ЛЕКЦІЯ 8

ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розглянемо основні, найбільш поширені в практичних застосуваннях розподіли випадкових величин та їх числові характеристики, обчислення яких для дискретних випадкових величин суттєво спрощується при застосуванні твірної функції для випадкової величини.

8.1. Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл — це один із базових дискретних розподілів ймовірностей, який описує кількість успіхів у послідовності з фіксованого числа незалежних випробувань, де кожне випробування має лише два можливі результати: успіх або невдача.

Біноміальний закон розподілу виникає в схемі Бернуллі, коли проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова подія A може або відбутися з сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$, а випадкова величина X — кількість появ події A в цих n випробуваннях.

Дискретна величина X приймає цілі невід'ємні значення $x_i = i$ $(i = 0,1,2,\dots,m,\dots n)$ з ймовірностями $p_i = P_n\{x_i = i\} = P_n(i)$, які обчислюються за формулою Бернуллі (8.1):

$$P_n(i) = C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}, \tag{8.1}$$

Для отримання формули (8.1) в формулі (4.1) лекції 4 підставляємо $m = i$.

Таким чином, величина X має ряд розподілу (табл. 8.1):

Таблиця 8.1. *Ряд розподілу випадкової величини X, що має біноміальний розподіл*

i	0	1	2	…	m	…	n
$P_n(i)$	q^n	$C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	…	$C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$	…	p^n

Ймовірності $P_n(i)$ дорівнюють відповідним членам розкладу n-го степеню бінома (8.2)

$$\sum_{i=0}^{n} P_n(i) = (q+p)^n = q^n + C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1} + C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \dots + C_n^m \cdot p^m \cdot$$
$$\cdot q^{n-m} + \dots + p^n = \sum_{i=1}^{n} \left(C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}\right). \tag{8.2}$$

Очевидно, що біноміальний розподіл коректний, оскільки з (8.2) випливає, що $(q+p)^n = 1^n = 1$, звідки й походить назва цього розподілу.

Властивості біноміального розподілу

1. *Кожне випробування повинно бути незалежним від інших, тобто результат одного випробування не впливає на результат іншого.*

2. *Якщо $p = 0{,}5$, біноміальний розподіл буде симетричним. Якщо $p \neq 0{,}5$, розподіл буде зміщеним в бік більш ймовірного результату (успіху або невдачі).*

3. *Біноміальний розподіл є цілочисловим дискретним розподілом.*

4. *Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини будується за принципом, наведеним в лекції 6.*

5. *Математичне сподівання біноміального розподілу дорівнює* (8.3):

$$M(X) = n \cdot p, \tag{8.3}$$

дисперсія дорівнює (8.4):

$$D(X) = n \cdot p \cdot q \tag{8.4}$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення (8.5):

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}. \tag{8.5}$$

Доведення. Для знаходження основних характеристик $M(X), D(X), \sigma(X)$ біноміального розподілу використовується твірна функція (формула (7.33) лекції 7).

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}\right) \cdot z^i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(C_n^i \cdot (p \cdot z)^i \cdot q^{n-i}\right),$$

яка у відповідності з формулою (8.1) матиме вигляд

$$\varphi(z) = (q + p \cdot z)^n.$$

У випадку біноміального розподілу для отримання твірної функції також можна використати формулу (7.37) лекції 7.

Знайдемо першу похідну по z твірної функції

$$\varphi'(z) = n \cdot (q + p \cdot z)^{n-1} \cdot p$$

та її значення при $z = 1$

$$M(X) = \varphi'(1) = n \cdot (q + p)^{n-1} \cdot p = n \cdot p.$$

Знайдемо другу похідну твірної функції

$$\varphi''(z) = n \cdot (n-1) \cdot (q + p \cdot z)^{n-2} \cdot p^2$$

та її значення при $z = 1$

$$\varphi''(1) = n \cdot (n-1) \cdot (q + p)^{n-2} \cdot p^2 = n \cdot (n-1) \cdot p^2.$$

Тоді одержимо дисперсію

$$D(X) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - \left(\varphi'(1)\right)^2 = n \cdot (n-1) \cdot p^2 + n \cdot p - (n \cdot p)^2 = n \cdot p \cdot q.$$

Тоді, середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}.$$

6. *Математичне сподівання частоти $\frac{i}{n}$ появи події в серії з n незалежних випробувань, в кожному з яких подія настає зі сталою ймовірністю p, дорівнює самій ймовірності p* (8.6).

$$M\left(\frac{i}{n}\right) = p, \tag{8.6}$$

а дисперсія (8.7)

$$D(X) = \frac{p \cdot q}{n}. \tag{8.7}$$

Доведення. Нехай деяка подія в серії з n випробувань настала i разів. Тоді частота настання події $\frac{i}{n}$ є випадковою величиною $\frac{X}{n}$, тобто $\frac{i}{n} = \frac{X}{n}$, де X – випадкова величина, що має біноміальний розподіл. Тоді за властивостями математичного сподівання та дисперсії отримуємо:

$$M\left(\frac{i}{n}\right) = M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot M(X) = \frac{n \cdot p}{n} = p;$$

$$D\left(\frac{i}{n}\right) = D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D(X) = \frac{n \cdot p \cdot q}{n^2} = \frac{p \cdot q}{n}.$$

7. *Мода біноміального розподілу співпадає з найймовірнішим числом і визначається з нерівності* (8.8)

$$n \cdot p - q \leq Mo(X) \leq n \cdot p + p. \tag{8.8}$$

Біноміальний закон розподілу широко використовується в теорії та практиці статистичного контролю якості продукції, при описі функціонування систем масового обслуговування, при моделюванні цін активів, теорії стрільби та в інших областях.

8. *Медіана біноміального розподілу обчислюється у тих випадках, коли її функція розподілу на певному інтервалі* $(a; b]$ *дорівнює* $\frac{1}{2}$, *згідно формули* (6.20) *лекції* 6 $\left(F\left(Me(X)\right) = \frac{1}{2}\right)$.

9. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес біноміального розподілу відповідно дорівнюють* (8.9):

$$As(X) = \frac{1-2\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}};\ Es(X) = \frac{1-6\cdot p\cdot q}{n\cdot p\cdot q}. \tag{8.9}$$

Доведення.

$$\mu_3(X) = M\left(X - M(X)\right)^3 = n\cdot p\cdot q\cdot(1-2\cdot p);$$
$$\sigma(X) = \sqrt{n\cdot p\cdot q};$$
$$\mu_4(X) = M\left(X - M(X)\right)^4 = 3\cdot(n\cdot p\cdot q)^2 + n\cdot p\cdot q\cdot(1-6\cdot p\cdot q);$$
$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{n\cdot p\cdot q\cdot(1-2\cdot p)}{\left(\sqrt{n\cdot p\cdot q}\right)^3} = \frac{1-2\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}};$$
$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{3\cdot(n\cdot p\cdot q)^2 + n\cdot p\cdot q\cdot(1-6\cdot p\cdot q)}{(n\cdot p\cdot q)^2} - 3 = \frac{1-6\cdot p\cdot q}{n\cdot p\cdot q}.$$

Приклад 8.1. *За метеорологічних умов, що склалися в аеропорту, ймовірність своєчасного відправлення кожного рейсу дорівнює* 0,6. *Випадкова величина* X *– кількість своєчасно відправлених рейсів з трьох передбачених розкладом. Скласти ряд розподілу, знайти числові характеристики цієї випадкової величини та коефіцієнт асиметрії та ексцес.*

Розв'язання. Випадкова величина X приймає можливі значення 0,1,2,3, а відповідні ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі при $n = 3; p = 0{,}6;\ q = 0{,}4$:

$$p_0 = P_3(0) = (0{,}4)^3 = 0{,}064;\ p_1 = P_3(1) = C_3^1\cdot(0{,}6)\cdot(0{,}4)^2 = 0{,}288;$$
$$p_2 = P_3(2) = C_3^2\cdot(0{,}6)^2\cdot(0{,}4) = 0{,}432;\ p_3 = P_3(3) = (0{,}6)^3 = 0{,}216.$$

Отже, випадкова величина має ряд розподілу (табл. 8.2).

