1.2 Основні етапи розв’язання задач чисельними методами. Оцінка похибки результату при розв’язанні задач чисельними методами

1.2.1 Основні етапи розв’язання задач чисельними методами

Більшість прикладних задач (інженерних, економічних, біологічних і ін.), результат яких повинен представляти числову інформацію, зводяться до математичних, які розв'язуються різними обчислювальними методами. Процес розв'язування таких задач можна надати у вигляді наступних етапів.

1. Постановка задачі.
2. Побудова математичної моделі задачі.
3. Вибір обчислювального методу.
4. Вивчення (або складання) алгоритму розв'язування задачі.
5. Реалізація алгоритму за допомогою обчислювальних засобів.
6. Аналіз отриманих результатів.

1.2.1.1 Постановка задачі та її математична модель

Постановка задачі визначає словесне формулювання задачі, умов, яким вона повинна задовольняти, і вимог, запропонованих до розв'язування.

Наприклад:

а) розв'язати квадратне рівняння;

б) визначити зміну швидкості при падінні тіла, враховуючи опір середовища;

в) знайти площу заданої ділянки землі;

г) вибрати найкращий денний раціон відгодівлі худоби.

У *процесі формулювання задачі* необхідно відповісти на запитання:

1) чи зрозуміла термінологія, що використовується у постановці задачі?
2) що є вхідними даними для розв'язування задачі?
3) що потрібно знайти при розв'язуванні задачі?
4) як визначити розв'язок?
5) яких даних не вистачає і чи всі запропоновані дані потрібні?
6) які можна зробити припущення?

Математична модель – це математичний опис співвідношень у постановці задачі.

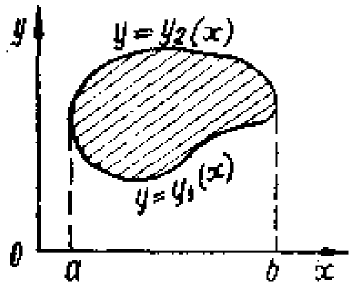
Коли будується модель, потрібно звернути увагу на запитання:

1) чи розв'язувалися аналогічні задачі?
2) які математичні структури найбільше підходять для розв'язування даної задачі?
3) які математичні величини визначають вхідні дані?
4) які математичні величини визначають результат?
5) які математичні співвідношення існують між об'єктами моделі?
6) як працювати з обраною моделлю?

В одних випадках запис математичної моделі не викликає труднощів, а в інших потребує уточнення постановки задачі, виділення головних факторів, відкидання умов, що мало впливають на результат.

Для задачі а) математична модель очевидна. Розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – задані дійсні числа, причому $a \neq 0$, x – невідоме, яке потрібно знайти.

В задачі б) припускаємо, що тіло є матеріальною точкою маси m, на яке діють сила тяжіння $F_1 = mg$ та сила опору, що пропорційна швидкості падіння $F_2 = -kv$, тоді, на підставі законів механіки, одержимо рівняння $ma = mg - kv$, або $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$. Це диференціальне рівняння з урахуванням початкової умови $v(t_0) = v_0$ є математичною моделлю задачі для визначення функції $v(t)$.



В задачі в) варто з'ясувати форму ділянки землі, її границі, зобразити її в системі координат у відповідному масштабі. Тоді задача зведеться до обчислення інтегралу $\int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$, що і буде математичною моделлю даної задачі.

Постановка задачі г) повинна містити перелік кормів денного раціону, денну норму споживання речовин, і розкритий зміст поняття «найкращий раціон».

Денний раціон складається із двох видів кормів, середній денний запас яких дорівнює відповідно b_1, b_2. У раціон повинні входити три поживних речовини, щоденна норма споживання яких становить a_1, a_2, a_3. Вміст цих речовин в одиниці кожного із двох видів кормів відповідно a_{11}, a_{12}, a_{13} і a_{21}, a_{22}, a_{23}. Якщо позначити через x_1, x_2 кількість одиниць розглянутих видів кормів, а через p_1, p_2 відповідно задані вартості одиниці кожного корму, то математичну модель задачі сформулюється так:

знайти найменше значення функції

$$r = p_1x_1 + p_2x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq a_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq a_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 \geq a_3, \\ 0 \leq x_1 \leq b_1,\ 0 \leq x_2 \leq b_2. \end{gathered}$$

Таким чином, всі поставлені задачі відображено в математичних співвідношеннях і зведено вже до чисто математичних задач.

Складання математичної моделі у прикладних задачах є найбільш складним і відповідальним етапом розв'язування і, як правило, виконується спільно математиком і фахівцем у даній галузі. Що ж стосується математичної задачі (наприклад, задачі а)), то її модель міститься в самій постановці.

1.2.1.2 Вибір обчислювального методу

Математична задача абстрагована від конкретної сутності прикладної задачі. Для її розв’язування створюються спеціальні обчислювальні методи. Зокрема, *до однієї і тієї ж математичної моделі* можна звести абсолютно різні прикладні задачі.

