowolności i oraz j wynika, że $\Pi^{(t)} = \Pi^t$.

Przykład 2. Dla łańcucha Markowa z Przykładu 1 aby wyznaczyć prawdopodobieństwa przejść pomiędzy stanami w dokładnie dwóch krokach musimy podnieść do kwadratu macierz przejścia Π. Otrzymamy wówczas macierz:

$$\Pi^{(2)} = \Pi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Możemy z tej macierzy odczytać na przykład, że nie da się w dwóch krokach przejść ze stanu pierwszego do stanu drugiego. Natomiast startując ze stanu pierwszego po dwóch krokach z równym prawdopodobieństwem znajdziemy się z powrotem w stanie pierwszym lub w stanie trzecim. Jeśli spojrzymy teraz na graf opisujący ten łańcuch Markowa, powinniśmy dojść do podobnych wniosków.

W jaki sposób opisać "start ze stanu pierwszego"? Jest to równoważne z przyjęciem jako rozkład początkowy rozkładu $\bar{\rho}^0 = (1, 0, 0, 0)$. Dla tak zadanego rozkładu początkowego rozkład prawdopodobieństwa po dwóch krokach wyraża się wzorem

$$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}^0\Pi^2 = (1, 0, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

czyli rzeczywiście startując ze stanu pierwszego po dwóch krokach znajdziemy się na pewno w stanie pierwszym lub trzecim, w dodatku z równym prawdopodobieństwem.

Oczywiście możemy rozważać inne rozkłady początkowe. Np. rozkład początkowy $\bar{\rho}^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ oznacza, że z równym prawdopodobieństwem startujemy z dowolnego ze stanów. Wówczas rozkład po dwóch krokach to

$$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}^0\Pi^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Definicja 4. *Wektor $\bar{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ nazywamy* **rozkładem stacjonarnym** *łańcucha Markowa o macierzy przejścia $\Pi = [p_{ij}]$, jeśli zachodzą wszystkie z poniższych warunków:*

(i) $\sum_i \pi_i = 1$,
(ii) $\pi_i \geqslant 0$ *dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, n$,
(iii) $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$.

Przykład 3. Spójrzmy jeszcze raz na łańcuch Markowa z Przykładu 1. W Przykładzie 2 pokazaliśmy, że przyjmując jako rozkład początkowy $\bar{\rho}^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, po dwóch krokach otrzymamy z powrotem ten sam rozkład, czyli $\bar{\rho}^0 = \bar{\rho}^0\Pi^2$. Jest to zatem dobry kandydat na rozkład stacjonarny. Sprawdźmy zatem, czy spełnia on warunki Definicji 4. Punkty (i) oraz (ii) są oczywiście spełnione, bo mówią one tyle, że rozważany wektor zadaje rozkład prawdopodobieństwa na stanach. Co do punktu (iii) mamy:

$$\bar{\rho}^0\Pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \bar{\rho}^0.$$

A zatem rzeczywiście $\bar{\rho} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa zadanego macierzą Π.

Twierdzenie 3. *Każdy (jednorodny) łańcuch Markowa (o skończonej liczbie stanów) ma przynajmniej jeden rozkład stacjonarny.*

Uwaga 2. W jaki sposób wyznaczać rozkłady stacjonarne? Można zawsze spróbować odgadnąć taki rozkład, tak jak zrobiliśmy to w Przykładzie 3, a potem tylko uzasadnić, że rzeczywiście jest to rozkład stacjonarny zadanego łańcucha Markowa. Gdzie natomiast szukać kandydatów? Najprostsza procedura to wykonanie kilku iteracji łańcucha Markowa. Czyli zaczynamy od dowolnego rozkładu początkowego $\bar{\rho}^0$ i patrzymy jak zachowują się rozkłady po kolejnych krokach, czyli $\bar{\rho}^1, \bar{\rho}^2, \ldots$ Jeśli jesteśmy w stanie odgadnąć granicę powyższego ciągu, to jest to dobry kandydat na rozkład stacjonarny. Jeśli to się nie powiedzie, możemy zawsze ułożyć i rozwiązać stosowny układ równań.

