Розділ 2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

§ 2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано рівняння з однією змінною

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку $<a;b>$.

Розв'язати рівняння означає знайти множину його коренів, тобто таких значень $x \in <a;b>$, при яких рівняння (2.1) перетвориться в тотожність. Корінь рівняння (2.1) називають ще *нулем функції* $f(x)$. Якщо функція $f(x)$ — алгебраїчний многочлен, то рівняння (2.1) називається *алгебраїчним*. Якщо функція $f(x)$ містить тригонометричні, показникові або логарифмічні функції, тоді рівняння (2.1) називають *трансцендентним*.

Знайти точні значення коренів заданого рівняння можна лише для найпростіших функцій $f(x)$: алгебраїчних многочленів не вище четвертого степеня, деяких многочленів степеня $n \geq 5$ і деяких трансцендентних функцій.

Універсальних методів для знаходження точних значень коренів алгебраїчних рівнянь степеня $n \geq 5$ і трансцендентних рівнянь не існує. Крім того, розв'язуючи практичні задачі, часто дістають рівняння з коефіцієнтами, які є наближеними числами. Тоді постановка задачі знаходження точних коренів не має смислу. Тому важливого значення набувають *наближені методи* знаходження коренів рівняння з достатньою для практики точністю. Задача знаходження коренів рівняння (2.1) вважається розв'язаною, якщо корені обчислені із наперед заданою точністю.

Нехай x^* — точний корінь, а $\bar{x}$ — його наближене значення. Кажуть, що корінь $\bar{x}$ обчислено з наперед заданою точністю ε, якщо $|x^* - \bar{x}| \leq \varepsilon$. Нехай, наприклад, $x^* \in [a;b]$ і $b - a \leq \varepsilon$, тоді числа a і b — наближені значення кореня x^* відповідно з недостачею і надлишком з точністю ε. У цьому випадку за наближене значення $\bar{x}$ з точністю ε можна взяти будь-яке число з відрізка $[a;b]$.

Знаходження наближених коренів рівняння (2.1) складається з двох етапів:

1) відокремлення коренів, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь рівняння;

2) обчислення коренів з наперед заданою точністю.

Перший етап називають ще задачею визначення відрізків ізоляції коренів, а другий — уточненням наближених коренів. Перший етап складніший за другий, оскільки для загального випадку немає досить ефективних методів відокремлення коренів. Для знаходження коренів з наперед заданою точністю застосовують методи, які дають можливість уточнювати знайдені наближення коренів.

Зазначимо, що корені рівняння (2.1) можуть бути дійсними і комплексними. Далі розглянуто наближені методи обчислення тільки дійсних коренів рівняння (2.1).

§ 2.2. ВІДОКРЕМЛЕННЯ КОРЕНІВ. ТЕОРЕМА ПРО ОЦІНКУ ПОХИБКИ НАБЛИЖЕНОГО ЗНАЧЕННЯ КОРЕНЯ

Корінь x^* рівняння (2.1) вважається відокремленим на відрізку $[a;b]$, якщо $x^* \in [a;b]$ і на цьому відрізку дане рівняння не має інших коренів. Щоб відокремити корені рівняння (2.1), треба розбити область визначення даного рівняння на проміжки, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь або немає жодного кореня. Відокремлюють корені графічним і аналітичним методами, а також методом послідовного перебору.

Для відокремлення коренів графічним методом будують графік функції $y = f(x)$ і знаходять точки перетину графіка з віссю абсцис та кінці відрізків ізоляції коренів. Часто рівняння (2.1) записують у вигляді $\varphi(x) = g(x)$ і будують графіки функцій $y_1 = \varphi(x)$ і $y_2 = g(x)$, потім знаходять межі, в яких містяться абсциси точок перетину графіків функцій y_1 і y_2.

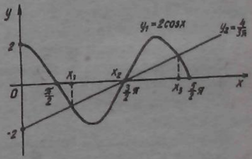

Рис. 2.1

П р и к л а д 1. Відокремити корені рівняння $f(x) = 2\cos x - \frac{4}{3\pi}x + 2 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Будуємо графіки функцій $y_1 = 2\cos x$ і $y_2 = \frac{4}{3\pi}x - 2$ (рис. 2.1).

З графіка видно, що дане рівняння має три корені, причому $x_1 = \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$, $x_3 \in \left[2\pi;\frac{5}{2}\pi\right]$. Оскільки $|2\cos x| < 2$ для будь-яких x, а $y_2(x) > 2$ для $x > 3\pi$ і $y_2(x) < -2$ для $x < 0$, то інших коренів дане рівняння не має.

Аналітичний метод відокремлення коренів грунтується на теоремах з курсу математичного аналізу. Сформулюємо їх.

Теорема 1 (теорема існування кореня). Якщо функція неперервна на $[a;b]$ і набуває на кінцях цього відрізка значень протилежних знаків, тобто $f(a)\,f(b) < 0$, то всередині відрізка $[a;b]$ існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Зазначимо, що теорема не дає відповіді на питання про кількість коренів рівняння (2.1), які належать $[a;b]$. При виконанні умов теореми рівняння може мати й кілька коренів. На рис. 2.2 зображено графік функції $y = f(x)$, яка задовольняє усі вимоги теореми 1 і має на $[a;b]$ чотири нулі. У досить малому околі точки x_3 теорему існування кореня застосувати не можна, бо при переході зліва направо через точку x_3 знак функції $f(x)$ не змінюється. Точка x_3 — кратний корінь рівняння (2.1) і його не можна відокремити, користуючись теоремою 1. Тому далі вважатимемо, що $f'(x) \neq 0$ для всіх $x \in [a;b]$.

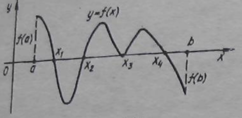

Рис. 2.2

Теорема 2 (теорема існування і єдиності кореня). Якщо функція $f(x)$, неперервна і диференційовна на $[a;b]$, набуває на кінцях цього відрізка значень різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає сталий знак всередині відрізка $[a;b]$, то рівняння $f(x) = 0$ на цьому відрізку має корінь, причому єдиний.

У відповідності з теоремами 1 і 2 алгоритм відокремлення коренів рівняння (2.1) можна сформулювати так:

1. Знайти область визначення рівняння.
2. Знайти критичні точки функції $f(x)$.
3. Записати інтервали монотонності функції $f(x)$.
4. Визначити знак функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності.
5. Визначити відрізки, на кінцях яких функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків.
6. Знайдені відрізки ізоляції коренів при необхідності звузити.

П р и к л а д 2. Відокремити корені рівняння

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я.

1. Область визначення $X = (-\infty; +\infty)$;

2. $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$. Звідси маємо критичні точки $x_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

3. Запишемо інтервали монотонності

$$\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty\right);$$

4. Визначимо знаки функції $f(x)$ на кінцях інтервалів монотонності

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty; \; f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{6}-45}{9} < 0,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{-4\sqrt{6}-45}{9} < 0, \; \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty;$$

5. Відрізком ізоляції кореня є проміжок $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty\right]$.

6. Методом проб звузимо знайдений проміжок ізоляції кореня до одиничної довжини. Оскільки значення $\frac{\sqrt{6}}{3}$ близьке до одиниці, то обчислимо $f(1) = -6 < 0$; $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 16 > 0$. Отже, корінь даного рівняння належить відрізку $[2;3]$.

Нехай на $[a;b]$ функція $f(x)$ рівняння (2.1) задовольняє умови теореми 1, тоді, застосовуючи ЕОМ, можна відокремити всі корені рівняння (2.1) (крім кратних) методом послідовного перебору коренів. Для цього беруть початкове значення $x = a$, фіксований крок $\Delta x = h$ і обчислюють значення функції $f(x)$ у точках $x_i = a + ih$ $(i = 0,1,2,...)$. На кінцях кожного з відрізків $[a + ih,\ a + (i+1)h]$ $(i = 0,1,2,...)$ визначають знак функції $f(x)$. Якщо знаки однакові, тобто $f(a+ih)\,f(a + (i+1)h) > 0$, то на відрізку $[a+ih;\ a+(i+1)h]$ рівняння (2.1) не має кореня; якщо знаки функції протилежні, то на даному відрізку є корінь рівняння, значення якого $\overline{x} = a + ih + \frac{1}{2}h$ є наближеним значенням кореня з точністю $\varepsilon = \frac{1}{2}h$, оскільки $|x^* - \overline{x}| \leq \frac{1}{2}h$. Після цього переходять до наступного відрізка. Такий процес продовжують доти, поки правий кінець розглядуваного відрізка не досягне точки b. Цей алгоритм реалізований у програмі 2.1.

