Звіт
до лабораторної роботи №1
з проблем багатозначного аналізу

Київ, 2021
Живолович Олександра

Зміст

1 Постановка задачі

Побудувати графік субдиференціалу функції

$$f(x_1, x_2) = |-4x_1 + 2x_2 + 4| + |2x_1 + 3x_2 - 2| + 0.1(x_1 - 3x_2)^6, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Розв'язати задачу

$$f(x_1, x_2) \to \min \tag{2}$$

2 Алгоритм

Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ опукла. Для мініміщації f, використовуємо субградієнтний метод

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g(x_k) \tag{3}$$

де x_k є k-тою точкою ітерації, $g(x_k)$ - будь-який субградієнт функції f у точці x_k, α_k - розмір k-того кроку.

Отже, на кожному році методу, ми робимо крок у напрямку від'ємного субградієнту функції f. У точках, де f диференційовна, субградієнт співпадає з градієнтом функції, а отже у цих точках метод зводиться до градієнтного методу.

Оскільки метод не є методом спуску, то гарним підходом є збереження найкращого поточного результату

$$f_{\text{best}}^{(k)} = \min\{f_{\text{best}}^{(k-1)}, f^{(k)}\} \implies f_{\text{best}}^{(k)} = \min\{f(x_1), \ldots, f(x_k)\}.$$

Важливою частною методу є спосіб вибору α_k - розміру кроку. Існують наступні широковживанні методи вибору α_k:

- Метод постійного розміру кроку

$$\alpha_k = h$$

- Метод кроку постійної довжини

$$\alpha_k = \frac{h}{||g(x_k)||}$$

- Метод сумовних з квадратом кроків

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$$

  Наприклад, $\alpha_k = a/(b+k)$, $a > 0$, $b \geq 0$.

- Метод несумовних кроків, що зменшуються

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$$

  Наприклад, $\alpha_k = a/\sqrt{k}$.

3 Код

Було обрано мову програмування *Python3*, оскільки вона є дуже зручною для роботи з науковими обчисленнями, а також існують багато зручних пакетів для візуалізації даних. Код можна знайти за посиланням.

4 Висновки

Була вирішена задача негладкої оптимізації за допомогою субградієнтного методу. Були зроблені такі спостереження:

1. Оскільки функція дуже швидко зростає, то потрібно відразу брати малі кроки для того щоб метод був збіжний

2. Надто малий розмір року призводить до вкрай повільної збіжності

3. Методи постійного розміру кроку та постійної довжини кроку показують гарні результати, але потребують гарного підбору параметру.

4. Метод сумовних з квадратом крокыв показав гарний результат тыльки в одному випадку, але можливо треба просто вдало підібрати параметр.

5. Метод несумовних кроків, що зменшуються показав дуже гарний результат, але треба розуміти що зменшувати розмір параметру потрібно обережно, адже можно швидко прийти до дуже повільної збіжності.

Література

[1] *Subgradient Methods*, Stephen Boyd, Lin Xiao, and Almir Mutapcic Notes for EE392o, Stanford University, Autumn, 2003