Przykład 4. Rozważmy łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Chcemy wyznaczyć rozkład stacjonarny powyższego łańcucha. Niech $\bar{\rho} = (x, y, 1 - x - y)$ będzie takim rozkładem. Wówczas otrzymujemy następujące równanie:

$$(x, y, 1 - x - y) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = (x, y, 1 - x - y),$$

z którego dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}(1 - x - y) = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(1 - x - y) = y \\ \frac{3}{4}y + \frac{1}{3}(1 - x - y) = 1 - x - y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest

$$\begin{cases} x = \frac{10}{27} \\ y = \frac{8}{27}, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy szukany rozkład stacjonarny

$$\bar{\rho} = \left(\frac{10}{27}, \frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right).$$

W pewnych specyficznych sytuacjach wyznaczanie rozkładów stacjonarnych okazuje się bardzo proste. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy łańcuch Markowa ma stan, z którego nie da się wyjść.

Definicja 5. *Dla łańcucha Markowa zadanego macierzą* $\Pi = [p_{ij}]$ *i o zbiorze stanów* S*, stan* $k \in S$ *nazywamy* **stanem pochłaniającym***, jeśli* $p_{kk} = 1$*. Oznacza to, że ze stanu* k *nie możemy przejść do żadnego innego stanu.*

Lemat 1. *Jeżeli* k *jest stanem pochłaniającym łańcucha Markowa zadanego macierzą* $\Pi = [p_{ij}]$*, to rozkład prawdopodobieństwa* $\mathbf{1}_k = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s)$*, gdzie* $\rho_k = 1$*, a pozostałe wyrazy są równe zero, jest rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha.*

dowód. *Jeżeli* k *jest stanem pochłaniającym, to* $p_{kk} = 1$*, natomiast* $p_{ki} = 0$ *dla* $i \neq k$*. W szczególności oznacza to, że wektor* $\mathbf{1}_k$ *oraz* k*-ty wiersz macierzy* Π *są sobie równe. Wówczas mnożąc wektor* $\mathbf{1}_k$ *przez macierz* Π *otrzymamy:*

$$\mathbf{1}_k \Pi = (p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{ks}) = \mathbf{1}_k,$$

czyli $\mathbf{1}_k$ *jest rzeczywiście rozkładem stacjonarnym rozważanego łańcucha.*

Lemat 2. *Jeśli* $\bar{\rho}$ *i* $\bar{\tau}$ *są rozkładami stacjonarnymi pewnego łańcucha Markowa zadanego macierzą* Π*, to dowolna* **kombinacja wypukła** *tych wektorów, czyli wektor postaci* $p \cdot \bar{\rho} + (1-p) \cdot \bar{\tau}$ *dla* $p \in (0,1)$*, jest też rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.*

dowód. *Jeśli* $\bar{\rho}$ *i* $\bar{\tau}$ *są rozkładami stacjonarnymi, to oznacza, że*

$$\bar{\rho}\Pi = \bar{\rho} \quad \textit{oraz} \quad \bar{\tau}\Pi = \bar{\tau}.$$

Niech $p \in (0,1)$*. Wówczas mamy:*

$$(p \cdot \bar{\rho} + (1-p) \cdot \bar{\tau})\Pi = p \cdot \bar{\rho}\Pi + (1-p) \cdot \bar{\tau}\Pi = p \cdot \bar{\rho} + (1-p) \cdot \bar{\tau}.$$

A zatem $p \cdot \bar{\rho} + (1-p) \cdot \bar{\tau}$ *jest też rozkładem stacjonarnym rozważanego łańcucha. Z dowolności* p *wynika, że każda kombinacja wypukła rozkładów* $\bar{\rho}$ *i* $\bar{\tau}$ *jest rozkładem stacjonarnym.*