Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ЗВІТ

до лабораторної роботи №1
з дисципліни “Чисельні методи”
на тему:
“Розв’язок нелінійного рівняння”
варіант №1

Виконав
Студент 3 курсу
Групи ТТП-31
Факультету комп’ютерних наук та кібернетики
Олександр БАЖИН

Київ, 2024

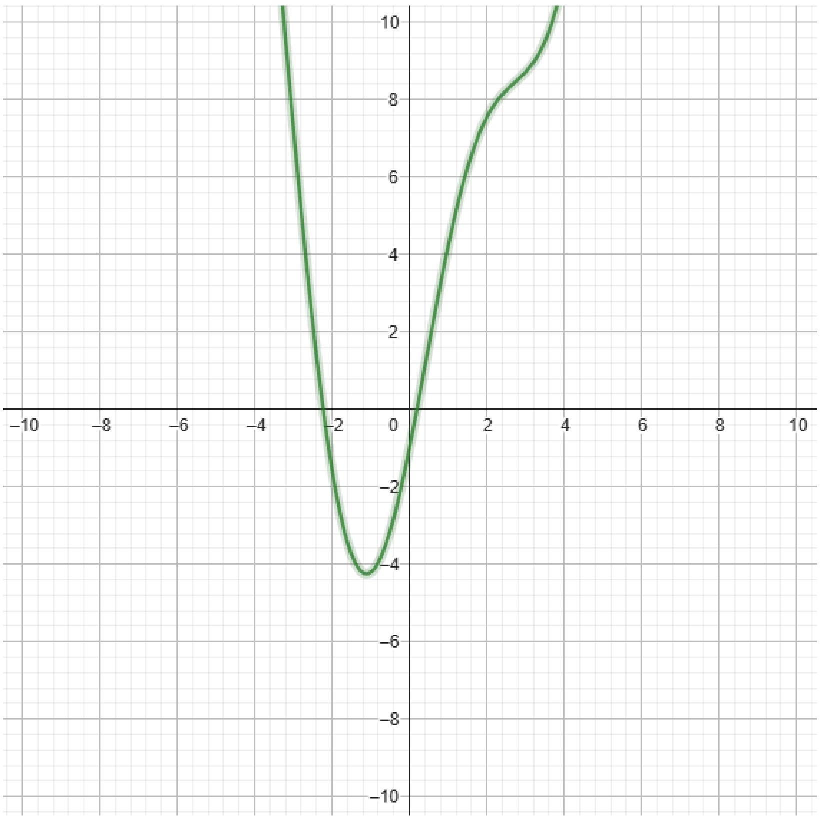
Зміст

Постановка задачі

Знайти найменший по модулю від'ємний корінь нелінійного рівняння

$$x^2 + 5 * sin(x) - 1 = 0 \quad (1)$$

методом простої ітерації і релаксації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків.



Графік рівняння (1)

Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо це можливо), порівняти результати роботи методів між собою.

Розробити програму, яка б виконувала необхідні та допоміжні обчислення.

Теоретичні відомості та розрахунки

Теорія

Метод простої ітерації ґрунтується на зведенні нелінійного рівняння до вигляду

$$x = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = x + \Psi(x)f(x)$, $\Psi(x)$ — знакостала неперервна функція. Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес має вигляд:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Апріорна оцінка знаходиться за формулою

$$n \geqslant \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right]$$

Достатня умова збіжності.

Нехай для $\forall x_0 : x_0 \in S$, де $S = \{x : |x - x_0| \leq \delta\}$, $\varphi(x)$ задовольняє умовам:

1) $max_{x \in S} |\varphi'(x)| \leq q < 1$;
2) $|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1 - q)\delta$;

тоді ітераційний процес (2) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності лінійна:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} |\varphi(x_0) - x_0|.$$

Якщо в методі простої ітерації $\Psi(x) \equiv \tau \equiv const$, то отримаємо метод релаксації.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n),$$

де “+”, якщо $f'(x) < 0$; “-”, якщо $f'(x) > 0$.

Достатня умова збіжності.

Якщо в ітераційному процесі $x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n)$ параметр $\tau \in (0; 2/M_1)$, де $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, $M_1 = max_{x \in [a;b]} |f'(x)|$, $m_1 = min_{x \in [a;b]} |f'(x)|$, то ітераційний процес $x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n)$ збігається, при цьому швидкість збіжності лінійна.

Оптимальний параметр.

Якщо обрати $\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1}$, то кількість ітерацій буде мінімальною, швидкість збіжності залишається лінійною: $|x_n - x^*| \le q_0^{\,n} |x_0 - x^*|$, де $q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$.

Для оптимального параметру τ_0 апріорна оцінка кількості кроків:

$$n_0 \ge \left[\frac{ln(\frac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon})}{ln(\frac{1}{q_0})} \right] + 1.$$

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Розрахунки

Згідно з графіком рівняння (1), обираю проміжок між -3 та 3.

