

## 1. Системи числення

### 1.1 Що таке система числення і які бувають системи числення

Системою числення називають сукупність прийомів запису чисел. Розрізняють позиційні і непозиційні системи числення.

#### Непозиційні системи числення

Прикладом непозиційної системи числення є так звані римські цифри. У цій системі смисл кожного символу не залежить від місця, на якому він стоїть. Так запис LXXX позначає число 80. Символ X має значення 10 незалежно від його місця у запису.

#### Позиційні системи числення

У позиційній системі числення значення цифри в зображенні числа залежить від її положення (позиції) у послідовності цифр, що зображують число. Наприклад, запис

$$5237$$

у позиційній системі числення означає, що це число містить 7 одиниць, 3 десятки, 2 сотні і 5 тисяч, тобто 5237 - це скорочене позначення виразу

$$5 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

Число 10, що присутнє у кожному доданкові, називають **основою** системи числення, а саму систему **десятьковою** системою числення. Зверніть увагу, що для запису числа в десятковій системі ми використовуємо рівно десять цифр, які називають **алфавітом** системи числення

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.$$

Цифра (символ), що позначає основу, тобто у даному разі число «десять», відсутня. За принципом позиційної системи це число позначається одиницею в наступній позиції. Для того, щоб підкреслити, що число задане саме у десятковій системі пишуть  $(5237)_{10}$ .

Ми користуємось десятковою системою з цілком зрозумілих причин - на руках у людини десять пальців. Ми звикли до неї, і ніколи свідомо не підкреслюємо значення основи. Але немає ніяких перешкод побудувати систему числення, якщо за основу взяти будь-яке інше натуральне число. Візьмемо, наприклад, за основу позиційної системи число 7, тоді запис  $(123)_7$  буде означати вираз

$$1 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 3 \times 7^0.$$

Якщо виконати арифметичні дії, то отримаємо число  $49 + 14 + 3 = 66$ . Тобто

$$(123)_7 = (66)_{10}.$$

Нагадаємо, що у сімковій системі для запису чисел використовуються тільки 7 цифр: 0,1,2,3,4,5,6 і наступні числа у цій системі будуть позначатися таким чином: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 30 ... і т.д.

Зверніть увагу, що в будь-якій системі число рівне основі має вигляд 10, тому множення (ділення) на основу зводиться до перенесення коми, яка розділяє цілу і дробову частину на одну позицію праворуч (ліворуч):

$$(12)_7 \times (7)_{10} = (12)_7 \times (10)_{10} = (120)_7.$$

З числами у сімковій системі числення всі арифметичні операції виконуються за тими ж правилами, що і в десятковій системі.

Основа системи може бути більшою за 10. У світі широко вживаною до певного часу була дванадцяткова система числення (12 фаланг пальців на руці!). Залишки її зберігаються ще подекуди у грошових одиницях, у мірах довжини (1 фут дорівнює 12 дюймам). У стародавньому Вавилоні вживалася досить складна система з основою 60. Від неї ми зараз маємо поділення години на 60 хвилин, хвилини на 60 секунд, центрального кута кола на 360 градусів.

### 1.2 Системи числення і комп'ютери

#### 2.1 Шістнадцяткова система числення

В комп'ютерних технологіях широко використовується шістнадцяткова система числення. Певна річ, що треба мати 16 символів для позначення цифр. Перші десять цифр можна запозичити з десяткової системи числення, а що до решти, то їх домовилися позначати великими латинськими літерами:

$$10 - A, 11 - B, 12 - C, 13 - D, 14 - E, 15 - F.$$

Таким чином запис  $(2CF)_{16}$  буде означати вираз

$$2 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (944)_{10}.$$

*Двійкова і вісімкова системи числення*

Окрім шістнадцяткової системи в комп'ютерних технологіях використовуються двійкова, а також вісімкова системи числення, які як і шістнадцяткова система мають основою степені двійки.

Алфавіт двійкової системи складається з двох цифр: 0, 1. Ці цифри мають спеціальну назву **біт** від англійського «binary digit». Запис вигляду  $(101101)_2$  означає вираз

$$1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (45)_{10}.$$

Нижче у таблиці 1 подані перші шістнадцять цілих чисел, записаних у різних системах числення.

