Домашня робота №2

27.01.2025

№2.7

$f(n) = 3n^2 - n + 4$

$g(n) = n\log n + 5$

Покажемо, що $f = O(n^2)$

$3n^2 - n + 4 \le Cn^2$

Припустимо, що $C = 4$

Тоді

$3n^2 - 4n^2 - n + 4 \le 0$

$-n^2 - n + 4 \le 0$

$n^2 + n - 4 \ge 0$

Можемо дібрати таке значення n_0: $n_0 = 2$.

Отже, вибір складності є

коректним

Покажемо, що $g = O(n\log n)$

$n\log n + 5 \le Cn\log n$

Припустимо, що $C = 2$.

$n\log n + 5 \le 2n\log n$

$-n\log n + 5 \le 0$

$n\log n - 5 \ge 0$

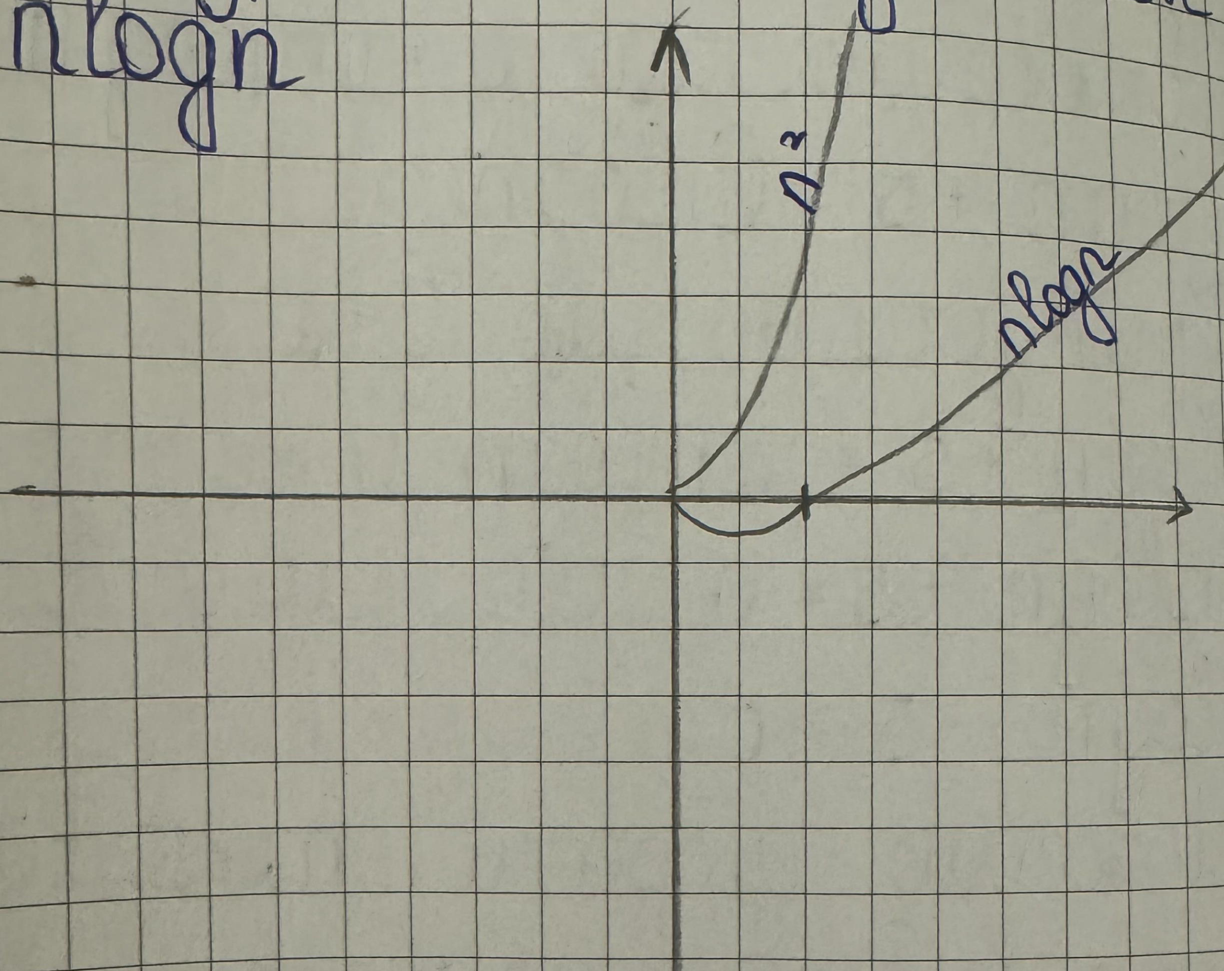
Можемо дібрати: $n_0 = 5$

Отже, вибір складності є коректним (P.S.: будемо вважати, що основа логарифма – e)

Оскільки $f_1 + f_2 = O(\max(g_1; g_2))$, якщо $f_1 = O(g_1)$, $f_2 = O(g_2)$

Тому $f + g = O(n^2)$.