Таблиця 8.2. *Ряд розподілу*

i	0	1	2	3
$P_n(i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

Математичне сподівання і дисперсія обчислюються за формулами (8.3) і (8.4):

$$M(X) = n\cdot p = 1{,}8;\ D(X) = n\cdot p\cdot q = 0{,}72;\ \sigma(X) \approx 0{,}85.$$

Перевірка:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}064 + 1\cdot 0{,}288 + 2\cdot 0{,}432 + 3\cdot 0{,}216 = 1{,}8;$$
$$M(X^2) = 0^2\cdot 0{,}064 + 1^2\cdot 0{,}288 + 2^2\cdot 0{,}432 + 3^2\cdot 0{,}216 = 3{,}96;$$
$$D(X) = 3{,}96 - 3{,}24 = 0{,}72.$$

Обчислимо коефіцієнт асиметрії та ексцес за формулами (8.9).

$$v_1(X) = M(X) = 1{,}8;\ v_2(X) = 3{,}96;\ v_3(X) = 9{,}576;\ v_4(X) = 24{,}696.$$
$$\mu_3(X) = v_3(X) - 3\cdot v_2(X)\cdot v_1(X) + 2\cdot v_1^3(X) = 9{,}576 - 21{,}384 + 11{,}664 =$$
$$= -0{,}144;$$

$$\mu_4(X) = v_4(X) - 4 \cdot v_3(X) \cdot v_1(X) + 6 \cdot v_2(X) \cdot v_1^2(X) - 3 \cdot v_1^4(X) =$$
$$= 24{,}696 - 68{,}9472 + 76{,}9824 - 31{,}4928 = 1{,}2384.$$
$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} \approx -0{,}236;\ As(X) = \frac{1-2\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \approx -0{,}236.$$

Це вказує на те, що даний біноміальний розподіл не є симетричним (зсув ліворуч від моди) в порівнянні з нормальним розподілом (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 \approx -0{,}611;\ Es(X) = \frac{1-6\cdot p\cdot q}{n\cdot p\cdot q} \approx -0{,}611.$$

Це вказує на те, що даний біноміальний розподіл має меншу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

Відповідь. $M(X) = 1{,}8$; $D(X) = 0{,}72$; $As(X) \approx -0{,}236$; $Es(X) \approx -0{,}611$.

Приклад 8.2. *За даними прикладу* 8.1. *знайти математичне сподівання та дисперсію частоти* (*долі*) *своєчасного відправлення рейсів серед* 3 *запланованих, а також* $Mo(X)$.

Розв'язання: За формулами (8.6) та (8.7) математичне сподівання та дисперсія дорівнюють:

$$M\left(\frac{i}{n}\right) = 0{,}6;\ D\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{3} = 0{,}08.$$

За формулою (8.7)

$$0{,}6 \cdot 0{,}4 - 0{,}4 \le Mo(X) \le 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6;$$
$$1{,}4 \le Mo(X) \le 2{,}4;$$
$$Mo(X) = 2.$$

Отримане таким чином значення $Mo(X)$, узгоджується з результатом, який можна отримати з табл. 8.2.

Відповідь. $M\left(\frac{i}{n}\right) = 0{,}6$; $D\left(\frac{i}{n}\right) = 0{,}08$; $Mo(X) = 2$.

8.2. Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона виникає в схемі Бернуллі, коли число n виконуваних незалежних випробувань велике, ймовірність p появи події A в кожному випробуванні мала, а випадкова величина X — число появ події A в цих n випробуваннях ($n \to +\infty$).

В цьому випадку масових рідкісних подій випадкова величина X приймає цілі невід'ємні значення $x_i = i$ ($i = 0,1,2,\dots,n,\dots$) з ймовірностями $p_i = P_n\{x_i = i\} = P_n(i)$, які обчислюються за формулою Пуассона (8.10):

$$P_n(i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}\ (\lambda = n \cdot p). \tag{8.10}$$

Для отримання формули (8.10) в формулі (4.7) лекції 4 підставляємо $m = i$.

Таким чином, величина X має ряд розподілу (табл. 8.3):

Таблиця 8.3. *Ряд розподілу випадкової величини X, що має розподіл Пуассона*

i	0	1	2	…	n	…
$P_n(i)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$	…

Очевидно, що розподіл Пуассона коректний, оскільки

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P_n(i) = e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} + \dots =$$

Оскільки $n \to +\infty$ використовуємо відомий розклад функції e^x в степеневий ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} + \cdots\right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Властивості розподілу Пуассона

1. *Події, які описуються розподілом Пуассона, повинні бути незалежними одна від одної.*

2. *Розподіл Пуассона часто використовується для моделювання рідкісних подій, наприклад, кількості автомобільних аварій на певній ділянці дороги за один день, кількості помилок у тексті або кількості клієнтів, що приходять до банку за годину.*

3. *Розподіл Пуассона є асиметричним, але з ростом значення λ він стає більш симетричним і наближається до нормального розподілу.*

4. *Розподіл Пуассона є цілочисловим дискретним розподілом.*

5. *Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини в разі потреби будується за принципом, наведеним в лекції* 6.

6. *Математичне сподівання розподілу Пуассона дорівнює* (8.11):

$$M(X) = \lambda, \tag{8.11}$$

дисперсія дорівнює (8.12):

$$D(X) = \lambda, \tag{8.12}$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення (8.13):

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{8.13}$$

Доведення. Для знаходження основних числових характеристик $M(X), D(X), \sigma(X)$ розподілу Пуассона використовується твірна функція

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot z^i\right) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{(\lambda \cdot z)^i}{i!}\right).$$

Знову використовуючи відомий розклад функції e^x в степеневий ряд, представляємо твірну функцію у вигляді

$$\varphi(z) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot z} = e^{\lambda \cdot (z-1)}.$$

Знайдемо першу похідну

$$\varphi'(z) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot (z-1)},$$

тоді математичне сподівання дорівнює

$$M(X) = \varphi'(1) = \lambda.$$

Знайдемо другу похідну

$$\varphi''(z) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot (z-1)},$$

$$\varphi''(1) = \lambda^2.$$

Одержимо дисперсію

$$D(X) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - \left(\varphi'(1)\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}.$$

Отже, характерною особливістю розподілу Пуассона є те, що його математичне сподівання збігається з дисперсією. Це робить його простим, але й більш обмеженим по своїм можливостям.

7. *При* $p \to 0; n \to +\infty; n \cdot p \to \lambda$ *закон розподілу Пуассона є граничним випадком біноміального закону розподілу.*

Поряд із «граничним» випадком біномного розподілу закон Пуассона може виникнути і в низці інших ситуацій. Показано, що для найпростішого потоку подій кількість подій, що потрапляють на довільний відрізок часу, є випадковою величиною, що має розподіл Пуассона.

За законом Пуассона розподілені, наприклад, число народження четверні, кількість збоїв на автоматичній лінії, кількість відмов складної системи в «нормальному режимі», кількість «вимог на обслуговування», що надійшли в одиницю часу в системах масового обслуговування, та ін.

8. *Якщо випадкова величина є сумою двох незалежних випадкових величин, розподілених кожна за законом Пуассона, то вона також розподілена за законом Пуассона.*

Доведення. Розглянемо дві випадкові величини $\{X = i\}$ та $\{Y = j\}$, що мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2 відповідно. Нехай є величина $\{Z = X + Y = k\}$.

$$P\{Z = k\} = P\{X = i\} \cdot P\{Y = j\} = \sum_{s=m+k} \left(\left(\frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_1} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_2^j}{j!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) \right) =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \sum_{k=i+j} \left(\frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot \frac{\lambda_2^j}{j!} \right) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\lambda_1^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{\lambda_2^j}{j!} \right) =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \left(k! \cdot \frac{\lambda_1^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{\lambda_2^j}{j!} \right) =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \left(C_k^j \cdot \lambda_1^{k-j} \cdot \lambda_2^j \right) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda};$$

де $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Тобто величина Z теж розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

9. *Для розподілу Пуассона з параметром* λ, *мода визначається як* (8.14):

$$Mo(X) = [\lambda] \text{ або } Mo(X) = [\lambda] - 1, \tag{8.14}$$

де $[\lambda]$ *— це найбільше ціле число, що не перевищує* λ (*тобто ціла частина* λ).