Так, задача б) зведена до диференціального рівняння, яке може бути моделлю і для багатьох інших задач (зміна швидкості при пружних лінійних коливаннях, зміна струму в найпростішому електричному колі, зміна швидкості при розмноженні бактерій).

Для розв’язування задачі в) необхідно обчислити визначений інтеграл. До обчислення визначених інтегралів приходять і при обчисленні об'єму тіла або довжини дуги плоскої кривої, обчисленні статичного моменту або моменту інерції, розрахунку роботи змінної сили та у інших задачах.

Математична модель задачі г) приведена до системи лінійних нерівностей, яка задовольняє деякій умові, розв’язування якої зводиться до багаторазового розв’язування систем лінійних рівнянь. Лінійні системи розв’язують і у багатьох інших прикладних задачах.

Розв’язування математичної моделі задачі здійснюється обчислювальним методом, зокрема, *ту ж саму задачу можна розв’язувати декількома методами*. Вибір методу для даної задачі – важливий елемент процесу розв'язування, що істотно впливає на результат.

Методи обчислень поділяють на точні та наближені.

Точні методи дозволяють після скінченного числа дій отримати точний результат за умови, що обчислення проводять без округлення чисел.

Наближені методи дозволяють отримати результат з деякою похибкою. При виборі наближеного методу істотними є обсяг обчислень, швидкість збіжності (як швидко виходить результат) і інші фактори. Вибір методу, зокрема, залежить і від вхідних даних. Крім того, на вибір методу впливають засоби його реалізації (ручний розрахунок, обчислювальна техніка, наявність готової програми і т.п.). Так, якщо використовують швидкодіючий комп’ютер і готову програму, то обсяг обчислень не повинен бентежити виконавця і бути визначальним фактором при виборі методу. При ручному розрахунку варто віддати перевагу методу, що вимагає певних попередніх досліджень, з меншим числом обчислень.

Наприклад, для розв’язування задачі а) краще використати точний метод, тобто формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

але можна застосувати і інші засоби, наприклад, різні наближені методи.

Диференціальне рівняння задачі б) краще розв’язувати, розділивши змінні, тобто привести його до вигляду

$$\frac{m \cdot dv}{mg - kv} = dt.$$

Однак його можна розглядати і як лінійне рівняння, або розв’язувати наближеними методами.

При розв’язуванні задачі в) варто користуватися методами наближеного обчислення визначеного інтегралу, зокрема можна застосувати найбільш простий з них – метод прямокутників, оскільки постановка задачі не вимагає високої точності розв'язування.

Що ж стосується розв’язування систем лінійних рівнянь, то вже зі шкільного курсу математики відомо точні методи: метод підстановки, метод алгебраїчного додавання, метод визначників. Однак для лінійних систем високого порядку вони виявляються неефективними, тому для їхнього розв'язування частіше використовуються наближені методи.

1.2.1.3 Побудова алгоритму розв'язування задачі

Алгоритмом називається система правил, що задає строго визначену послідовність операцій, які приводять, при заданих початкових даних, до результату (точного або наближеного).

З визначення випливають *основні властивості алгоритму*:

1. *Дискретність алгоритму* – представлення алгоритму у вигляді послідовності окремих етапів, елементарних операцій, які виконуються у строго визначеному порядку.
2. *Визначеність алгоритму* – кожний етап алгоритму повинен бути описаний за допомогою певної системи правил так, щоб виконавець його сприймав однозначно, без невизначеностей.
3. *Результативність алгоритму* – через скінченний час алгоритм повинен привести до результату або до повідомлення про його відсутність.
4. *Масовість алгоритму* – алгоритм, складений для розв’язування однієї задачі, повинен застосовуватися для розв’язування аналогічних задач при всіх допустимих значеннях вхідних даних.

Способи опису алгоритмів:

- словесно-формульний опис алгоритму;
- графічний опис алгоритму у вигляді блок-схеми;
- опис алгоритму алгоритмічною мовою.

Словесно-формульний опис алгоритму – це опис алгоритму за допомогою слів і формул, представлений у вигляді перенумерованих етапів, які виконуються один за одним. Якщо необхідно змінити порядок виконання етапів, варто вказати це явно.

Блок-схемою алгоритму називається графічне зображення послідовності дій обчислювального процесу.

Серед множини різноманітних алгоритмів можна виділити три основних види алгоритмів:

- лінійні;
- розгалужені;
- циклічні.

Розмаїтість алгоритмів визначається тим, що будь-який алгоритм розпадається на частини, фрагменти і кожний фрагмент є алгоритмом одного із зазначених видів.

Лінійним називається *алгоритм*, у якому всі етапи розв’язування задачі виконуються строго послідовно.

Розгалуженим алгоритмом називається алгоритм, у якому обирається один із двох можливих шляхів обчислювального процесу в залежності від того, виконується чи ні задана для цього умова.

Циклічним називається *алгоритм*, у якому отримання результату забезпечується багаторазовим виконанням тих самих операцій. Циклічний алгоритм зображується за допомогою *циклічної структури з відомим числом повторень, циклічної структури з поза умовою* або *циклічної структури з передумовою.* Кожна з перелічених структур обирається залежно від умов організації циклічного процесу і умов виходу з нього.

