1.3 Відношення еквівалентності та порядку

Різні відношення, які зустрічаються на практиці, можуть мати ті або інші властивості. Ці властивості були представлені у темі 2. Більш того, виявляється, що деякі стійкі комбінації цих властивостей зустрічаються настільки часто, що заслуговують окремої назви та спеціального вивчення. Розглянемо класи відношень, які мають визначений набір властивостей. Таке абстрактне вивчення класів відношень має ті переваги, що один раз встановивши деякі наслідки із наявності у відношення визначеного набору властивостей, далі ці наслідки можна автоматично розвинути на всі конкретні відношення, що мають певний набір властивостей. Розглянемо у даній лекції відношення еквівалентності та порядку.

1.3.1 Відношення еквівалентності

Бінарне відношення на множині A називається **відношенням еквівалентності**, якщо це відношення є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Відношення еквівалентності будемо позначати символом "$\equiv$" або "$\sim$".

Нехай задана множина A і відношення еквівалентності, що визначене на цій множині: $R \subseteq A \times A$. Елементи $a, b \in A$, для яких виконується aRb, називаються ***еквівалентними***.

Важлива властивість будь-якого відношення еквівалентності R, визначеного на множині A, полягає в тому, що воно розбиває множину A на неперетинні підмножини, які називаються ***класами еквівалентності***.

У випадку скінченної множини A розбиття її на класи еквівалентності відбувається наступним чином. Нехай на множині A задане відношення еквівалентності R. Виберемо елемент $a_1 \in A$ і утворимо клас C_1 що складається з усіх елементів $y \in A$, для яких виконується відношення a_1Ry. Клас C_1 може складатися тільки з одного елемента a_1, якщо не існує інших елементів y, таких, що a_1Ry. Зауважимо, що через рефлексивність відношення еквівалентності завжди виконується a_1Ra_1. Якщо $C_1 \neq A$, то виберемо з A елемент a_2, що не входить до класу C_1, і утворимо клас C_2, який складається з елементів $y \in A$, для яких виконується відношення a_2Ry. Якщо $(C_1 \cup C_2) \neq A$, то виберемо з A елемент a_3, що не входить до класів C_1 і C_2, і утворимо клас C_3. Будемо продовжувати побудову класів доти, доки в A не залишиться жодного елемента, що не входить до одного з класів C_i. Вийде система класів $C_1, C_2, ..., C_n$. Ця система класів називається ***системою класів еквівалентності*** і має такі властивості:

а) класи попарно не перетинаються;

б) будь-які два елементи з одного класу еквівалентні;

в) будь-які два елементи з різних класів не еквівалентні.

Нехай "≡" — відношення еквівалентності на A і $x \in A$. Тоді підмножина елементів множини A, які еквівалентні x, називається **класом еквівалентності** для x:

$$[x]_{\equiv} = \{y \mid y \in A,\ x \equiv y\}.$$

Якщо зрозуміло про яке відношення йде мова, то його позначення опускається.

Теорема 3.1. Всяке відношення еквівалентності на множині A визначає розбиття множини A, притому серед елементів розбиття немає порожніх. Це розбиття єдине. Зворотно, всяке розбиття множини A, яке не містить порожніх елементів, визначає відношення еквівалентності на множині A.

Приклад. Відношення рівності «=» на будь-якій множині чисел є відношенням еквівалентності. Відношення «навчатися в одному класі» на множині учнів школи є відношенням еквівалентності і розбиває всю множину учнів школи на окремі класи. Відношення «мати однакове ім'я» на визначеній множині людей є відношенням еквівалентності і розбиває всю множину людей на класи еквівалентності — групи людей з однаковими іменами.

Відношення "жити в одному місті" є також відношенням еквівалентності. Множина всіх громадян України, розбивається останнім відношенням на підмножини, що не перетинаються. Два мешканця вважаються еквівалентними за цим відношенням, якщо вони живуть в одному й тому самому місті, тобто вони мають одну й ту саму властивість — "мешкати у місті *X*". З іншого боку не можна жити одночасно в двох різних містах, тому множини мешканців різних міст не перетинаються. Таким чином, відношення "жити в одному місті" б'є множину всіх мешканців України на ряд підмножин, що не перетинаються, таких, що у кожній підмножині всі мешканці еквівалентні за цим відношенням і жодні два мешканці різних підмножин не знаходяться у цьому відношенні, тобто не еквівалентні один одному. Такі підмножини мають назву класів еквівалентності.

