Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

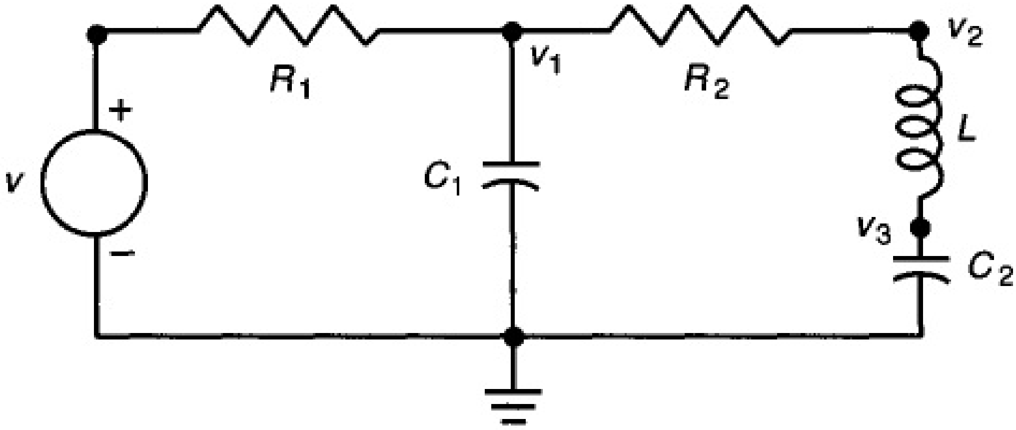
Лабораторна робота №2
з курсу "Проблеми багатозначного аналізу"

Виконала студентка групи ОМ-2
Живолович Олександра Євгенівна

Київ, 2021

Зміст

1 Математична модель



Розглянемо математичну модель, яка описує зміну електричної напруги v_1, v_2, v_3 у контурі, яка має вигляд:

$$C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1(t) + \frac{1}{R_2} v_2(t) + \frac{1}{R_1} v(t) \tag{1}$$

$$C_1 \frac{dv_2(t)}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1(t) - \left(\frac{C_1 R_2}{L} - \frac{1}{R_2}\right) v_2(t) + \frac{C_1 R_2}{L} v_3(t) + \frac{1}{R_1} v(t) \tag{2}$$

$$R_2 \frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} \left(v_1(t) - v_2(t)\right) \tag{3}$$

де $v(t)$ - електрична напруга джерела.

2 Постановка задачі

При заданих $R_1, R_2, C_1, C_2, L, v(t)$ побудувати багатозначне відображення, яке описує динаміку пучка траєкторій системи (1) - (3) у формі (5) з використанням матричного рівняння Ляпунова (6). Множина початкових умов обирається у формі еліпсоїда

$$M_0 = \mathcal{E}(x_0, Q_0)$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^3$ - центр еліпсоїда, $Q_0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ - матриця, симетрична і додатньо-визначена. Вивести проекцію графіка багатозначного відображення, значення багатозначного відображення та параметри моделі.

3 Теоретичні відомості

Розглянемо систему звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ t \in [t_0, T] \tag{4}$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ - вектор стану системи, $f : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ - неперервна функція, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$- матриця з неперервними компонентами.

Нехай $M_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ - компактна множина, яка задає початкові умови системи (4), $x(t, x_0, t_0)$ - розв'язок системи (4), який відповідає певній умові Коші $x(t_0) = x_0$. Множина

$$X(t) = \bigcup_{x_0 \in M_0} x(t, x_0, t_0)$$

називається **перетином пучка траєкторій системи** (4) у момент t. Позначимо

$$\mathcal{E}(p, B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle B^{-1}(x-p), x-p\rangle \le 1 \right\}$$

еліпсоїд з центром $p \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матриця, симетрична і додатньо-визначена.