Таблиця 1

Десяткова система	Двійкова система	Вісімкова система	Шістнадцяткова система
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Зверніть увагу, що для запису чисел таблиці у двійковій системі знадобилося не більше ніж чотири біта.

Дріб у двійковій системі записується за тими ж правилами, що і десятковий дріб, але при підрахунку значення треба використовувати від'ємні степені двійки. Запис  $(0,1101)_2$  означає

$$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 1 \times 0,5 + 1 \times 0,25 + 0 \times 0,125 + 1 \times 0,0625 = (0,8125)_{10}.$$

**1.3 Перехід від десяткової до інших систем числення**

Досі ми переходили від заданої системи числення до десяткової, а зараз розглянемо як знайти запис поданого десяткового числа у будь-якій довільній системі числення.

Якщо число ціле, то його потрібно послідовно ділити на основу системи доти, доки частка не стане меншою ніж основа. Залишки, що будуть отримані у процесі ділення записані у зворотному порядку, починаючи з останньої частки, і будуть шуканим записом. Наведемо приклади.

Знайти запис цілого числа  $(12135)_{10}$  у шістнадцятковій системі.

$$\begin{array}{r}
 12135 \quad | \quad 16 \\
 11128 \quad | \quad 758 \quad | \quad 16 \\
 7 \quad | \quad 752 \quad | \quad 47 \quad | \quad 16 \\
 \quad \quad | \quad 6 \quad | \quad 32 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad \quad | \quad 15
 \end{array}$$

Тобто  $(12135)_{10} = (2F67)_{16}$ .

Знайти запис числа  $(100)_{10}$  у двійковій системі числення.

$$\begin{array}{r}
 100 \quad | \quad 2 \\
 100 \quad | \quad 50 \quad | \quad 2 \\
 0 \quad | \quad 50 \quad | \quad 25 \quad | \quad 2 \\
 \quad \quad | \quad 0 \quad | \quad 24 \quad | \quad 12 \quad | \quad 2
 \end{array}$$

0,375		0,5	
0		<b>0</b>	
0,375 × 2	=	0,75	0,5
		0,5	<b>I</b>
		0,25 × 2	= 0,5   0,5
			<b>I</b>

$$\begin{array}{r}
 0,8 \quad | \quad 0,5 \\
 0,5 \quad | \quad \mathbf{1} \\
 0,3 \times 2 = 0,6 \quad | \quad 0,5 \\
 \quad 0,5 \quad | \quad \mathbf{1} \\
 \quad 0,1 \times 2 = 0,2 \quad | \quad 0,5 \\
 \quad \quad 0 \quad | \quad \mathbf{0} \\
 \quad \quad 0,2 \times 2 = 0,4 \quad | \quad 0,5 \\
 \quad \quad \quad 0 \quad | \quad \mathbf{0} \\
 \quad \quad \quad 0,4 \times 2 = 0,8 \dots
 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & (1000111010101)_2 \\ & & & & 1 & 000 & 111 & 010 & 101 \\ 1 & 0 & 7 & 2 & 5 & & & & \\ & & & & & & & & (10725)_8 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & (1000111010101)_2 \\ & & & & 1 & 0001 & 1101 & 0101 \\ 1 & & 1 & & D & 5 & & \end{array}$$

Цілком очевидно, що діючи у зворотному порядку, можна переходити від вісімкової і шістнадцяткової системи до двійкової.

Такий суто механічний перехід тут є можливим тільки завдяки тому, що основи цих систем мають спільне кратне 2.

Якщо порівняти записи одного і того ж числа в різних системах, то видно, що шістнадцяткова система є більш економною щодо кількості використовуваних символів і це є її перевагою перед двійковою системою.

### 1.5 Змішаний двійково-десятковий запис чисел

В літературі з комп'ютерних технологій можна ще зустріти поняття двійково-десятькової системи представлення чисел, коли кожен розряд десятикового числа кодується відповідним двійковим числом, наприклад, для числа 5973:

				5	9	7	3
0101	1001	0111	0011				
				0101	1001	0111	1001

### 1.6 Чому в комп'ютерах застосовується двійкова система числення

Обчислювальна машина являє собою технічний пристрій, представлення чисел у якому пов'язане з конкретною фізичною реалізацією його елементів. Найпростішою, а значить найдешевшою і найнадійнішою є конструкція комп'ютера, в якому для представлення чисел використовується двійкова система числення.