Якщо кількість *ітерацій* (однотипних операцій, що повторюються багато разів) визначається значенням заданої змінної, то використовують *циклічну структуру з відомим числом повторень*. Таку структуру також застосовують при роботі з елементами масиву, над якими виконують однотипні операції.

Якщо вихід із циклічного процесу відбувається на деякій ітерації при виконанні умови виходу, що визначає досягнення заданої точності обчислень, то використовують *циклічні структури з позаумовою* або *передумовою.* Вибір структури з умовою залежить від того, де необхідно перевіряти умову виходу: на початку ітерації або наприкінці. Варто звернути увагу на те, що коли використовується *структура з позаумовою*, то циклічний процес буде виконуватися хоча б один раз. Якщо ж використовується *структура з передумовою*, то циклічна структура за певних умов може не виконатися жодного разу. Саме цю особливість варто враховувати при виборі циклічної структури з умовою.

При розробці складних алгоритмів використовують *структурний підхід*, основними складовими якого є: спадне покрокове проектування, структурне програмування, модульне програмування, структурний контроль. Принцип спадного покрокового проектування, що застосовується для розв'язування складних задач, передбачає розробку більш крупних блок-схем, що містять блоки, які можна винести окремо для більш докладної деталізації дій. Блок-схеми кожного рівня деталізації повинні бути структурними, тобто складатися з алгоритмічних структур з одним входом і одним виходом. Якщо блок-схема містить тільки елементарні блоки, тобто блоки, які не можуть бути далі деталізовані, то така блок-схема є докладною.

Алгоритмічна мова – це засіб для запису алгоритмів в аналітичному вигляді, що є проміжним між записом алгоритму природною мовою і записом мовою програмування. Для запису алгоритму використовують обмежений набір термінів, більш строгі правила запису операцій для забезпечення однозначності розуміння алгоритму.

1.2.1.4 Реалізація методу обчислень

Обчислення за алгоритмами здійснюються за допомогою різних обчислювальних засобів.

При ручному (безпосередньому) розрахунку звичайно використовують найпростіші обчислювальні засоби: таблиці, калькулятори і т.п. Результати дій кожного етапу алгоритму записують в спеціальний розрахунковий бланк.

Наявність комп'ютера дозволяє реалізувати обчислення автоматично, під керівництвом програми. При цьому, можливо, що для обраного методу існує готова (стандартна) програма, за якою здійснюють розрахунок. Якщо ж задача не є типовою, а має свої особливості, то за розробленим алгоритмом потрібно скласти програму. В якій у строгій послідовності вказують дії алгоритму з використанням вхідних даних задачі.

Важливим є контроль обчислень, що проводять за *контрольним прикладом*. Результат контрольного прикладу або очевидний, або його заздалегідь знаходять яким-небудь іншим способом. При ручному розрахунку контроль рекомендується проводити поетапно. При розрахунках на комп'ютері за складеною програмою контрольний приклад заздалегідь прораховують вручну.

Останнім етапом розв'язування прикладної задачі є видача конкретних рекомендацій на підставі отриманих результатів розрахунку.

1.2.2 Оцінка похибки результату при розв'язанні задач чисельними методами

1.2.2.1 Джерела виникнення похибок

Розв'язування прикладних і математичних задач, як правило, пов'язане з наближеними значеннями величин, з використанням наближених методів розв'язування і наближених обчислень.

Математична модель задачі – це вже наближене подання реального об'єкту. Вхідні дані, які одержано з експерименту, можна визначити лише приблизно. Навіть точні числа, такі, як $\pi, e, \sqrt{3}, \frac{6}{7}$ і т.п., при обчисленнях заміняють десятковими дробами, залишаючи певне число знаків після коми.

Похибка, яку допускають при переході від постановки задачі до відповідної математичної моделі, і похибка вхідних даних разом утворюють *недопустиму похибку*.

Обчислювальні методи частіше також є наближеними і тому утворять *похибку обчислювальних методів*.

Навіть при використанні найпростішої формули результат, як правило, одержують наближеним, тому що арифметичні дії виконують над наближеними значеннями. При цьому утворюється *обчислювальна похибка*.

Похибка результату при розв'язуванні задачі з використанням чисельних методів складається із суми:

– недопустимої похибки;
– похибки обчислювального методу;
– обчислювальної похибки.

Тому, перш ніж приступитися до вивчення обчислювальних методів, варто ознайомитися з різними видами похибок, загальними правилами дій над наближеними числами і оцінкою похибок при обчисленнях.

1.2.2.2 Похибки вхідних даних

Абсолютна похибка наближеного числа. Якщо a_0 – деяке число (відоме точно або не відоме), a – число, взяте за наближене значення числа a_0, то число $\Delta(a)>0$, що задовольняє нерівності

$$|a_0 - a| \le \Delta(a),$$

називається *абсолютною похибкою* (точніше *граничною абсолютною похибкою)* наближеного числа a.

