# Ізольовані особливі точки

доц. І.В. Орловський

# 1. Нулі аналітичної функції

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в області $D$. Точку $z_0 \in D$ називають нулем функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$. Розвинення функції $f(z)$ в околі її нуля у степеневий ряд має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \; c_0 = 0$$

Якщо, крім цього $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$, то точку $z_0$ називають нулем кратності $m$ (або нулем $m$-го порядку). Якщо $m = 1$, то $z_0$ називають простим нулем.
В околі нуля кратності $m$ розвинення функції $f(z)$ у степеневий ряд має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \ldots =$$
$$(z - z_0)^m (c_m + c_{m+1} (z - z_0) + \ldots) = (z - z_0)^m g(z), \; g(z_0) \neq 0,$$

## Теорема 1

*Точка $z_0$ є нулем кратності $m$ функції $f(z)$ тоді й лише тоді, коли:*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Нулі функції $f(z)$ називають ізольованими, якщо їх можна оточити околами, які не перетинаються.
Нулі відмінної від тотожного нуля аналітичної функції є ізольованими.

# 2. Ізольовані особливі точки та їх класифікація

Точку $z_0$ називають особливою точкою функції $f(z)$, якщо функція в цій точці не є аналітичною.
Особливу точку $z_0$ функції $f(z)$ називають ізольованою особливою точкою, якщо існує проколений окіл точки $z_0$ ( кільце $0 < |z - z_0| < r$ ) у якому функція $f(z)$ є аналітична.
Залежно від поведінки функції $f(z)$ під час наближення до точки $z_0$ розрізняють три типи особливих точок.

**Означення 1**

*Ізольовану особливу точку $z_0$ називають:*

1. *усувною, якщо існує скінченна $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;*
2. *полюсом, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;*
3. *істотно особливою точкою, якщо границя функції $f(z)$, коли $z \to z_0$ не існує.*

# 3. Властивості ізольованих особливих точок

Якщо $z = z_0$ усувна особлива точка функції $f(z)$, то функція

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0; \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z), & z = z_0, \end{cases}$$

вже буде аналітичною в $z = z_0$, тобто особливість можна «усунути».

**Теорема 2 (про зв'язок між полюсом і нулем функції)**

*Точка $z_0$ є полюсом порядку $m$ для функції $f(z)$ тоді й лише тоді, коли для функції $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка $z_0$ є нулем кратності $m$.*

**Теорема 3 (Сохоцького)**

*Якщо $z_0$ – істотно особлива точка функції $f(z)$, то для довільного $A \in \mathbb{C}$ існує така послідовність точок $\{z_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, яка збігається до $z_0$ ($z_k \to z_0$), що*

$$\lim_{k \to \infty} f(z_k) = A.$$

# 4. Розвинення в ряд Лорана в околі особливої точки

Тип ізольованої особливої точки зв'язаний з характером розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана у кільці $0 < |z - z_0| < r$ з виколотим центром $z_0$.

Нехай в околі точки $z_0$ функція $f(z)$ розвивається в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

## Теорема 4

*Ізольована особлива точка $z_0$ функції $f(z)$ є:*

1. *усувною особливою точкою тоді й лише тоді, коли розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана у проколеному околі цієї точки не містить головної частини:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$$

2. *полюсом порядку $m$ тоді й лише тоді, коли головна частина розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана у проколеному околі цієї точки містить скінченну (і додатну) кількість відмінних від нуля членів:*

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{\left(z - z_0\right)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n, \ c_{-m} \neq 0.$$

3. *істотно особливою тоді й лише тоді, коли головна частина розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в проколеному околі цієї точки містить нескінченно багато відмінних від нуля членів:*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{\left(z - z_0\right)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$$

# 5. Поведінка функції в нескінченно віддаленій точці

Класифікацію ізольованих точок можна поширити і на випадок, коли особливою точкою функції $f(z)$ є нескінченно віддалена точка $z = \infty$.

Околом точки $z = \infty$ називають зовнішність будь-якого круга з центром у точці $z = 0$ і радіусом $R > 0$, тобто множину $|z| > R$.

Точку $z = \infty$ називають ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо в деякому околі цієї точки немає інших особливих точок функції.

Нескінченно віддалена ізольована особлива точка може бути:

- усувною (розвинення в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$ не містить членів з додатними степенями);
- полюсом (розвинення в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$ містить скінченну кількість членів з додатними степенями);
- істотно особливою точкою (розвинення в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$ містить нескінченну кількість членів з додатними степенями).

Відомі Тейлорові розвинення функцій $e^z$, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ можна розглядати також і як розвинення у ряд Лорана в околі точки $z = \infty$. Оскільки всі ці розвинення містять нескінченну кількість додатних степенів $z$, то вказані функції мають у точці $z = \infty$ істотну особливість.

Зауважимо також, що вивчення функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ можна звести заміною $z = \dfrac{1}{\zeta}$ до вивчення функції $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ в околі точки $\zeta = 0$.

# Література


[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.