5 Додатки

Рис. 1: Постійний розмір кроку

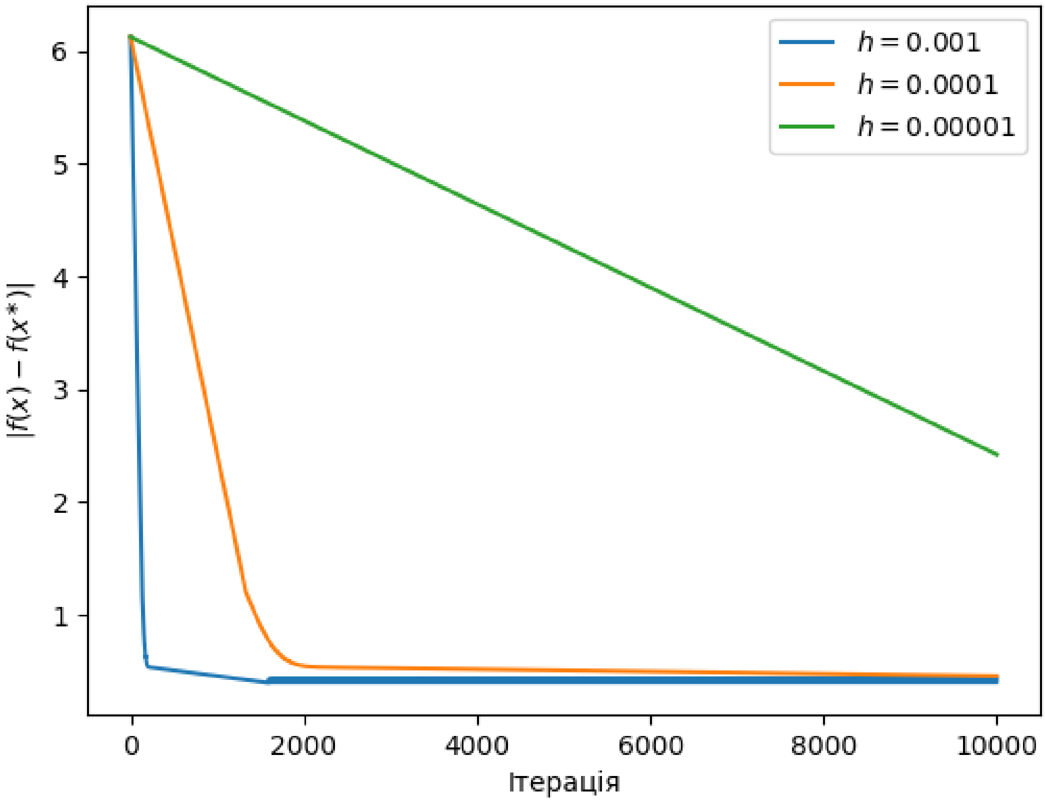

Рис. 2: Постійна довжина кроку