- *Якщо* λ *— ціле число, то мода дорівнює самому цьому числу, тобто* λ *та* $\lambda - 1$.
- *Якщо* λ *— не ціле число, мода зазвичай дорівнює* $[\lambda]$.

Доведення. Правомірність даного твердження можна побачити на рис. 8.1.

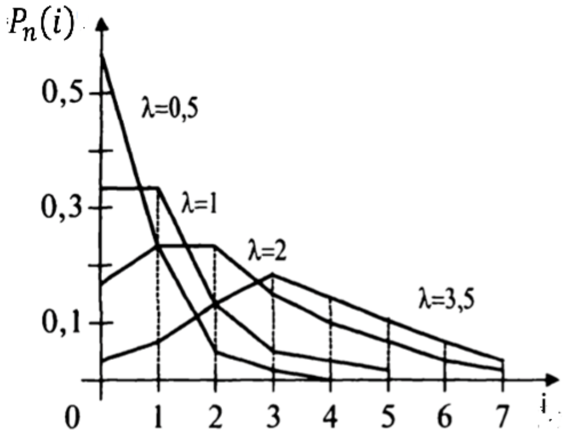

Рис. 8.1.Багатокутники розподілу випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона з параметрами $\lambda = 0{,}5; 1; 2; 3{,}5$

10. *Медіана розподілу Пуассона обчислюється у тих випадках, коли її функція розподілу на певному інтервалі* $(a; b]$ *дорівнює* $\frac{1}{2}$, *згідно формули* (6.20) *лекції* 6 $\left(F(Me(X)) = \frac{1}{2}\right)$.

11. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес розподілу Пуассона відповідно дорівнюють* (8.15):

$$As(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}};\ Es(X) = \frac{1}{\lambda}. \tag{8.15}$$

Доведення.

$$\mu_3(X) = M\big(X - M(X)\big)^3 = \lambda;$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda};$$
$$\mu_4(X) = M\big(X - M(X)\big)^4 = 3 \cdot (n \cdot p \cdot q)^2 + n \cdot p \cdot q \cdot (1 - 6 \cdot p \cdot q);$$
$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{\lambda}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}};$$
$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{3 \cdot \lambda^2 + \lambda}{\lambda^2} - 3 = \frac{1}{\lambda}.$$

Приклад 8.3. *У відділі технічної підтримки компанії протягом кожної години в середньому надходить* 4 *дзвінки. Яка ймовірність того, що за наступну годину надійде*: **1.** *Рівно* 6 *дзвінків*? **2.** *Менше* 3 *дзвінків*? **3.** *Обчислити коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини.*

Розв'язання. Нехай X — це випадкова величина, що позначає кількість дзвінків, які надійдуть протягом години. Оскільки дзвінки надходять незалежно один від одного, імовірність того, що дзвінок надійде в будь-який момент часу, постійна, тому можна припустити, що X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = 4$ (середня кількість дзвінків на годину).

1. Обчислимо ймовірність події $\{X = 6\}$ – {за годину надійде рівно 6 дзвінків}

За формула ймовірності для розподілу Пуассона (формула (8.9)):

$$P_n(6) = \frac{4^6 \cdot e^{-4}}{6!} = \frac{4096 \cdot 0{,}0183}{720} \approx 0{,}103.$$

2. Обчислимо ймовірність події $\{X < 3\}$ –{за годину надійде менше 3 дзвінків}.

$$P_n\{X < 3\} = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2).$$

Для кожного значення k застосуємо формулу розподілу Пуассона:

Для $i = 0$:

$$P_n(0) = \frac{4^0 \cdot e^{-4}}{0!} = \frac{1 \cdot e^{-4}}{1} = e^{-4} \approx 0{,}0183.$$

Для $i = 1$:

$$P_n(1) = \frac{4^1 \cdot e^{-4}}{1!} = \frac{4 \cdot e^{-4}}{1} = 4 \cdot e^{-4} \approx 0{,}0732.$$

Для $i = 2$:

$$P_n(2) = \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!} = \frac{16 \cdot e^{-4}}{2} = 8 \cdot e^{-4} \approx 0{,}1464.$$

Тепер знайдемо суму цих ймовірностей:

$$P_n\{X < 3\} = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) = 0{,}0183 + 0{,}0732 +$$
$$+0{,}1464 \approx 0{,}2379.$$

Отже, ймовірність того, що за годину надійде менше 3 дзвінків, приблизно дорівнює 0,238.

3. За формулами (8.15) з властивості 9:

$$As(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2}.$$

Це вказує на те, що даний розподіл Пуассона не є симетричним (зсув праворуч від моди) в порівнянні з нормальним розподілом (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

$$Es(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}.$$

Це вказує на те, що даний розподіл Пуассона має більшу «піковість» або «випуклість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

Відповідь: 1. $P_n(6) \approx 0{,}103$; 2. $P_n\{X < 3\} \approx 0{,}2379$; 3. $As(X) = \frac{1}{2}$; $Es(X) = \frac{1}{4}$.

Приклад 8.4. *Система бронювання та продажу авіаційних білетів має* 1000 *периферійних пультів. Ймовірність надходження запиту з кожного пульта на протязі однієї хвилини дорівнює* $0{,}002$. *Знайти* ***а)*** *середню кількість запитів*; ***б)*** *ймовірність надходження протягом однієї хвилини принаймні двох запитів*; ***в)*** *моду випадкової величини.*

Розв'язання. За умовою $n = 1000$, $p = 0{,}002$, тому $\lambda = 2$.

а) Середня кількість (математичне сподівання) запитів, що надійде до системи на протязі однієї хвилини, $M(X) = \lambda = 2$.

б) Обчислимо ймовірність надходження протягом однієї хвилини принаймні двох запитів $\{2 \le X \le 1000\}$.

$$P_{1000}(0) = e^{-2} \approx 0{,}135;\ P(1) = 2 \cdot e^{-2} \approx 0{,}271$$
$$P_{1000}\{2 \le X \le 1000\} = 1 - P(0) - P(1) \approx 0{,}594.$$

в) За формулою(8.14):

$$Mo(X) = [\lambda] = 2;\ Mo(X) = [\lambda] - 1 = 1.$$

Відповідь. а) $M(X) = 2$; б) $P\{2 \le X \le 1000\} \approx 0{,}594$; в) $Mo(X) = 1$; $Mo(X) = 2$.

8.3. Геометричний розподіл

Геометричний розподіл виникає, коли незалежні випробування, в кожному з яких подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, проводяться до першого «невдалого» випробування (подія A не відбулась) і далі припиняються, а випадкова величина X — число проведених «вдалих» випробувань.

Дискретна величина X приймає цілі невід'ємні значення $x_i = i$ $(i = 0,1,2, \dots, n, \dots)$ з ймовірностями $p_i = P_n\{x_i = i\} = P_n(i)$, що обчислюються за формулою (8.16):

$$P_n(i) = p^i \cdot q, \qquad (8.16)$$

оскільки X приймає значення i, якщо в i випробуваннях подія A відбулась (ймовірність p^i), а в наступному — не відбулась (ймовірність q).

Тому X має нескінченний ряд розподілу (табл. 8.4).

Таблиця 8.4. *Ряд розподілу випадкової величини X, що має геометричний розподіл*

i	0	1	2	...	n	...
$P_n(i)$	q	$p \cdot q$	$p^2 \cdot q$	...	$p^n \cdot q$	...

Очевидно, що геометричний розподіл коректний, оскільки

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P_n(i) = p + p \cdot q + p^2 \cdot q + \cdots + p^n \cdot q + \cdots = q \cdot (1 + p + p^2 + \cdots + p^n + \cdots)$$

$$= = q \cdot \frac{1}{1-p} = \frac{q}{q} = 1.$$

Властивості геометричного розподілу

1. *Геометричний розподіл є цілочисловим дискретним розподілом.*

2. *Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини в разі потреби будується за принципом, наведеним в лекції* 6.

