Розв'язання СЛАР методом Зейделя

$\varepsilon := 0.01$ - точність

Дана система рівнянь

$$4 \cdot x1 - x2 - x3 = 1$$
$$-x1 + 4 \cdot x2 - x4 = 2$$
$$-x1 + 4 \cdot x3 - x4 = 0$$
$$-x2 - x3 + 4 \cdot x4 = 1$$

Матриці системи:

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad f := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) Перевірка збіжності ітераційного процесу

Для збіжності методів Якобі і Зейделя достатньо, щоб матриця A мала ***домінуючу головну діагональ***:

$$|a_{ii}| > \sum_{k=1,\, k\neq i}^{m} |a_{ik}|; \quad i = \overline{1,m} \qquad \text{або} \qquad |a_{jj}| > \sum_{k=1,\, k\neq j}^{m} |a_{kj}|; \quad j = \overline{1,m},$$

тобто якщо кожний діагональний елемент цієї матриці за модулем більший ніж сума модулів інших елементів цього ж рядка або стовпця.

Перевіримо, чи має матриця *A* діагональну перевагу

Маємо:

$$|4| > |-1| + |-1| \qquad 4 > 2$$
$$|4| > |-1| + |-1| \quad \text{або} \quad 4 > 2$$
$$|4| > |-1| + |-1| \qquad 4 > 2$$
$$|4| > |-1| + |-1| \qquad 4 > 2$$

Перевірка:

```
sum := | n := 4
       | for i ∈ 1..n
       |   S_i ← Σ(j=1..n) |A_(i,j)| − |A_(i,i)|
       | S
```

$$sum = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$ - сума модулів елементів *i* - го рядка матриці *A*

```
check := | for i ∈ 1..n
         |   if |A_(i,i)| < sum_i
         |     result ← "Матриця А не має діагональної переваги"
         |     break
         |   else
         |     result ← "Матриця А має діагональну перевагу"
         | result
```

check = "Матриця А має діагональну перевагу"

Оскільки матриця *A* є матрицею з діагональною перевагою, то ітераційний процес є збіжним.

2) **Побудова ітераційного процесу (зведення системи рівнянь $A \cdot x = f$ до еквівалентної системи $x = \beta \cdot x + b$)**

Виразимо x1 через перше рівняння системи, x2 – через друге та x3 – через третє. В результаті ми отримаємо систему $x = \beta \cdot x + b$, еквівалентну заданій.

Знаходження матриць β та x:

```
β := | for i ∈ 1..n
     |   for j ∈ 1..n
     |     if i = j
     |       β[i,j] ← 0
     |     else
     |       β[i,j] ← -A[i,j]/A[i,i]
     | β

b := | for i ∈ 1..n
     |   b[i] ← f[i]/A[i,i]
     | b
```

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Отже, звели систему рівнянь до виду $x = \beta \cdot x + b$, придатного для побудови ітераційного

$$x1 = 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25$$
$$x2 = 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 + 0.5$$
$$x3 = 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4$$
$$x4 = 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25$$

3) Обрання вектору початкових значень

За вектор початкового наближення значень оберемо нульовий вектор

$$X0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Знаходження розв'язку системи *x* методом Зейделя

Обчислюємо значення вектору *x* за формулою

$$x_i^{(n+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Критерій закінчення ітераційного процесу:

$$\max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon .$$

Використовуємо отриману систему рівнянь

$$x1 = 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25$$
$$x2 = 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 + 0.5$$
$$x3 = 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4$$
$$x4 = 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25$$

Крок 1 (ітерація 1)