Нехай множина початкових станів M_0 представлена у формі еліпсоїда, тобто

$$M_0 = \mathcal{E}(x_0, Q_0)$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $Q_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - матриця, симетрична і додатньо-визначена. Тоді пучок траєкторій системи (4) у момент t

$$X(t) = \mathcal{E}(x(t), Q(t)),\ t \in [t_0, T] \tag{5}$$

де $x(t) = x(t, x_0, t_0)$, $Q(t) = \Theta(t, t_0)Q_0\Theta^*(t, t_0)$, $\Theta(t, t_0)$ - фундаментальна матриця системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, нормована за моментом t_0. Матриця $Q(t)$ може бути знайдена з матричного диференціального рівняння

$$\frac{dQ}{dt} = A(t)Q + QA^*(t),\ Q(t_0) = Q_0,\ t \in [t_0, T] \tag{6}$$

4 Алгоритм розв'язання задачі

Підійдемо до задачі наступним чином - будемо розв'язувати систему (1) - (3), спочатку звевши її до вигляду (4). Далі, будемо розв'язувати систему чисельно, обравши у якості початкової точки центр еліпсоїда M_0. Таким чином, ми зможемо відновити еліпсоїд у будь-який момент часу, знаючи його центр.

4.1 Зведення до стандартного вигляду

Запишемо систему (1) - (3) у вигляді (4):

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_1(t) + \frac{1}{C_1R_2}v_2(t) + \frac{1}{C_1R_1}v(t) \tag{7}$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_1(t) - \frac{1}{C_1}\left(\frac{C_1R_2}{L}-\frac{1}{R_2}\right)v_2(t) + \frac{R_2}{L}v_3(t) + \frac{1}{C_1R_1}v(t) \tag{8}$$

$$\frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{1}{R_2C_2}\left(v_1(t)-v_2(t)\right) \tag{9}$$

Випишемо матрицю системи $A(t)$:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{C_1R_2} & 0 \\ -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{C_1}\left(\frac{C_1R_2}{L}-\frac{1}{R_2}\right) & \frac{R_2}{L} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

та, поклавши

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1}v(t) \\ \frac{1}{C_1R_1}v(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

отримаємо систему у шуканому вигляді (4). Будемо розв'язувати її чисельно за допомогою методу Рунге — Кутти 4 порядку, оскільки це один з найбільш розповсюджених методів та має сумарну похибку на інтервалі $O(h^4)$, де h - крок методу.

4.2 Чисельний розв'язок методом РК

Нехай маємо задачу Коші

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y),\ y(t_0) = y_0$$

Наблизимо її розв'язок у n точках рівномірної сітки $t_1, \ldots, t_n$ наступним чином:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h\left(k_1+k_2+k_3+k_4\right),\ t_{n+1} = t_n + h$$

де $k_i, i = \overline{1,4}$ визначені наступним чином

$$\begin{aligned}
k_1 &= g(t_n, y_n) \\
k_2 &= g(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\
k_3 &= g(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\
k_4 &= g(t_n + h, y_n + hk_3)
\end{aligned}$$

У нашому випадку

$$g(t, y) = A(t)x(t) + f(t)$$

4.3 Відновлення еліпсоїду за матрицею та центром

Наш еліпсоїд заданий наступним чином:

$$\mathcal{E}(p, B) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle B^{-1}(x - p), x - p\rangle \leq 1\}$$

Відомо, що матриця B^{-1} має за власні числа **квадрати обернених півосей еліпсу** a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}. Також, відомо що власні числа оберненої матриці дорівнюють оберненим власним числам прямої матриці, тобто власні числа B - a^2, b^2, c^2.

Скористаємось також тим, що власні вектори матриці B^{-1} та B співпадають, і, більш того, задають осі еліпсоїда.

Згадаємо про параметричне представлення еліпсоїда

$$x = a\sin(\theta)\cos(\varphi) \tag{12}$$

$$y = b\sin(\theta)\sin(\varphi) \tag{13}$$

$$z = c\cos(\theta) \tag{14}$$

де $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Отже, маючи центр еліпсоїда p точку, отриману з параметричного представлення $p' = (p'_1, p'_2, p'_3)$, та власні вектори матриці еліпсоїда l_1, l_2, l_3, то точку еліпсоїда можна представити як:

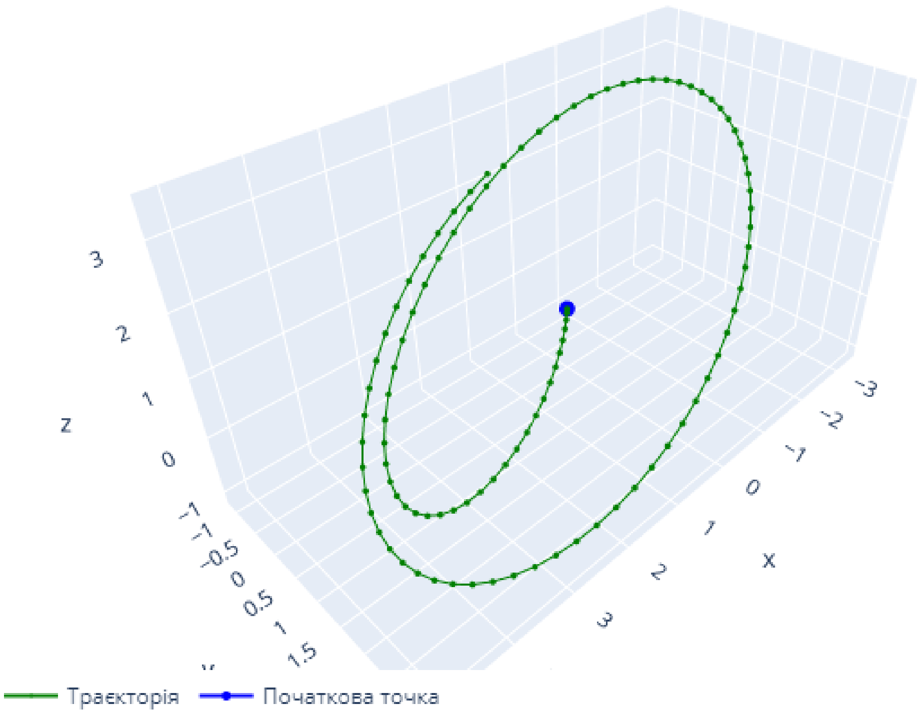
$$p + l_1p'_1 + l_2p'_2 + l_3p'_3$$

5 Результати

Покладемо наступні початкові умови

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_2 = 2,\ R_1 = R_2 = 1,\ L = 1 \\
&v(t) = 10\sin(t),\ t_0 = 0,\ T = 10 \\
&x_0 = (1, 1, 1)^T \\
&Q_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Тоді, можемо спочатку розглянути траєкторію однієї точки:



Тепер, розглянемо динаміку пучка траєкторій системи, розв'язавши рівняння для центральної точки множини початкових станів, і побудувавши відповідні елліпси з центром у кожній точці траєкторії, отриманої у попередньому експерименті.

Візуально бачимо, що пучок траєкторій системи вироджується у точку, що означає, що система, у певному сенсі є стабільною, тобто близькі початкові умови призводять до однакових розв'язків.

Перевіримо чи дійсно це так. Можемо розглянути еліпсоїд, отриманий на останньому кроці симуляції. Нехай p - центр еліпсоїда, відносно якої ми будували наші відповідні елліпсоїди у кожний момент часу. У випадку заданих початкових умов, маємо

$$\max_{p' \in X(10)} |p'_x - p_x| = 0.06074$$

$$\max_{p' \in X(10)} |p'_y - p_y| = 0.09828$$

$$\max_{p' \in X(10)} |p'_z - p_z| = 0.09028$$

Перевіримо, що відбудеться якщо розширити часовий проміжок до $T = 20$:

$$\max_{p' \in X(20)} |p'_x - p_x| = 0.0082516$$
$$\max_{p' \in X(20)} |p'_y - p_y| = 0.0131680$$
$$\max_{p' \in X(20)} |p'_z - p_z| = 0.0121748$$

Отже бачимо, що якщо ми починаємо з подібних, тобто близьких початкових станів, ми отримаємо близькі розв'язки системи.

6 Висновки

Було розв'язано систему диференційних рівнянь з допомогою методу Рунге-Кутта для множини початкових станів у формі еліпсоїда, тобто було побудоване багатозначне відображення, що описує динаміку пучка траєкторій системи диференційних рівнянь, що моделюють зміну електричної напруги у системі.