3 ПРОБЛЕМА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЬ

3.1 Загальні питання проблеми власних значень. Власні значення та власні вектори матриць

Задача обчислення власних значень і власних векторів полягає в знаходженні всіх власних значень і відповідних власних векторів квадратної матриці.

Такі задачі нерідко виникають при розв'язанні інженерних задач. Наприклад, при динамічному аналізі механічних систем власні значення відповідають власним частотним коливанням, а власні вектори характеризують моди (просторовий напрям і амплітуди) цих коливань. При розрахунку конструкцій власні значення дозволяють визначити критичні навантаження, перевищення яких призводить до втрати стійкості (руйнування).

Нехай задана квадратна матриця m-го порядку з дійсними елементами

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Визначення. ***Власним значенням (власним числом)*** дійсної матриці A розмірності $m \times m$ називається таке число λ (дійсне або комплексне), для якого знайдеться дійсний ненульовий вектор $x = \left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$, що задовольняє рівність

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

При цьому вектор x називається ***власним вектором*** матриці A, що відповідає власному значенню λ.

Матриця розмірності $m \times m$ має m власних чисел, які можуть бути кратними.

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\left(A - \lambda E\right) x = 0, \tag{2}$$

де E – одинична матриця, $x \neq 0$.

З курсу алгебри відомо, що для існування нетривіального розв’язку системи лінійних однорідних рівнянь (1) повинна виконуватись умова

$$D(\lambda) = \det\left(A - \lambda E\right) = 0, \tag{3}$$

де матриця $\left(A - \lambda E\right)$ має вигляд

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Визначник $D(\lambda)=|A-\lambda E|$ називається *характеристичним* (або *віковим*) *визначником*, а рівняння (3) називається *характеристичним* (або *віковим*) *рівнянням*.

Якщо розкрити визначник $|A-\lambda E|$, одержимо алгебраїчне рівняння m-го степеню відносно λ:

$$D(\lambda)=(-1)^m\left(\lambda^m-c_1\lambda^{m-1}-c_2\lambda^{m-2}-\ldots-c_{m-1}\lambda-c_m\right)=0.$$

Цей поліном має m розв'язків, які можуть бути дійсними або комплексними, простими чи кратними. Розв'язки λ_i $(i=1,2,\dots,m)$ характеристичного рівняння є власними числами матриці.

Отже, задача визначення власних значень зводиться до проблеми розкриття визначника $|A-\lambda E|$ за степенями λ та наступного розв'язання алгебраїчного рівняння m-го степеня.

Власним вектором матриці A, що відповідає власному значенню λ_i, називається ненульовий вектор $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)^T$, який задовольняє матричному рівнянню (1)

$$Ax=\lambda x,$$

тобто системі рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1m}x_m=\lambda_i x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2m}x_m=\lambda_i x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mm}x_m=\lambda_i x_m \end{cases}$$

Відрізняють *повну проблему власних значень*, коли необхідно відшукати всі власні значення матриці A та відповідні власні вектори, і *часткову проблему власних значень*, коли необхідно відшукати тільки деякі власні значення, наприклад, максимальне чи мінімальне за модулем власне значення; два максимальних власних значення; найближче до даного власне значення.

Здавалось б що часткова проблема власних значень є частковою проблемою повної, і вирішується тими ж методами що і повна. Проте, методи, що застосовуються до часткових задач, набагато ефективніші, тому можуть застосовуватись до матриць великої розмірності (наприклад в ядерній фізиці виникають проблеми знаходження власних значень для матриць розмірності $10^3 - 10^6$).

При розв’язанні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначення власних значень даної матриці *A*, а також знаходження відповідних власних векторів матриці *A*. Друга задача є більш простою, оскільки знаходження власних векторів за відомими коренями характеристичного рівняння зводиться до знаходження ненульових розв’язків однорідних лінійних систем. Тому, в першу чергу, будемо займатися першою задачею – знаходженням власних значень.

Отже, розглянемо чисельні методи знаходження власних значень.

Методи обчислення власних значень

Вибір найбільш ефективного методу визначення власних значень або власних векторів для заданої задачі залежить від ряду факторів (тип рівнянь, число і характер власних значень, вид матриці і т.д.).

Чисельні методи обчислення власних значень можна розподілити на 3 групи:

- *прямі*, основані на безпосередньому розгортанні характеристичного визначника $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ в поліном степеня m, з подальшим розв’язанням характеристичного рівняння $D(\lambda) = 0$ одним з відомих наближених методів;
- *перетворення подібності*, які використовують властивості подібних матриць, що мають однакові власні значення, що значно спрощує процес розгортання характеристичного визначника $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ в поліном;
- *ітераційні*, основані на багатократному застосуванні ітераційного алгоритму, який наближає власний вектор, що одержується в кожному циклі, до точного розв’язку. Ці методи застосовують тоді, коли треба знайти тільки окреме власне значення (наприклад, максимальне за модулем).