Таке визначення абсолютної похибки не є однозначним. Так, якщо $a_0 = \pi$, а за наближене значення взяти a = 3,14, то, враховуючі, що 3,140< π <3,142, можна записати

$$|\pi - a| < 0{,}002, \qquad |\pi - a| < 0{,}01, \qquad |\pi - a| < 0{,}1.$$

Кожне із чисел 0,002, 0,01, 0,1 буде абсолютною похибкою числа a. Але чим ближче між собою числа $|a_0 - a|$ та $\Delta(a)$, тим точніше абсолютна похибка оцінює фактичну помилку.

За *абсолютну похибку* $\Delta(a)$ наближеного числа a беруть за можливістю *найменше із чисел*, що задовольняє наведеній нерівності, тобто відповідає подвійній нерівності

$$a - \Delta(a) \le a_0 \le a + \Delta(a),$$

яку умовно записують наступним чином:

$$a_0 = a \pm \Delta(a),$$

тобто a_0 приблизно дорівнює a з абсолютною похибкою $\Delta(a)$.

Так, у попередньому прикладі можна записати π = 3,14 $\pm$0,002.

Абсолютна похибка є оцінкою точності числа.

Відносна похибка наближеного числа. Абсолютна похибка $\Delta(a)$ числа a, взятого за наближене значення числа a_0, не завжди є зручною характеристикою степені точності a, як наближення до a_0. Похибка в одному разі є дуже грубою помилкою при вимірюванні довжини приміщення, але її можна розглядати як малу помилку при вимірюванні відстані між двома точками земної поверхні.

Отже, крім величини абсолютної похибки, необхідно ще знати її відношення до вимірюваної (або обчислюваної) величини, яке частіше відображається у відсотках.

Відносною похибкою $\delta(a)$ наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a)$ до модуля цього числа

$$\delta(a)=\frac{\Delta(a)}{|a|} \qquad \text{або в відсотках} \qquad \delta(a)=\frac{\Delta(a)}{|a|}\cdot 100\%.$$

Так, відносна похибка числа 3,14, взятого за наближене значення числа π, при $\Delta(3{,}14) = 0{,}002$ дорівнює

$$\delta(3{,}14)=\frac{0{,}002}{3{,}14}=0{,}00064, \text{ або } 0{,}064\%.$$

У технічних розрахунках точність вимірювань характеризують відносною похибкою. Результат вважають гарним, якщо відносна похибка не перевищує 0,1 %.

З визначення відносної похибки випливає, що

$$\Delta(a)=|a|\cdot\delta(a).$$

Правило округлення чисел. Округлення числа полягає у відкиданні в ньому всіх цифр, що знаходяться за деяким розрядом. При цьому, якщо округлене число ціле, то відкинуті цифри цілої частини заміняють нулями.

Округлення частіше виконують за наступним *правилом*:

- якщо перша цифра, що відкидається, менша п'яти, то остання цифра, що залишається, не змінюється;
- якщо перша цифра, що відкидається, більша п'яти, то остання цифра, що залишається, збільшується на одиницю;
- якщо перша цифра, що відкидається, дорівнює п'яти, то придатне кожне із зазначених правил, але найчастіше округлюють *за правилом парної цифри*: якщо остання цифра, що зберігається, непарна, то до неї додають одиницю, якщо ж парна, то залишають без змін.

Приклад 1. Округлити число π = 3,14159... до:

а) одного; б) трьох; в) чотирьох десяткових знаків.

Розв'язування.

а) 3,14159 ≈ 3,1 (округлення до 0,1);

б) 3,14159 ≈ 3,142 (округлення до 0,001);

в) 3,14159 ≈ 3,1416 (округлення до 0,0001).

Якщо при округленні числа останні цифри, що зберігаються, нулі, то їх потрібно записувати явно.

Так, число 1,2997, округлене до 0,001, набирає вигляд 1,300.

Приклад 2. Округлити число 246250 до:

а) сотень тисяч; б) десятків тисяч; в) сотень.

Розв'язування.

а) 246 250 $\approx 2 \bullet 10^5$ (округлення до 10^5);

б) 246 250 $\approx 25 \bullet 10^4$ (округлення до 10^4);

в) 246 250 $\approx 2462 \bullet 10^2$ (округлення до 10^2).

При округленні цілих чисел частіше замість відкинутих цифр записують не нулі, а число 10 у відповідному степені. Степінь числа 10 указує на число округлених знаків.

При округленні наближеного числа виникає додаткова похибка – *похибка округлення* $\Delta_0(a)$, що не перевершує половини одиниці розряду останньої цифри, що зберігається, (або п'яти одиниць першого відкинутого розряду).

Так, у прикладах 1, 2 маємо наступні похибки округлення:

$$\Delta_0(3,1) = 0,04159 \le 0,05,\ \Delta_0(3,142) = 0,00041 \le 0,0005;$$

$$\Delta_0\ (25 \bullet 10^4) = 3750 \le 0,5 \bullet 10^4.$$

Абсолютна похибка округленого числа є сума його абсолютної похибки та похибки округлення.

