Metody Inżynierii Wiedzy Modelowanie i wnioskowanie rozmyte - wykład 13

Adam Szmigielski
aszmigie@pjwstk.edu.pl
materiały: $ftp(public)://aszmigie/MIW$

Zasada sprzeczności

- Jan Łukasiewicz wyróżnił 3 aspekty zasady sprzeczności:
  1. logiczną: $\neg(a \wedge \neg a)$,
  2. ontologiczną "Niemożliwym jest aby coś było i nie było jednocześnie",
  3. psychologiczną - jako prawo psychologiczne.
- Zdanie o przyszłości nie są ani prawdziwe ani fałszywe.
- Zdania o przyszłości są jednocześnie fałszywe i prawdziwe - sprzeczność.

Trzecia wartość logiczna

- Jan Łukasiewicz chciał stworzyć systemu logik nie-arystotelesowskich (nie uznających zasady sprzeczności),
- Można tego dokonać poprzez odpowiedni dobór aksjomatów eliminujących zasadę sprzeczności,
- Jan Łukasiewicz wprowadził trzecią wartość logiczną $\frac{1}{2}$.

Logika Ł-3

Opis semantyczny ("tabelkowy") definiuje 4 operatory pierwotne $\wedge$, $\vee$ $\Rightarrow$ i $\neg$

- koniunkcja $a \wedge b$:

$a \backslash b$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

- negacja $\neg a$:

a	$\neg a$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

Logika Ł-3

- alternatywa: $a \vee b$

$a \backslash b$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

- implikacja: $a \Rightarrow b$

$a \backslash b$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Dowodzenie w Ł-3

Dla tabelek z 3 wartościami jeśli formuła jest tautologią to w ostatniej kolumnie ma same jedynki.

- Czy formuła $a \to \neg\neg a$ jest tautologią?
-

a	$\neg a$	$\neg\neg a$	$a \to \neg\neg a$
0	1	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	1	1

- Formuła $a \to \neg\neg a$ jest tautologią w Ł-3.

Dowodzenie w Ł-3 cd.

- Czy formuła $a \vee \neg a$ jest tautologią?
-

a	$\neg a$	$a \vee \neg a$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	1

- Formuła $a \vee \neg a$ nie jest tautologią w Ł-3.

Dowodzenie w Ł-3 cd.

- Czy formuła (logiczna zasada sprzeczności) $\neg(a \wedge \neg a)$ jest tautologią?
a	$\neg a$	$a \wedge \neg a$	$\neg(a \wedge \neg a)$
0	1	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1
- Formuła $\neg(a \wedge \neg a)$ nie jest tautologią w Ł-3.

Klasyczny Rachunek Zdań (KRZ) i Ł-3

- Można zauważyć że macierze funktorów $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ można stworzyć następująco:
  - $a \wedge b = min(a, b)$
  - $a \vee b = max(a, b)$
  - $a \rightarrow b = \{ \begin{array}{ccc} 1 & gdy & a \leq b \\ 1 - a + b & gdy & a > b \end{array}$
- Reguły te obowiązują również dla KRZ.
- Każde tautologia w Ł-3 jest również tautologią w KRZ.

Logiki wielowartościowe Łukasiewicza

- Łukasiewicz opisywał obszerną klasę logik wielowartościowych $L_2, L_3, \ldots L_i, \ldots$
- oraz jeden system logik nieskończenie (przeliczalnie) wielowartościowych $L_{\aleph_0}$.
- Ogólnie dla logik n-wartościowej $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ L_n zbiór wartości logicznych ma postać:

$$A_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots \frac{n-2}{n-1}, 1\}$$

- Zbiór wartości logiki $L_{\aleph_0}$ przyjmuje wartości ułamków z przedziału $< 0, 1 >$.

Logiki wielowartościowe Łukasiewicza

- Dla systemów “skończenie wartościowych” L_n , $n < \aleph_0$ można dowodzić twierdzeń “metodą tabelkową”.
- W przypadku twierdzeń w logice $L_{\aleph_0}$ dowody twierdzeń są znacznie trudniejsze.
- Można wyobrazić sobie system logiki L_∞.

Logika rozmyta

- Zbiór wartości logicznych zawiera się w przedziale $< 0, 1 >$
- Nie można konstruować tabel prawdy
- Powstaje problem określenia funktorów $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$

Logika rozmyta

- Według Zadeha istnieje konflikt: znaczenia - precyzja,
- Zbiór rozmyty jest nośnikiem znaczenia,
- Logika rozmyta służy do modelowania informacji subiektywnej
- Logika rozmyta jest narzędziem do tłumaczenia informacji subiektywną na ontologiczną.