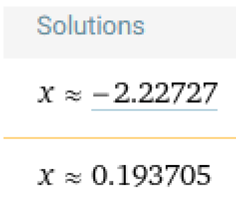
$f(-3) = (-3)^2 + 5 * sin(-3) - 1 \approx -10,7056$

$f(3) = (3)^2 + 5 * sin(3) - 1 \approx 8.7056$

$f(-3) * f(3) < 0 \Rightarrow x^* \in [-3; 3]$

Рівняння (1) має хоча б один дійсний корінь.

Згідно обчислень в Wolfram Alpha є два корені даного рівняння:



Відповідь Wolfram Alpha на рівняння (1)

Приведемо рівняння до вигляду $x = g(x)$.

$$g(x) = \sqrt{1 - 5 * sin(x)}.$$

В свою чергу похідна від $g(x)$: $g'(x) = -\frac{5cos(x)}{2\sqrt{1-5sin(x)}}$.

Ітераційний процес має вигляд $x_{n+1} = g(x_n)$.

Початкове наближення нехай буде -2,5.

Абсолютна похибка, згідно умові, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Тоді відносна похибка буде дорівнювати:

$\delta(x^*) = 2,2$ відносно найбільшого значення на інтервалі та 0,2 для найменшого.

Критерій зупинки:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Обчислюю апріорну оцінку.

$n \geq 17$, де n це кількість кроків.

Перевірка достатніх умов збіжності програмуємо. Маємо:

1) $max_{x\in[-3;3]}|g'(x)| > 1 \Rightarrow$ не виконуються.

Тепер $g(x) = -\frac{x^2-1}{5sin(x)}$.

Перевірка достатніх умов збіжності:

1) $max_{x\in[-3;3]}|g'(x)| > 1 \Rightarrow$ не виконуються.

Тепер $g(x) = arcsin(\frac{1-x^2}{5})$.

Перевірка достатніх умов збіжності:

1) $max_{x\in[-3;3]}|g'(x)| > 1 \Rightarrow$ не виконуються.

Схоже, метод простих ітерацій не підходить для даного рівняння.

Апостеріорна оцінка методу простої ітерацій невизначена, оскільки не можна обчислити корінь даним методом.

Виконуємо обчислення методом релаксації.

Ітераційна формула:

$$x_{n+1} = x_n - \tau(f(x_n)),$$

де $f(x_n) = x_n^2 + 5 * sin(x_n) - 1$.

Спробуємо кілька початкових значень, наприклад: -3,0, 3,0.

Значення τ нехай буде 0,1.

Обчислюю апріорну оцінку при наближеному значенні -3.

$$f(x) = x^2 + 5\sin(x) - 1,$$

$$f'(x) = 2x + 5\cos(x).$$

Обчислене значення $f'(-3) \approx -10,95$.

Таким чином, апріорна оцінка похибки для кожної ітерації методу релаксації буде 1.

Ітераційний процес програмуємо.

Ітераційний процес має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - 0,1 * (x_n^2 + 5 * sin(x_n) - 1)$$

Згідно обчислень, я знайшов корінь ≈0,1937, але я шукаю від'ємний корінь і згідно з графіком, він один.

Якщо змінити ітераційну формулу на

$$x_{n+1} = x_n + \tau(f(x_n))$$

та відповідно ітераційний процес на

$$x_{n+1} = x_n + 0,1 * (x_n^2 + 5 * sin(x_n) - 1).$$

Тоді ми отримуємо корінь ≈-2,2272.

Згідно з графіком рівняння (1), рівняння має лише один від'ємний корінь.

Обчислення я робив з різними значеннями, тому в коді можна змінити значення, якщо вони достатні, відповідь не зміниться.

Апостеріорна оцінка методу релаксації: 7 кроків.

Висновки

Отже, для даного рівняння метод простої ітерації не підходить тому, що будь який ітераційний процес збіжний. Апріорна та апостеріорна оцінка невизначені.

В свою чергу метод релаксації дав коректний результат. Як мінімум, він точно співпадає з значенням, що дав мені Wolfram Alpha.

Апріорна оцінка методу дорівнювала 1, а апостеріорна 7.

Відповідь на задачу буде: **найменший по модулю від'ємний корінь рівняння** $x^2 + 5 * sin(x) - 1 = 0$**, буде значення** ≈-2,2272.

Програмний код опубліковано за посиланням №1 в додатку до Звіту.

Репозиторій складається з програмного коду програми для виведення графіку функції та з програми, що обчислює корінь методом простої ітерації та методом релаксації.

Додатки

1. Посилання на репозиторій з програмним кодом для обрахунку в даній лабораторній роботі https://github.com/OleksandrBazhyn/Solving-a-nonlinear-equation-by-simple-iteration-and-relaxation.git

Джерела

1. Wolfram Alpha
   https://www.wolframalpha.com/
2. Чисельні методи (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, ОП "Системний аналіз"): навчальний посібник / Голубєва К.М., Кашпур О.Ф., Клюшин Д.А. — Київ: 2022. - 145 с.
   https://drive.google.com/file/d/1LJgICielCiIpSBoO3L9Vt-AxHxGwmWiA/view