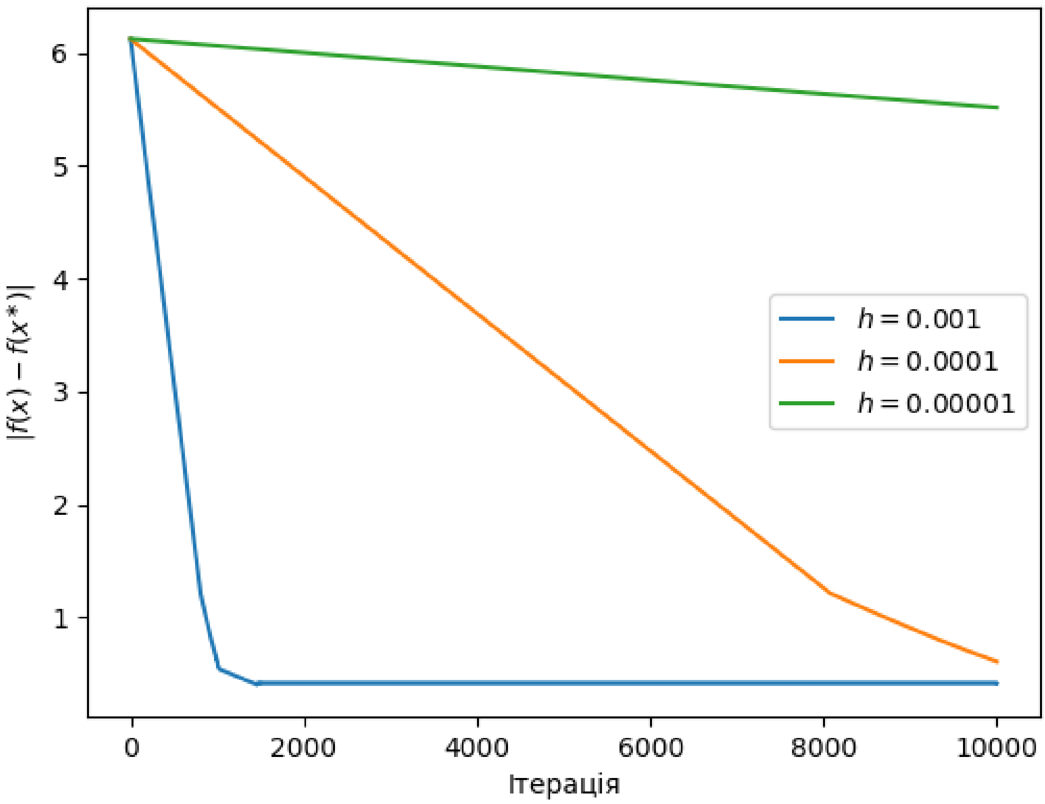

Рис. 3: Сумовні з квадратом кроки

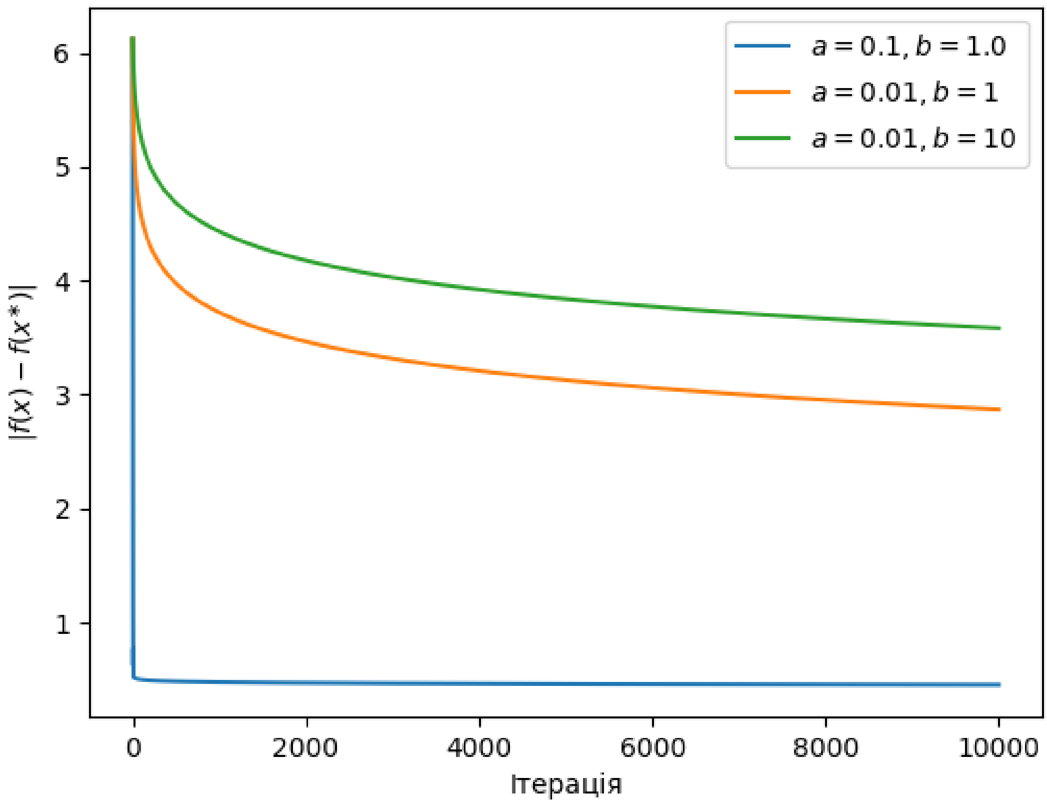

Рис. 4: Кроки, що зменшуються