Основні елементарні функції комплексної змінної

доц. І.В. Орловський

1. Показникова функція

Показникову функцію e^z для будь-якого комплексного числа $z = x + iy$ означують співвідношенням

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Отже,

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y;$$
$$|e^z| = e^x, \quad \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

При $x = 0$ одержимо відому формулу Ейлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

При $y = 0$ означення показникової функції комплексної змінної узгоджується з означенням показникової функції дійсної змінної.

Основні властивості показникової функції

I (теорема додавання)

Для будь-яких z_1 та z_2

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Доведення

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right)\cdot e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) = \\ &= e^{x_1+x_2}\left(\cos\left(y_1+y_2\right) + i\sin\left(y_1+y_2\right)\right) = \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

II Функція e^z є періодичною з основним періодом $2\pi i$, тобто

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Доведення

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z.$$

III Функція e^z є неперервною на всій комплексні площині $\mathbb{C}$.

IV Для всіх $z \in \mathbb{C}$ значення $e^z \neq 0$.

Логарифмічну функцію комплексної змінної означують як обернену до показникової функції: число w називають логарифмом числа $z \neq 0$, якщо

$$z = e^w,$$

позначається $w = \operatorname{Ln} z$. Оскільки значення показникової функції $e^w = z$ завжди є відмінним від нуля, то логарифмічна функція визначена на всій комплексній площині, окрім точки $z = 0$. Покладемо

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad w = u + iv.$$

Тоді, виходячи з означення логарифма, будемо мати

$$r \cdot e^{i\varphi} = e^{u+iv} \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot e^{i\varphi} = e^u \cdot e^{iv},$$

звідки

$$r = e^u \quad \Rightarrow \quad u = \ln|z|;$$
$$e^{i\varphi} = e^{iv} \quad \Rightarrow \quad v = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Отже,

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \;\; k \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

тобто логарифмічна функція є багатозначною функцією, яка визначена для всіх $z \neq 0$.
Однозначну гілку цієї функції можна отримати, підставивши у формулу (1) замість k певне значення.
Функцію, яка одержується з (1) при $k = 0$, називають головним значенням логарифму $\operatorname{Ln} z$ і позначають

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Тоді

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо z –– дійсне додатне число, тоді $\arg z = 0$ і $\ln z = \ln|z|$.
Отже, головне значення логарифму дійсного додатного числа співпадає зі звичайним натуральним логарифмом цього числа.

Логарифмічна функція $w = \operatorname{Ln} z$ має відомі властивості логарифму дійсної змінної.

I $\quad \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$

II $\quad \operatorname{Ln} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$

III $\quad \operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z;$

IV $\quad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$

ДЗ (оптимістам). Довести

За допомогою показникової та логарифмічної функцій комплексної змінної можна означити загальну показникову функцію

$$a^z = e^{z \cdot \operatorname{Ln} a}, \ a \neq 0.$$

3. Степенева функція

I Якщо $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то степеневу функцію комплексної змінної означують рівністю

$$w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Функція z^n, в цьому випадку є однозначною. Вона визначена та неперервна для всіх $z \in \mathbb{C}$.

II Якщо $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Отже, функція $w = \sqrt[n]{z}$ є n-значною. Однозначну гілку цієї функції можна виділити, підставивши замість k певне значення.

III Загальну степеневу функцію означують рівністю

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}.$$

Функція z^α означена для всіх $z \neq 0$, є багатозначною функцією.

4. Тригонометричні функції

Тригонометричні функції комплексної змінної z означують рівностями:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Властивості $\sin z$ та $\cos z$:

1. визначені та неперервні та всій $z \in \mathbb{C}$;
2. при дійсних $z = x \in \mathbb{R}$ співпадають з тригонометричними функціями $\sin x$ та $\cos x$ дійсної змінної;
3. є періодичними з періодом 2π;
4. $\sin z$ – непарна функція, а $\cos z$ – парна функція.
5. необмежені у комплексній площині:

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \sin z = \infty, \qquad \lim_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} \cos z = \infty.$$

1. функція $\operatorname{tg} z$ визначена та неперервна для всіх $z \in \mathbb{C}$, окрім точок $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, а функція $\operatorname{ctg} z$ – для всіх $z \in \mathbb{C}$, окрім точок $z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2. при дійсних $z = x \in \mathbb{R}$ співпадають з тригонометричними функціями $\operatorname{tg} x$ та $\operatorname{ctg} x$ дійсної змінної;
3. є періодичними з періодом π;
4. є непарними функціями;

Зазначимо також, що тригонометричні функції комплексної змінної зберігають відомі співвідношення тригонометричних функцій дійсної змінної (ДЗ. виписати (див., наприклад, [3])).

5. Гіперболічні функції

Гіперболічні функції означують рівностями

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

З означень випливає, що функції $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ є періодичними з періодом $2\pi i$, а функції $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ є періодичними з періодом πi.

Гіперболічні функції зв'язані із тригонометричними функціями наступними рівностями (отримуються підстановкою у вказані функції iz замість z або навпаки):

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \cos iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz. \end{aligned}$$

Завдяки отриманому зв'язку з тригонометричних співвідношень можна отримати аналогічні співвідношення для гіперболічних функцій (ДЗ. виписати (див., наприклад, [3])).

6. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції

Число w називають арксинусом числа z (позначають $w = \operatorname{Arcsin} z$), якщо $z = \sin w$. Використовуючи означення синуса, матимемо:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad \Rightarrow \quad e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Оскільки корінь квадратний є двозначною функцією, то в останній рівності мінус можна не писати. Отже,

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Аналогічно означують інші обернені тригонометричні функції:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}, \quad z \neq \pm i;$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}, \quad z \neq \pm i.$$

Всі обернені тригонометричні функції є нескінченнозначними функціями.

Функції, обернені до гіперболічних функцій, позначають відповідно $w = \operatorname{Arsh} z$ (ареасинус), $w = \operatorname{Arch} z$ (ареакосинус), $w = \operatorname{Arth} z$ (ареатангенс), $w = \operatorname{Arcth} z$ (ареакотангенс).
Обернені гіперболічні функції означують рівностями

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$$
$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$
$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1;$$
$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}, z \neq \pm 1.$$

Усі ці функції нескінченнозначними.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.