1.3.2 Матриця та граф відношення еквівалентності

Нехай відношення еквівалентності задано на множині A. Елементи, що належать одному класу еквівалентності, попарно еквівалентні між собою. Отже, стовпці матриці відношення еквівалентності для елементів одного класу еквівалентності однакові та містять одиниці у всіх рядках, які відповідають цим елементам. Оскільки класи еквівалентності не перетинаються, у стовпцях, які відповідають елементам різних класів, не буде одиниць в одних і тих самих рядках.

При побудові матриці відношення розташовують елементи множини так, щоб ті елементи, які належать одному класу еквівалентності, були поруч. Тоді одиничні елементи матриці відношення еквівалентності утворять непересічні квадрати, діагоналі яких розташовуються на головній діагоналі матриці.

Приклад. Нехай $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $R \subseteq A \times A$.

$$R = \{(a,a),(a,e),(a,f),(b,b),(b,h),(c,c),(c,g),(d,d),(e,a),(e,e),(e,f),$$
$$(f,a),(f,e),(f,f),(g,c),(g,g),(h,b),(h,h)\}.$$

Матриця відношення R:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	1	0	0	0	1	1	0	0
b	0	1	0	0	0	0	0	1
c	0	0	1	0	0	0	1	0
d	0	0	0	1	0	0	0	0
e	1	0	0	0	1	1	0	0
f	1	0	0	0	1	1	0	0
g	0	0	1	0	0	0	1	0
h	0	1	0	0	0	0	0	1

Маємо наступні класи еквівалентності:

$$A_1 = \{a, e, f\},\quad A_2 = \{c, g\},\quad A_3 = \{d\},\quad A_4 = \{b, h\}.$$

Матриця після перестановок матиме такий вигляд:

	a	e	f	c	g	d	b	h
a	1	1	1	0	0	0	0	0
e	1	1	1	0	0	0	0	0
f	1	1	1	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0	0
g	0	0	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1	0	0
b	0	0	0	0	0	0	1	1
h	0	0	0	0	0	0	1	1

Граф відношення еквівалентності також має характерний вигляд. Це граф, кожна компонента з'єднання якого, що відповідає класу еквівалентності, є повним підграфом із петлями на кожній вершині.

Для попереднього прикладу граф має вигляд, зображений на рисунку 3.1.

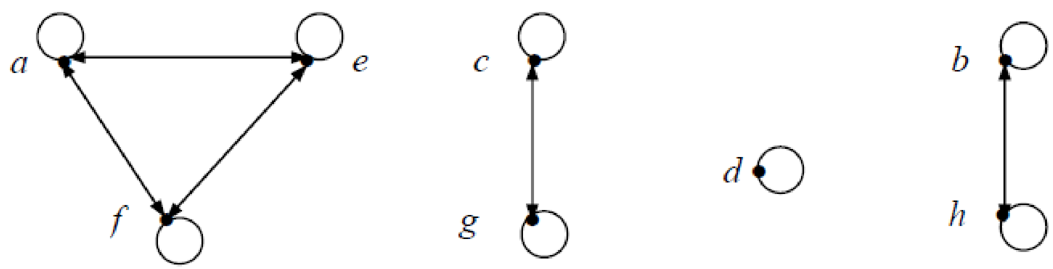


Рис. 3.1. Граф відношення еквівалентності

1.3.3 Відношення порядку

Бінарне відношення на множині A називається відношенням **часткового (нестрогого) порядку** (позначається $\leq$), якщо воно:

1) рефлексивне $(a \leq a)$,
2) антисиметричне (якщо $a \leq b$ і $b \leq a$, то $a = b$);
3) транзитивне (якщо $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$).

Прикладом відношення нестрогого порядку в множині $\boldsymbol{Z}$ або $\boldsymbol{R}$ є нестрога нерівність. Як приклад відношення нестрогого порядку на множині людей можна назвати відношення “бути не старшим” або “бути не молодшим”.

Бінарне відношення на множині A називається відношенням **строгого порядку** (позначається $<$), якщо воно:

1) антирефлексивне (якщо $a < b$, то $a \neq b$);
2) асиметричне (якщо $a < b$, то не правильне $b < a$);
3) транзитивне (якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$).