Програма 2.1

```
10 ' ------- М е т о д   п о с л і д о в н о г о --------------------
20 '          п е р е б о р у   к о р е н і в
30 ' ---------------------------------------------------------------
40 PRINT "Ввести [a;b], на якому визначена f(x)"
50 INPUT "A="; A : INPUT "B="; B
60 INPUT "Ввести крок h"; H
70 DEF FNF(X)=                    : ' Після знака рівності
80 X=A: U=FNF(X)                  : ' записують вираз функції f(x).
90 X=X+H                          : ' U,V — значення функції
100 IF X>B THEN 160               : ' на лівому і правому кінцях
110 V=FNF(X)                      : ' розглядуваного відрізка.
```

```
120 IF SGN(U)=SGN(V) THEN 140
130 PRINT "На ["X-H";"X" ] є корінь"
140 U=V: X=X+H
150 GOTO 100
160 END
```

Зазначимо, що метод послідовного перебору коренів пов'язаний з порівняно великим обсягом обчислень і не гарантує втрат коренів рівняння, особливо тоді, коли корені дуже близькі один до одного, а крок h недостатньо малий. У таких випадках треба провести новий підрахунок з дрібнішим кроком.

Нехай відомо наближене значення $\overline{x}$ кореня рівняння $f(x) = 0$, де функція $f(x)$ — визначена і неперервна на $[a;b]$. Оцінимо похибку наближеного кореня цього рівняння.

Теорема 3. Нехай $x^* \in [a;b]$ — точне значення кореня рівняння $f(x) = 0$, а $\overline{x} \in [a;b]$ — його наближене значення. Якщо існує таке число $m_1 > 0$, що $|f'(x)| \geqslant m_1$ для будь-яких $x \in [a;b]$, то справедлива оцінка

$$|\overline{x} - x^*| \leqslant \frac{|f(\overline{x})|}{m_1}. \qquad (2.2)$$

Д о в е д е н н я. Застосувавши теорему Лагранжа, маємо

$$f(\overline{x}) - f(x^*) = f'(c)(\overline{x} - x^*),$$

де c лежить між точками $\overline{x}$ і x^*.

Оскільки $f(x^*) = 0$ і $|f'(c)| \geqslant m_1$, то

$$|f(\overline{x}) - f(x^*)| = |f'(c)(\overline{x} - x^*)| \geqslant m_1 |\overline{x} - x^*|.$$

Звідси

$$|\overline{x} - x^*| \leqslant \frac{|f(\overline{x})|}{m_1}.$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що за число m_1 у формулі (2.2) можна взяти найменше значення функції $|f'(x)|$ на відрізку $[a;b]$, якщо $f'(x)$ неперервна на $[a;b]$.

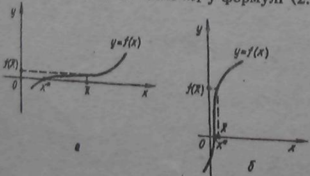

Рис. 2.3

Формула (2.2) може давати занадто грубу оцінку точності. На практиці іноді точність знайденого кореня $\overline{x}$ оцінюють близькістю до нуля значення $f(\overline{x})$. При цьому вважають, що коли число

$|f(\bar{x})|$ мале, то $\bar{x}$ — добре наближення $\overset{*}{x}$, якщо $|f(\bar{x})|$ велике, то $\bar{x}$ — грубе наближення кореня. Такий підхід не завжди правильний. Це видно з рис. 2.3.

П р и к л а д 3. Оцінити абсолютну похибку наближеного кореня $\bar{x} = 2{,}09$ рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Обчислимо

$$f(\bar{x}) = f(2{,}09) = -0{,}050671.$$

Оскільки $f(2{,}2) = 1{,}248$, то $x^* \in [2{,}09;\ 2{,}2]$. Похідна $f'(x) = 3x^2 - 2$ монотонно зростає на відрізку $[2{,}09;\ 2{,}2]$, тому за m_1 можна взяти $f'(2{,}09) = 11{,}1043$. Отже,

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{0{,}050671}{11{,}1043} \approx 0{,}0046.$$

§ 2.3. УТОЧНЕННЯ КОРЕНЯ МЕТОДОМ ПОДІЛУ ВІДРІЗКА ПОПОЛАМ

Метод поділу відрізка пополам (або метод дихотомії) застосовний для уточнення кореня рівняння $f(x) = 0$ з наперед заданою точністю, допустимою для даної ЕОМ, якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 2.

Позначимо через $\overset{*}{x}$ — точне значення кореня рівняння (2.1) на відрізку $[a;b]$, а ε — його граничну абсолютну похибку. Суть методу в тому, що відрізок $[a;b]$ ділять пополам точкою $c = 0{,}5(a + b)$ і обчислюють $f(c)$. Якщо $f(c) = 0$, то $x = c$ є точним значенням кореня. Якщо $f(c) \neq 0$, але $b - a \leq 2\varepsilon$, то $|x^* - c| \leq \varepsilon$ і значення $x=c$ буде шуканим наближеним коренем. Якщо $f(c) \neq 0$ і $b - a > 2\varepsilon$, тоді розглядають той з двох відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$, на кінцях якого функція $f(x)$ набуває значень протилежних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1;b_1]$. На відрізку $[a_1;b_1]$ функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 2. Далі відрізок $[a_1;b_1]$ точкою $c_1 = 0{,}5(a_1 + b_1)$ ділять пополам і міркують так само, як і для відрізка $[a;b]$. В результаті процесу ділення відрізків пополам дістають послідовність вкладених відрізків $[a;b]$, $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$,..., $[a_n;b_n]$,..., кожен з яких містить точне значення кореня $\overset{*}{x}$. Довжина відрізка $[a_n;b_n]$ дорівнює $(b - a)/2^n$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Звідси випливає, що для деякого n буде справедлива нерівність $b_n - a_n \leq 2\varepsilon$. Тоді $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ буде наближеним значенням кореня $\overset{*}{x}$ з точністю ε, тобто $|x^* - c_n| \leq \varepsilon$. При цьому абсолютна похибка знайденого кореня не перевищує ε. Метод дихотомії легко реалізується на ЕОМ, але потребує значного обсягу обчислень, щоб досягти високої точності наближеного кореня.

Програма методу має циклічний характер. У програмі значення a_n, b_n, c_n $(n = 1,2,...)$ трактуватимемо як послідовні значення змінних a, b, c. При кожному проходженні циклу виконується серія команд

$c=(a+b)/2$

<u>якщо</u> $f(a)f(c)<0$

  <u>то</u> $b:=c$

  <u>інакше</u> $a:=c$

<u>все</u>

Повторення команд циклу продовжують доти, поки не виконається одна з умов $f(c) = 0$ або $b - a \leq 2\varepsilon$. Програма 2.2 містить алгоритм методу поділу відрізка пополам для рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Програма 2.2

```
10 ' -------М е т о д  п о д і л у  в і д р і з к а---------
20 ' ------------------ п о п о л а м----------------------
30 INPUT "Ввести A i B"; A,B
40 INPUT "Ввести точність EPS"; EPS
50 DEF FNF(X)=X^3-2*X-5
60 C=0.5*(A+B) : Y=FNF(C)
70 IF B-A<=2*EPS OR Y=0 THEN 110
80 C=0.5*(A+B) : Y=FNF(C)
90 IF Y*FNF(A)<0 THEN B=C ELSE A=C
100 GOTO 70
110 X=0.5*(A+B)
120 PRINT "Шуканий корінь X="; X
130 END
```

Таблиця 2.1

Точність кореня	Наближений корінь	Кількість ітерацій
10^{-3}	2,0957	9
10^{-6}	2,094559	16
10^{-9}	2,0945514832	29
10^{-12}	2,094551481542	39

У рядку 50 програми записують вигляд лівої частини рівняння (2.1).

У табл. 2.1 подано результати уточнення кореня $x^* \in [2;3]$ рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ з наперед заданою точністю ε методом дихотомії. З таблиці видно, що збільшення точності шуканого кореня веде до збільшення кількості ітерацій методу для досягнення заданої точності.

§ 2.4. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ І ПРИНЦИП СТИСКУЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Означення 1. Непорожня множина X елементів довільної природи називається *метричним простором*, якщо будь-яким двом елементам x, $y \in X$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\rho(x,y)$, яке задовольняє такі умови:

1) $\rho(x,y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксіома симетрії);
3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ для будь-яких $x,y,z \in X$ (аксіома трикутника).

Елементи множини X називають *точками метричного простору*, а дійсне число $\rho(x,y)$ — *відстанню* між елементами (точками) x і y.

Метричний простір позначають $R = (X, \rho)$. Властивості 1–3 відстані ρ називають *аксіомами метричного простору.*

Відстань ρ між елементами множини X можна означати по-різному. При цьому дістають різні простори. Наведемо кілька прикладів метричних просторів.

1. Множина дійсних чисел з відстанню

$$\rho(x,y) = |x - y| \tag{2.3}$$

є метричним простором, який позначають R або R_1.