Klasyczne pojęcie zbioru

Funkcja charakterystyczna

$$f_A : X \to \{0, 1\}$$

Np. Niech A będzie zbiorem liczb całkowitych większych od 5 i mniejszych od 10.
Wtedy:

$$f_A = \begin{cases} 1 \quad dla \quad x = \{6, 7, 8, 9\} \\ 0 \quad dla \quad \;\; pozostałych \end{cases}$$

Modelowanie rozmyte

A - zbiór tych x, że x jest młodą osobą

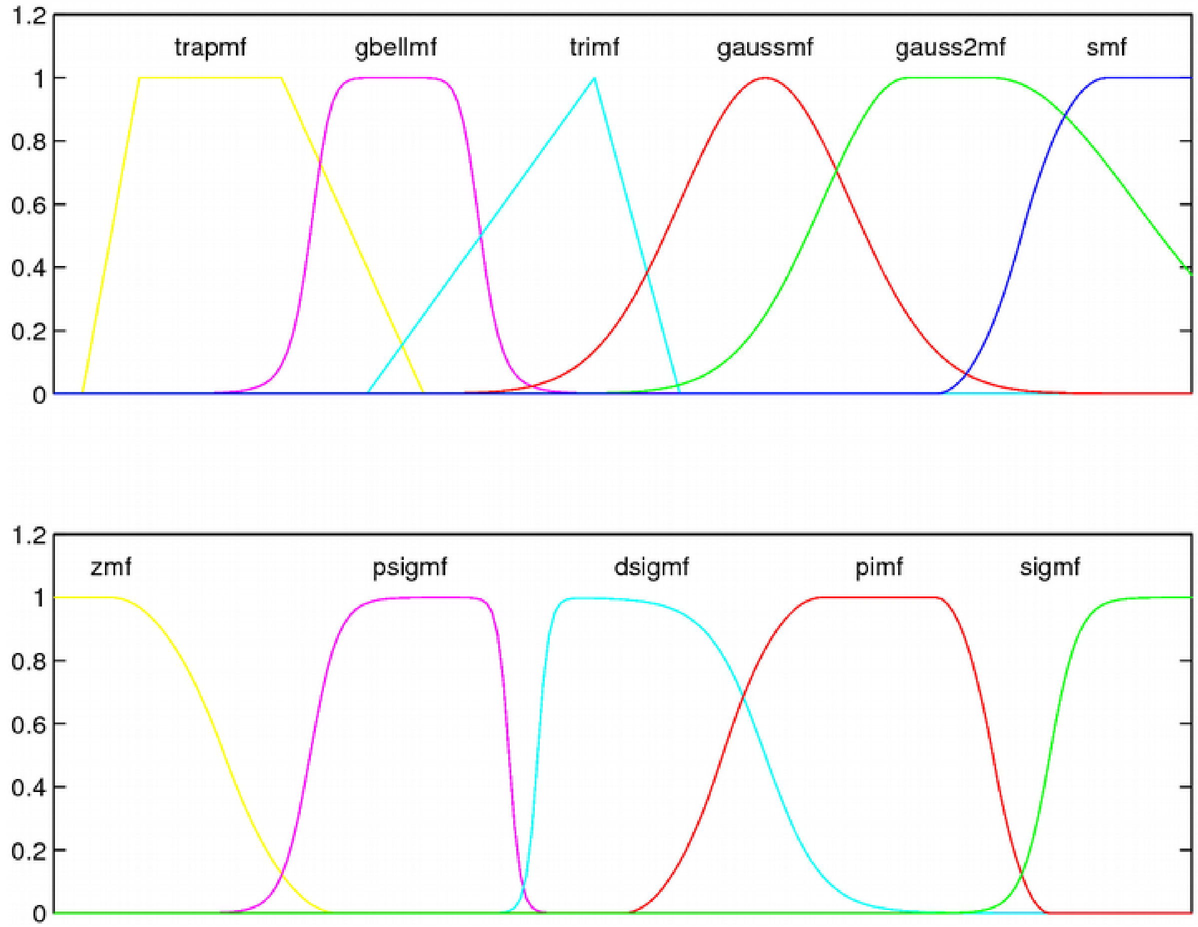
- zbiór klasyczny:

$$A = \{x : x \in <0, 20>\}$$

- zbiór rozmyty:

$$\mu_A(x) \rightarrow [0, 1]$$

Funkcja przynależności do zbioru rozmytego $\mu_A(x)$



Podobnie jak w przypadku klasycznych zbiorów na zbiorach rozmytych można określić różne relacje (np. suma, część wspólna, implikacja itd.). Na szczególną uwagę zasługuje relacja sumy i części wspólnej zbiorów określonych jako *minimum i maksimum*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{1}$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \tag{2}$$

Zmienna lingwistyczna

- Zadeh [1975]:
  ”Przez *zmienną lingwistyczną* rozumiem zmienną, której wartościami są słowa lub zdania w języku naturalnym i sztucznym. Dla przykładu *Wiek* jest zmienną lingwistyczną, jeśli jej wartości są wyrażone słowami, a nie liczbami, to znaczy *młody, niemłody, bardzo młody, całkiem młody, stary, nie bardzo stary i nie bardzo młody* itd. zamiast 20, 21, 22, 23, ...”