Наприклад, нехай $\Delta(3,142) = 0,2$, при округленні 3,142 до 0,1 одержуємо 3,1 і $\Delta_0(3,1) = 0,042$, тоді $\Delta(3,1) = 0,2 + 0,042 = 0,242$.

Абсолютну та відносну похибки округляють до однієї, рідше до двох цифр, відмінних від нуля. *Округлення похибок виконують тільки убік збільшення до тих же розрядів, що й наближене число.*

Так, при $\Delta(3,1) = 0,242$ беруть $\Delta(3,1) = 0,3$.

Значущі, вірні і сумнівні цифри.

Значущою цифрою наближеного числа називають будь-яку його цифру, починаючи з першої ненульової (рахуючи зліва направо).

Наприклад, у числі 0,00030900 перші чотири нулі не є значущими цифрами. Всі інші цифри (включаючи і наступні три нулі) – значущі.

У цілому округленому числі значущими вважають всі збережені цифри. Так, в округленому числі $120 \bullet 10^3$ цифри 1, 2, 0 – значущі.

Вірною цифрою (вірним знаком) наближеного числа *а* називається будь-яка його значуща цифра, для якої абсолютна похибка $\Delta(a)$ не перевершує половини розряду цієї цифри. Інші значущі цифри числа *а* називаються *сумнівними.*

Таким чином, якщо $\Delta(a) \le 0,5 \bullet 10^{-n}$, то цифри числа *a,* починаючи з першої значущої та закінчуючи цифрою, що знаходиться в *n*-му розряді після коми, – вірні, а розташовані далі – сумнівні. Наприклад, число 647,326 при $\Delta(a) = 0,03 \le 0,5 \bullet 10^{-1}$ має чотири вірні цифри 6, 4, 7, 3 і дві сумнівні 2, 6.

У математичних таблицях значень функцій наводяться тільки вірні цифри. Абсолютна похибка табличних значень, наприклад, у тризначних таблицях, не перевершує $0,5 \bullet 10^{-3}$, у семизначних – $0,5 \bullet 10^{-7}$.

Точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних цифр.

Остаточний наближений результат частіше округлюють до його вірних цифр, залишаючи одну сумнівну.

При розрахунках з наближеними числами в проміжних результатах зберігають одну, дві, а іноді і три сумнівні цифри.

Приклад 3. Задані числа з абсолютною похибкою округлити до вірних цифр. Визначити абсолютну похибку результату:

1) $a_1 = 2{,}6219$, $\Delta(a_1) = 0{,}024$;
2) $a_2 = 47{,}35$, $\Delta(a_2) = 1{,}3$;
3) $a_3 = 6{,}9971$, $\Delta(a_3) = 0{,}0009$;
4) $a_4 = 0{,}648$, $\Delta(a_4) = 0{,}04$.

Розв'язування.

1) Оскільки 0,024 < 0,05, то число a_1 потрібно округлити до 0,1. Одержимо число $a_1 \approx 2{,}6$ із двома вірними цифрами.

   Визначимо абсолютну похибку результату
   $$\Delta\,(2{,}6) = 0{,}024 + |2{,}6219 - 2{,}6| = 0{,}0459 \approx 0{,}05.$$
2) Оскільки $1{,}3 < 0{,}5 \bullet 10^1$, то число a_2 потрібно округлити до десятків. Одержимо число $a_2 \approx 5 \bullet 10$ з одною вірною цифрою. Абсолютна похибка результату
   $$\Delta\,(5 \bullet 10) = 1{,}3 + 2{,}65 = 3{,}95 \approx 4.$$
3) Оскільки 0,0009 < 0,005, то округлення числа виконуємо до 0,01. Одержимо число $a_3 \approx 7{,}00$ із трьома вірними цифрами. Абсолютна похибка результату
   $$\Delta(a_3) = 0{,}0009 + |7{,}00 - 6{,}9971| = 0{,}0038 \approx 0{,}004.$$
   У числі 7,00 записані нулі свідчать про три його вірні знаки і цей запис відрізняється від 7 або 7,0.
4) Оскільки 0,04 < 0,05, то число a_4, округлюємо до 0,1. Одержимо число $a_4 \approx 0{,}6$ з одною вірною цифрою. Абсолютна похибка результату
   $$\Delta\,(0{,}6) = 0{,}04 + 0{,}048 = 0{,}088 > 0{,}05,$$
   тобто цифра 6 уже сумнівна. Тому при округленні рекомендується залишати одну-дві сумнівні цифри, тобто
   $$a_4 \approx 0{,}65,\ \Delta\,(0{,}65) = 0{,}042 \approx 0{,}05.$$

Зауважимо, що термін "вірні цифри" не слід розуміти буквально. Так, у числі 7,00, що заміняє число 6,9971, всі знаки вірні $|6{,}9971 - 7{,}00| < 0{,}005$, але жодна із цифр чисел 6,9971 і 7,00 не збігається. Однак вірні знаки наближеного числа часто збігаються з відповідними цифрами точного числа.