2. Множина n-вимірних векторів з дійсними координатами і відстанню

$$\rho_0(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\,, \tag{2.4}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, є метричним простором, який називається *n-вимірним евклідовим простором;* його позначають R_n.

Перші дві властивості безпосередньо випливають з формули (2.4). Для доведення третьої властивості скористаємось нерівністю Коші

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

яка правильна для будь-яких дійсних чисел a_i і b_i $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Справді, поклавши в нерівності Коші $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$, знайдемо

$$\rho_0^2(x,z) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}((x_i - y_i) + (y_i - z_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\ \right)^2 =$$

$$= (\rho_0(x,y) + \rho_0(y,z))^2.$$

Звідси

$$\rho_0(x,z) \leq \rho_0(x,y) + \rho_0(y,z).$$

3. Множина n-вимірних векторів з відстанню

$$\rho_1(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \tag{2.5}$$

є метричним простором, який позначають R_n^0.

Справедливість перших двох аксіом метричного простору очевидна. Доведемо третю аксіому.

Справді, з нерівності

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i|$$

випливає нерівність

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i|.$$

Це означає, що відстань, яку визначає формула (2.5), задовольняє й третю аксіому метричного простору, тому простір R_n^0 — метричний.

4. Множина n-вимірних векторів з відстанню

$$\rho_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

є метричним простором, який позначають R_n^1.

Останні три приклади показують, що одна й та сама множина елементів може бути по-різному метризована. В результаті дістають різні метричні простори.

Наявність відстані між кожними двома елементами метричного простору дає можливість ввести поняття границі послідовності метричного простору.

Означення 2. Точку x^* *довільного метричного простору* R називають *границею послідовності* $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ точок цього метричного простору і записують $x^{(k)} \to x^*$ $(k \to \infty)$ або $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$, якщо $\lim_{k \to \infty} \rho(x^{(k)}, x^*) = 0$.

Послідовність $\{x^{(k)}\}$ точок, що має границю, називається *збіжною*.

Відомо, що збіжність послідовності точок $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)})$ $(k = 1,2,...)$ до точки $x = (x_1, x_2,..., x_n)$ у просторах R_n, R_n^0, R_n^1, означає *збіжність за координатами*.

Доведено, що збіжна послідовність точок метричного простору може мати *тільки одну границю*. Відстань $\rho(x,y)$ є неперервною функцією своїх аргументів, тобто якщо $x^{(k)} \to x_0$, $y^{(k)} \to y_0$ коли $k \to \infty$, то $\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) \to \rho(x_0, y_0)$.

Означення 3. Послідовність точок $\{x^{(k)}\}$ $(k = 1,2,...)$ метричного простору R називається *фундаментальною*, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ *існує таке* натуральне число $N(\varepsilon)$, що $\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon$ для всіх k і $m \geqslant N(\varepsilon)$, тобто

$$\lim_{k,m \to \infty} \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) = 0.$$

Відомо, що кожна фундаментальна послідовність збіжна. Для простору R_1 правильне й обернене твердження. Отже, для цього простору справедливий критерій Коші збіжності послідовності: щоб послідовність дійсних чисел $\{x_n\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Критерій Коші справедливий і для будь-якого n-вимірного евклідового простору R_n. Але не в усякому метричному просторі кожна фундаментальна послідовність має границю.

Наприклад, відкритий інтервал $X = (0;1)$ з відстанню $\rho(x,y) = |x - y|$ між двома точками x і $y \in X$ є метричним простором. Послідовність $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$, будучи фундаментальною в цьому просторі, не має в ньому границі.

Означення 4. Метричний простір R називається *повним*, якщо в ньому кожна фундаментальна послідовність має границю.

Це означає, що метричні простори, в яких справджується критерій Коші, є повними. Неважко впевнитись, що всі метричні простори, наведені у прикладах 1–4, повні. Доведемо, наприклад, повноту простору R_n.

Нехай послідовність векторів $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)}) \in R_n$ $(k = 1,2,...)$ — фундаментальна. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що

$$\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i^{(m)})^2} < \varepsilon$$

для всіх k і $m > N(\varepsilon)$. Звідси для кожного $i = 1,2,..., n$ маємо

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leqslant \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon,$$

для усіх $k > N(\varepsilon)$ і $m > N(\varepsilon)$.

Згідно з критерієм Коші збіжності послідовності дійсних чисел робимо висновок, що для кожного фіксованого $i = 1,2,...$ числова послідовність $\{x_i^{(k)}\}$ збіжна і має деяку границю x_i: $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n \in R_n$. Отже, простір R_n повний.

Нехай R_1 і R_2 — метричні простори; X — певна множина точок простору R_1. Якщо кожній точці $x \in X$ за певним правилом поставлено у відповідність точку $y \in R_2$, то кажуть, що на множині X задано оператор (відображення) U і записують $y = Ux$. Множину X називають *областю визначення оператора* U, точку x — *аргументом оператора* U, y — *значенням оператора* U, або *образом точки* x. Нехай оператор U здійснює відображення множини X у простір R_2. Якщо множина значень оператора збігається з усім простором R_2, то кажуть, що оператор U відображає множину X *на* простір R_2.

Якщо оператор U визначений на множині X точок метричного простору R і відображає множину X у той самий метричний простір, то це записують так: $U: R \to R$. Окремим випадком такого оператора, заданого на множині дійсних чисел, є функція однієї змінної.

Нехай оператор U відображає метричний простір R у себе.

О з н а ч е н н я 5. Якщо існує таке додатне число $\alpha < 1$, що для будь-яких $x', x'' \in X$ виконується нерівність

$$\rho(Ux', Ux'') \le \alpha \rho(x', x''),$$

то оператор U називається *оператором стиску*.

О з н а ч е н н я 6. Точка $x \in X$ називається *нерухомою точкою* оператора U, якщо

$$Ux = x.$$

Для знаходження нерухомих точок оператора U застосовують метод послідовних наближень. При цьому беруть довільну точку $x_0 \in X$ і послідовно знаходять

$$x_1 = Ux_0,\ \ x_2 = Ux_1, ...,\ \ x_k = Ux_{k-1}, ...$$

В результаті дістають послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ...$, яку називають *послідовністю наближень*, або *ітераційною послідовністю*.

Зазначимо, що нерухомі точки оператора U є розв'язками рівняння

$$x = Ux. \tag{2.6}$$

Для операторів стиску справедлива така теорема Банаха про нерухому точку.

Теорема 4 (принцип стискуючих відображень). Якщо оператор стиску U відображає повний метричний простір R у себе, то він має єдину нерухому точку, яку можна дістати методом послідовних наближень при будь-якій початковій точці $x_0 \in R$.

Д о в е д е н н я. Нехай x_0 — довільна фіксована точка простору R і

$$x_k = Ux_{k-1}\ \ (k = 1,2,...). \tag{2.7}$$

Послідовність $\{x_k\}$ — фундаментальна. Справді,

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(Ux_k, Ux_{k-1}) \leq \alpha\, \rho(x_k, x_{k-1}) =$$
$$= \alpha\, \rho(Ux_{k-1}, Ux_{k-2}) \leq \alpha^2 \rho(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \ldots \leq$$
$$\leq \alpha^k \rho(x_1, x_0).$$

Якщо $m > k$, то, скориставшись аксіомою трикутника, маємо:

$$\rho(x_k, x_m) \leq \rho(x_k, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_m) \leq$$
$$\leq \rho(x_k, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_{k+2}) + \rho(x_{k+2}, x_m) \leq \ldots \leq$$
$$\leq \rho(x_k, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_{k+2}) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leq$$
$$\leq (\alpha^k + \alpha^{k+1} + \ldots + \alpha^{m-1})\, \rho(x_1, x_0) =$$
$$= \frac{\alpha^k(1-\alpha^{m-k})}{1-\alpha}\, \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\, \rho(x_1, x_0).$$

Для числа $\epsilon > 0$ існує натуральне число $N(\epsilon)$ таке, що для m і $k \geq N(\epsilon)$ виконуватиметься нерівність

$$\rho(x_k, x_m) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\, \rho(x_1, x_0) < \epsilon. \tag{2.8}$$

Це означає, що послідовність $\{x_k\}$ фундаментальна.

Оскільки метричний простір R — повний, то існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ і x^* належить R.

Доведемо, що x^* є нерухомою точкою оператора U, тобто $Ux^* = x^*$. Справді, якщо $k \to \infty$,

$$\rho(Ux^*, x_k) = \rho(Ux^*, Ux_{k-1}) \leq \alpha\, \rho(x^*, x_{k-1}) \to 0,$$

тобто U є границею послідовності $\{x_k\}$ при $k \to \infty$. В силу єдиності границі маємо $U x^* = x^*$.

Доведемо, що x^* — єдина нерухома точка.