Reprezentacja zmiennej lingwistycznej

- Na ogół przyjmuje się szablon związany z pojęciem zmiennej lingwistycznej

$$< X, LX >$$

gdzie X - oznacza nazwę zmiennej lingwistycznej (np. wiek), a LX oznacza wartości tej zmiennej lingwistycznej (np. młody)

Zbiory rozmyte

- Zbiór rozmyty A w przestrzeni X:

$$A = \{\mu_A(x), x\}$$

gdzie funkcja przynależności $\mu_A(x) : X \rightarrow < 0, 1 >$

- Np. Zbiór liczb naturalnych *mniej więcej* równych 5:

$$A = \{(0.1, 3), (0.6, 4), (1.0, 5), (0.6, 6), (0.1, 7)\}$$

albo inny zapis:

$$A = \{\frac{0,1}{3}, \frac{0,6}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0,6}{6}, \frac{0,1}{7}\}$$

Zbiory rozmyte

- Zbiory A i B są równe ($A = B$) gdy dla każdego $x \in X$
  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$,
- Zbiory A i B są równe w stopniu e ($A =_e B$)
  $e = 1 - \max |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$
- A jest podzbiorem B gdy dla każdego $x \in X$ $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$
- A jest podzbiorem B w stopniu I gdy:
  $I = \min \mu_B(x)$, $x \in T$ gdzie
  $T = \{x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)\}$

Operacje na zbiorach rozmytych

- Dopełnienie A:

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- Przecięcie A z B:

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- Suma A i B:

$$\mu_{A\cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

T-norma i S-norma

- Uogólnienie części wspólnej *T-norma*
- Uogólnienie sumy zbiorów *S-norma*

Własności T-normy

T - norma powinna spełniać następujące własności

- *Przemienność*: $T(a, b) = T(b, a)$
- *Monotoniczność*: $T(a, b) \leq T(c, d)$ jeśli $a \leq c$ i $b \leq d$
- *Łączność*: $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- Posiadać element neutralny: $T(a, 1) = a$

Własności S-normy

S - norma powinna spełniać następujące własności

- *Przemienność*: $S(a, b) = S(b, a)$
- *Monotoniczność*: $S(a, b) \leq S(c, d)$ jeśli $a \leq c$ i $b \leq d$
- *Łączność*: $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$
- Posiadać element neutralny: $S(a, 0) = a$

Przykłady T-normy i S-normy

	T-norma	S-norma
Zadeha	$\min\{a, b\}$	$max\{a, b\}$
probabilistyczna	$a \cdot b$	$a + b - a \cdot b$
Łukasiewicza	$\max\{0, a + b - 1\}$	$\min\{a + b, 1\}$

Implikacje

- Implikacja $a \Rightarrow b$ można zapisać jako $\neg(a \wedge \neg b)$
- Implikacja $a \Rightarrow b$ można zapisać jako $\neg a \vee b$
- Pełna interpretacja implikacji $a \Rightarrow b$ wymaga określenia stopnia prawdziwości implikacji.
- Implikacja $a \Rightarrow b$ jest prawdziwa gdy $\mu(a) \leq \mu(b)$ tj.:

$$(a \Rightarrow b) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \mu(a) \leq \mu(b) \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Implikacje przykład

Niech a = "x jest większy niż 10" i niech b = "x jest większa niż 9".