3. *Математичне сподівання геометричного розподілу дорівнює* (8.17):

$$M(X) = \frac{p}{q}, \qquad (8.17)$$

дисперсія дорівнює (8.18):

$$D(X) = \frac{p}{q^2}, \qquad (8.18)$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення (8.19):

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{p}}{q}. \qquad (8.19)$$

Доведення. Для знаходження основних числових характеристик $M(X), D(X), \sigma(X)$ застосовується твірна функція

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(p^i \cdot q \cdot z^i\right) = q \cdot \sum_{i=0}^{+\infty}(p \cdot z)^i,$$

доданки якої є членами нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $u_1 = 1$ і знаменником $b = p \cdot q < 1$. Сума членів такої геометричної прогресії обчислюється за формулою

$$S = \frac{u_1}{1-b} = \frac{1}{1-p\cdot z}, \text{ тому } \varphi(z) = \frac{q}{1-p\cdot z}.$$

Знайдемо першу похідну

$$\varphi'(z) = \frac{p \cdot q}{(1 - p \cdot z)^2},$$

тоді одержимо математичне сподівання

$$M(X) = \varphi'(1) = \frac{p \cdot q}{(1-p)^2} = \frac{p}{q}.$$

Знайдемо другу похідну

$$\varphi''(z) = \frac{2 \cdot p^2 \cdot q}{(1 - p \cdot z)^3},$$

$$\varphi''(1) = \frac{2 \cdot p^2 \cdot q}{(1-p)^3} = \frac{2 \cdot p^2}{q^2},$$

тоді одержимо дисперсію

$$D(X) = \frac{2 \cdot p^2}{q^2} + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2} = \frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} = \frac{p}{q^2}.$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{p}}{q}.$$

4. *Геометричний розподіл також виникає, коли незалежні випробування, в кожному з яких подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, проводяться до першого «вдалого» випробування* (*подія A відбулась*) *і далі припиняються, а випадкова величина* $\bar{X}$ *— число проведених «невдалих» випробувань. Її ряд розподілу матиме вигляд* (*табл.* 8.6):

Таблиця 8.6. *Ряд розподілу випадкової величини* $\bar{X}$

i	0	1	2	...	n	...
$P_n(i)$	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	...	$q^n \cdot p$	...

Математичне сподівання геометричного розподілу дорівнює (8.20)-(8.22):

$$M(X) = \frac{q}{p}, \tag{8.20}$$

дисперсія дорівнює:

$$D(X) = \frac{q}{p^2}, \tag{8.21}$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}. \tag{8.22}$$

Доведення. Коректність розподілу знову встановлюється за допомогою обчислення суми нескінченно спадної геометричної прогресії.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P_n(i) = q + q \cdot p + q^2 \cdot p + \cdots + q^n \cdot p + \cdots = p \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots)$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Для знаходження основних числових характеристик $M(X), D(X), \sigma(X)$, на відміну від властивості 2, застосовується наступна твірна функція

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(q^i \cdot p \cdot z^i\right) = p \cdot \sum_{i=0}^{+\infty}(q \cdot z)^i.$$

В іншому хід виведення формул аналогічний з наведеним у доведенні властивості 2.

5. *Найбільш ймовірно, що перше випробування відразу буде «невдалим»* (або, *враховуючи властивість* 3, – «*вдалим*»), *тобто* $Mo(X) = 0$.

Доведення. Дане твердження є очевидним, враховуючи той факт, що в геометричному розподілі значення, які дана набуває випадкова величина утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію. Таким чином найбільша ймовірність відповідає саме значенню $X = 0$. Отже $Mo(X) = 0$.

6. *Медіана геометричного розподілу обчислюється у тих випадках, коли її функція розподілу на певному інтервалі* $(a; b]$ *дорівнює* $\frac{1}{2}$, *згідно формули* (6.20) *лекції* 6 $\left(F\left(Me(X)\right) = \frac{1}{2}\right)$.

7. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини* X, *що має геометричний розподіл, відповідно дорівнюють* (8.23):

$$As(X) = \frac{1+p-4\cdot p\cdot q}{\sqrt{p}};\ Es(X) = \frac{6-14\cdot q+21\cdot q^2-13\cdot q^3+4\cdot q^4}{p} - 3. \quad (8.23)$$

Для випадкової величини $\bar{X}$ – (8.24)*:*

$$As(X) = \frac{1+q-4\cdot p\cdot q}{\sqrt{q}};\ Es(X) = \frac{6-14\cdot p+21\cdot p^2-13\cdot p^3+4\cdot p^4}{q} - 3. \quad (8.24)$$

Доведення. Для випадкової величини X

$$\mu_3(X) = M\left(X - M(X)\right)^3 = \frac{p}{q^3}\cdot(2 - 5\cdot q + 4\cdot q^2);$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{p}}{q};$$

$$\mu_4(X) = M\left(X - M(X)\right)^4 = \frac{p}{q^4}\cdot(6 - 14\cdot q + 21\cdot q^2 - 13\cdot q^3 + 4\cdot q^4);$$

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{\frac{p}{q^3}\cdot(2 - 5\cdot q + 4\cdot q^2)}{\left(\frac{\sqrt{p}}{q}\right)^3} = \frac{2 - 5\cdot q + 4\cdot q^2}{\sqrt{p}} = \frac{1 + p - 4\cdot p\cdot q}{\sqrt{p}};$$

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{\frac{p}{q^4}\cdot(6 - 14\cdot q + 21\cdot q^2 - 13\cdot q^3 + 4\cdot q^4)}{\left(\frac{\sqrt{p}}{q}\right)^4} - 3$$

$$= \frac{6 - 14\cdot q + 21\cdot q^2 - 13\cdot q^3 + 4\cdot q^4}{p} - 3.$$

Для випадкової величини $\bar{X}$ коефіцієнт асиметрії та ексцес обчислюються аналогічно.

Практичне застосування має також розподіл випадкової величини X_1 — числа взагалі проведених випробувань. Ця величина приймає натуральні можливі значення $x_i = i$ $(i = 1,2, \dots, n, \dots)$ з ймовірностями $p_i = P_n\{x_i = i\} = P_n(i)$, що обчислюються за формулою (8.25):

$$P_n(i) = p^{i-1}\cdot q, \quad (8.25)$$

тобто X_1 має ряд розподілу (табл. 8.7):

Таблиця 8.7. *Ряд розподілу випадкової величини* X_1, *що має геометричний розподіл*

i	1	2	3	...	n	...
$P_n(i)$	q	$p\cdot q$	$p^2\cdot q$	...	$p^{n-1}\cdot q$	...

За властивістю 6 твірної функції розподіл випадкової величини X_1 є зміщеним на 1 по відношенню до геометричного розподілу величини X (табл. 8.4), тому її основні числові характеристики приймають вигляд (8.26)-(8.28):

$$M(X_1) = M(X + 1) = M(X) + 1 = \frac{p}{q} + 1 = \frac{1}{q}; \quad (8.26)$$

$$D(X_1) = D(X+1) = D(X) = \frac{p}{q^2}; \quad (8.27)$$

$$\sigma(X_1) = \frac{\sqrt{p}}{q}; \quad (8.28)$$

Для випадкової величини X_1 мода дорівнює (8.29):

$$Mo(X_1) = 1. \quad (8.29)$$

Коефіцієнт асиметрії та ексцес (8.30):

$$As(X) = \frac{1-q}{\sqrt{p}}; \; Es(X) = 6 + \frac{q^2}{p}. \quad (8.30)$$

Формули (8.17)-(8.19) або (8.20)-(8.22) для знаходження основних числових характеристик застосовуються у випадку нескінченного ряду розподілу. Проте в деяких задачах умови випробувань передбачають обмеження ряду розподілу, тобто геометрично розподілена випадкова величина X_2 приймає можливі значення $x_i = i$ $(i = 0,1,2,\dots,n)$. В цьому випадку випадкова величина X_2 приймає значення n, якщо в n-му випробуванні подія A не відбулась (ймовірність $p^n \cdot q$) або відбулась (ймовірність p^{n+1}), отже, згідно з теоремою додавання ймовірностей несумісних подій

$$P_n(n) = p^n \cdot q + p^{n+1} = p^n \cdot (p+q) = p^n,$$

а ряд розподілу цієї випадкової величини приймає вигляд (табл. 8.8):

Таблиця 8.8. Ряд розподілу випадкової величини X_2, що має обмежений геометричний розподіл

i	0	1	2	…	n
$P_n(i)$	q	$p \cdot q$	$p^2 \cdot q$	…	p^n

Застосування формул (8.17)-(8.19) для знаходження основних числових характеристик цієї випадкової величини приводить до значних похибок, тому в цьому випадку доцільно використовувати загальні формули.