Припустимо, що x^* і y^* дві різні нерухомі точки оператора U. Тоді

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Ux^*, Uy^*) \leq \alpha\, \rho(x^*, y^*).$$

Звідси і з нерівності $\alpha < 1$ дістанемо $\rho(x^*, y^*) = 0$. Отже, $x^* = y^*$. Цим доведено єдиність нерухомої точки. Теорему доведено.

Якщо виконуються умови теореми 4, то точки x_k $(n = 1,2,\ldots)$, обчислені за формулами $x_k = Ux_{k-1}$, $(k = 1,2,\ldots)$, утворюють послідовність $\{x_k\}$ точок простору R, яка збігається до розв'язку x^* рівняння $x = Ux$ при будь-якому початковому $x_0 \in R$.

Перейшовши в нерівності (2.8) до границі при $m \to \infty$ і фіксованому k, дістанемо

$$\rho(x^*, x_k) \leqslant \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0). \qquad (2.9)$$

Ця нерівність дає оцінку похибки k-го наближення x_k точного розв'язку рівняння (2.6). З неї випливає, що послідовні наближення збігаються до точного розв'язку з швидкістю геометричної прогресії із знаменником α. Нерівність (2.9) дає можливість також для конкретних задач попередньо оцінити кількість ітерацій, необхідних для обчислення x^* з наперед заданою точністю.

Оцінимо відхилення x_k від x^* через відстань між x_k і x_{k-1}. Якщо $m > k$, то

$$\rho(x_k, x_m) \leqslant \rho(x_k, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_{k+2}) + \ldots +$$
$$+ \rho(x_{m-1}, x_m) \leqslant \alpha\,\rho(x_{k-1}, x_k) + \alpha^2\rho(x_{k-1}, x_k) + \ldots +$$
$$+ \alpha^{m-k}\rho(x_{k-1}, x_k) = \frac{\alpha(1-\alpha^{m-k})}{1-\alpha}\rho(x_{k-1}, x_k),$$

тобто

$$\rho(x_k, x_m) \leqslant \frac{\alpha(1-\alpha^{m-k})}{1-\alpha}\rho(x_{k-1}, x_k).$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $m \to \infty$ і фіксованому k, дістанемо

$$\rho(x_k, x^*) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{k-1}, x_k), \qquad (2.10)$$

де $x^* = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$ — нерухома точка.

Нехай треба знайти нерухому точку x^* оператора U з наперед заданою точністю ε. Тоді обчислення x_k за формулами (2.7) (за умови, що послідовність $\{x_k\}$ збіжна) треба продовжувати доти, поки не стане справедливою нерівність

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{k-1}, x_k) \leqslant \varepsilon,$$

тобто

$$\rho(x_{k-1}, x_k) \leqslant \frac{1-\alpha}{\alpha}\varepsilon. \qquad (2.11)$$

§ 2.5. МЕТОД ІТЕРАЦІЙ

Нехай задано рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ — неперервна функція. Щоб знайти дійсні корені цього рівняння, замінимо його рівносильним:

$$x = \varphi(x). \qquad (2.12)$$

Тепер, щоб розв'язати рівняння (2.12), застосовують *метод послідовних наближень (метод ітерацій)*. Вибирають деяке початкове наближення x_0 і послідовно обчислюють наступні наближення:

$$x_k = \varphi(x_{k-1}),\ k = 1,2,... \qquad (2.13)$$

Якщо послідовність $\{x_k\}$ має границю x^*, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, то ця границя і буде коренем рівняння (2.12). Справді, якщо функція $\varphi(x)$ неперервна, то

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty}\varphi(x_{k-1}) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}),$$

звідси $x^* = \varphi(x^*)$.

Збіжність послідовності $\{x_k\}$ забезпечується відповідним вибором функції $\varphi(x)$ і початкового наближення x_0. Вибираючи по-різному

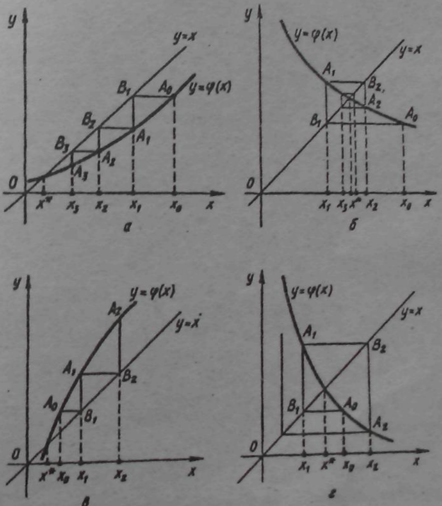

Рис. 2.4

функцію $\varphi(x)$, можна дістати різні ітераційні методи розв'язування рівняння (2.12).

Метод ітерації має простий геометричний зміст. Побудуємо графіки функцій $y = x$ і $y = \varphi(x)$. Абсциса точки перетину графіків цих функцій є коренем рівняння (2.12) (рис. 2.4).

На відрізку $[a;b]$ довільно вибираємо точку x_0 і проводимо через неї пряму, паралельну осі ординат до перетину з кривою $y = \varphi(x)$ в точці $A_0(x_0, \varphi(x_0))$. З точки A_0 проведемо пряму, паралельну осі абсцис, до перетину з прямою $y = x$. В результаті дістанемо точку B_1 з ординатою $\varphi(x_0)$. Спроектувавши точку B_1 на вісь Ox, знаходимо абсцису $x_1 = \varphi(x_0)$. Аналогічно через x_1 проводимо пряму, паралельну осі ординат, до перетину з кривою $y = \varphi(x)$ в точці $A_1(x_1, \varphi(x_1))$. З точки A_1 проводимо пряму, паралельну осі абсцис, до перетину з прямою $y = x$ в точці $B_2(x_2, \varphi(x_1))$, абсциса якої $x_2 = \varphi(x_1)$ і т.д. В результаті спільні абсциси точок A_1 і B_1, A_2 і B_2, ... є послідовними наближеннями x_1, x_2, x_3, ... кореня x^*.

На рис. 2.4 зображено випадки: *а)* $0 < \varphi'(x) < 1$; *б)* $-1 < \varphi'(x) < 0$; *в)* $\varphi'(x) > 1$; *г)* $\varphi'(x) < -1$.

Якщо $|\varphi'(x)| < 1$, то послідовні наближення x_k збігаються до кореня x^*, якщо $|\varphi'(x)| > 1$, то послідовні наближення віддаляються від нього.

Достатні умови збіжності методу ітерацій дає теорема 5.

Теорема 5. Нехай рівняння $x = \varphi(x)$ має корінь x^* і в деякому околі R ($R = \{x: |x - x^*| \le r\}$) цього кореня функція $\varphi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця $|\varphi(x) - \varphi(x')| \le q|x - x'|$, де $0 < q < 1$. Тоді для будь-якого $x_0 \in R$ послідовність $\{x_k\}$, обчислена за формулою (2.13), збігається до кореня x^*, причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$|x_k - x^*| \le q^k |x_0 - x^*|. \qquad (2.14)$$

Д о в е д е н н я. Множина точок відрізка R з відстанню $\rho(x, y) = |x - y|$ є повним метричним простором. Функція $\varphi(x)$ відображає відрізок R у самого себе. Справді, якщо $x \in R$, то $y = \varphi(x)$ також належатиме R, оскільки

$$\rho(y, x^*) = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \le q\,|x - x^*| < r.$$

Доведемо, що відображення φ — стискуюче.

Справді, для $x \in R$ і $x' \in R$

$$\rho(\varphi(x), \varphi(x')) = |\varphi(x) - \varphi(x')| \le q\,|x - x'| = q\,\rho(x, x'),$$

де $0 < q < 1$.

З принципу стискуючих відображень випливає, що в околі R існує одна і тільки одна нерухома точка $x = x^*$, така, що $x^* = \varphi(x^*)$. Цю точку можна знайти як границю послідовності $x_k = \varphi(x_{k-1})$, де $k = 1,2,...$, $x_0 \in R$.

З умови Ліпшиця маємо:

$$|x_k - x^*| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \leq q\,|x_{k-1} - x^*|,$$

тобто

$$|x_k - x^*| \leq q\,|x_{k-1} - x^*| \leq q^2\,|x_{k-2} - x^*| \leq$$

$$\leq \ldots \leq q^k\,|x_0 - x^*|.$$

Теорему доведено.

Отже, послідовність $\{x_k\}$ збігається до кореня x^* із швидкістю геометричної прогресії із знаменником q. Чим менше число q, тим швидше збігається послідовність $\{x_k\}$, тобто тим менше число кроків треба виконати для того, щоб дістати наближене значення кореня із наперед заданою граничною абсолютною похибкою ε. Швидкість збіжності залежить також від вибору початкового наближення x_0. Чим ближче до кореня x^* вибрано x_0, тим швидше буде знайдено результат.

