***Завдання*. Обчислити власні значення та власні вектори матриці А методом Данилевського**

$$A := \begin{bmatrix} 2.2 & 1 & 0.5 & 2 \\ 1 & 1.3 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 1.6 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Знаходження власних значень матриці А

1.1) Зведемо матрицю А до нормальної форми Фробеніуса

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E - одинична матриця

Етап 1

$A_{4,3} = 1.6$ $\quad A_{4,3}$ - елемент матриці *А*, відмінний від нуля

$$M3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{A_{4,1}}{-A_{4,3}} & \frac{A_{4,2}}{-A_{4,3}} & \frac{1}{A_{4,3}} & \frac{A_{4,4}}{-A_{4,3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.25 & -0.625 & 0.625 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знаходимо обернену матрицю засобами Mathcad

$$M3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знаходимо обернену матрицю за формулами

$$M3\_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M3\_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1.6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A1 := M3^{-1} \cdot A \cdot M3 \qquad A1 = \begin{bmatrix} 1.575 & 0.6875 & 0.3125 & 1.375 \\ -1.5 & 0.05 & 1.25 & -1.5 \\ 1.45 & 4.125 & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Етап 2

$A1_{3,2} = 4.125$ $\quad A_{3,2}$ - елемент матриці *А1*, відмінний від нуля

$$M2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A1_{3,1}}{-A1_{3,2}} & \frac{1}{A1_{3,2}} & \frac{A1_{3,3}}{-A1_{3,2}} & \frac{A1_{3,4}}{-A1_{3,2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3515 & 0.2424 & -1.0606 & -0.6812 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.45 & 4.125 & 4.375 & 2.81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A2 := M2^{-1} \cdot A1 \cdot M2 \qquad A2 = \begin{bmatrix} 1.3333 & 0.1667 & -0.4167 & 0.9067 \\ -4.3267 & 4.6667 & 7.1433 & -5.0133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Етап 3

$A2_{2,1} = -4.3267$ $A_{2,1}$ - елемент матриці *A2*, відмінний від нуля

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{A2_{2,1}} & \frac{A2_{2,2}}{-A2_{2,1}} & \frac{A2_{2,3}}{-A2_{2,1}} & \frac{A2_{2,4}}{-A2_{2,1}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M1 = \begin{bmatrix} -0.2311 & 1.0786 & 1.651 & -1.1587 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M1^{-1} = \begin{bmatrix} -4.3267 & 4.6667 & 7.1433 & -5.0133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A3 := M1^{-1} \cdot A2 \cdot M1 \qquad A3 = \begin{bmatrix} 6 & 0.2 & -12.735 & 2.7616 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Отримали матрицю *P*, що має **нормальну форму Фробеніуса**.
Матриця P - матриця, **подібна** до матриці A

$$P := A3 = \begin{bmatrix} 6 & 0.2 & -12.735 & 2.7616 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2) Знаходимо власні значення як корені характеристичного рівняння

Перший рядок матриці *P* визначає коефіцієнти при степенях λ характеристичного рівняння

$$\lambda^4 - 6 \cdot \lambda^3 - 0.2 \cdot \lambda^2 + 12.735 \cdot \lambda - 2.7616 = 0$$

$$v := \begin{bmatrix} -2.7616 \\ 12.735 \\ -0.2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda := \mathrm{polyroots}(v)$$

- знаходження коренів характеристичного рівняння

$$\lambda = \begin{bmatrix} -1.4201 \\ 0.2226 \\ 1.5454 \\ 5.652 \end{bmatrix}$$

- власні значення матриці A, знайдені методом Данилевського

Перевірка. Порівняємо власні значення, знайдені методом Данилевського та власні значення, знайдені засобами Mathcad

$$\mathrm{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 5.652 \\ 1.5454 \\ 0.2226 \\ -1.4201 \end{bmatrix}$$

- власні значення матриці A, знайдені за допомогою вбудованої в Mathcad функції $\mathrm{eigenvals}(A)$