- Można zauważyć, że $a \Rightarrow b$ jest prawdziwe, ponieważ nigdy nie może się zdarzyć, że a jest większa od 10 i a nie jest większa niż 9.
- Ta właściwość implikacji może być interpretowana jako: Jeśli $X \subset Y$ to $X \Rightarrow Y$
- Inną interpretacją operatora implikacji jest

$$X \Rightarrow Y = sup\{Z|X \cap Z \subset Y\}$$

Popularne implikacje

Larsen: $a \Rightarrow b = a \cdot b$

Łukasiewicz: $a \Rightarrow b = min\{1, 1 - a + b\}$

Mamdani: $a \Rightarrow b = min\{a, b\}$

Standard Strict: $a \Rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a \leq b \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$

Godel: $a \Rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a \leq b \\ b & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$

Gaines: $(a \Rightarrow b) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a \leq b \\ \frac{a}{b} & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$

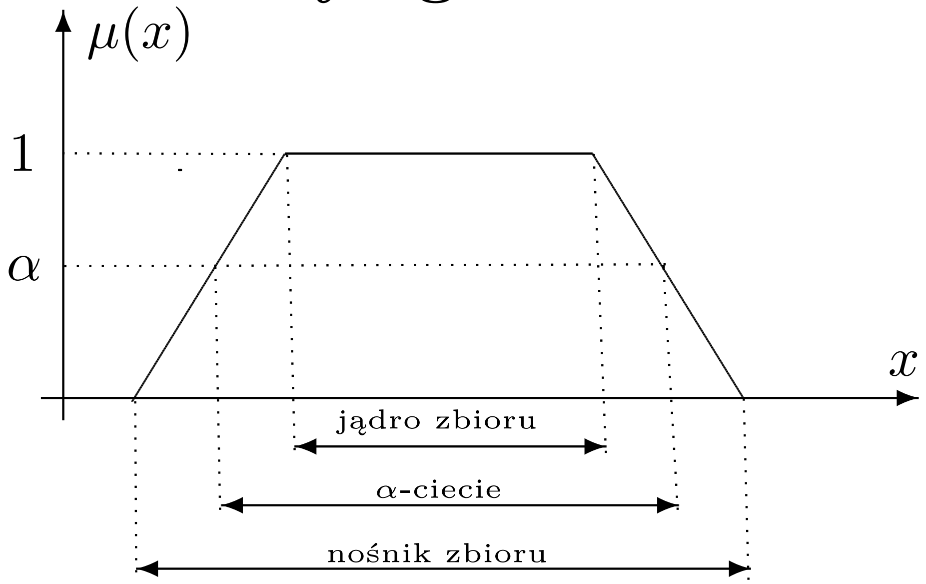
Kleene-Dienes: $a \Rightarrow b = max\{1 - a, b\}$

Kleene-Dienes-Łuk.: $a \Rightarrow b = 1 - a + ab$

Uwagi co do implikacji

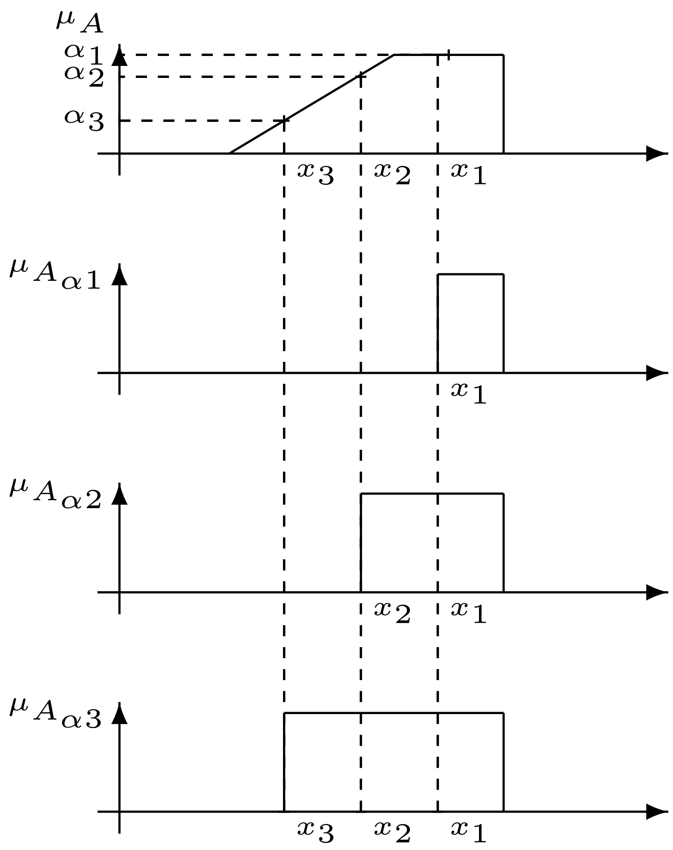
- Podobnie jak z T-normą i S-normą nie ma jakiejś uniwersalnej metody wyboru implikacji,
- W praktycznych zastosowaniach najbardziej popularna jest implikacja Mandamiego. Przy czym dla zerowych $a = 0$ i $b = 0$ mamy $(a \Rightarrow b) = min\{a = 0, b = 0\} = 0$ co nie jest prawdą.