1.2.2.3 Похибки при арифметичних діях з наближеними числами

Похибки при арифметичних діях з наближеними числами визначаються через похибки вхідних величин.

1. *Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох чисел дорівнює сумі абсолютних похибок її доданків*:

$$\Delta(a_1 + ... + a_n) = \Delta(a_1) + ... + \Delta(a_n).$$

З рівності випливає наступне: якщо всі доданки $a_1,...,a_n$ (незалежно від їхніх знаків) мають ту саму абсолютну похибку $\Delta(a)$, то

$$\Delta(a_1 + ... + a_n) = n \cdot \Delta(a).$$

Однак, при великій кількості доданків ця формула дає дуже завищені результати, оскільки відхилення доданків від їхніх точних значень можуть мати різні знаки і в сумі великої кількості доданків частково компенсуватися.

У теорії ймовірностей доведено *правило Чеботарьова*, за яким абсолютна похибка суми великої кількості доданків $(n > 10)$ *з однаковою абсолютною похибкою* визначається за формулою

$$\Delta(a_1 + ... + a_n) = \sqrt{3n} \cdot \Delta(a).$$

Якщо ж доданки мають різні абсолютні похибки, то абсолютна похибка суми наближених чисел не менша за найбільшу з абсолютних похибок *доданків*. Тому при обчисленні суми наближених чисел всі доданки потрібно округляти до кількості десяткових знаків числа з найбільшою абсолютною похибкою, залишаючи один сумнівний знак (а при великій кількості доданків – два).

Приклад 4. В трикутнику сторони a = 17,3см, b = 23,6см, с = 14,2см, крім того $\Delta(a)$ = $\Delta(b)$= $\Delta(c)$ = 0,1см. Визначити периметр p и $\Delta(p)$.

Розв'язування.

$$p = 17{,}3 + 23{,}6 + 14{,}2 = 55{,}1 \text{ (см)},$$

$$\Delta(55{,}1) = 3 \bullet 0{,}1 = 0{,}3 \text{ (см)}.$$

В числі p = 55,1 остання цифра сумнівна. Результат можна записати у вигляді p = 55,1 ± 0,3 (см).

2. *Відносна похибка суми декількох чисел* визначається за формулою

$$\delta(a_1 + ... + a_n) = \frac{\Delta(a_1 + ... + a_n)}{|a_1 + ... + a_n|} = \frac{\Delta(a_1) + ... + \Delta(a_n)}{|a_1 + ... + a_n|}.$$

Якщо $a_1,...,a_n$ – числа одного знаку, то *відносна похибка* $\delta(a_1 + ... + a_n)$ *знаходиться між найменшою* та *найбільшою* з відносних похибок доданків:

$$\min\{\delta(a_1),...,\delta(a_n)\} \le \delta(a_1 + ... + a_n) \le \max\{\delta(a_1),...,\delta(a_n)\}.$$

Так, в попередньому прикладі

$$\delta(a) = 0{,}58\%, \qquad \delta(b) = 0{,}42\%, \qquad \delta(c) = 0{,}70\%, \qquad 0{,}42\% \le \delta(p) \le 0{,}70\%.$$

В дійсності

$$\delta(p) = \frac{0{,}3}{55{,}1} \cdot 100\% = 0{,}54\%.$$

При відніманні двох чисел одного знака відносна похибка різниці

$$\delta(a_1 - a_2) = \frac{\Delta(a_1 - a_2)}{|a_1 - a_2|} = \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2)}{|a_1 - a_2|}$$

може виявитися значно більшою за відносних похибок кожного з даних чисел. Це частіше буває, якщо $|a_1 - a_2|$ – мале число.

Приклад 5. Обчислити абсолютну і відносну похибки різниці чисел a_1=9,78, $\Delta(a_1)=0{,}01$ і $a_2=9{,}22$, $\Delta(a_2)=0{,}01$.

Розв'язування.

$$a_1-a_2=0{,}56, \qquad \Delta(a_1-a_2)=0{,}01+0{,}01=0{,}02,$$

$$\delta(a_1-a_2)=\frac{0{,}02}{0{,}56}\cdot 100\%\approx 3{,}57\%,$$

хоча

$$\delta(a_1)=\frac{0{,}01}{9{,}78}\cdot 100\%\approx 0{,}102\%, \quad \delta(a_2)=\frac{0{,}01}{9{,}22}\cdot 100\%\approx 0{,}108\%.$$

Звичайно, знаходження різниці близьких чисел намагаються уникнути, замінюючи її, за можливістю, іншими діями.