Зазначимо, що умова Ліпшиця з константою $0 < q < 1$ буде виконана для функції $\varphi(x)$ на відрізку R, якщо на R існує $\varphi'(x)$, причому

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad x \in R. \tag{2.15}$$

При виконанні умов теореми 5 метод ітерацій є самокорегуючим методом, тобто він виправляє помилки, допущені при обчисленні наближень x_k (якщо вони не виходять за межі відрізка R), оскільки помилкові значення можна розглядати як нові початкові наближення. Тому при ручних обчисленнях не треба весь час виконувати ітерації з великою кількістю значущих цифр. Точність обчислень треба поступово збільшувати з наближенням до кореня.

Поклавши $\alpha = q$ в оцінках (2.9) і (2.10) методу послідовних наближень, знаходимо оцінки методу ітерацій:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|, \tag{2.16}$$

$$|x_k - x^*| \leq \frac{q}{1-q}\,|x_k - x_{k-1}|. \tag{2.17}$$

З оцінки (2.17) випливає, що для знаходження кореня рівняння (2.12) з точністю ε процес ітерації слід продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_{k-1} і x_k не стане справедливою нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1-q}{q}\,\varepsilon. \tag{2.18}$$

Якщо $0 < q \leq 0{,}5$ або $-1 < \varphi'(x) < 0$ в околі кореня x^*, то виконання нерівності

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$$

означає, що наближення x_k знайдено з точністю ε, і процес ітерацій можна закінчити.

Алгоритм методу ітерацій легко реалізується на ЕОМ. Програма 2.3 містить алгоритм методу ітерацій для рівняння $x = \sqrt[3]{2x+5}$.

Програма 2.3

```
10 '---------- М е т о д   і т е р а ц і й -----------------
20 '           д л я   р і в н я н н я   X = F(X)
30 '------------------------------------------------------
40 DEF FNF(X)=(2*X+5)^(1/3)
50 INPUT "Ввести точність наближеного значення кореня"; EPS
60 INPUT "Ввести сталу Q"; Q
80 INPUT "Ввести початкове наближення X0"; X0
90 EPS=EPS*(1-Q)/Q
100     X1=FNF(X0)
110     IF ABS(X1-X0) <= EPS THEN 130
120     X0=X1: GOTO 100
130 PRINT "Шуканий корінь X="; X1
140 END
```

Рівняння (2.1) до рівносильного рівняння (2.12) перетворюють так, щоб в околі кореня x^* виконувалась нерівність (2.15). Розглянемо деякі загальні прийоми такого перетворення.

Нехай корінь x^* рівняння (2.1) лежить на відрізку $[a;b]$.

Замінимо рівняння (2.1) рівносильним йому

$$x = x - \lambda f(x) = \varphi(x), \quad \lambda \neq 0. \qquad (2.21)$$

Підберемо сталу λ так, щоб в околі $[a;b]$ кореня x^* виконувалась нерівність

$$|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1.$$

Звідси маємо

$$-1 < 1 - \lambda f'(x) < 1,$$

або

$$0 < \lambda f'(x) < 2.$$

Якщо знак $f'(x)$ на $[a;b]$ не змінюється, то стала λ повинна мати однаковий знак з $f'(x)$ і задовольняти умову

$$\lambda \leqslant \frac{2}{\max\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)|}. \qquad (2.22)$$

При такому виборі λ нерівність (2.15) виконуватиметься.

Іноді рівняння (2.1) замінюють рівносильним йому

$$x = x - \frac{1}{\mu} f(x), \quad \mu \neq 0. \qquad (2.23)$$

Сталу μ вибирають так, щоб в околі $[a;b]$ кореня x^* справджувалась нерівність

$$|\varphi'(x)| = |1 - \frac{1}{\mu} f'(x)| < 1,$$

тобто виконувались умови:

$$-1 < 1 - \frac{1}{\mu} f'(x) < 1,$$

або

$$0 < \frac{1}{\mu} f'(x) < 2.$$

Остання подвійна нерівність виконуватиметься, якщо

$$\frac{f'(x)}{\mu} > 0 \quad \text{і} \quad |\mu| \geqslant \frac{1}{2} \max_{x \in [a;b]} |f'(x)|. \qquad (2.24)$$

Таким чином, якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f'(x)$ зберігає знак і обмежена, то завжди можна вказати число μ того самого знака, що й $f'(x)$, яке задовольнятиме нерівності (2.24) і цим самим забезпечуватиме виконання нерівності (2.15) для рівняння (2.23).

Якщо рівняння $x = \varphi(x)$ таке, що в околі $[a;b]$ кореня x^* має місце нерівність

$$|\varphi'(x)| \geqslant \nu > 1,$$

то ітераційний процес буде розбіжний. Тоді таке рівняння замінюють рівносильним йому $x = \psi(x)$, де $\psi(x)$ — функція, обернена до $\varphi(x)$. Для останнього рівняння метод ітерацій буде збіжним, оскільки

$$|\psi'(x)| = \left| \frac{1}{\varphi'(\psi(x))} \right| \leqslant \frac{1}{\nu} = q < 1.$$

П р и к л а д 4. Перетворити рівняння $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ до вигляду $x = \varphi(x)$, якщо його корінь $x^* \in [2;3]$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо послідовно всі три способи.

1-й с п о с і б. Оскільки $f'(x) = 3x^2 - 2$ неперервна і монотонна на відрізку $[2;3]$, то

$$\max_{x \in [2;3]} |f'(x)| = f'(3) = 25.$$

У відповідності з (2.22) знаходимо $\lambda < \dfrac{2}{25} = 0{,}08$. Тоді можна покласти, наприклад $\lambda = 0{,}078$, і шукане рівняння матиме вигляд

$$x = -0{,}078x^3 + 1{,}156x + 0{,}39.$$

При цьому для усіх $x \in [2;3]$ справджуватиметься нерівність

$$|\varphi'(x)| \leq 0{,}95.$$

2-й спосіб. Оскільки $f'(x) > 0$ на $[2;3]$, то у відповідності з (2.24) маємо

$$\mu > 0,\ \ \mu > \frac{25}{2}.$$

Наприклад, можна взяти $\mu = 13$. Тоді дане рівняння набере вигляду:

$$x = -\frac{1}{13}x^3 + \frac{15}{13}x + \frac{5}{13}.$$

При цьому

$$\varphi'(x) = -\frac{3}{13}x^2 + \frac{15}{13}.$$

Легко впевнитися, що на відрізку $[2;3]$

$$|\varphi'(x)| \leq 12/13 < 1.$$

3-й спосіб. Якщо дане рівняння записати у вигляді

$$x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2},$$

то

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}.$$

На відрізку $[2;3]$ похідна

$$\varphi'(x) = \frac{3}{2}x^2 > 1$$

і умова збіжності методу ітерацій не виконується. Для функції $\varphi(x)$ оберненою буде функція

$$\psi(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$$

і заміна рівняння $x = \varphi(x)$ рівносильним йому рівнянням $x = \psi(x)$ приведе до рівняння

$$x = \sqrt[3]{2x + 5}.$$

Для нього

$$\psi'(x) = 2/(3\sqrt[3]{(2x + 5)^2})$$

і на відрізку [2;3]

$$\psi'(x) \le \frac{2}{3\sqrt[3]{81}} < 0{,}154.$$

З розглянутих вище трьох варіантів рівнянь $x = \varphi(x)$ третій найбільш доцільний, оскільки має найменше значення q.

У табл. 2.2 подано результати розв'язування методом ітерацій кожного з трьох рівнянь, до якого було перетворене рівняння з прикладу 4.

Таблиця 2.2

Рівняння	Точність	x_0	Кількість ітерацій	Наближений корінь
$x=-0{,}078x^3+1{,}156x+0{,}39$;	10^{-6}	2	8	2,094551
	10^{-9}	2	11	2,094551481
$q = 0{,}95$	10^{-6}	3	10	2,094551
	10^{-9}	3	13	2,094551481
$x=-\frac{1}{13}x^3+\frac{15}{13}x+\frac{5}{13}$;	10^{-6}	2	8	2,094551
	10^{-9}	2	11	2,094551481
$q = 0{,}93$	10^{-6}	3	10	2,094551
	10^{-9}	3	13	2,094551481
$x = \sqrt[3]{2x+5}$;	10^{-6}	2	6	2,094551
	10^{-9}	2	9	2,094551481
$q = 0{,}154$	10^{-6}	3	7	2,094551
	10^{-9}	3	10	2,094551481

Порівнявши результати обчислень, побачимо, що кількість ітерацій методу залежить від наперед заданої точності наближеного кореня, параметра q, який характеризує величину модуля похідної $\varphi'(x)$ в околі кореня рівняння, а також вибору початкового наближення. Результати чисельного експерименту повністю узгоджуються з викладеними вище теоретичними висновками.