α cięcie zbioru rozmytego



- Nośnik (baza) zbioru (ang. *support*): $supp(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$,
- Jądro zbioru (ang. *core*): $core(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$,
- α-cięcie: (ang. $\alpha - cat$) $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$,
- Wysokość zbioru: $h = max_x(\mu_A(x))$ (może przyjmować wartości: $max_x \leq 1$),
- Zbiór rozmyty jest normalny jeśli: $\exists_x \mu_A(x) = 1$.

Aproksymacja zbioru rozmytego.



Zbiór rozmyty można aproksymować ciągiem *zbiorów wstępujących*:

$A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_3}$

Modelowanie rozmyte

A - zbiór tych x, że x jest młodą osobą

- zbiór klasyczny:

$$A = \{x : x \in < 0, 20 >\}$$

- zbiór rozmyty:

$$\mu_A(x) \rightarrow [0, 1]$$

Wnioskowanie rozmyte

Zadaniem wnioskowania rozmytego jest modelowanie ludzkiego wnioskowania.
Niech A (zbiór rozmyty duże) oznacza wartość zmiennej lingwistycznej ciśnienie, D (zbiór rozmyty mała) oznacza wartość zmiennej lingwistycznej objętość. Rozmyta reguła wnioskowania ma postać:

JEŚLI x jest A **TO** z jest D

tj. Jeśli jest wysokie ciśnienie to jest mała objętość.

Reguły bardziej złożone

- Proste reguły typu:
  JEŚLI x jest A **TO** z jest D
- Można rozbudować do bardzie złożonych reguł (rozbudowany poprzednik implikacji) np.

  JEŚLI x jest A i y jest B **TO** z jest D

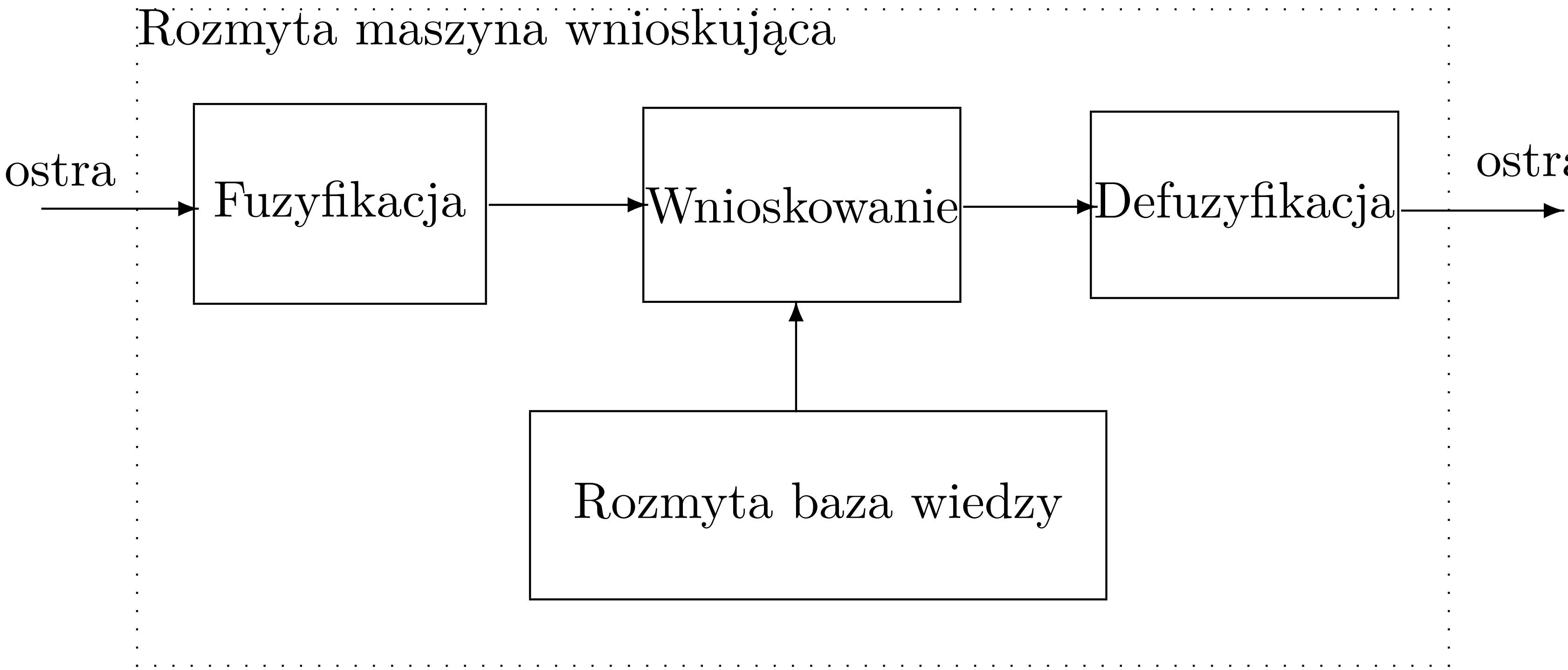
  gdzie B - może oznaczać wartość temperatury gazu (tj. zbiór rozmyty niska). Wówczas możemy napisać regułę złożoną:

  JEŚLI jest wysokie ciśnienie i niska temperatura **TO** objętość gazu jest mała.