Дійсно, алфавіт двійкової системи має тільки дві цифри, а це значить, що біт можна моделювати за допомогою фізичного пристрою, який може знаходитися у двох стійких станах. Прикладами можуть слугувати звичайний електричний вимикач - він має два стани «увімкнуто» і «вимкнено», електронний прилад тріод - він пропускає електричний струм, або ні в залежності від того, чи є напруга на сітці, чи ні, феритове кільце - воно може мати магнітне поле двох протилежних орієнтацій, електричний конденсатор - його обкладки теж можуть бути заряджені двома протилежними способами, електромагнітні реле - його контакти можуть бути замкнені, або розімкнені в залежності від того, чи проходить струм через його обмотку, чи ні і таке інше.

На переваги двійкової системи для виконання обчислень звернув увагу ще Д.Непер (1550-1617), відомий як автор таблиць логарифмів. Рекомендація з використання двійкової системи для побудови обчислювальних машин в літературі вперше зустрічається у французького інженера Р.Вальта (1931). До такої ж думки дійшли одночасно і незалежно німець К.Цузе (1934), американець болгарського походження Д.Атанасов (1937).

Щодо елементної бази, то перша цифрова обчислювальна машина була побудована на електромеханічних реле (К.Цузе 1941р, Німеччина). Машина, в якій вперше було застосовано принцип електричного зберігання інформації, була побудована на електронних лампах і конденсаторах (Д.Атанасов 1942, США). В конструкції сучасних комп'ютери використовують напівпровідники.

Теоретично доведено, що найбільш економічними і найбільш швидкодіючими були б комп'ютери, якби вони використовували систему числення з основою 2,718281828....(основа натуральних логарифмів). Але технічно вони були б дуже складними. Реалізація близької до неї трійкової системи теж не спрощує конструкцію. Отже найближчою до оптимальної залишається двійкова система, яка й застосовується в сучасних комп'ютерах.

### Контрольні запитання і завдання

1. Що таке система числення ?
2. Які бувають системи числення?
3. Чим непозиційна система числення відрізняється від позиційної?
4. Запишіть числа  $(324)_5$ ,  $(201)_3$ ,  $(11451)_8$ ,  $(10101011)_2$ ,  $(AD1F)_{16}$ , у десятиковій системі числення.
5. Переведіть число 325 у двійкову, вісімкову і шістнадцяткову системи числення.
6. Переведіть числа 0,5625, 0,3 у двійкову систему числення.

7. Запишіть таблицю множення для систем числення, які мають основою числа 2, 3, 5, 8.
8. Виконати дії над числами, заданими у вісімковій системі числення:  $(123)_8 + (3643)_8$ ;  $(5312)_8 - (2567)_8$ ;  $(2340)_8 \times (2)_8$ ;  $(165)_8 \times (3)_8$ .
9. Виконати дії над числами, заданими у двійковій системі числення:  
 $(10001)_2 + (100011)_2$ ,  $(1011)_2 \times (11)_2$ ,  $(10101001)_2 - (11011)_2$ .
10. Які з чисел записані неправильно?  
 $(1231)_3$ ,  $(11459)_8$ ,  $(1)_2$ ,  $(10101)_{16}$
11. Число  $(1011101100001)_2$  помножити на 8.
12. Запишіть число  $(1011101100001)_2$  у вісімковій і шістнадцятковій системі.
13. Запишіть числа  $(5B0C7E1F)_{16}$ ,  $(17563247)_8$  у двійковій системі.
14. Чому в комп'ютерах застосовується двійкова система числення?

### Словник

- |                              |                           |
|------------------------------|---------------------------|
| 1. Система числення          | Number system             |
| 2. Основа системи            | Base of the number system |
| 3. Алфавіт                   | Alphabet                  |
| 4. Позиційна система         | Positional number system  |
| 5. Двійкова система          | Binary number system      |
| 6. Вісімкова система         | Octal number system       |
| 7. Десяткова система         | Decimal number system     |
| 8. Шістнадцяткова система    | Hexadecimal number system |
| 9. Двійково-десятковий запис | Binary-coded decimal      |
| 10. Біт                      | Bit (BIrary digiT)        |