3. *Відносна похибка добутку декількох чисел дорівнює сумі відносних похибок його співмножників:*

$$\delta(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)=\delta(a_1)+\ldots+\delta(a_n).$$

4. *Абсолютна похибка добутку* обчислюють за формулою

$$\Delta(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)=|a_1\cdot\ldots\cdot a_n|\cdot\delta(a_1\cdot\ldots\cdot a_n).$$

Зокрема, якщо в добутку *са* число *с* точне, то $\delta(c)=0$ и $\delta(ca)=\delta(a)$; $\Delta(ca)=|ca\cdot\delta(a)|=|c|\cdot\Delta(a)$. Звідки одержимо

$$\Delta(c_1a_1+\ldots+c_na_n)=|c_1|\cdot\Delta(a_1)+\ldots+|c_n|\cdot\Delta(a_n).$$

Приклад 6. Нехай *а* = 4,3см, *b* = 1,6см, *с* = 2,8см – ребра прямокутного паралелепіпеда, причому

$$\Delta(a)=\Delta(b)=\Delta(c)=0{,}1.$$

Знайти об'єм паралелепіпеда, відносну і абсолютну похибки результату.

Розв'язування.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда

$$V=abc=19{,}264\,(\text{см}^2).$$

Відносну похибку знаходимо за формулою

$$\delta(V)=\delta(19{,}264)=\frac{0{,}1}{4{,}3}+\frac{0{,}1}{1{,}6}+\frac{0{,}1}{2{,}8}\approx 0{,}121.$$

Абсолютну похибку обчислюємо за формулою

$$\Delta\ (19{,}264)=19{,}264\cdot 0{,}121\approx 2{,}330$$

(похибки округлялися до тих же розрядів, що й *V).* Тому що $2{,}330<0{,}5\bullet 10^1$, то в числі 19,264 вірна лише цифра десятків, а інші цифри сумнівні. Округляємо *V,* залишивши два сумнівних знаки, і одержимо

$$V\approx 19{,}3\,\text{см}^3, \qquad \Delta(V)=2{,}4\,(\text{см}), \quad \delta(V)=12{,}5\%.$$

5. *Відносна похибка частки від ділення дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника*:

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=\delta(a_1)+\delta(a_2).$$

Зокрема, $$\delta\left(\frac{1}{a}\right)=\delta(a).$$

6. *Абсолютну похибку частки від ділення* визначають за формулою

$$\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \left|\frac{a_1}{a_2}\right| \cdot \delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right).$$

Якщо кількість чисел у добутку або відношенні велика, а відносна похибка кожного числа приблизно однакова (дорівнює $\delta(a)$), то відносна похибка результату обчислюється за *формулою Чеботарьова*

$$\delta(a_1 a_2 ... a_n) = \sqrt{3n} \cdot \delta(a) \qquad (n > 10),$$

$$\delta\left(\frac{a_1 a_2 ... a_n}{b_1 b_2 ... b_m}\right) = \sqrt{3(n+m)} \cdot \delta(a) \qquad (n + m > 10).$$

Приклад 7. Катети прямокутного трикутника $a = 2{,}6$см, $b = 3{,}4$см обчислені з абсолютною похибкою $\Delta(a) = \Delta(b) = 0{,}1$см. Визначити $tg(B)$ та $\Delta(tg(B))$, $\delta(tg(B))$.

Розв'язування.

$$tg(B) = \frac{b}{a}, \qquad tg(B) = \frac{3{,}4}{2{,}6} \approx 1{,}308.$$

Знаходимо відносну похибку

$$\delta(tg(B)) = \delta(b) + \delta(a), \quad \delta(1{,}308) = \delta(3{,}4) + \delta(2{,}6) = \frac{0{,}1}{3{,}4} + \frac{0{,}1}{2{,}6} \approx 0{,}067.$$

Абсолютну похибку обчислюємо за формулою

$$\Delta(tg(B)) = |tg(B)| \cdot \delta(tg(B)),$$

$$\Delta(1{,}308) = 1{,}308 \cdot 0{,}067 \approx 0{,}088.$$

Оскільки 0,088 < 0,5, то у числі 1,308 вірними є лише цифри цілої частини, тобто один знак, а інші сумнівні. Округляємо результат, залишивши один сумнівний знак, тому одержимо

$$tg(B) \approx 1{,}3, \quad \Delta(tg(B)) = 0{,}1, \qquad \delta(tg(B)) = 7{,}7\%.$$

При наявності декількох співмножників, у одного з яких відносна похибка у багато разів більше, ніж в інших (він обчислений найменш точно), *відносна похибка добутку буде визначатися саме за цією похибкою*. Тому число вірних знаків в інших співмножниках треба обирати за найменш точним числом, залишаючи один сумнівний. Аналогічно діємо і при діленні.

1.2.2.4 Похибки при обчисленні функції однієї змінної

Нехай задана деяка функція $y = f(x)$, для якої в кожній точці існує похідна, та x-наближене значення аргументу x_0.

Наближеним значенням y функції y_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближеному значенні аргументу, тобто $y = f(x)$, а $y_0 = f(x_0)$. Виникає питання про похибку цього наближення. Як відомо з курсу математичного аналізу, при досить малому зрості аргументу $\Delta(x)$ приріст функції $\Delta(y)$ приблизно дорівнює її диференціалу:

$$\Delta(y) = f(x) - f(x_0) \approx f'(x) \cdot \Delta(x).$$

Якщо відома абсолютна похибка аргументу $\Delta(x) > |x - x_0|$, то *абсолютну похибку функції* можна визначити за формулою

$$\Delta(y) = |f'(x)| \cdot \Delta(x).$$

Відносна похибка функції, визначається за формулою

$$\delta(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \Delta(x).$$

Визначимо абсолютні і відносні похибки деяких основних елементарних функцій.