Rozmyta baza wiedzy

- *Baza reguł* - zbiór reguł stworzonych pod kątem sterowania jakimś obiektem (np. klimatyzacją, aparatem fotograficznym),
- Bazę reguł tworzy ekspert (człowiek potrafiącym sterować),
- Ekspert określa reguły oraz odpowaidające im zbiory rozmyte (reguły eksperta mają charakter subiektywny).

Rozmyta maszyna wnioskująca



Fuzyfikacja (rozmycie) i poziom zapłonu reguły

- Poziom zapłonu reguły określa stopień przynależności ostrej wartości do rozmytego poprzednika implikacji.
- Fuzyfikacja w oparciu o poziom zapłonu reguły przekształca ostrą wartość w zbiór rozmyty.

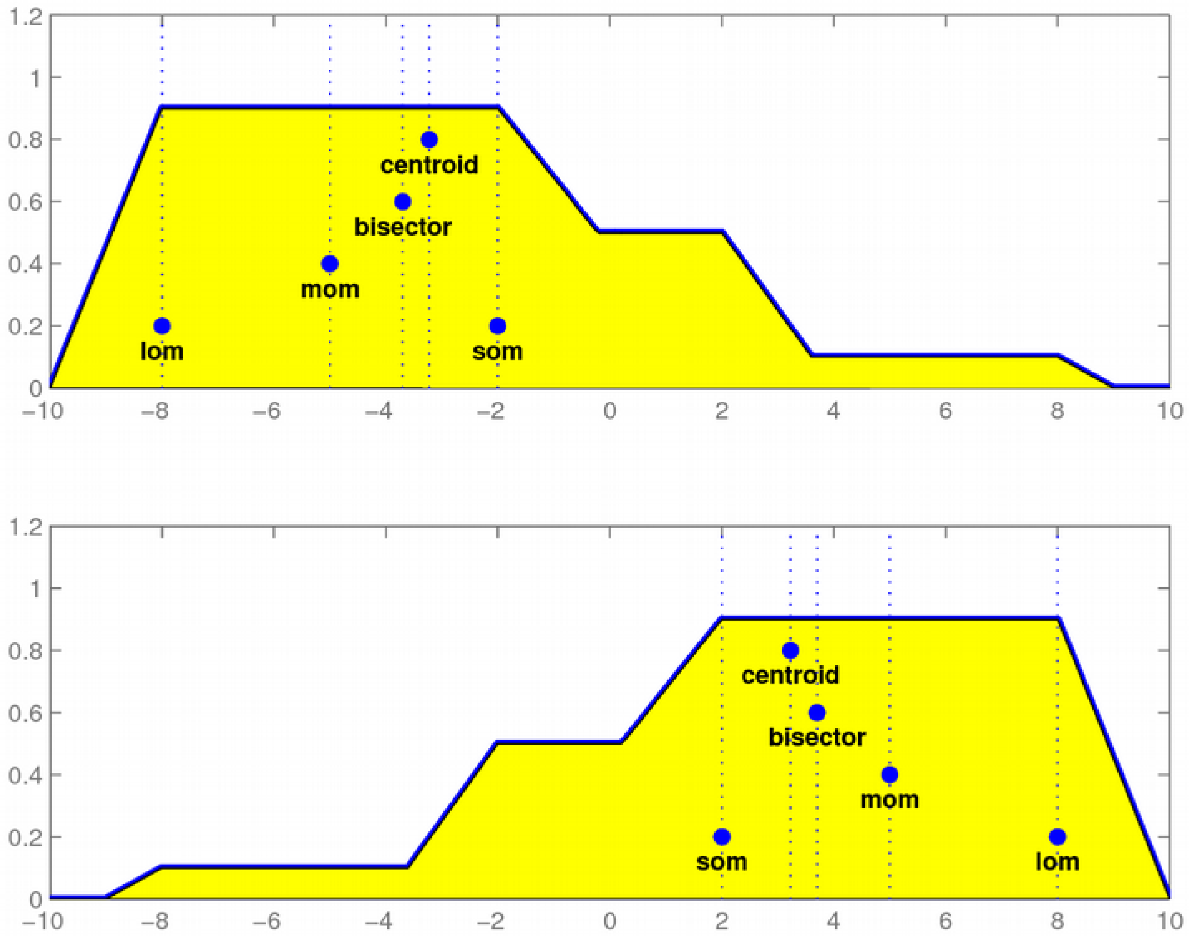
Wnioskowanie rozmyte

Implikacja rozmyta może być również zdefiniowana na wiele sposobów. Najbardziej popularna jest implikacja Mandamiego oparta na operacji iloczynu $x \to y \equiv x \wedge y$. Następnik implikacji rozmytej jest zbiorem rozmytym $\mu_N(y)$ o postaci

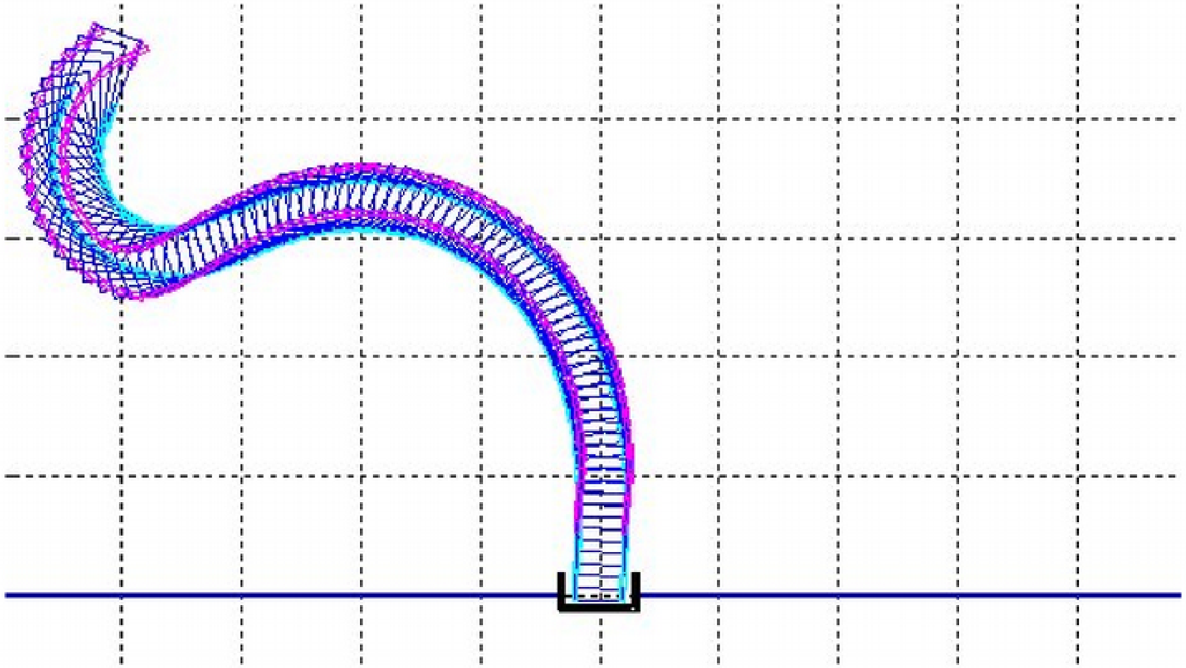
