Функції комплексної змінної

доц. І.В. Орловський

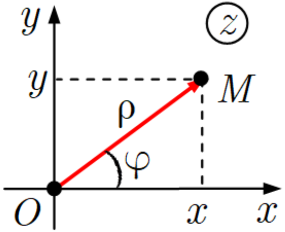
ДЗ. Зробити короткий конспект з відповідної теми 2-го семестру

2. Множини на комплексній площині

Комплексне число $z = x + iy$ зображають на площині Oxy точкою $M(x;y)$ або радіусом-вектором $\overline{OM}$. Це встановлює взаємну однозначну відповідність між множиною комплексних чисел $\mathbb{C}$ і множиною точок площини $\mathbb{R}^2$. Площину, на якій зображають комплексні числа, називають комплексною площиною і позначають $\mathbb{C}$.

Віддаль між двома точками $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ комплексної площини визначають за формулою

$$\rho\,(z_1,\, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Означення 1

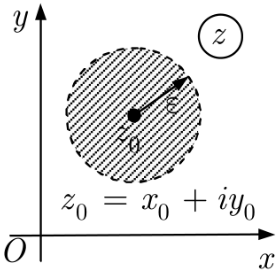
Зафіксуємо деяке число $\varepsilon > 0$. ε*-околом точки* $z_0 \in \mathbb{C}$ *називають множину всіх точок* $z \in \mathbb{C}$, *які задовольняють нерівності*

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$

і позначають $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Помітимо, що ε-окіл точки z_0 є відкритим кругом із центром в точці z_0 радіусом ε. Дійсно,

$$|z - z_0| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

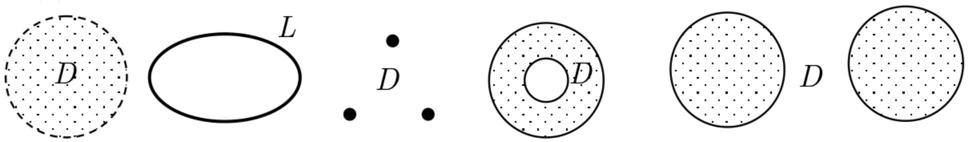


Означення 2

Точку $M \in D$ називають **внутрішньою точкою множини** *D, якщо існує такий окіл цієї точки, що повністю міститься у множині D*

Означення 3

Множину D називають **відкритою**, *якщо кожна її точка є внутрішньою.*

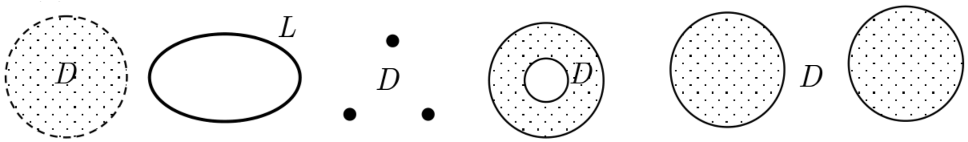


Означення 4

Множину D називають зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати неперервною кривою (зокрема ламаною), що повністю лежить у множині D.*

Означення 5

Відкриту зв'язну множину називають областю*.*



Означення 6

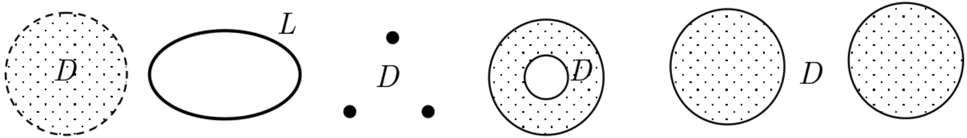
*Точку M називають **межовою точкою множини** D, якщо будь-який окіл цієї точки містить як точки, що належать множині D так і точки, що їй не належать. Множину всіх межових точок множини називають **межею множини** D і позначають ∂D.*

Означення 7

*Точку M називають **граничною точкою множини** D, якщо будь-який окіл цієї точки містить нескінченно багато точок множини D.*

Означення 8

*Об'єднання множини D і множини всіх її граничних точок називають **замиканням множини** D і позначають $\overline{D}$.*



Означення 9

Множину D називають **замкненою**, *якщо вона містить усі свої граничні точки, тобто збігається зі своїм замиканням.*

Означення 10

Замкнену криву без самоперетинів називають **контуром**.