Як приклад відношення строгого порядку можна навести відношення строгої нерівності на множинах цілих або дійсних чисел, а також відношення “бути молодшим” або “бути старшим” на множині людей.

Множина, в якій визначено відношення порядку (строгого або нестрогого), називається **упорядкованою**, і кажуть, що порядок уведено цим відношенням.

Елементи a і b називаються ***порівнянними*** за відношенням R, якщо виконується хоча б одне із співвідношень aRb або bRa.

Множина A називається **лінійно впорядкованою**, якщо для будь-яких двох її елементів x та y виконується $x<y$ або $y<x$ ($x \leq y$ або $y \leq x$).

Лінійно впорядковану множину також називають *абсолютно впорядкованою* або просто *впорядкованою множиною*.

Лінійно впорядкована множина зі строгим порядком також називається **ланцюгом**.

Наприклад, множина дійсних чисел з відношенням порядку “<” є лінійно впорядкованою.

Може виявитись, що для деяких пар (x, y) жодне зі співвідношень $x<y$ або $y<x$ не виконується. Такі елементи x та y називаються **незрівнянними**. У цьому випадку кажуть, що множина є **частково впорядкованою**.

Приклад. Нехай дана множина $A = \{1, 2, 3\}$ та її булеан

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Визначимо відношення R на $\mathrm{P}(A)$ наступним чином: $(X, Y) \in R$: $X \subseteq Y$. Таким чином, $(\{2\}, \{1,2\}) \in R$, тому що $\{2\} \subseteq \{1, 2\}$, але $(\{1,2\}, \{2\}) \notin R$, тому що $\{1,2\} \not\subseteq \{2\}$. Побудоване відношення є:

- рефлексивне: $\forall X \in \mathrm{P}(A) \mid X \subseteq X$.
- антисиметричне: $X \subseteq Y$ та $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y$.
- транзитивне: $X \subseteq Y$ та $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$.

Отже, відношення R є відношенням нестрогого порядку. Проте очевидно, що знайдуться такі множини X та Y серед $\mathrm{P}(A)$, що не виконується ні $X \subseteq Y$, ні $Y \subseteq X$. Отже, множина $\mathrm{P}(A)$ з відношенням нестрогого порядку “$\subseteq$” є частково впорядкованою множиною.

Приклад. Відношення “x — пращур y”, яке визначене на множині всіх людей. Це відношення є відношенням строгого порядку, тому що воно антирефлексивне (жодна людина не є пращуром самої себе). Множина людей із цим відношенням є частково впорядкованою множиною, бо існують люди, які не знаходяться між собою у родинних зв’язках.

Приклад. Відношенням лінійного порядку є відношення старшинства на множині офіцерських звань: лейтенант, старший лейтенант, капітан, майор, підполковник, полковник, генерал. Очевидно, що на заданій множині виконується відношення “бути молодшим за званням”. Отже, оскільки побудоване відношення є транзитивним і асиметричним, це відношення строгого порядку. Крім того, воно виконується для будь-яких елементів множини, яка розглядається. Отже, цей порядок є лінійним.

Відношення R на множині A, що задовольняє властивості рефлексивності та симетричності, називається відношенням **толерантності**.

Приклад. Відношення “відстань між двома точками на площині не перевищує деякого заданого числа a” є відношенням толерантності. Це означає, що толерантними є будь-які дві точки, відстань між якими не перевищує a.

1.3.4 Структура впорядкованих множин

Теорема 3.2. (принцип подвійності). Відношення, обернене до відношення часткового порядку, теж буде відношенням часткового порядку.

Теорема 3.3. Всяка підмножина частково упорядкованої множини теж буде частково упорядкованою множиною.

Мінімальним (**максимальним**) елементом множини A, на якій задано відношення порядку $\leq$, називається такий елемент $x \in A$, що для всякого елемента $y \in A$, що порівнюється з x, має місце $x \leq y$ ($y \leq x$).

Наприклад, розглянемо множину людей. Деякі з них утворюють родини, в яких хтось буде батьками, а хтось дітьми. Відношенням строгого порядку може бути відношення "x та y — діти однієї родини та x молодше y". В кожній родині, яка має дітей, такому відношенню буде відповідати лише один мінімальний елемент, але взагалі у множині людей таких елементів буде декілька.

