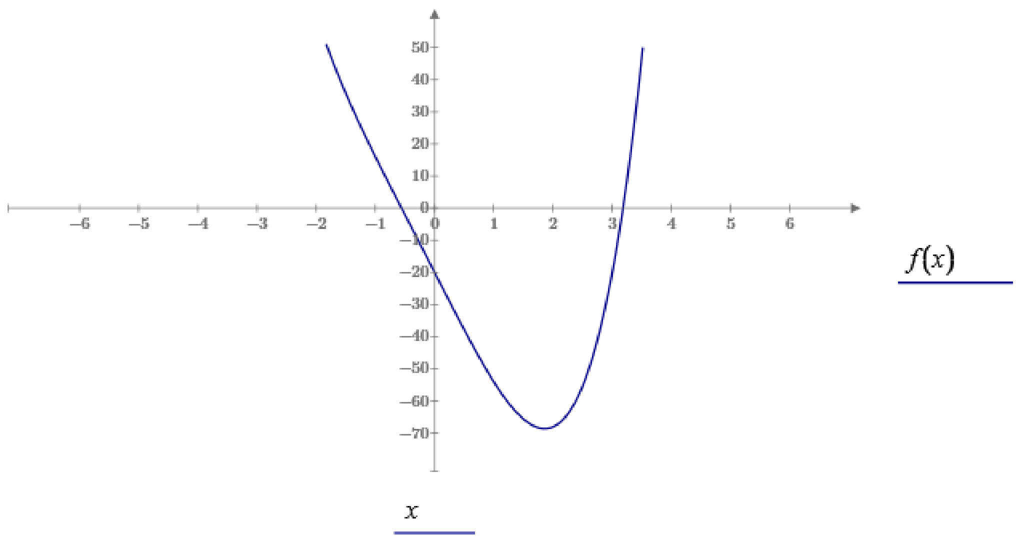
Методи уточнення коренів:
1) поділу відрізка навпіл (метод бісекції, діхотомії);
2) січних (хорд);
3) Ньютона (метод дотичних)

Приклад. Уточнити корінь рівняння $x^4+x^3-36\cdot x-20=0$, відокремлений на відрізку [3: 4].

1) Дослідимо функцію $f(x):=x^4+x^3-36\cdot x-20$

1.1) Побудуємо графік функції



1.2) Знайдемо корені рівняння $x^4+x^3-36\cdot x-20=0$ за допомогою функції polyroots

$$v:=\begin{bmatrix}-20\\-36\\0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad X:=\text{polyroots}(v)=\begin{bmatrix}-1.8114-2.8275i\\-1.8114+2.8275i\\-0.5577\\3.1805\end{bmatrix}$$

Отже, даний многочлен має два дійсних корені: від'ємний корінь на відрізку [-1; 0] та додатній на відрізку [3; 4].

2) Метод поділу відрізка навпіл (метод бісекції, діхотомії)

2.1) Методом бісекції уточнимо корінь рівняння $x^4+x^3-36\cdot x-20=0$, відокремлений на відрізку [3: 4]

$f(x):=x^4+x^3-36\cdot x-20$

$\varepsilon:=0.01$

$a:=3 \qquad b:=4$

$root\_x:=\dfrac{a+b}{2}$ - знаходимо середину відрізка [a, b]

$f(a)\cdot f(root\_x)=-938.75$ $\qquad f(a)\cdot f(root\_x)<0$, тому з двох утворених відрізків [a; $root\_x$] та [$root\_x$, b] залишаємо відрізок [a; $root\_x$], покладаючи b= $root\_x$

$b:=root\_x=3.5$

$|b-a|=0.5$

$|b-a|<\varepsilon=0$ - критерій завершення процесу уточнення кореня не виконується, оскільки $|b-a|>\varepsilon$

$a=3$ $b=3.5$

$root\_x := \frac{a+b}{2}$

$f(a)\cdot f(root\_x) = -177.8906$ $f(a)\cdot f(root\_x)$ <0, залишаємо відрізок [a; $root\_x$], покладаючи b=$root\_x$

$b := root\_x = 3.25$ $|b-a| = 0.25$ $|b-a| < \varepsilon = 0$

$a=3$ $b=3.25$

$root\_x := \frac{a+b}{2}$

$f(a)\cdot f(root\_x) = 132.2998$ $f(a)\cdot f(root\_x)$ >0, залишаємо відрізок [$root\_x$, b] , покладаючи a=$root\_x$