Приклад 8.5. *Брак в продукції цеху по виробництву однотипних виробів складає* 10%. *Для оцінки якості великої партії виробів контролер навмання відбирає по одному виробу до появи першого бракованого. Знайти закони розподілу та основні числові характеристики випадкових величин:* ***а)*** $X =${*кількості відібраних доброякісних виробів*}; ***б)*** $X_1 =${*загальної кількості перевірених виробів*}; ***в)*** $X_2 =${*кількості відібраних доброякісних виробів*}*, якщо в кожній партії контролер перевіряє не більше п'яти виробів.*

Розв'язання. а) Випадкова величина X має геометричний розподіл, для якого $p = 0{,}9, q = 0{,}1$ («невдалим» випробуванням вважається поява бракованого виробу). Тому ряд розподілу випадкової величини X будується у відповідності з табл. 8.4. Ряд розподілу наведено в табл. 8.9.

Таблиця 8.9. Ряд розподілу випадкової величини X

i	0	1	2	…	n	…
$P_n(i)$	0,1	0,09	0,081	…	$(0{,}9)^n \cdot (0{,}1)$	…

$$P_n(0) = q = 0{,}1; \; P_n(1) = p \cdot q = 0{,}09;$$

$$P_n(2) = p^2 \cdot q = 0{,}081; \dots;$$

$$P_n(n) = p^n \cdot q = (0{,}9)^n \cdot (0{,}1).$$

Основні числові характеристики обчислюються за формулами (8.17)-(8.19):

$$M(X) = \frac{p}{q} = 9; \; D(X) = \frac{p}{q^2} = 90; \; \sigma(X) = \frac{\sqrt{p}}{q} \approx 9{,}5.$$

б) Випадкова величина X_1 має геометричний розподіл, зміщений на 1, тому її ряд розподілу складається у відповідності з табл. 8.5 (дивись табл. 8.10).

Таблиця 8.10. *Ряд розподілу випадкової величини* X_1

i	1	2	3	...	n	...
$P_n(i)$	0,1	0,09	0,081	...	$(0{,}9)^{n-1}\cdot(0{,}1)$	...

$$P_n(1) = q = 0{,}1;\ P_n(2) = p\cdot q = 0{,}09;$$
$$P_n(3) = p^2\cdot q = 0{,}081;\ldots;$$
$$P_n(n) = p^{n-1}\cdot q = (0{,}9)^{n-1}\cdot(0{,}1).$$

Основні числові характеристики обчислюються за формулами (8.26)-(8.28):

$$M(X_1) = \frac{p}{q} = 10;\ D(X_1) = \frac{p}{q^2} = 90;\ \sigma(X_1) = \frac{\sqrt{p}}{q} \approx 9{,}5.$$

в) Випадкова величина X_2 має обмежений ряд розподілу (табл. 8.11) при $i = 5$:

Таблиця 8.11. *Ряд розподілу випадкової величини* X_2

i	0	1	2	3	4	5
$P_n(i)$	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561	0,59049

$$P_n(0) = q = 0{,}1; P_n(1) = p\cdot q = 0{,}09;$$
$$P_n(2) = p^2\cdot q = 0{,}081; P_n(3) = p^3\cdot q = 0{,}0729;$$
$$P_n(4) = p^4\cdot q = 0{,}06561; P_n(5) = p^5\cdot q = 0{,}59049.$$
$$M(X_2) = 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}09 + 2\cdot 0{,}081 + 3\cdot 0{,}0729 + 4\cdot 0{,}06561 + 5\cdot 0{,}59049 \approx$$
$$\approx 3{,}686;$$
$$D(X_2) = 0^2\cdot 0{,}1 + 1^2\cdot 0{,}09 + 2^2\cdot 0{,}081 + 3^2\cdot 0{,}0729 + 4^2\cdot 0{,}06561 + 5^2\cdot$$
$$\cdot 0{,}59049 - (3{,}689)^2 \approx 3{,}3;$$
$$\sigma(X_2) \approx 1{,}8.$$

Відповідь: а) табл. 8.7; $M(X) = 9$; $D(X) = 90$; $\sigma(X) \approx 9{,}5$; б) табл. 8.8; $M(X) = 10$; $D(X) = 90$; $\sigma(X) \approx 9{,}5$; в) табл. 8.9; $M(X) \approx 3{,}686$; $D(X) \approx 3{,}3$; $\sigma(X) \approx 1{,}8$.

Приклад 8.6. *Стрілок стріляє по мішені з ймовірністю влучити* 0,9. *Випробування закінчується після першого ж промаху. Побудувати ряд розподілу випадкової величини* X_1 *– загальна кількість пострілів і знайти основні числові характеристики.*

Розв'язок. Випадкова величина X_1 має геометричний розподіл і складається у відповідності з табл. 8.5. Ряд розподілу наведено в табл. 8.12.

Таблиця 8.12. *Ряд розподілу випадкової величини* X_1

i	1	2	3	...	n	...
$P_n(i)$	0,1	0,09	0,081	...	$(0{,}9)^{n-1}\cdot(0{,}1)$	...

$$P_n(1) = q = 0{,}1;\ P_n(2) = p\cdot q = 0{,}09;$$
$$P_n(3) = p^2\cdot q = 0{,}081;\ldots;$$
$$P_n(n) = p^{n-1}\cdot q = (0{,}9)^{n-1}\cdot(0{,}1).$$

Основні числові характеристики обчислюються за формулами (8.26)-(8.28):

$$M(X_1) = \frac{1}{q} = 10;\ D(X_1) = \frac{p}{q^2} = 90;\ \sigma(X_1) = \frac{\sqrt{p}}{q} \approx 9{,}5.$$

Відповідь: Табл. 8.10; $M(X_1) = 10$; $D(X_1) = 90$; $\sigma(X_1) \approx 9{,}5$.

8.4. Розподіл Паскаля

Розподіл Паскаля, також відомий як *негативний біноміальний розподіл*, описує ймовірність кількості невдач (або кількості випробувань), необхідних для досягнення певної кількості успіхів у послідовності незалежних випробувань, де кожне випробування має ймовірність успіху p.

Позначимо $P(A) = p$; $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Випробування повторюються до тих пір, поки подія A не з'явиться k разів, $k > 0$. Випадкова величина X – кількість невдалих випробувань до появи події k разів, включаючи і останнє випробування.

Ймовірність $p_m = P_n\{x_i = m\} = P_n(m)$ того, що подія A настане k разів і в результаті експериментів матиме m «невдалих» спроб дорівнює (8.31):

$$p_m = P_n(m) = C_{n-1}^{m} \cdot p^k \cdot q^m, \tag{8.31}$$

де $n = k + m$ – загальна кількість спроб.

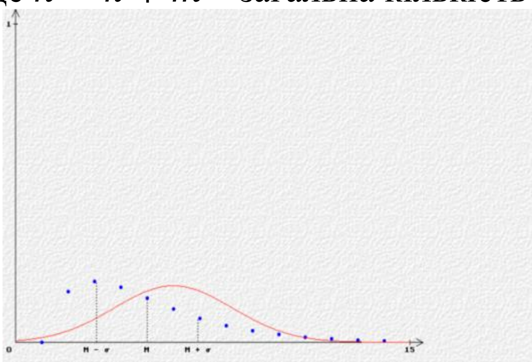

Рис. 8.2. Ілюстрація випадкової величини X – кількості збоїв при зчитуванні інформації з носія, що має розподіл Паскаля

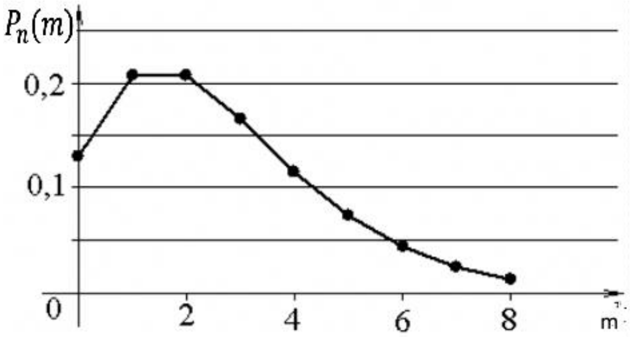

Рис. 8.3. Багатокутник розподілу Паскаля $k = 4, p = 0{,}6$

Властивості розподілу Паскаля

1. *Розподіл Паскаля є цілочисловим дискретним розподілом.*

2. *Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини в разі потреби будується за принципом, наведеним в лекції* 6.