1.1) Знаходимо значення змінної x1 з 1-го рівняння системи

Для обчислення першого наближення змінної x1 використовуємо значення змінних x2, x3, x4 з нульового (початкового) наближення

$$x2 := 0 \qquad x3 := 0 \qquad x4 := 0$$

$$x1 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.25$$

1.2) Знаходимо значення змінної x2 з 2-го рівняння системи

Для обчислення першого наближення змінної x2 використовуємо значення змінної x1, знайдене на поточному кроці 1.1), а змінних x3, x4 з нульового (початкового) наближення

$$x1 = 0.25 \qquad x3 = 0 \qquad x4 = 0$$

$$x2 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 + 0.5 = 0.5625$$

1.3) Знаходимо значення змінної x3 з 3-го рівняння системи

Для обчислення першого наближення змінної x3 використовуємо значення змінних x1, x2, знайдених на поточних кроках 1.1) та 1.2), а змінної x4 з нульового (початкового) наближення

$$x1 = 0.25 \qquad x2 = 0.5625 \qquad x4 = 0$$

$$x3 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 = 0.0625$$

1.4) Знаходимо значення змінної x4 з 4-го рівняння системи

Для обчислення першого наближення змінної x4 використовуємо значення змінних x1, x2, x3, знайдених на поточних кроках 1.1), 1.2) та 1.3)

$$x1 = 0.25 \qquad x2 = 0.5625 \qquad x3 = 0.0625$$

$$x4 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.40625$$

Після виконання кроку 1 маємо наступний вектор першого наближення розв'язку системи рівнянь

$$X1 := \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} \qquad X1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5625 \\ 0.0625 \\ 0.40625 \end{bmatrix}$$

Крок 2 (ітерація 2)

2.1) Знаходимо значення змінної x1   з 1-го рівняння системи

Для обчислення другого наближення змінної x1   використовуємо значення змінних x2, x3, x4 з першого наближення

$x2 = 0.5625 \qquad x3 = 0.0625 \qquad x4 = 0.40625$

$x1 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.40625$

2.2) Знаходимо значення змінної x2   з 2-го рівняння системи

Для обчислення другого наближення змінної x2   використовуємо значення змінної x1, знайдене на поточному кроці 2.1), а змінних x3, x4 з першого наближення

$x1 = 0.40625 \qquad x3 = 0.0625 \qquad x4 = 0.40625$

$x2 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 + 0.5 = 0.703125$

2.3) Знаходимо значення змінної x3   з 3-го рівняння системи

Для обчислення другого наближення змінної x3   використовуємо значення змінних x1, x2, знайдених на поточних кроках 2.1) та 2.2), а змінної x4 з першого наближення

$x1 = 0.40625 \qquad x2 = 0.703125 \qquad x4 = 0.40625$

$x3 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 = 0.203125$

2.4) Знаходимо значення змінної x4   з 4-го рівняння системи

Для обчислення другого наближення змінної x4   використовуємо значення змінних x1, x2, x3, знайдених на поточних кроках 2.1), 2.2) та 2.3)

$x1 = 0.40625 \qquad x2 = 0.703125 \qquad x3 = 0.203125$

$x4 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.476563$

Після виконання кроку 2 маємо наступний вектор другого наближення розв'язку системи рівнянь

$$X2 := \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} \qquad X2 = \begin{bmatrix} 0.40625 \\ 0.703125 \\ 0.203125 \\ 0.476563 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо *умову закінчення ітераційного процесу*

Обчислюємо модуль різниці відповідних елементів векторів X2 та X1

$$l := \begin{Vmatrix} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \| l_i \leftarrow |X2 - X1| \\ l \end{Vmatrix} \qquad l = \begin{bmatrix} 0.262505 \\ 0.262505 \\ 0.262505 \\ 0.262505 \end{bmatrix}$$

$\max(l_1, l_2, l_3, l_4) = 0.262505$ - максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів X2 та X1

$$kryterij := \begin{Vmatrix} \text{if } \max(l_1, l_2, l_3, l_4) < \varepsilon \\ \quad \| \text{“Розв'язок системи знайдено з заданою точністю } \varepsilon \text{ ”} \\ \text{else} \\ \quad \| \text{“Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”} \end{Vmatrix}$$

$kryterij =$ “Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”

Оскільки за умовою необхідно знайти розв'язок системи рівнянь з заданою точністю $\varepsilon = 0.01$, то для заданої точності умова зупинки ітераційного процесу не виконується.