1) *Логарифмічна функція* $f(x) = \log_a(x)$.

Абсолютна похибка логарифмічної функції має вигляд

$$\Delta(\log_a(x)) = \frac{1}{|x|} \cdot |\log_a(e)| \cdot \Delta(x) = |\log_a(e)| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |\log_a(e)| \cdot \delta(x),$$

$$\text{де} \qquad \delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|}.$$

Зокрема, якщо a = 10, то $\lg(e) \approx 0{,}5$ і $\Delta(\lg(x)) \approx 0{,}5 \cdot \delta(x)$, якщо ж a = e, то $\Delta(\ln(x)) = \delta(x)$ $(\ln(e) = 1)$. Абсолютна похибка логарифмічної функції з підстановкою e дорівнює відносній похибці аргументу. Відносну похибку функції знаходимо за формулою

$$\delta(\log_a(x)) = \left|\frac{\log_a(e)}{\log_a(x)}\right| \cdot \delta(x).$$

2) *Степенева функція* $f(x) = x^a$, (a – довільне дійсне число).

$$\Delta(x^a) = |a \cdot x^{a-1}| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(x^a) = \left|\frac{ax^{a-1}}{x^a}\right| \cdot \Delta(x) = |a| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |a| \cdot \delta(x).$$

Отже, відносна похибка степеневої функції пропорційна відносній похибці аргументу. Зокрема,

$$\delta(x^2) = 2\delta(x),$$

$$\delta(x^3) = 3\delta(x),$$

$$\delta(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\delta(x),$$

$$\delta(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\delta(x).$$

3) *Показникова функція* $f(x) = a^x$.

$$\Delta(a^x) = a^x |\ln(a)| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(a^x) = |\ln(a)| \cdot \Delta(x).$$

4) *Тригонометричні функції* $f(x)=\sin(x)$, $f(x)=\cos(x)$.

$$\Delta(\sin x)=|\cos x|\cdot\Delta(x)\le\Delta(x),$$
$$\Delta(\cos x)=|\sin x|\cdot\Delta(x)\le\Delta(x).$$

Отже, абсолютні похибки функцій синус і косинус не перевершують абсолютної похибки свого аргументу. Відносні похибки можна оцінити за формулами

$$\delta(\sin x)=|ctgx|\cdot\Delta(x),$$
$$\delta(\cos x)=|tgx|\cdot\Delta(x).$$

1.2.2.5 Похибки при обчисленні функції декількох змінних

Розглянемо функцію, що диференціюється, наприклад, трьох змінних $u=f(x,y,z)$. Нехай x, y, z – наближені значення аргументів x_0, y_0, z_0, що обчислені з абсолютними похибками $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta(z)$. Наближеним значенням u функції u_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближених значеннях аргументів $u=f(x,y,z)$, а точним значенням вважають $u_0=f(x_0,y_0,z_0)$. Для визначення похибок, як і у випадку функції однієї змінної, скористаємося формулою диференціала, замінивши їм приріст функції:

$$\Delta u=f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)\approx\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\Delta z.$$

Абсолютну похибку $\Delta(u)$ функції при відомих абсолютних похибках аргументів $\Delta(x)$, $\Delta(y)$, $\Delta(z)$ знаходимо за формулою

$$\Delta(u)=\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right|\Delta y+\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right|\Delta z.$$

Відносну похибку визначимо наступним виразом

$$\delta(u)=\frac{\Delta(u)}{|u|}.$$

Приклад 8. Обчислити абсолютну і відносну похибки функції $u=xyz$.

Розв'язування. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x}=yz$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xy$, то абсолютна похибка обчислюється за формулою

$$\Delta(u)=|yz|\cdot\Delta x+|xz|\cdot\Delta y+|xy|\cdot\Delta z,$$

а відносна похибка за формулою

$$\delta(u)=\frac{|yz|\cdot\Delta x+|xz|\cdot\Delta y+|xy|\cdot\Delta z}{|xyz|}=\frac{\Delta x}{|x|}+\frac{\Delta y}{|y|}+\frac{\Delta z}{|z|}=$$
$$=\delta(x)+\delta(y)+\delta(z)$$

Отримана формула є формулою відносної похибки добутку.

1.2.2.6 Похибки обчислювальних методів

Похибки, що виникають при розв'язуванні математичних задач чисельними методами, можна поділити на дві групи. Першу групу складають похибки, що не залежать від конкретного змісту задачі, а також похибки, що викликані діями над наближеними числами. До другої групи належать похибки, що виникають за рахунок того, що математична задача, як правило, заміняється спрощеною, близькою за результатами наближеною задачею. Ці похибки *(похибки методу)* визначаються залежно від характеру задачі.

Надалі, в основному, для кожної задачі буде розглянуто і похибки методу для її розв'язування.