3. *Математичне сподівання розподілу Паскаля дорівнює* (8.32):

$$M(X) = \frac{k \cdot q}{p}, \tag{8.32}$$

дисперсія дорівнює (8.33):

$$D(X) = \frac{k \cdot q}{p^2}, \tag{8.33}$$

і, відповідно, середнє квадратичне відхилення (8.34):

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{k \cdot q}}{p}. \tag{8.34}$$

Доведення. Формули (8.32)-(8.34) отримано розглядаючи розподіл Паскаля як суму i геометричних розподілів. Слід зазначити, що в даному випадку геометричний розподіл має випадкова величина $\bar{X}$ – кількість «невдалих» спроб до першої появи події A (дивись властивість 3 геометричного розподілу). Її числові характеристики обчислюються за формулами (8.20)-(8.22).

4. *Геометричний розподіл є частинним випадком геометричного розподілу.*

Доведення. Нехай $k = 1$. Тоді з формули (8.31), враховуючи, що $n = m + 1$, матимемо:

$$P_n(m) = C_m^m \cdot p^1 \cdot q^m = p \cdot q^m.$$

В даному випадку випадкова величина X має m «невдалих» спроб до першої появи події A, а це і є ознака геометричного розподілу даної випадкової величини.

5. *Якщо розподіл Паскаля має параметри* k (*кількість успіхів*) *та* p (*ймовірність успіху*), *моду можна обчислити за такою формулою* (8.35):

$$Mo(X) = \left[\frac{(k-1)\cdot q}{p}\right] \text{ або } Mo(X) = \left[\frac{(k-1)\cdot q}{p}\right] - 1, \quad (8.35)$$

де $[\cdot]$ *означає операцію округлення до найближчого меншого цілого числа.*

- *Якщо* $\frac{(k-1)\cdot q}{p}$ *— ціле число, то* $Mo(X) = \frac{(k-1)\cdot q}{p}$ *та* $Mo(X) = \frac{(k-1)\cdot q}{p} - 1$.
- *Якщо* $\frac{(k-1)\cdot q}{p}$ *— не ціле число, мода дорівнює* $Mo(X) = \left[\frac{(k-1)\cdot q}{p}\right]$.

6. *Медіана розподілу Паскаля обчислюється у тих випадках, коли її функція розподілу на певному інтервалі* $(a; b]$ *дорівнює* $\frac{1}{2}$, *згідно формули* (6.20) *лекції* 6 $\left(F\big(Me(X)\big) = \frac{1}{2}\right)$.

7. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини* X, *що має розподіл Паскаля, доцільніше обчислювати стандартним методом, наведеним в лекції* 7.

Розподіл Паскаля часто використовується в моделюванні процесів, де кількість необхідних подій до досягнення певного результату є важливою, наприклад, у страхуванні, біології або в азартних іграх. Він також описує процес розповсюдження епідемій чи ланцюгових реакцій.

Приклад 8.7. *Дехто кидає монету до тих пір, поки не випаде* 3 *герби. Обчислити*: **1.** *ймовірність того, що для цього знадобиться* 5 *невдач* (*тобто* 5 *разів випаде орел*); **2.** *моду та медіану випадкової величини.*

Розв'язок: За умовою $k = 3, p = 0{,}5, m = 5, n = 3 + 5 = 8$.

1. Використовуємо формулу розподілу Паскаля (8.27):

$$P_8(5) = C_7^5 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} \cdot (0{,}5)^8 = 21 \cdot \frac{1}{256} = \frac{21}{256} \approx 0{,}082.$$

2. За формулою (8.31)

$$Mo(X) = \frac{(k-1)\cdot q}{p} = 2 \text{ та } Mo(X) = \frac{(k-1)\cdot q}{p} - 1 = 1.$$

Коректність результатів можна побачити за допомогою ряду розподілу величини X (табл. 8.13).

Таблиця 8.13. *Ряд розподілу випадкової величини* X

i	0	1	2	3	4	5	...
$P_n(i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{21}{256}$	...

$$P_3(0) = C_2^0 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^0 = \frac{1}{8}; P_4(1) = C_3^1 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^1 = \frac{3}{16};$$

$$P_5(2) = C_4^2 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^2 = \frac{3}{16}; P_6(3) = C_5^3 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^3 = \frac{5}{32};$$

$$P_7(4) = C_6^4 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^4 = \frac{15}{128}; P_8(5) = C_7^5 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^5 = \frac{21}{256}.$$

Обчислимо медіану випадкової величини.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{де } x\le 0;\\ \frac{1}{8}, & \text{де } 0<x\le 1;\\ \frac{5}{16}, & \text{де } 1<x\le 2;\\ \frac{1}{2}, & \text{де } 1<x\le 2;\\ \frac{21}{32}, & \text{де } 2<x\le 3;\\ & \dots\\ 1, & \text{де } x>m.\end{cases}$$

$$Me(X)=1{,}5.$$

Відповідь. 1. $P_8(5)\approx 0{,}082$; 2. $Mo(X)=1$; $Mo(X)=2$; $Me(X)=1{,}5$.

8.5. Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл виникає, наприклад, в випробуваннях, коли з комплекту, який складається з N предметів, n з яких мають певну властивість (наприклад, нестандартні, пофарбовані тощо), відбирається навмання m предметів (одноразово, або послідовно без повернення до комплекту), а випадкова величина X — кількість предметів з вказаною властивістю серед відібраних. В загальному випадку X приймає можливі значення $x_i=i$ ($i=0,1,2,\dots,m$) з ймовірностями $p_i=P_n\{x_i=i\}=P_n(i)$, які обчислюються за формулою (8.36):

$$P_n(i)=\frac{C_n^i\cdot C_{N-n}^{m-i}}{C_N^m},(i=0,1,2,\dots,m). \tag{8.36}$$

Проте, деякі з подій $\{x_i=i\}$ можуть виявитись неможливими, зокрема при $m>n$, отже, відповідні ймовірності, обчислені за формулою (8.31), будуть рівні нулю. Тому при побудові ряду розподілу можливі значення випадкової величини X слід вибирати в межах від $m_1=max\,(0;m-N+n)$ до $m_2=min\,(n;m)$.

Властивості гіпергеометричного розподілу

1. *Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини будується за принципом, наведеним в лекції* 6.

2. *Знаходження основних числових характеристик гіпергеометричного розподілу — математичного сподівання $M(X)$ і дисперсії $D(X)$ безпосередньо за допомогою твірної функції*

$$\varphi(z)=\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{C_n^i\cdot C_{N-n}^{m-i}}{C_N^m}\right)\cdot z^i.$$

приводить до занадто складних обчислень, отже, гіпергеометричний розподіл дискретної випадкової величини X є прикладом розподілу, для якого твірна функція $\varphi(z)$ не є ефективним засобом знаходження числових характеристик.

В цьому випадку використовують відомі формули (7.1) *та* (7.8) *лекції* 7

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot p_i);\ D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2.$$

або за формулами (8.37)

$$M(X)=m\cdot p; D(X)=m\cdot p\cdot q\cdot\frac{N-m}{N-1}, \text{де } p=\frac{n}{N}. \tag{8.37}$$

Доведення. Довести самостійно формули (8.37).

3. *Для випадкової величини, що має гіпергеометричний розподіл, моду можна знайти за наступною формулою* (8.38):

$$Mo(X) = \left[\frac{(m+1)\cdot(n+1)}{N+2}\right], \tag{8.38}$$

де $[\cdot]$ *означає операцію округлення до найближчого меншого цілого числа.*

4. *Гіпергеометричний розподіл можна розглядати, як модифікацію біноміального розподілу для випадку скінченної сукупності, що складається з* N *об'єктів,* n *з яких мають певну властивість.*

При $N \to +\infty; n \to +\infty$, *враховуючи, що* $\frac{n}{N} \to p$ *функція ймовірностей гіпергеометричного розподілу* (*формула* (8.36)) *прямує до аналогічної функції біноміального розподілу* (*формула* (8.1)).