$$\mu_N(y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\},$$

gdzie $\mu_A(x)$ określa tzw. stopień zapłonu danej reguły.

Defuzyfikacja (wyostrzanie)



Parkowanie ciężarówki



Sterowanie rozmyte

- Sterowanie rozmyte może być alternatywą sterowania w trudnych dla formalnego opisu zagadnieniach np. spalanie w piecach, dobór ostrości itp.
- W wielu przypadkach, gdy znana jest ekspertowi technika sterowania daje ono dość prosty formalizm implementacji tej wiedzy.

Dyskretny zbiór rozmyty

Zbiór rozmyty może być zbiorem ciągłym lub dyskretnym. W przypadku, gdy chcemy wykorzystać komputer do obliczeń numerycznych, ciągły zbiór rozmyty należy poddać dyskretyzacji. Postać rozmytego zbioru dyskretnego A ma postać:

$$\mu(x)_A = \{\frac{0}{10}, \frac{0}{12}, \frac{0}{14}, \frac{0.2}{16}, \frac{0.5}{18}, \frac{1}{20}, \frac{1}{22}, \frac{0.5}{24}, \frac{0.2}{26}, \frac{0}{28}, \frac{0}{30}\}.$$

Licznik ułamka określa stopień przynależności mianownika do zbioru A.