Вибір функції $\varphi(x)$ рівняння (2.12) повинен забезпечувати не тільки збіжність ітераційного процесу, а й його ефективність. При цьому критерієм ефективності може бути мінімальне число арифметичних операцій, необхідних для знаходження розв'язку, мінімальний час розв'язування задачі на ЕОМ тощо. Найчастіше за критерій ефективності ітераційних методів розв'язування нелінійних рівнянь беруть порядок збіжності ітераційного процесу.

Нехай для деякого ітераційного процесу справедлива оцінка

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C\,|x_k - x^*|^{\alpha}, \tag{2.25}$$

де $C = C(q)$ — деяка функція від q, обмежена зверху, а число α — порядок (степінь, показник) збіжності ітераційного процесу.

З формули (2.25) випливає, що чим більший порядок збіжності, тим швидше збігатиметься ітераційна послідовність, якщо значення x_k досить близькі до кореня x^*. Якщо $\alpha = 1$, то вважають, що ітераційний метод збігається лінійно, якщо $\alpha = 2$, то ітераційний метод збігається квадратично і т.д.

Для методу ітерації маємо:

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| \leq q\,|x_k - x^*|.$$

Звідси видно, що метод ітерації має лінійну збіжність. У § 2.6 показано, як побудувати функцію $\varphi(x)$, щоб підвищити порядок збіжності ітераційного процесу.

§ 2.6. МЕТОД НЬЮТОНА І ЙОГО МОДИФІКАЦІЇ

Нехай рівняння $f(x) = 0$ на відрізку $[a;b]$ має ізольований корінь x^*, тобто $f(a)f(b) < 0$, а функції $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні і зберігають знак на $[a;b]$.

Нехай x_k — k-е наближення кореня. Розкладемо $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_k

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2 + \ldots$$

Замість рівняння $f(x) = 0$ розглядатимемо рівняння

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0,$$

яке враховує тільки лінійну відносно $x - x_k$ частину ряду Тейлора. Розв'язавши його відносно x, дістанемо

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Взявши знайдене значення x за наступне наближення, матимемо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots . \tag{2.26}$$

Формула (2.26) визначає *метод Ньютона*. Він має просту геометричну інтерпретацію. Значення x_{k+1} є абсцисою точки перетину дотичної $y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$ до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_k, f(x_k))$

(рис. 2.5). Тому метод Ньютона називають ще *методом дотичних*. З рис. 2.5 видно, що послідовні наближення збігаються до кореня x^* монотонно.

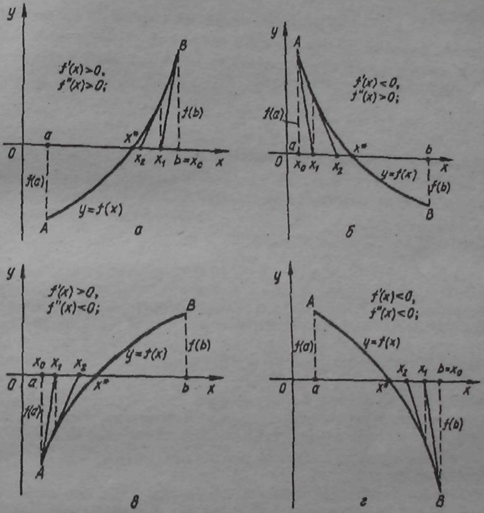

Рис. 2.5

За початкове наближення у методі Ньютона слід брати точку $x_0 \in [a;b]$, в якій $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Метод Ньютона є методом послідовних наближень $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, де функція

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{2.27}$$

Достатні умови збіжності методу Ньютона дає така теорема.

Теорема 6. Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ має неперервні із сталими знаками похідні $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ і $f(a)f(b) < 0$. Тоді існує такий окіл $R \subset [a;b]$ кореня x^* рівняння $f(x) = 0$, що для будь-якого $x_0 \in R$ послідовність $\{x_k\}$, обчислена за формулою (2.26), збігається до кореня x^*.

Доведення. Для доведення збіжності послідовності $\{x_k\}$ до кореня x^* досить показати, що похідна $\varphi'(x)$ функції (2.27) задовольняє умови $0 < |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ для будь-якого $x \in R$, і взяти x_0 з околу R кореня x^*.

Для похідної $\varphi'(x)$ маємо вираз

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)\,f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Оскільки $f'(x)$ неперервна і відмінна від нуля на $[a;b]$, то існують такі додатні m_1 і M_2, що

$$|f'(x)| \geqslant m_1, \quad |f''(x)| \leqslant M_2$$

для будь-яких $x \in [a;b]$.

Тоді

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{M_2}{m_1^2}\,|f(x)|.$$

З неперервності функції $f(x)$ випливає, що існує окіл R кореня x^*, в якому функція $f(x)$ задовольняє нерівність

$$|f(x)| \leqslant \frac{m_1^2}{M_2}\,q, \quad 0 < q < 1.$$

Внаслідок чого $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ для всіх $x \in R$.

Таким чином, функція $\varphi(x)$ задовольняє умови теореми 5, з якої випливає, що послідовність $\{x_k\}$, обчислена за формулами (2.26), збігається до кореня x^*, якщо початкове наближення $x_0 \in R$.

Теорему доведено.

Оцінимо швидкість збіжності методу Ньютона. Для цього запишемо функцію $f(x)$ в околі точки $x_k \in R$ за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(\eta)(x - x_k)^2,$$

де η лежить між точками x і x_k. Поклавши в ній $x = x^*$ і врахувавши, що $f(x^*) = 0$, дістанемо:

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x_k + x^* + \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_k)}(x^* - x_k)^2 = 0.$$

Звідси і з (2.26) маємо

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x_k)}(x^* - x_k)^2.$$

Поклавши

$$M_2 = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x\in[a;b]} |f'(x)|, \tag{2.28}$$

знаходимо

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_k|^2. \tag{2.29}$$

З оцінки (2.29) випливає, що метод Ньютона збігатиметься до кореня x^*, якщо початкове наближення x_0 таке, що

$$\frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_0| < 1,$$

причому в цьому випадку збіжність є квадратичною. Це означає, що *похибка кожного наступного наближення пропорційна квадрату похибки попереднього наближення.*

Зокрема, якщо $\frac{M_2}{2m_1} \leqslant 1$ і $|x^* - x_k| < 10^{-m}$, то з (2.29) маємо: $|x_{k+1} - x^*| < 10^{-2m}$.

Отже, коли наближення x_k має m правильних десяткових знаків, то наступне наближення x_{k+1} матиме щонайменше $2m$ правильних десяткових знаків.

Для оцінки k-го наближення методу Ньютона можна скористатися формулою (2.2), в якій взяти $m_1 = \min_{x\in[a;b]} |f'(x)|$. Тоді ітераційний процес можна закінчити, якщо стане правильною нерівність $\left|\frac{f(x_k)}{m_1}\right| < \varepsilon$, де ε — наперед задана точність наближення x_k.

Можна довести, що для методу Ньютона справедлива оцінка

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x_{k-1}|^2,$$

де m_1 і M_2 визначаються за формулами (2.28).

З цієї оцінки видно, що для досягнення заданої точності ε ітераційний процес треба продовжувати доти, поки для двох послідовних наближень x_k і x_{k-1} не виконуватиметься нерівність

$$|x_k - x_{k-1}| \leqslant \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}\varepsilon}.$$

Якщо на відрізку $[a;b]$ справедлива нерівність $M_2 < 2m_1$, то ітераційний процес можна закінчити, коли виконується умова $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$.

Програма 2.4 містить алгоритм методу Ньютона.

Програма 2.4

```
10 ' ---------Метод Ньютона-----------
20 ' -----для рівняння f(x) = 0---------
30 PRINT "Ввести кінці a i b відрізка ізоляції кореня"
40 INPUT "A="; A : INPUT "B="; B
50 INPUT "Ввести точність EPS"; EPS
60 INPUT "Ввести min f  (x) на [a;b]"; M1
70 INPUT "Ввести max f''(x) на [a;b]"; M2
80 DEF FNF(X)=                  :' — вираз функції f(x)
90 DEF FNY(X)=                  :' — вираз похідної f'(x)
100 DEF FNZ(X)=                 :' — вираз другої похідної f''(x)
110 U=FNF(A): V=FNZ(A)                :' Визначення початкового
120 IF U*V > 0 THEN X0=A ELSE X0=B  :' наближення X0
130 EPS= EPS*SQR(2*MI/M2)
140 P=FNF(X0)/FNY(X0)
150 X=X0-P
160 IF ABS(X-X0) <= EPS THEN 180
170 X0=X: GOTO 140
180 PRINT "Шуканий корінь X="; X : END
```

Перевага методу Ньютона перед методом ітерацій у тому, що він має вищу швидкість збіжності. Так, корінь $x^* \in [2;3]$ рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ і $\varepsilon = 10^{-9}$ методом Ньютона був обчислений за п'ять і шість ітерацій відповідно, тоді як методом ітерації він був обчислений не менш ніж за шість і десять ітерацій відповідно.