n^2 зростає швидше, ніж $n\log n$



№ 2.10

```
def f(n):
    sum = 0
    for i in range(1, n+1):
        sum += i
    return sum
```

2 - $O(1)$

3 - $O(n)$

4 - $O(n)$

5 - $O(1)$

Асимптотична оцінка: $O(n)$

Результат: вивід суми арифметичної прогресії з $d = 1$ перших n членів

Покращена версія:

застосуємо формулу суми арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

Перепишемо код

```
1) def f(n):
2)     sum = ((1 + n) * 0.5) * n
3)     return sum
```

ДУЖКИ НЕ ОБОВ'ЯЗКОВІ

2 - $O(1)$

3 - $O(1)$

Асимптотична оцінка: $O(1)$

№ 2.11

```
1) def g(n):
2)     sum = 0
3)     for i in range(1, n+1):
4)         sum = sum + i + f(i)
5)     return sum
```

2 - $O(1)$

3 - $O(n)$

4 - $O(n^2)$

5 - O(1)

Асимптотична оцінка: $O(n^2)$

Для суми матимемо:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(j + \sum_{i=1}^{j} i \right)$$

O(1) $\sum_{i=1}^{j} i$ (з минулого прикладу)

$$= \frac{(j+1)j}{2}$$

Отримуємо

$$\sum_{j=1}^{n} \left(j + \frac{(j+1)j}{2} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{(j+3)j}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+3)j =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{n} j =$$

$$= \frac{\overset{n^2-n}{n(n+1)}(2n+1)}{12} + \frac{3n(n+1)}{4} =$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 9n^2 + 9n}{12} =$$

$$= \frac{2n^3 + 12n^2 + 10n}{12} = \frac{n^3 + 6n^2 + 5n}{6}$$

Використаємо цю формулу:

```
1) def g(n):
2)     sum = ((n*n*n) + (6*n*n) +
       + (5*n)) * (1 / 6)
3)     return sum
```

2 - $O(1)$

3 - $O(1)$

Асимптотична оцінка: $O(1)$

№ 2.12

```
1) def h(n):
2)     return f(n) + g(n)
```

2 - $O(n) + O(n^2)$

Асимптотична оцінка:

$O(n^2)$

Використовуючи формули з 2.10 і 2.11:

```
1) def h(n)
2)     sum = ((n*n*n) + (9*n*n) + (8*n)) * (1/6)
3)     return sum
```

2 - $O(1)$

3 - $O(1)$

Асимптотична оцінка: $O(1)$

№ 2.13

a)

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n = 0 \\ T(n-1) + O(1), & n \geq 1 \end{cases}$$

$$T(n-1) \leq T(n-2) + C + C =$$

$$= T(n-2) + C(2)$$

Остання ітерація:

$$\overbrace{T(n-n)}^{=O(1)} + \quad = O(1) + O(n) =$$

$$= O(n)$$

d) $T(n) = \begin{cases} O(1), n \le a, a > 1 \\ aT(n-a) + O(1), n > a \end{cases}$

$aT(n-a) + C \le a(aT(n-2a) + C) + C = a^2 T(n-2a) + C(a+1) \le$
$\le a(a^2 T(n-3a) + C(a+1)) + C =$
$= a^3 T(n-3a) + C(a^2 + a + 1)$

Остання ітерація:

$T(n - \lceil \frac{n}{a} \rceil) \overset{=O(1)}{=} a^n \cdot O(1) + O($

Загальна формула

$a^k T(n-ka) + C(\sum_{i=0}^{k} a^i) -$

геометрична прогресія

$C \cdot \frac{(1 - a^{ceil(\frac{n}{a})})}{1-a}$

а буде в степені $\frac{n}{a}$, в
адже саме стільки разів

зможе виконатися програма

У формулі $C\left(\frac{1-a^{ceil(\frac{n}{a})}}{1-a}\right)$ a може досягти найбільшого степіню $a^{[\frac{n}{a}]}$, тому можемо обмежити цей коефіцієнт як a^n (адже найгірший випадок буде при a близьке до n)

Тому відповідь: $\Theta(a^n)$

д) $T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n=1 \\ aT([\frac{n}{a}]) + \Theta(1) \end{cases}$

$T(n) = aT([\frac{n}{a}]) + C \le$

$a^2T([\frac{n}{a^2}]) + C(a+1)$

Матимемо аналогічну до минулого прикладу ситуацію, але кількість ітерацій вже буде $\log_a n$

Отримуємо такий найбільший член:

$a^{[\log_a n]}$

$O(a^{[\log_a n]}) = O(n)$

h)

$$aT(n) = \begin{cases} O(1) \\ aT[\frac{n}{a}] + O(n) \end{cases}$$

$$aT([\frac{n}{a}]) + O(n) \le a^2 T[\frac{n}{a}] + an + (n-1)$$

Для залишкового члену матимемо формулу

$$\sum_{i=0}^{[\log_a n]} a^i (n-i) = C_{[\log_a n]} V^{\left(n - \frac{[\log_a n]+1}{2}\right)}$$

Ітерацій так само як і в минулій задачі буде $[\log_a n]$

Тому будемо мати

$\Theta(n \log n)$