Suma i część wspólna

Dane są dwa zbiory rozmyte:

$$\mu_A(x) = \{\frac{0}{10}, \frac{0}{12}, \frac{0}{14}, \frac{0.2}{16}, \frac{0.5}{18}, \frac{1}{20}, \frac{1}{22}, \frac{0.5}{24}, \frac{0.2}{26}, \frac{0}{28}, \frac{0}{30}\}$$

i

$$\mu_B(x) = \{\frac{0}{10}, \frac{0}{12}, \frac{0}{14}, \frac{0}{16}, \frac{0.2}{18}, \frac{0.5}{20}, \frac{0.7}{22}, \frac{1}{24}, \frac{1}{26}, \frac{1}{28}, \frac{1}{30}\}.$$

Suma zbiorów:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \{\frac{0}{10}, \frac{0}{12}, \frac{0}{14}, \frac{0.2}{16}, \frac{0.5}{18}, \frac{1}{20}, \frac{1}{22}, \frac{1}{24}, \frac{1}{26}, \frac{1}{28}, \frac{1}{30}\}$$

Część wspólna:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \{\frac{0}{10}, \frac{0}{12}, \frac{0}{14}, \frac{0}{16}, \frac{0.2}{18}, \frac{0.5}{20}, \frac{0.7}{22}, \frac{0.5}{24}, \frac{0.2}{26}, \frac{0}{28}, \frac{0}{30}\}.$$

Zadanie

Zbiory N i M opisują średnią i dużą moc wentylatora

$$\mu_N(y) = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0.2}{6}, \frac{0.5}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{0.5}{14}, \frac{0.2}{16}, \frac{0}{18}, \frac{0}{20}\}$$

$$\mu_M(y) = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{6}, \frac{0.2}{8}, \frac{0.5}{10}, \frac{0.7}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18} \frac{1}{20}\}$$

a zbiory A i B opisują średnią i wysoką temperaturę (patrz poprzedni slajd). Stosując następujące reguły

1. JEŚLI średnia temperatura TO średnia moc wentylatora (JEŚLI x jest A TO y jest N).
2. JEŚLI wysoka temperatura TO duża moc wentylatora (JEŚLI x jest B TO y jest M).

określ jako powinna moc wentylatora dla temperatury 20^oC.

Rozwiązanie zadania

Dla obu reguł obliczamy stopnie zapłonu (stopnie przynależności temperatury $20^{o}C$ do zbiorów A i B). Wynoszą one odpowiednio $\tau_1 = \mu_A(20) = 1$ i $\tau_2 = \mu_B(20) = 0.5$.

Następnie obliczamy następniki reguł $\widehat{N}$ i $\widehat{M}$ (**??**):

$$\mu_{\widehat{N}}(y) = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0.2}{6}, \frac{0.5}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{0.5}{14}, \frac{0.2}{16}, \frac{0}{18}, \frac{0}{20}\}$$

$$\mu_{\widehat{M}}(y) = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0}{6}, \frac{0.2}{8}, \frac{0.5}{10}, \frac{0.5}{12}, \frac{0.5}{14}, \frac{0.5}{16}, \frac{0.5}{18} \frac{0.5}{20}\}$$

oraz sumę zbiorów $\widehat{N}$ i $\widehat{M}$ (2)

$$\mu_{\widehat{N}\cup\widehat{M}}(y) = \{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{4}, \frac{0.2}{6}, \frac{0.5}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{0.5}{14}, \frac{0.5}{16}, \frac{0.5}{18}, \frac{0.5}{20}\}.$$

Po defuzyfikacji zbioru $\widehat{N} \cup \widehat{M}$ (metodą środka ciężkości) otrzymujemy:

$$Moc = \frac{0.2 \cdot 6 + 0.5 \cdot 8 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 0.5 \cdot 14 + 0.5 \cdot 16 + 0.5 \cdot 18 + 0.5 \cdot 20}{0.2 + 0.5 + 1 + 1 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5} = 13$$

Zadania na ćwiczenia

Do realizacji zadań można posłużyć się biblioteką SciKit-Fuzzy

1. Określ zbiór reguł (min 4 reguły) dla zadania wskazanego przez prowadzącego [a]. Określ zakres dziedziny i wartości wynikowych oraz zbiory rozmyte,
2. Zrealizuj rozmytą maszynę wnioskującą dla danego zagadnienia,
3. Zaprezentuj otrzymane wyniki dla całej dziedziny wejściowej.

[a] zużycie paliwa w zależności od prędkości, droga hamowania w zależności od prędkości, wegetacja od nasłonecznienia etc.