Елемент $x \in A$ називається **найменшим** (**найбільшим**), якщо для кожного елемента $y \in A$ виконується $x \leq y$ ($y \leq x$).

Теорема 3.4. В кожній частково упорядкованій множині існує не більше одного найменшого (а в силу принципу подвійності і найбільшого) елементу.

Теорема 3.5. Будь-яка скінченна непорожня впорядкована множина має мінімальні та максимальні елементи.

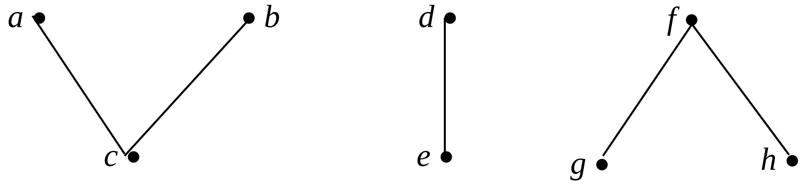
Теорема 3.6. Будь-який частковий порядок на кінцевій множині може бути доповненим до лінійного.

1.3.5 Діаграми впорядкованих множин

Граф відношення порядку буде містити велику кількість транзитивно замкнених дуг. Тому він буде виглядати занадто складно. Тож для відношення порядку зазвичай будується діаграма Гассе, яка відображає відношення домінування.

Нехай A — частково впорядкована множина з відношенням порядку $\leq$ і $x, y \in A$. Говорять, що елемент y **домінує** над елементом x, якщо $y > x$ і ні для якого елементу $z \in A$ невірно, що $y > z > x$.

Наприклад:



а б в

Рис. 3.2. а) a та b домінують над c; б) d домінує над e; в) f домінує над g та h

Тоді впорядковану множину множна зобразити у вигляді графу наступним чином. Граф будується знизу-вгору: якщо елемент y домінує над x, то він розташовується вище елемента x і з'єднується з ним прямою. Незрівнянні елементи розташовуються на одному рівні. Отриманий граф називається

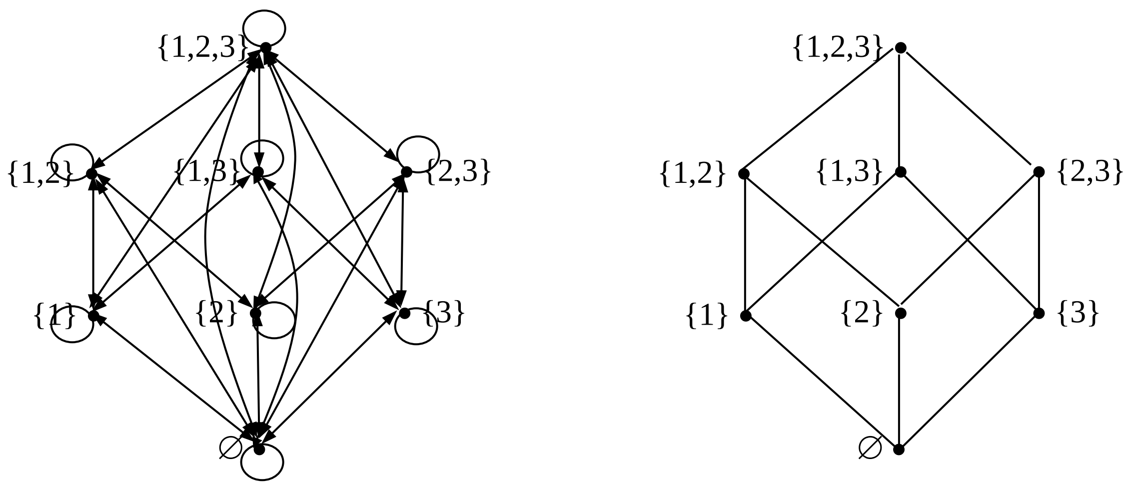
діаграмою Гассе. Граф відношення домінування не містить транзитивно замкнутих дуг та петель, які відображають рефлексивніть відношення, тому діаграма впорядкованої множини може бути отримана із орієнтованого графа відношення порядку видаленням петель та транзитивно замкнутих дуг.

Повернемося до прикладу із буленом множини та відношенням нестрогого включення.