З формули (2.27) видно, що чим більше значення $|f'(x)|$ в околі кореня, тим менша поправка додається до попереднього наближення. Тому метод Ньютона зручно застосовувати тоді, коли в околі кореня графік функції $y = f(x)$ має значну крутість. Крім того, методом Ньютона можна знаходити не тільки дійсні корені рівнянь, а й комплексні. Метод Ньютона легко поширюється і на розв'язування систем нелінійних рівнянь з багатьма невідомими.

Недоліком методу Ньютона є те, що на кожній ітерації треба обчислювати не тільки значення функції $f(x)$, а й значення її похідної $f'(x)$. Обчислення похідної $f'(x)$ може бути значно складнішим від обчислення $f(x)$. У таких випадках похідну $f'(x_k)$ замінюють її наближеним значенням

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Підставивши значення $f'(x_k)$ у формулу (2.26), знайдемо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \ k = 1,2,... \tag{2.30}$$

Метод, що визначається формулою (2.30), називають методом *січних*. Геометрично наближення x_{k+1} дістають як абсцису точки перетину *осі* Ox *і січної*, що проходить через точки $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ і $(x_k, f(x_k))$ кривої $y = f(x)$ (рис. 2.6, а).

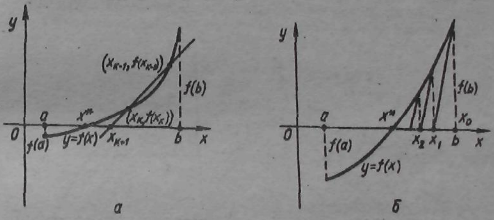

Рис. 2.6

Алгоритм методу січних починається із задання двох початкових наближень x_0 і x_1, які вибирають на відрізку ізоляції кореня x^*. Тому складність цього методу полягає в знаходженні таких x_0 і x_1, досить близьких до x^*, щоб метод був збіжним.

Якщо похідна $f'(x)$ мало змінюється на $[a;b]$, то кількість обчислень у методі Ньютона можна зменшити, коли значення похідних $f'(x_k)$ у точках x_k, $k = 1,2,...$ замінити значенням $f'(x_0)$ у точці x_0. Тоді формула (2.26) набере вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \ k = 0,1,2,... \tag{2.31}$$

В результаті дістали *спрощений метод Ньютона*. Геометрично він означає, що дотичні в точках $(x_k, f(x_k))$ замінюються прямими, паралельними дотичній, проведеній до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$ (рис. 2.6, б).

§ 2.7. МЕТОД ХОРД

Метод хорд — один з поширених ітераційних методів. Його ще називають *методом лінійного інтерполювання*, *методом пропорційних частин*, або *методом хибного положення*.

Нехай задано рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ має неперервні похідні першого й другого порядків, які зберігають сталі знаки на цьому відрізку, і $f(a)\,f(b) < 0$, тобто корінь x^* рівняння відокремлений на $[a;b]$.

Ідея методу хорд в тому, що на досить малому відрізку дуга кривої $y = f(x)$ замінюється хордою і абсциса точки перетину хорди з віссю Ox є наближеним значенням кореня.

Нехай для визначеності $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (рис. 2.7, а). Візьмемо за початкове наближення шуканого кореня x^* значення $x_0 = a$. Через точки A_0 і B проведемо хорду і за перше

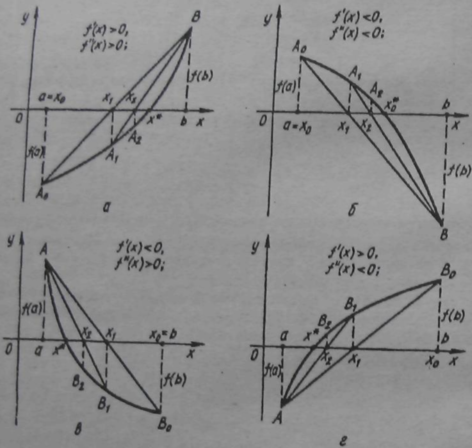

Рис. 2.7

наближення кореня x^* візьмемо абсцису x_1 точки перетину хорди з віссю Ox. Тепер наближене значення x_1 кореня можна уточнити, якщо застосувати метод хорд до відрізка $[x_1;b]$. Абсциса x_2 точки перетину хорди A_1B буде другим наближенням кореня. Продовжуючи цей процес необмежено, дістанемо послідовність $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ наближених значень кореня x^* даного рівняння.

Для виведення формули методу хорд запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $A_k(x_k, f(x_k))$ і $B(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(x_k)}{f(b) - f(x_k)} = \frac{x - x_k}{b - x_k}.$$

Поклавши $y = 0$, знайдемо абсцису точки перетину хорди A_kB з віссю Ox:

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k).$$

Значення x можна взяти за наступне наближення, тобто

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), \ k = 0,1,2,\ldots .$$

У цьому разі і тоді, коли $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ (рис. 2.7, *б*) кінець b відрізка $[a;b]$ є нерухомим.

Якщо $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (рис. 2.7, *в*), або $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ (рис. 2.7, *г*), аналогічно можна записати формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a), \ k = 0,1,2,\ldots$$

У цьому випадку точка a є нерухомим кінцем відрізка $[a;b]$.

У загальному випадку нерухомим буде той кінець відрізка ізоляції кореня, в якому знак функції $f(x)$ збігається із знаком другої похідної, а за початкове наближення x_0 можна взяти точку відрізка $[a;b]$, в якій $f(x_0)f''(x_0) < 0$.

Отже, метод хорд можна записати так:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(c)}(x_k - c), \ k = 0,1,2,\ldots , \tag{2.32}$$

де

$$c = \begin{cases} a, & \text{якщо } f(a)f''(a) > 0, \\ b, & \text{якщо } f(b)f''(b) > 0. \end{cases}$$

З формули (2.32) видно, що метод хорд є методом ітерацій $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, в якому

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(c)}(x - c). \tag{2.33}$$

Зауважимо, що рівняння

$$x = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(c)}(x - c)$$

на відрізку $[a;b]$ рівносильне рівнянню $f(x) = 0$.

Достатні умови збіжності методу хорд дає така теорема.

Теорема 7. Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ неперервна разом із своїми похідними до другого порядку включно, причому $f(a)f(b) < 0$, а похідні $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігають сталі знаки на $[a;b]$, тоді існує такий окіл кореня x^* рівняння $f(x) = 0$, що для будь-якого початкового наближення x_0 з цього околу послідовність $\{x_k\}$, обчислена за формулою (2.32), збігатиметься до кореня x^*.

Д о в е д е н н я. Для доведення теореми досить показати, що в деякому околі $R \subset [a;b]$ кореня x^* похідна $\varphi'(x)$ функції (2.33) задовольняє умову $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ для будь-яких $x \in R$.

Обчислимо

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)(x - x_0) + f(x)}{f(x) - f(x_0)} + \frac{f(x)f'(x)(x - x_0)}{(f(x) - f(x_0))^2}.$$

Поклавши $x = x^*$ і врахувавши, що $f(x^*) = 0$, маємо

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x_0) + f'(x^*)(x^* - x_0)}{f(x_0)}. \tag{2.34}$$

Запишемо для $f(x)$ в околі точки x^* формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}f''(\eta)(x - x^*)^2,$$

де η лежить між x і x^*.

Поклавши в ній $x = x_0$, дістанемо

$$f(x_0) + f'(x^*)(x^* - x_0) = \frac{1}{2}f''(\eta)(x_0 - x^*)^2. \tag{2.35}$$

Із формули (2.34), враховуючи (2.35), знаходимо

$$\varphi'(x^*) = \frac{(x_0 - x^*)^2}{2f(x_0)} f''(\eta).$$

Оскільки $f(x)$ і $f''(x)$ — неперервні на $[a;b]$, то і $\varphi'(x)$ буде неперервною на $[a;b]$ функцією, тому

$$\lim_{x_0 \to x^*} \varphi'(x^*) = \lim_{x_0 \to x^*} \frac{(x_0 - x^*)^2}{2f(x_0)} f''(\eta) = 0.$$

Звідси і з неперервності $\varphi'(x)$ випливає, що на відрізку $[a;b]$ існує окіл R точки x^* такий, що $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ для будь-якого $x \in R$. Тоді з теореми 5 випливає, що послідовність $\{x_k\}$, обчислена за формулою (2.32), збігається до кореня x^*, якщо початкове наближення $x_0 \in R$. Теорему доведено.

Для оцінки похибки, як і в методі дотичних, можна скористатися формулою (2.2).

Виведемо ще одну формулу, яка дає можливість оцінити абсолютну похибку наближення x_k через два послідовні наближення x_{k-1} і x_k.