Будь-який контур розбиває площину на дві різні області і є межею кожної з них. Одна з областей – внутрішність контуру є обмеженою, а інша – зовнішність контуру – необмежена.

Означення 11

Область D називають однозв'язною, якщо для будь-якого контуру, що належить D, його внутрішність також буде належати D.

Послідовність комплексних чисел

Розглянемо послідовність $\{z_n\}$ комплексних чисел

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots\ .$$

Тоді для кожного $n \geq 1$

$$z_n = x_n + iy_n,\ \ x_n, y_n \in \mathbb{R},$$

тобто послідовності $\{z_n\}$ можна поставити у відповідність дві послідовності дійсних чисел $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, які її однозначно задають.

Означення 12

*Комплексне число $A = a + ib$ називають **граничею послідовності** комплексних чисел $\{z_n\}$ (позначають $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність*

$$|z_n - A| < \varepsilon \left(z_n \in U_\varepsilon(A)\right).$$

З означення випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=\lim_{n\to\infty}z_n=A=a+ib \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=a \wedge \lim_{n\to\infty}y_n=b.$$

Останнє означає, що властивості границі послідовності комплексних чисел будуть аналогічними відповідним властивостям дійсних чисел.

Означення 13

Якщо для будь-якого числа $M>0$ існує таке N, що для всіх $n>N$, буде виконуватись нерівність

$$|z_n|>M,$$

то послідовність $\{z_n,\ n\geq 1\}$ називають збіжною до нескінченно віддаленої точки (до нескінченності) і позначають

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty.$$

Окіл нескінченно віддаленої точки

Доповнюючи комплексну площину так чином заданою нескінченно віддаленою точкою $z = \infty$ дістають розширену комплексну площину.

Означення 14

R-околом нескінченно віддаленої точки називають сукупність усіх точок $z \in \mathbb{C}$, які задовольняють нерівності

$$|z| > R,$$

тобто сукупність усіх точок z, які лежать за межами круга досить великого радіуса R з центром у початку координат.

Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, – неперервні або неперервно диференційовні дійсні функції. Тоді комплексна функція

$$z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in T,$$

визначає на комплексній площині $\mathbb{C}$ неперервну або гладку криву L, яку на площині Oxy задають параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in T.$$

3. Функції комплексної змінної

Нехай задано дві множини D та E, елементами яких є комплексні числа

$$z = x + iy \in D, \quad w = u + iv \in E.$$

Якщо кожному числу $z \in D$ за деяким правилом f поставлено у відповідність певне число $w \in E$, то кажуть, що на множині D задано однозначну функцію комплексної змінної

$$w = f(z).$$

Якщо кожному $z \in D$ відповідає декілька значень w, то функцію $w = f(z)$ називають багатозначною.

Функція $w = f(z)$ відображає комплексні числа $z = x + iy$ в комплексні числа $w = u + iv$, тобто

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Отже, задавання функції комплексної змінної $w = f(z)$ буде рівносильне задаванню двох функцій

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

дійсних змінних x, y.

Функцію $u(x, y) = \mathrm{Re}\ w$ називають дійсною частиною функції $w = f(z)$, а $v(x, y) = \mathrm{Im}\ w$ – її уявною частиною.

Приклад 1

Знайти дійсну та уявну частини функції $w = z^2 - 2\overline{z} + i$.

4. Границя функції комплексної змінної

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, за винятком, можливо, самої точки z_0.

Означення 15

Комплексне число $A = a + ib$ називають границею функції $f(z)$ в точці z_0 (або при $z \to z_0$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх точок z, таких що $|z - z_0| < \delta$ та $z \neq z_0$ виконано нерівність

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

і записують $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Зауважимо, що функція $w = f(z)$ прямує до границі A незалежно від способу наближення точки z до точки z_0.

Існування границі

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A = a + ib$$

рівносильно існуванню наступних двох границь дійсних функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b.$$

ДЗ. записати властивості функцій, що мають скінченні границі

Означення 16

Функцію $w = f(z)$ задану на множині D, називають неперервною в точці $z_0 \in D$, якщо

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функція комплексної змінної
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$
неперервна у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді й лише тоді, коли її дійсна $u(x, y)$ та уявна $v(x, y)$ частини є функціями, які неперервні в точці (x_0, y_0).
Функцію $w = f(z)$ називають неперервною на множині D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.