Розглянемо детальніше прямий метод.

Обчислення власних значень з використанням характеристичного рівняння. Відповідно до означення, власні числа – це розв’язки характеристичного рівняння. Скористаємося цим означенням на практиці.

Приклад. Обчислити всі власні числа та власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Складемо матрицю $\left(A-\lambda E\right)$ і розкриємо її визначник:

$$\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12.$$

Для здобутого характеристичного рівняння $-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0$ розв’язки $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=4$ і є власними числами матриці A.

Для обчислення власного вектору, що відповідає власному значенню λ_i, запишемо рівняння $Ax=\lambda x$ (1) у вигляді:

$$Ax-\lambda_i x=0 \text{ або } \left(A-\lambda_i E\right)x=0.$$

Отже, для заданої матриці A матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \left(3-\lambda_i\right)x_1-x_2=0 \\ -x_1+\left(2-\lambda_i\right)x_2-x_3=0, \\ -x_2+\left(3-\lambda_i\right)x_3=0 \end{cases} \qquad (*)$$

розв'язок якої є власним вектором для власного числа λ_i.

Підставимо $\lambda_1=1$ у систему (*), отримаємо

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=0 \\ -x_1+x_2-x_3=0. \\ -x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

Нехай $x_3=1$, тоді $x_2=2$, $x_1=1$. Отже, розв’язок цієї системи $x^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ є власним вектором матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda_1=1$.

Для обчислення власного вектора, що відповідає власному числу $\lambda_2=3$, підставимо його у систему (*), отримаємо

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи – власний вектор $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Підставимо $\lambda_3 = 4$ у систему (*), отримаємо

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи – власний вектор $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Такий метод обчислення власних значень та векторів є точним, однак за розмірів матриці понад три ($n > 3$) надто важко скласти характеристичне рівняння.

Обчислення власних значень з використанням перетворень подібності матриць

Перетвореннями подібності вихідну матрицю *A* приводять до іншої матриці, в якої власні значення обчислюються простіше, аніж у вихідної матриці *A*.

Деякі методи, що використовують перетворення подібності, засновано на теоремі, що кожну матрицю *A*, яка має *n* власних значень, можна звести за допомогою перетворень подібності до діагональної матриці, яка складається з власних значень:

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Перетворенням подібності матриць називають перетворення вигляду

$$C = T^{-1}AT, \quad |T| \neq 0.$$

У цьому разі матрицю C називають *подібною* до матриці *A*.

Властивості подібних матриць:

- у подібних матриць власні числа збігаються;
- якщо x є власним вектором матриці A для власного числа λ, то для матриці C, подібної до матриці A, вектор $y = T^{-1}x$ є власним.

Власні вектори й значення пов'язані між собою співвідношенням

$$X^{-1}AX = D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right),$$

де X – матриця, складена з власних векторів $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$.

Приклад. Для розглянутої вище матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

складемо матрицю X з власних векторів $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця X^{-1} має вигляд

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0,167 & 0,333 & 0,167 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0,333 & -0,333 & 0,333 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $X^{-1}AX$:

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} 0,167 & 0,333 & 0,167 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0,333 & -0,333 & 0,333 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Отже, дійсно, матрицю A можна привести до діагональної форми із власними значеннями $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4$:

$$X^{-1}AX = D = \mathrm{diag}\left(1, 3, 4\right).$$

В якості матриці T зазвичай використовують ортогональні матриці, оскільки для них обернена матриця дорівнює транспонованій і немає потреби її обчислювати. І, що є ще важливіше, – перетворення з ортогональними матрицями є чисельно стійкими.

Для матриць розмірності не вище за 20 доцільно використовувати метод Якобі, який ґрунтується на ідеї таких перетворень подібності матриць, за яких послідовно усуваються найбільші ненульові недіагональні елементи для здобуття матриці D_n, яку з певною заданою похибкою можна вважати за діагональну. Недоліком методу є те, що після обнулення недіагональних елементів матриці наступні ітерації можуть зробити їх ненульовими. А отже, треба буде здійснити багато ітерацій, щоб елементи, які не лежать на діагоналі, стали близькими до нуля.

Для матриць більших розмірів (в яких n становить понад кілька десятків і навіть сотень) оптимальніше використовувати метод Хаусхольдера, відповідно до якого задана матриця за допомогою спеціальних перетворень стає симетричною тридіагональною матрицею вигляду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

де a_i – елементи головної діагоналі; b_i та c_i – елементи матриці, розташовані паралельно до елементів головної діагоналі (b_i на один елемент правіше, c_i – на один елемент лівіше).