Доведення. Розпишемо формулу (8.36) згідно відповідних формул комбінаторики.

$$P_n(i) = \frac{C_n^i \cdot C_{N-n}^{m-i}}{C_N^m} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{i!}\right)\cdot\left(\frac{(N-n)\cdot(N-n-1)\cdot\ldots\cdot(N-n-m+i-1)}{(m-i)!}\right)}{\left(\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-m+1)}{m!}\right)}.$$

Після ділення чисельника та знаменника останнього виразу на N^m та переходячи до границі при $N \to +\infty; n \to +\infty$, $\frac{n}{N} \to p$ отримуємо формулу (8.1), де $q = 1 - \frac{n}{N}$. Що й треба було довести.

5. *Медіана гіпергеометричного розподілу обчислюється у тих випадках, коли її функція розподілу на певному інтервалі* $(a; b]$ *дорівнює* $\frac{1}{2}$, *згідно формули* (6.20) *лекції* 6 $\left(F\big(Me(X)\big) = \frac{1}{2}\right)$.

6. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини* X, *що має гіпергеометричний розподіл, доцільніше обчислювати стандартним методом, наведеним в лекції* 7.

Гіпергеометричний розподіл широко використовується в практиці статистичного приймального контролю якості промислової продукції, у завданнях, пов'язаних з організацією вибіркових обстежень, та інших областях.

Приклад 8.8. *Партія, що складається з* 10 *виробів, містить* 7 *виробів вищого ґатунку. Навмання вибирається* 6 *виробів. Знайти ряд розподілу, основні числові характеристики та моду випадкової величини* X *– кількості виробів вищого ґатунку серед відібраних.*

Розв'язання. Випадкова величина X має гіпергеометричний розподіл, в якому $N = 10; n = 7; m = 6; p = 0{,}7; q = 0{,}3$. Визначимо межі m_1 і m_2 можливих значень величини X: $m - N + n = 3$, тому $m_1 = 3$ (більше із чисел 0 і 3), а $m_2 = 6$ (менше із чисел 6 і 7). Ймовірність відповідних можливих значень обчислимо за формулою (8.31):

$$P_7(3) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^3}{C_{10}^6} = \frac{1}{6};\ P_7(4) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2};$$
$$P_7(5) = \frac{C_7^5 \cdot C_3^1}{C_{10}^6} = \frac{3}{10};\ P_7(6) = \frac{C_7^6 \cdot C_3^0}{C_{10}^6} = \frac{1}{30}.$$

Отже, ряд розподілу випадкової величини X має вигляд (табл. 8.14):

Таблиця 8.14. *Ряд розподілу випадкової величини* X

i	3	4	5	6
$P_n(i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Основні числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ обчислимо за стандартними формулами:

$$M(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{3}{10} + 6 \cdot \frac{1}{30} = 4{,}2;$$
$$D(X) = 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{2} + 5^2 \cdot \frac{3}{10} + 6^2 \cdot \frac{1}{30} - (4{,}2)^2 = 0{,}56;\ \sigma(X) = 0{,}748.$$

Для контролю застосуємо формули (8.37):

$$M(X) = 6 \cdot 0{,}7 = 4{,}2; D(X) = 6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{10-6}{10-1} = 0{,}56.$$

Також обчислимо моду $Mo(X)$:

$$Mo(X) = \left\lfloor \frac{(6+1)\cdot(7+1)}{10+2} \right\rfloor = 4.$$

Коректність результатів можна побачити за допомогою ряду розподілу величини X (табл. 8.14).

Відповідь. $M(X) = 4{,}2$; $D(X) = 0{,}56$; $\sigma(X) = 0{,}748$; $Mo(X) = 4$.

8.6. Уніформний розподіл

Уніформний розподіл або *дискретний рівномірний розподіл* — це розподіл ймовірностей, у якому всі можливі значення дискретної випадкової величини мають однакову ймовірність.

Іншими словами, якщо випадкова величина X може приймати одне з n можливих значень x_i, то ймовірність $p_i = P_n\{X = x_i\} = P_n(x_i)$ кожного з цих значень дорівнює (8.39):

$$P_n(x_i) = \frac{1}{n}. \qquad (8.39)$$

Ряд розподілу уніформної величини матиме вигляд (табл. 8.15):

Таблиця 8.15. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини*

x_i	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n
$P_n(x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Властивості уніформного розподілу

1. *Випадкова величина* X *може приймати* n *різних значень* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *і події* $\{X = x_i\}$ $(i = 1,2,\dots,n)$ *є рівноможливими з ймовірностями* $P_n(i) = \frac{1}{n}$.

2. *Випадкова величина* X *не обов'язково є цілочисловою. В загальному випадку* $x_i \in \mathcal{R}$.

3. *Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини будується за принципом, наведеним в лекції* 6.

4. *Уніформний розподіл дискретної випадкової величини X є прикладом розподілу, для якого твірна функція $\varphi(z)$*

$$\varphi(z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1}{n} \cdot \frac{z^{n+1} - 1}{1 - z}.$$

не є ефективним засобом знаходження числових характеристик.

Математичне сподівання (середнє значення) обчислюється за формулою (8.40):

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{8.40}$$

Дисперсія – за формулою (8.41):

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2. \tag{8.41}$$

Середньоквадратичне відхилення – за формулою (8.42):

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}. \tag{8.42}$$

Доведення. Формулу для обчислення математичного сподівання (8.40) отримуємо безпосередньо з формули (7.1) лекції 7, враховуючи, що $p_i = \frac{1}{n}$.

Формулу для обчислення дисперсії (8.41) також отримуємо безпосередньо з формули (7.8) лекції 7, враховуючи, що $p_i = \frac{1}{n}$.

Формулу (8.42) отримуємо з формули (7.12) лекції 7.

5. *Альтернативою для обчислення для обчислення математичного сподівання та дисперсії уніформного розподілу є* (8.43):

$$M(X) = \frac{x_1 + x_n}{2}; D(X) = \frac{(x_n - x_1 + 1)^2 - 1}{12}, \tag{8.43}$$

де x_1, x_n – відповідно найменше та найбільше значення, що приймає випадкова величина X.

Доведення. В основі доведення лежать формула суми членів арифметичної прогресії та формула суми їх квадратів.

Довести самостійно формули (8.43).

6. *Уніформний розполіл є багатомодальним* (8.44).

$$Mo(X) = x_i \ (i = 1,2, \dots, n). \tag{8.44}$$

Доведення. Оскільки події $\{X = x_i\}$ $(i = 1,2, \dots, n)$ є рівноможливими, то всі значення x_i матимуть однакову ймовірність, тобто будуть модами.

7. *Медіана уніформного розподілу, за умови, що n – парне число, дорівнює* (8.45):

$$Me(X) = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_1 + x_n}{2}. \tag{8.45}$$

Доведення. За формулою (6.20) лекції 6 медіана є серединою медіанного інтервалу. Для його визначення будуємо функцію розподілу випадкової величини X.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{де } x\le x_1;\\ \frac{1}{n}, & \text{де } x_1<x\le x_2;\\ \frac{2}{n}, & \text{де } x_2<x\le x_3;\\ & \dots\\ \frac{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n}}{n}, & \text{де } x_{\frac{n}{2}}<x\le x_{\frac{n}{2}+1}\\ & \dots\\ \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}}{n}, & \text{де } x>x_n.\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{де } x\le x_1;\\ \frac{1}{n}, & \text{де } x_1<x\le x_2;\\ \frac{2}{n}, & \text{де } x_2<x\le x_3;\\ & \dots\\ \frac{1}{2}, & \text{де } x_{\frac{n}{2}}<x\le x_{\frac{n}{2}+1}\\ & \dots\\ 1, & \text{де } x>x_n.\end{cases}$$

Отже, $Me(X)=\frac{x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}}{2}=\frac{x_1+x_n}{2}$. Що й треба було довести.

З означення медіани та особливостей уніформного розподілу, медіану також інколи можна обчислювати за формулою $Me(X)=\frac{x_1+x_n}{2}$.