Нехай $f'(x)$ — неперервна і зберігає на $[a;b]$ сталий знак, причому

$$0 < m_1 \leqslant |f'(x)| \leqslant M_1 < \infty,$$

де $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$.

З формули

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(c)}(x_{k-1} - c)$$

дістаємо

$$-f(x_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1}) - f(c)}{x_{k-1} - c}(x_k - x_{k-1}).$$

Звідси, враховуючи, що $f(x^*) = 0$, маємо

$$f(x^*) - f(x_{k-1}) = \frac{f(x_{k-1}) - f(c)}{x_{k-1} - c}(x_k - x_{k-1}).$$

Застосувавши теорему Лагранжа, дістанемо

$$(x^* - x_{k-1})f'(\eta) = (x_k - x_{k-1})f'(\xi),$$

де η лежить між точками x^* і x_{k-1}, а ξ — між x_{k-1} і c. Далі запишемо:

$$(x^* - x_k + x_k - x_{k-1})f'(\eta) = (x_k - x_{k-1})f'(\xi)$$

або

$$x^* - x_k = \frac{f'(\xi) - f'(\eta)}{f'(\eta)}(x_k - x_{k-1}).$$

Оскільки $f'(x)$ зберігає на $[a;b]$ сталий знак, то

$$|f'(\xi) - f'(\eta)| \leqslant M_1 - m_1.$$

Тому

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_k - x_{k-1}|. \tag{2.36}$$

Якщо на відрізку $[a;b]$ справедлива нерівність $M_1 \leqslant 2m_1$, то із (2.36) випливає оцінка:

$$|x^* - x_k| \leqslant |x_k - x_{k-1}|.$$

Отже, корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ буде знайдено методом хорд із наперед заданою точністю ε, якщо для двох послідовних наближень x_{k-1} і x_k справджуватиметься нерівність $|x_k - x_{k-1}| \leqslant \dfrac{m_1}{M_1 - m_1}\varepsilon$.

§ 2.8. КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ДОТИЧНИХ І ХОРД

Характерна особливість методів дотичних і хорд та, що послідовності їх наближень монотонні. Причому, якщо для даного рівняння послідовність наближень методу хорд монотонно спадна, то послідовність наближень методу дотичних — монотонно зростаюча, і навпаки. Одночасне застосування цих методів дає змогу наближатися до кореня рівняння з двох боків, дістаючи наближення з недостачею і надлишком.

Розглянемо рівняння $f(x) = 0$, корінь якого $x^* \in [a;b]$. Нехай, наприклад, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (рис. 2.8).

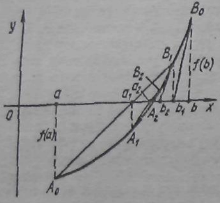

Рис. 2.8

У даному випадку за початкове наближення в методі хорд вибирають точку $x = a$, а в методі дотичних — точку b. На відрізку $[a;b]$ застосовують метод дотичних і хорд (спочатку дотичних, а потім хорд). У результаті дістають нові наближення a_1, b_1, і початковий відрізок ізоляції кореня звузився. Для знаходження нових наближень застосовують метод дотичних і хорд уже на відрізку $[a_1;b_1]$. У результаті дістають наближення a_2 і b_2 відповідно, причому $[a_2;b_2] \subset [a_1;\ b_1] \subset [a;b]$. Такий процес продовжують доти, поки довжина відрізка $[a_k;b_k]$ стане меншою або дорівнюватиме величині 2ε, де ε — наперед задана точність кореня.

За шукане значення кореня $\overline{x}$ беруть півсуму наближень a_k і b_k, тобто $\overline{x} = 0{,}5(a_k + b_k)$, а модуль їх піврізниці дасть граничну абсолютну похибку наближеного кореня, тобто

$$|x^* - \overline{x}| \leqslant 0{,}5|a_k - b_k|.$$

Зазначимо, що на кожному кроці комбінованого методу за нерухомий кінець c у формулі методу хорд треба брати наближення, обчислене на цьому самому кроці за формулою дотичних.

Формули комбінованого методу дотичних і хорд мають вигляд

$$b_{k+1} = b_k - \frac{f(b_k)}{f'(b_k)},\ \ k = 0,1,2,... \qquad (2.37)$$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)(a_k - b_{k+1})}{f(a_k) - f(b_{k+1})},\ \ k = 0,1,2,... \qquad (2.38)$$

За початкове наближення b_0 у формулі (2.37) методу дотичних беруть той з кінців відрізка $[a;b]$, в якому значення функції $f(x)$ і її другої похідної мають однакові знаки, тоді протилежний кінець відрізка $[a;b]$ беруть за початкове наближення a_0 у формулі (2.38) методу хорд.

Завдяки своєрідній комбінації методів дотичних і хорд комбінований метод має вищу швидкість збіжності, ніж методи хорд і дотичних окремо взяті. Так, для рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ його корінь $x^* \in [2;3]$ з точністю до 10^{-6} і 10^{-9} комбінованим методом обчислено за дві і три ітерації відповідно, тоді як для методу дотичних потрібно було п'ять і шість ітерацій відповідно, а для методу хорд — дванадцять і дев'ятнадцять ітерацій відповідно.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Тема. Чисельні методи розв'язування рівнянь з однією змінною.

Завдання. 1. Відокремити корені даного рівняння $f(x) = 0$ одним з методів: графічним, аналітичним або методом послідовного перебору.

2. *Уточнити один з відокремлених коренів* рівняння двома, вказаними в табл. 2.3, методами з точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ і $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$.

3. Порівняти використані методи між собою за кількістю ітерацій, потрібних для знаходження кореня із заданою точністю.

Пояснення до виконання роботи. Виконуючи п.1 завдання, відрізок ізоляції кореня бажано звузити до довжини, яка не перевищує одиниці.

При уточненні ізольованого кореня методом ітерації подане в табл. 2.3 рівняння слід звести до вигляду $x = \varphi(x)$, де функція $\varphi(x)$ на відрізку ізоляції кореня повинна задовольняти умову $|\varphi'(x)| < 1$.

Перед тим як користуватися методами хорд, дотичних і комбінованим, потрібно *перевірити виконання достатніх умов збіжності відповідного методу.*

Для чисельного розв'язування рівнянь методами дихотомії, ітерації і Ньютона можна скористатися поданими в підручнику відповідними програмами, передбачивши в них підрахунок кількості ітерацій, потрібних для досягнення заданої точності наближеного кореня.

Для розв'язування рівняння методами хорд і комбінованим відповідні програми скласти самостійно.

Таблиця 2.3

Варіант	Рівняння	Метод
1	$2^x + 5x - 3 = 0$	дихотомії, хорд
2	$\ln(1{,}5x) - 1{,}7x + 3 = 0$	ітерації, комбінований
3	$x^3 - 3x^2 + 2{,}5 = 0$	хорд, дотичних
4	$x^2 + 4\sin x = 0$	дихотомії, хорд
5	$\sin x - x - \ln(1 + x) + 1 = 0$	хорд, Ньютона
6	$x^3 - 3x^2 - 3{,}5 = 0$	дихотомії, комбінований
7	$x^2 - 20\sin x = 0$	хорд, дихотомії
8	$2 - x - \ln x = 0$	ітерації, хорд
9	$3x - \cos x - 1 = 0$	дихотомії, комбінований

Варіант	Рівняння	Метод
10	$x^2 - \ln(1+x) - 3 = 0$	ітерації, комбінований
11	$2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$	хорд, дотичних
12	$2e^x + 2x - 3 = 0$	хорд, Ньютона
13	$x\sqrt{x+1} - 1 = 0$	ітерації, комбінований
14	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$	хорд, дотичних
15	$\mathrm{ctg}x - 0{,}5x = 0$	дихотомії, хорд
16	$2\sin(x - 0{,}6) + x - 1{,}5 = 0$	ітерації, комбінований
17	$2^x(x-2)^2 - 1 = 0$	дихотомії, хорд
18	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$	Ньютона, комбінований
19	$x^3 - \sin x = 0$	ітерації, комбінований
20	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$	хорд, дотичних
21	$3\sin\sqrt{x} + 0{,}35x - 3{,}8 = 0$	ітерації, хорд
22	$x^2 - \cos x = 0$	дихотомії, комбінований
23	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$	Ньютона, комбінований
24	$3^x + 5x - 2 = 0$	хорд, дотичних
25	$(x-3)\cos x - 1 = 0$	дихотомії, хорд
26	$x - (3 + \sin 3{,}6x)^{-1} = 0$	ітерації, комбінований
27	$x^3 + 4x - 6 = 0$	хорд, дотичних
28	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$	дихотомії, комбінований
29	$x - \sqrt{\ln(x+2)} = 0$	ітерації, комбінований
30	$2x\sin x - \cos x = 0$	Ньютона, комбінований