Крок 3 (ітерація 3)

3.1) Знаходимо значення змінної x1 з 1-го рівняння системи

Для обчислення третього наближення змінної x1 використовуємо значення змінних x2, x3, x4 з другого наближення

$$x2 = 0.703125 \qquad x3 = 0.203125 \qquad x4 = 0.476563$$

$$x1 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.476563$$

3.2) Знаходимо значення змінної x2 з 2-го рівняння системи

Для обчислення третього наближення змінної x2 використовуємо значення змінної x1, знайдене на поточному кроці 3.1), а змінних x3, x4 з другого наближення

$$x1 = 0.476563 \qquad x3 = 0.203125 \qquad x4 = 0.476563$$

$$x2 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 + 0.5 = 0.738281$$

3.3) Знаходимо значення змінної x3 з 3-го рівняння системи

Для обчислення третього наближення змінної x3 використовуємо значення змінних x1, x2, знайдених на поточних кроках 3.1) та 3.2), а змінної x4 з другого наближення

$$x1 = 0.476563 \qquad x2 = 0.738281 \qquad x4 = 0.476563$$

$$x3 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 = 0.238281$$

3.4) Знаходимо значення змінної x4   з 4-го рівняння системи

Для обчислення третього наближення змінної x4   використовуємо значення змінних x1, x2, x3,   знайдених на поточних кроках 3.1), 3.2) та 3.3)

$$x1 = 0.476563 \qquad x2 = 0.738281 \qquad x3 = 0.238281$$

$$x4 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.494141$$

Після виконання кроку 3 маємо наступний вектор третього наближення розв'язку системи рівнянь

$$X3 := \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} \qquad X3 = \begin{bmatrix} 0.476563 \\ 0.738281 \\ 0.238281 \\ 0.494141 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо *умову закінчення ітераційного процесу*

Обчислюємо модуль різниці відповідних елементів векторів X3 та X2

$$l := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \,..\, n \\ \quad \left\| \, l_i \leftarrow |X3 - X2| \right. \\ l \end{array} \right. \qquad l = \begin{bmatrix} 0.087891 \\ 0.087891 \\ 0.087891 \\ 0.087891 \end{bmatrix}$$

$\max\left(l_1, l_2, l_3, l_4\right) = 0.087891$ - максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів X3 та X2

$$kryterij := \left\| \begin{array}{l} \text{if } \max\left(l_1, l_2, l_3, l_4\right) < \varepsilon \\ \quad \left\| \, \text{“Розв’язок системи знайдено з заданою точністю ε ”} \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| \, \text{“Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”} \right. \end{array} \right.$$

$kryterij =$ “Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”

Оскільки за умовою необхідно знайти розв'язок системи рівнянь з заданою точністю $\varepsilon = 0.01$,   то для заданої точності   умова зупинки ітераційного процесу не виконується.

Крок 4 (ітерація 4)

4.1) Знаходимо значення змінної x1   з 1-го рівняння системи

$$x2 = 0.738281 \qquad x3 = 0.238281 \qquad x4 = 0.494141$$

$$x1 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.494141$$

4.2) Знаходимо значення змінної x2   з 2-го рівняння системи

$$x1 = 0.494141 \qquad x3 = 0.238281 \qquad x4 = 0.494141$$

$$x2 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 + 0.5 = 0.74707$$

4.3) Знаходимо значення змінної x3   з 3-го рівняння системи

$x1 = 0.494141 \quad x2 = 0.74707 \quad x4 = 0.494141$

$x3 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 = 0.24707$

4.4) Знаходимо значення змінної x4   з 4-го рівняння системи

$x1 = 0.494141 \quad x2 = 0.74707 \quad x3 = 0.24707$

$x4 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.498535$

Після виконання кроку 4 маємо наступний вектор четвертого наближення розв'язку системи рівнянь

$$X4 := \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} \qquad X4 = \begin{bmatrix} 0.494141 \\ 0.74707 \\ 0.24707 \\ 0.498535 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо *умову закінчення ітераційного процесу*