Таким чином:

- При парному n уніформний розподіл гарантовано має медіану (формула 8.45).
- Якщо $n-$ непарне число, медіана уніформного розподілу обчислюється у тих випадках, коли її функція розподілу на певному інтервалі $[a;b)$ дорівнює $\frac{1}{2}$, згідно тієї ж формули (6.20) лекції 6.

8. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X, що має гіпергеометричний розподіл, доцільніше обчислювати стандартним методом, наведеним в лекції* 7.

Дискретний уніформний розподіл часто використовується у випадках, коли кожен можливий результат є рівноймовірним. Це може бути корисним при моделюванні ідеальних ігор на випадок, таких як підкидання монети, кидання гральної кістки, або вибір випадкового елемента з рівноймовірного набору елементів.

Приклад 8.9. *Скласти ряд розподілу та обчислити основні числові характеристики моду та медіану випадкової величини X – можливі результати підкидання гральної кістки.*

Розв'язання. Якщо підкидати правильну гральну кістку, можливі значення випадкової величини X (результат підкидання) — це випадання чисел 1,2,3,4,5,6.

Ймовірність випадання кожного значення буде:

$$P_6(1)=P_6(2)=P_6(3)=P_6(4)=P_6(5)=P_6(6)=\frac{1}{6}.$$

Ряд розподілу даної випадкової величини X матиме вигляд (табл. 8.16):

Таблиця 8.16. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини X*

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Математичне сподівання для такого випадку:

$$M(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Аналогічно за формулою (8.43)

$$M(X) = \frac{1+6}{2} = 3{,}5.$$

Дисперсія:

$$D(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} - (3{,}5)^2 \approx 2{,}92.$$

Аналогічно за формулою (8.43)

$$D(X) = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} \approx 2{,}92.$$

За формулами (8.44) та (8.45):

$$Mo(X) = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6.$$

$$Me(X) = \frac{3+4}{2} = \frac{1+6}{2} = 3{,}5.$$

Відповідь. Табл. 8.16; $M(X) = 3{,}5$; $D(X) \approx 2{,}92$; $Mo(X) = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$; $Me(X) = 3{,}5$.

Приклад 8.10. *Скласти ряд розподілу та обчислити основні числові характеристики, моду, медіану, коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X – можливі результати витягування картки із набору карток з літерами a, b, c, d.*

Розв'язання. Якщо витягувати картки із набору карток з літерами a, b, c, d, можливі значення випадкової величини X — це випадання чисел 1,2,3,4 (для зручності поставимо кожній літері у відповідність цифру – її порядковий номер у абетці).

Ймовірність випадання кожного значення буде:

$$P_6(1) = P_6(2) = P_6(3) = P_6(4) = \frac{1}{4}.$$

Ряд розподілу даної випадкової величини X матиме вигляд (табл. 8.17):

Таблиця 8.17. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини X*

x_i	1	2	3	4
$P_n(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Математичне сподівання для такого випадку:

$$M(X) = \frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5.$$

Аналогічно за формулою (8.43)

$$M(X) = \frac{1+4}{2} = 2{,}5.$$

Дисперсія:

$$D(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4} - (2{,}5)^2 = 1{,}25.$$

Аналогічно за формулою (8.45)

$$D(X) = \frac{(4-1+1)^2-1}{12} = 1{,}25.$$

$$Mo(X) = 1{,}2{,}3{,}4.$$

$$Me(X) = \frac{2+3}{2} = \frac{1+4}{2} = 2{,}5.$$

Обчислимо коефіцієнт асиметрії та ексцес.

$$\nu_1(X) = M(X) = 2{,}5;\ \nu_2(X) = 7{,}5;\ \nu_3(X) = 25{,}0;\ \nu_4(X) = 88{,}5.$$

$$\mu_3(X) = \nu_3(X) - 3 \cdot \nu_2(X) \cdot \nu_1(X) + 2 \cdot \nu_1^3(X) = 25{,}0 - 56{,}25 + 31{,}25 = 0;$$

$$\mu_4(X) = \nu_4(X) - 4 \cdot \nu_3(X) \cdot \nu_1(X) + 6 \cdot \nu_2(X) \cdot \nu_1^2(X) - 3 \cdot \nu_1^4(X) =$$
$$= 88{,}5 - 250 + 281{,}25 - 117{,}1875 = 2{,}5625.$$

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = 0.$$

Це вказує на те, що даний уніформний розподіл є симетричним.

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = -1{,}36.$$

Це вказує на те, що уніформний розподіл має меншу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

Відповідь. Табл. 8.17; $M(X) = 2{,}5$; $D(X) = 1{,}25$; $Mo(X) = 1{,}2{,}3{,}4$; $Me(X) = 2{,}5$; $As(X) = 0$; $Es(X) = -1{,}36$.

Приклад 8.11. У *певний день продавець кольорової капусти сподівається на такий рівень продаж* (*кг*) (*табл.* 8.16).

Таблиця 8.16. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини*

продаж (кг)	50	100	200	300
ймовірність	0,1	0,4	0,4	0,1

Продавець купляє капусту по 1,5 *грн., продає по* 3 *грн. У кінці дня залишок товару продає по* 0,7 *грн. перекупнику. Потрібно*: *побудувати ряд розподілу випадкової величини X – прибуток від продажу капусти, якщо вранці продавець закупив* 130 *кг; підрахувати математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і стандартне відхилення $\sigma(X)$.*

Розв'язання. Нехай X – прибуток від продажу капусти. Якщо продавець закупив 130 кг капусти, розглянемо за допомогою сценарії залежно від рівня продажу.

Закупівельна ціна: $130 \cdot 1{,}5 = 195$ грн.

Ціна продажу: по 3 грн за кг.

Ціна залишку: по 0,7 грн за кг.

Відповідно до табл. 8.16 розглянемо наступні випадки:

1. Продаж 50 кг:

Прибуток від продажу: $50 \cdot 3 = 150$ грн.

Залишок капусти: $130 - 50 = 80$ кг.

Прибуток від залишку: $80 \cdot 0{,}7 = 56$ грн.

Загальний прибуток: $x_1 = 150 + 56 - 195 = 11$ грн.

Ймовірність: $p_1 = 0{,}1$.

2. Продаж 100 кг:

Прибуток від продажу: $100 \cdot 3 = 300$ грн.

Залишок капусти: $130 - 100 = 30$ кг.

Прибуток від залишку: $30 \cdot 0{,}7 = 21$ грн.

Загальний прибуток: $x_2 = 300 + 21 - 195 = 126$ грн.

Ймовірність: $p_2 = 0{,}4$.

3. Продаж 200 кг:

З 200 кг. капусти максимально можна продати 130 кг.

Прибуток від продажу: $130 \cdot 3 = 390$ грн.

Залишок капусти: немає залишку.

Загальний прибуток: $390 - 195 = 195$ грн.

4. Продаж 300 кг:

З 300 кг. капусти максимально можна продати 130 кг.

Прибуток від продажу: $130 \cdot 3 = 390$ грн.

Залишок капусти: немає залишку.

Загальний прибуток: $390 - 195 = 195$ грн.

Для випадків 200 кг і 300 кг, оскільки значення прибутків $x_3 = 195$ грн для них однакові, слід об'єднати їх ймовірності: $p_3 = 0,4 + 0,1 = 0,5$.

Побудуємо розподіл випадкової величини X (табл. 8.17):

Таблиця 8.17. *Ряд розподілу випадкової величини X*

x_i	11	126	195
p_i	0,1	0,4	0,5

Знайдемо математичне сподівання.

$$M(X) = 11 \cdot 0,1 + 126 \cdot 0,4 + 195 \cdot 0,5 = 149 \text{ грн.}$$

Знайдемо дисперсію.

$$D(X) = (11 - 149)^2 \cdot 0,1 + (126 - 149)^2 \cdot 0,4 + (195 - 149)^2 \cdot 0,5 =$$
$$= 1904,4 + 211,6 + 1058 = 3174 \text{ грн.}$$

Знайдемо стандартне відхилення.

$$\sigma(X) \approx 56,34 \text{ грн.}$$

Відповідь. табл. 8.17; $M(X) = 149$ грн; $D(X) = 3174$ грн; $\sigma(X) \approx 56,34$ грн.