2) Знаходження власних векторів матриці A

2.1) Знайдемо власні вектори матриці P

$$\lambda 1 := \lambda_1 = -1.4201 \qquad y1 := \begin{bmatrix} \lambda 1^3 \\ \lambda 1^2 \\ \lambda 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y1 = \begin{bmatrix} -2.8638 \\ 2.0166 \\ -1.4201 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda2 := \lambda_2 = 0.2226 \qquad y2 := \begin{bmatrix} \lambda2^3 \\ \lambda2^2 \\ \lambda2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y2 = \begin{bmatrix} 0.011 \\ 0.0496 \\ 0.2226 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda3 := \lambda_3 = 1.5454 \qquad y3 := \begin{bmatrix} \lambda3^3 \\ \lambda3^2 \\ \lambda3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y3 = \begin{bmatrix} 3.691 \\ 2.3883 \\ 1.5454 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda4 := \lambda_4 = 5.652 \qquad y4 := \begin{bmatrix} \lambda4^3 \\ \lambda4^2 \\ \lambda4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y4 = \begin{bmatrix} 180.5568 \\ 31.9455 \\ 5.652 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2) Обчислимо матрицю подібності S=M3*M2*M1

$$S := M3 \cdot M2 \cdot M1 \qquad S = \begin{bmatrix} -0.2311 & 1.0786 & 1.651 & -1.1587 \\ 0.0812 & -0.1367 & -1.641 & -0.2739 \\ 0.2381 & -1.2628 & -0.4132 & 0.3696 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3) Знайдемо власні вектори матриці А

Перевірка:

$$x1 := S \cdot y1 = \begin{bmatrix} -0.6663 \\ 1.548 \\ -2.2723 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x1 - \lambda1 \cdot x1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x2 := S \cdot y2 = \begin{bmatrix} -0.7402 \\ -0.6451 \\ 0.2176 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x2 - \lambda2 \cdot x2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x3 := S \cdot y3 = \begin{bmatrix} 3.1157 \\ -2.8365 \\ -2.4059 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x3 - \lambda3 \cdot x3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x4 := S \cdot y4 = \begin{bmatrix} 0.8975 \\ 0.7531 \\ 0.69 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot x4 - \lambda4 \cdot x4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Перевірка. Порівняємо власні вектори, знайдені методом Данилевського та власні вектори, знайдені засобами Mathcad

Власні вектори матриці А, знайдені засобами Mathcad:

$$\mathrm{eigenvecs}(A) = \begin{bmatrix} 0.5317 & 0.6289 & -0.5219 & 0.222 \\ 0.4462 & -0.5726 & -0.4549 & -0.5159 \\ 0.4088 & -0.4857 & 0.1534 & 0.7573 \\ 0.5925 & 0.2019 & 0.7051 & -0.3333 \end{bmatrix}$$

- матриця, що містить всі нормовані власні вектори матриці А або

$$\text{eigenvec}(A,\lambda 1)=\begin{bmatrix}-0.222\\0.5159\\-0.7573\\0.3333\end{bmatrix}\quad \text{eigenvec}(A,\lambda 2)=\begin{bmatrix}-0.5219\\-0.4549\\0.1534\\0.7051\end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,\lambda 3)=\begin{bmatrix}-0.6289\\0.5726\\0.4857\\-0.2019\end{bmatrix}\quad \text{eigenvec}(A,\lambda 4)=\begin{bmatrix}-0.5317\\-0.4462\\-0.4088\\-0.5925\end{bmatrix}$$

- власні вектори, що відповідають власним значенням $\lambda 1$, $\lambda 2$, $\lambda 3$, $\lambda 4$

Нормовані власні вектори матриці A, знайдені методом Данилевського:

$$\frac{x1}{|x1|}=\begin{bmatrix}-0.222\\0.5159\\-0.7573\\0.3333\end{bmatrix}\quad \frac{x2}{|x2|}=\begin{bmatrix}-0.5219\\-0.4549\\0.1534\\0.7051\end{bmatrix}\quad \frac{x3}{|x3|}=\begin{bmatrix}0.6289\\-0.5726\\-0.4857\\0.2019\end{bmatrix}\quad \frac{x4}{|x4|}=\begin{bmatrix}0.5317\\0.4462\\0.4088\\0.5925\end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,\lambda 1)-\frac{x1}{|x1|}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,\lambda 2)-\frac{x2}{|x2|}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,\lambda 3)+\frac{x3}{|x3|}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,\lambda 4)+\frac{x4}{|x4|}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$