$a := root\_x = 3.125$ $|b-a| = 0.125$ $|b-a| < \varepsilon = 0$

$a=3.125$ $b=3.25$

$root\_x := \frac{a+b}{2}$

$f(a)\cdot f(root\_x) = -5.7172$

$b := root\_x = 3.1875$ $|b-a| = 0.0625$ $|b-a| < \varepsilon = 0$

$a=3.125$ $b=3.1875$

$root\_x := \frac{a+b}{2}$

$f(a)\cdot f(root\_x) = 19.4678$

$a := root\_x = 3.1563$ $|b-a| = 0.0313$ $|b-a| < \varepsilon = 0$

$a=3.1563$ $b=3.1875$

$root\_x := \frac{a+b}{2}$

$f(a)\cdot f(root\_x) = 3.109$

$a := root\_x = 3.1719$ $|b-a| = 0.0156$ $|b-a| < \varepsilon = 0$

$a=3.1719$ $b=3.1875$

$root\_x := \frac{a+b}{2}$

$f(a)\cdot f(root\_x) = 0.106$

$\varepsilon = 0.01$

$a := root\_x = 3.1797$ $|b-a| = 0.0078$ $|b-a| < \varepsilon = 1$ корінь знайдено з точністю ε

Перевірка. Порівняємо корінь рівняння, уточнений методом бісекції, з коренем, знайденим за допомогою функції polyroots

$root\_x = 3.1797 \qquad f(root\_x) = -0.1004$

$X_4 = 3.1805 \qquad f(X_4) = 0$

2.2) Задамо функцію, яка реалізує метод бісекції:

```
Method_bisection(f, a, b, ε) :=  if f(a)·f(b) > 0
                                     return "Відрізок [a,b] визначено невірно"
                                     break
                                 c ← (a+b)/2
                                 if f(c) = 0
                                     return c
                                     break
                                 n ← 0
                                 while 1
                                     root_x ← (a+b)/2
                                     if f(a)·f(root_x) < 0
                                         b ← root_x
                                     else
                                         a ← root_x
                                     n ← n+1
                                     if |b−a| < ε
                                         break
                                 return [n, root_x]
```

n - кількість ітерацій

$root\_x$ - корінь рівняння, обчислений методом бісекцій

$X_4 = 3.1805$ - корінь, знайдений за допомогою функції polyroots

$Method\_bisection(f, 3, 4, 0.0001) = \begin{bmatrix} 14 \\ 3.1805 \end{bmatrix} \qquad root\_x1 := 3.1805 \quad f(root\_x1) = -4.3322 \cdot 10^{-4}$

$X_3 = -0.5577$ - корінь, знайдений за допомогою функції polyroots

$Method\_bisection(f, -1, 0, 0.0001) = \begin{bmatrix} 14 \\ -0.5577 \end{bmatrix} \qquad root\_x2 := -0.5577 \quad f(root\_x2) = 4.7818 \cdot 10^{-4}$

clear(x)