Обчислюємо модуль різниці відповідних елементів векторів X4 та X3

$$l := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| \, l_i \leftarrow |X4 - X3| \right. \\ l \end{array} \right. \qquad l = \begin{bmatrix} 0.021973 \\ 0.021973 \\ 0.021973 \\ 0.021973 \end{bmatrix}$$

$\max\left(l_1, l_2, l_3, l_4\right) = 0.021973$ - максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів X4 та X3

$$kryterij := \left\| \begin{array}{l} \text{if } \max\left(l_1, l_2, l_3, l_4\right) < \varepsilon \\ \quad \left\| \, \text{“Розв’язок системи знайдено з заданою точністю ε ”} \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| \, \text{“Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”} \right. \end{array} \right.$$

$kryterij =$ “Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”

Оскільки за умовою необхідно знайти розв'язок системи рівнянь з заданою точністю $\varepsilon = 0.01$, то для заданої точності умова зупинки ітераційного процесу не виконується.

Крок 5 (ітерація 5)

5.1) Знаходимо значення змінної x1   з 1-го рівняння системи

$x2 = 0.74707 \quad x3 = 0.24707 \quad x4 = 0.498535$

$x1 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.498535$

5.2) Знаходимо значення змінної x2   з 2-го рівняння системи

$x1 = 0.498535 \quad x3 = 0.24707 \quad x4 = 0.498535$

$x2 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 + 0.5 = 0.749268$

5.3) Знаходимо значення змінної x3 з 3-го рівняння системи

$x1 = 0.498535 \quad x2 = 0.749268 \quad x4 = 0.498535$

$$x3 := 0.25 \cdot x1 + 0.25 \cdot x4 = 0.249268$$

5.4) Знаходимо значення змінної x4 з 4-го рівняння системи

$x1 = 0.498535 \quad x2 = 0.749268 \quad x3 = 0.249268$

$$x4 := 0.25 \cdot x2 + 0.25 \cdot x3 + 0.25 = 0.499634$$

Після виконання кроку 5 маємо наступний вектор п'ятого наближення розв'язку системи рівнянь

$$X5 := \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} \qquad X5 = \begin{bmatrix} 0.498535 \\ 0.749268 \\ 0.249268 \\ 0.499634 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо *умову закінчення ітераційного процесу*

Обчислюємо модуль різниці відповідних елементів векторів X4 та X3

$$l := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| \; l_i \leftarrow |X5 - X4| \right. \\ l \end{array} \right. \qquad l = \begin{bmatrix} 0.005493 \\ 0.005493 \\ 0.005493 \\ 0.005493 \end{bmatrix}$$

$\max\left(l_1, l_2, l_3, l_4\right) = 0.005493$ - максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів X4 та X3

$$kryterij := \left\| \begin{array}{l} \text{if } \max\left(l_1, l_2, l_3, l_4\right) < \varepsilon \\ \quad \left\| \text{“Розв’язок системи знайдено з заданою точністю } \varepsilon \text{ ”} \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| \text{“Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”} \right. \end{array} \right.$$

$kryterij =$ “Розв’язок системи знайдено з заданою точністю ε ”

Оскільки за умовою необхідно знайти розв'язок системи рівнянь з заданою точністю $\varepsilon = 0.01$, то для заданої точності умова зупинки ітераційного процесу виконується.

Отже, вектор x5 є розв'язком даної системи рівнянь знайденим з точністю $\varepsilon = 0.01$.

$$X5 = \begin{bmatrix} 0.498535 \\ 0.749268 \\ 0.249268 \\ 0.499634 \end{bmatrix}$$

5) Перевірка. Знаходження розв'язку системи *x* вбудованою функцією Mathcad

Розв'язання вихідної системи Ax=f

$$X := \mathrm{lsolve}(A, f) \qquad X = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$