Нехай множина A = {1,2,3} та її булеан

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Граф відношення $\subseteq$ на елементах булеана P(A) зображений на рисунку 3.3,а. Діаграма Гассе того ж самого відношення на тій самій множині зображена на рисунку 3.3,б. Відразу помітно, що діаграма Гассе сприймається легше, ніж граф відношення.



а б

Рис. 3.3. Граф (а) та діаграма Гассе (б) відношення часткового порядку.

Нехай A — множина на якій визначено порядок < або ≤. **Верхньою межею** або **гранню** підмножини $B \subseteq A$ називають такий елемент $m \in A$, що для будь-якого елемента $x \in B$ справджується відношення $x<m$ або $x \leq m$. **Нижньою межею** або **гранню** підмножини $B \subseteq A$ називають такий елемент $n \in A$, що для будь-якого елемента $x \in B$ справджується відношення $n<x$ або $n \leq x$.

Верхні та нижні межі не повинні завжди існувати для будь-якої множини і вони не завжди єдині. У попередньому прикладі верхня межа для підмножини {{1}} містить елементи {1,2} та {1,3}. А нижня межа для підмножини {∅} не визначена.

Якщо існує найбільша нижня межа множини B, то вона називається **точною нижньою межею** і позначається *inf*(B) (*infinum*). Якщо існує найменша верхня межа множини B, то вона називається **точною верхньою межею** і позначається *sup*(B) (*supremum*).

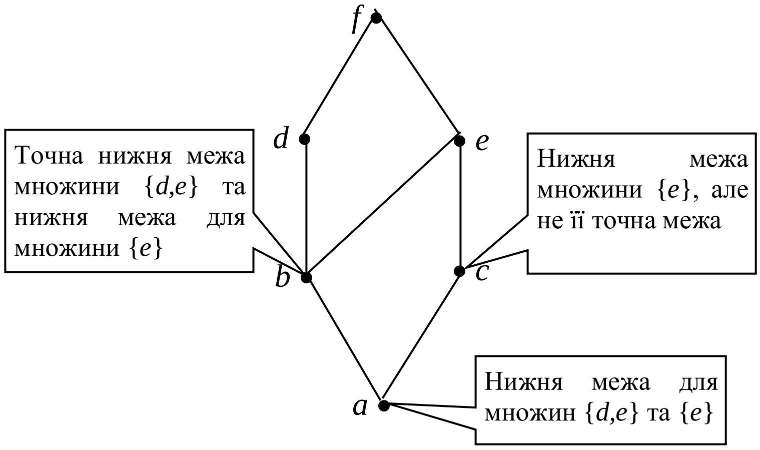


Рис. 3.4. Точні нижні межі

Розглянемо множину, що представлені на діаграмі Гассе на рис. 3.4. Для множини $\{d, e\}$ нижніми межами будуть елементи b, так як $b \leq d$, $b \leq e$, та a, так як $a \leq d$, $a \leq e$, але $a \leq b$, отже, b буде точною нижньою межею. Для множини $\{e\}$ нижніми межами будуть елементи c, так як $c \leq e$, b, так як $b \leq e$, та a, так як $a \leq e$, проте $a \leq c$ та $a \leq b$, але c та b незрівнянні, отже, ні b, ні c не є точною нижньою межею для множини $\{e\}$. Таким чином, в даній впорядкованій множині не для всіх підмножин існують точні нижні межі. Так само будуються верхні та точні верхні межі.

1.3.6 Повністю впорядкована множина

Лінійно впорядкована множина A називається **повністю впорядкованою**, якщо всяка її непорожня підмножина B має найменший елемент.

Не треба плутати повністю впорядковану множину і множину, на якій визначено лінійний порядок. Лінійно впорядкована множина може і не бути повністю впорядкованою.

Наприклад, множина натуральних чисел зі звичайним відношенням порядку є повністю впорядкованою. Множина раціональних чисел Q зі звичайним відношенням порядку не є повністю впорядкованою, так як множина $A = \{x \in Q \mid x^2 > 2\}$ не має мінімального елемента. Але всяка скінченна лінійно впорядкована множина є повністю впорядкованою.

<u>Теорема 3.7 (Цермелло)</u>. Будь-яку частково впорядковану множину можна зробити цілком упорядкованою. Для цього відношення часткового порядку доповнюється до лінійного (будується лінійне замикання).