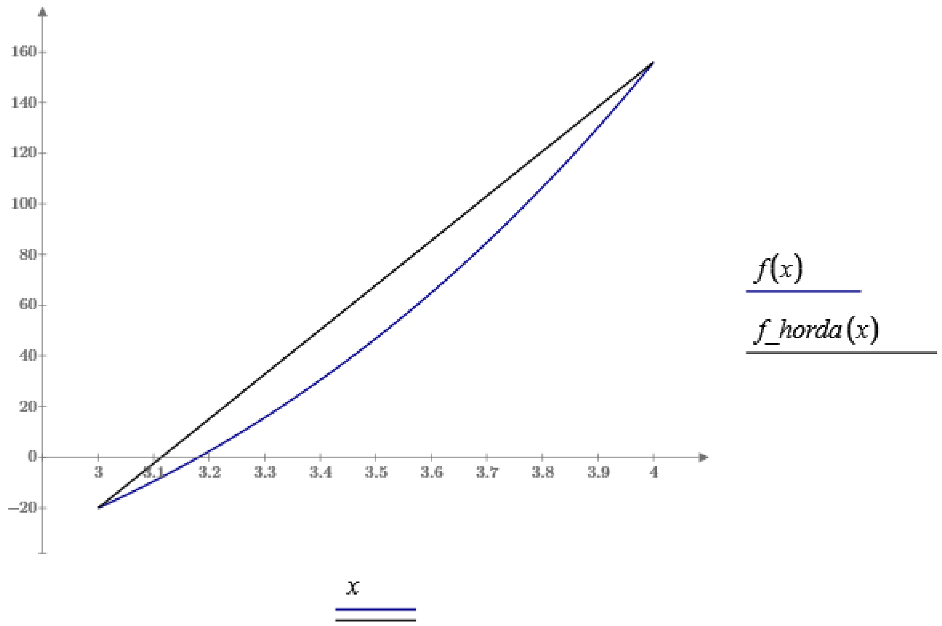
3) Метод січних   або хорд

3.1) Побудуємо графік даної функції $f(x) = x^4 + x^3 - 36 \cdot x - 20$ на відрізку [3; 4]   та хорду, що проходить через точки (a, f(a)) та (b, f(b))

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-f(3)}{f(4)-f(3)}$ або $\frac{y+20}{176} = \frac{x-3}{1}$ або $y = 176 \cdot (x-3) - 20$

$f\_horda(x) := 176 \cdot x - 548$

$x := a, a + 0.01 .. b$



3.2) Методом хорд уточнимо корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36 \cdot x - 20$ =0, відокремлений на відрізку [3: 4]

$\mathbf{clear}(x)$ clear(x, y, ...) - функція очистки змінних

$f(x) := x^4 + x^3 - 36 \cdot x - 20$ $a := 3$ $b := 4$ - даний відрізок [a, b]

$f'(x) \rightarrow 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 36$ - похідна 1-го порядку

$f''(x) \rightarrow 12 \cdot x^2 + 6 \cdot x$ - похідна 2-го порядку

Візьмемо довільну точку на відрізку [3; 4], наприклад середину відрізка   x=3.5

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{a+b}{2}\right) = 28938$ $\mathrm{sign}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = 1$ тобто $f(3.5) \cdot f''(3.5)$ >0

Оскільки $f(x) \cdot f''(x)$ >0, то **нерухливою є права границя** відрізку [a; b], тобто **точка b**, зафіксуємо її як початкову: x0=b=4, тоді x1=a=3

$x0 := b = 4$ $\varepsilon := 0.01$ - точність

$x1 := a = 3$

$x2 := x1 - \frac{f(x1)}{f(x1) - f(x0)} \cdot (x1 - x0) = 3.1136$ $|x2 - x1| = 0.1136$ $|x2 - x1| < \varepsilon = 0$

$$x3 := x2 - \frac{f(x2)}{f(x2) - f(x0)} \cdot (x2 - x0) = 3.1564 \qquad |x3 - x2| = 0.0428 \qquad |x3 - x2| < \varepsilon = 0$$

$$x4 := x3 - \frac{f(x3)}{f(x3) - f(x0)} \cdot (x3 - x0) = 3.1719 \qquad |x4 - x3| = 0.0155 \qquad |x4 - x3| < \varepsilon = 0$$

$$x5 := x4 - \frac{f(x4)}{f(x4) - f(x0)} \cdot (x4 - x0) = 3.1775 \qquad |x5 - x4| = 0.0055 \qquad |x5 - x4| < \varepsilon = 1 \qquad \varepsilon = 0.01$$

корінь знайдено з точністю ε

Перевірка. Порівняємо корінь рівняння, уточнений методом бісекції, з коренем, знайденим за допомогою функції polyroots

$root\_x := 3.1775 \qquad X_4 = 3.1805$

3.3) Задамо функцію, яка реалізує метод хорд:

$$Method\_chord(f, a, b, \varepsilon) := \left\| \begin{array}{l} \text{if } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} x0 \leftarrow a \\ x1 \leftarrow b \end{array} \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} x0 \leftarrow b \\ x1 \leftarrow a \end{array} \right. \\ x\_previous \leftarrow x1 \\ n \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} x\_current \leftarrow x\_previous - \frac{f(x\_previous)}{f(x\_previous) - f(x0)} \cdot (x\_previous - x0) \\ n \leftarrow n + 1 \\ \text{if } |x\_current - x\_previous| < \varepsilon \\ \quad \| \text{break} \\ x\_previous \leftarrow x\_current \end{array} \right. \\ \text{return } \begin{bmatrix} n \\ x\_current \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

n - кількість ітерацій

$x\_current$ - корінь рівняння, обчислений методом хорд з заданою точністю ε

$X_4 = 3.1805$ - корінь, знайдений за допомогою функції polyroots

$$Method\_chord(f, 3, 4, 0.001) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3.1801 \end{bmatrix} \qquad root\_x1 := 3.1801 \quad f(root\_x1) = -4.9637 \cdot 10^{-2}$$

$$Method\_chord(f, 3, 4, 0.0001) = \begin{bmatrix} 8 \\ 3.1805 \end{bmatrix} \qquad root\_x2 := 3.1805 \quad f(root\_x2) = -4.3322 \cdot 10^{-4}$$

$X_3 = -0.5577$ - корінь, знайдений за допомогою функції polyroots

$$Method\_chord(f, -1, 0, 0.0001) = \begin{bmatrix} 3 \\ -0.5577 \end{bmatrix} \qquad root\_x3 := -0.5577 \quad f(root\_x3) = 4.7818 \cdot 10^{-4}$$

4) Метод дотичних або Ньютона

4.1) Методом дотичних (Ньютона) уточнимо корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36 \cdot x - 20 = 0$, відокремлений на відрізку [3: 4]

$\mathbf{clear}(x)$ $\varepsilon := 0.01$ - точність

$f(x) := x^4 + x^3 - 36 \cdot x - 20$ $a := 3$ $b := 4$ - даний відрізок [a, b]

$f'(x) \rightarrow 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 36$ - похідна 1-го порядку

$f''(x) \rightarrow 12 \cdot x^2 + 6 \cdot x$ - похідна 2-го порядку

Візьмемо довільну точку на відрізку [3; 4], наприклад середину відрізка x=3.5 та визначимо знак добутку похідних першого та другого порядку

$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{a+b}{2}\right) = 28938$ $\mathrm{sign}\left(f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = 1$ тобто $f'(3.5) \cdot f''(3.5) > 0$

Оскільки $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то в якості початкової точки (в якій будемо починати проводити дотичні) обираємо **праву границю** відрізку [a; b], тобто **точку b**: x0=b=4.

$x := b = 4$

$x\_root := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 3.4179$ $|x\_root - x| = 0.5821$ $|x\_root - x| < \varepsilon = 0$

$x := x\_root$

$x\_root := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 3.2078$ $|x\_root - x| = 0.2101$ $|x\_root - x| < \varepsilon = 0$

$x := x\_root$

$x\_root := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 3.1809$ $|x\_root - x| = 0.0269$ $|x\_root - x| < \varepsilon = 0$

$x := x\_root$

$x\_root := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 3.1805$ $|x\_root - x| = 0.0004$ $|x\_root - x| < \varepsilon = 1$ $\varepsilon = 0.01$

корінь знайдено з точністю ε

Перевірка. Порівняємо корінь рівняння, уточнений методом дотичних (за 4 кроки), з коренем, знайденим за допомогою функції polyroots

$root\_x := 3.1805$ $f(root\_x) = -0.0004$

$X_4 = 3.1805$ $f(X_4) = 0$

4.2) Задамо функцію, яка реалізує метод Ньютона

```
Method_Newton(f, a, b, ε) :=  if f'((a+b)/2) · f''((a+b)/2) < 0
                                  x_previous ← a
                              else
                                  x_previous ← b
                              n ← 0
                              while 1
                                  x_current ← x_previous − f(x_previous) / f'(x_previous)
                                  n ← n + 1
                                  if |x_current − x_previous| < ε
                                      break
                                  x_previous ← x_current
                              return [n, x_current]
```

$X_4 = 3.1805$ - корінь, знайдений за допомогою функції polyroots

$Method\_Newton(f, 3, 4, 0.0001) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3.1805 \end{bmatrix}$ $\quad root\_x1 := 3.1805 \quad f(root\_x1) = -4.3322 \cdot 10^{-4}$

$X_3 = -0.5577$ - корінь, знайдений за допомогою функції polyroots

$Method\_Newton(f, -1, 0, 0.0001) = \begin{bmatrix} 3 \\ -0.5577 \end{bmatrix}$ $\quad root\_x2 := -0.5577 \quad f(root\_x2) = 4.7818 \cdot 10^{-4}$