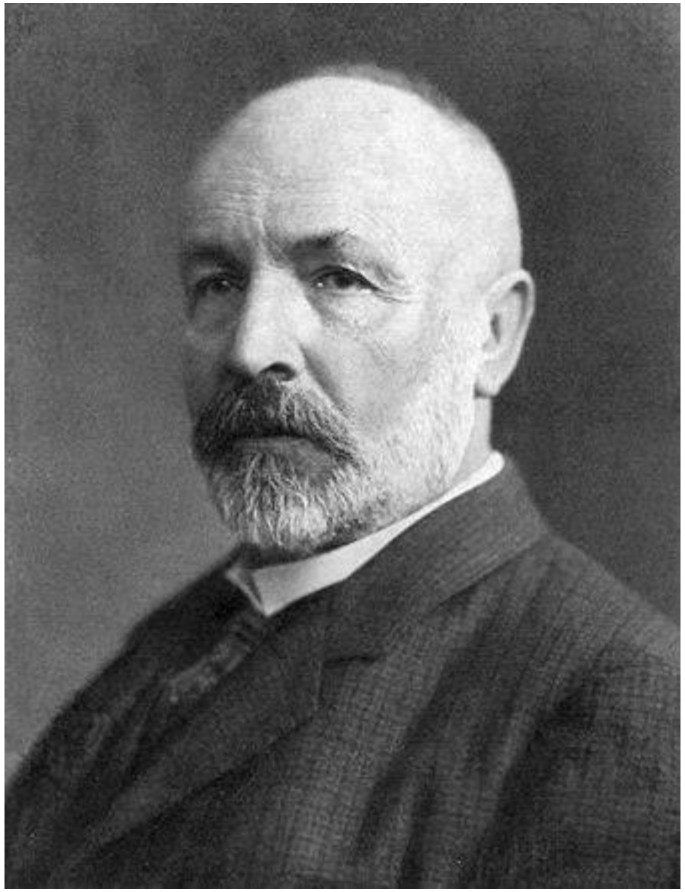
Розділ 1

Множини та відношення

Тема 1.1 Множини

1.1.1 Основні поняття теорії множин

Множина — сукупність деяких **елементів**, цілком визначених у випадку кожної конкретної множини.



Георг Кантор

Приклади множин:

множина чисел, що діляться на 5;

множина студентів ФІОТ;

множина людей, що народилися у 2020 р. і т.д.

$A, S, X, \ldots$ — позначення множин

$a, s, x, \ldots$ — позначення елементів множин

Символ «$\in$» — символ належності

$x \in S$ — x є елементом множини S

$x \notin S$ — елемент x не належить множині S

Приклади:

$A=\{a, b, c, d\}$ — множина A складається з чотирьох елементів a, b, c, d

$A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — скінченна множина A складається з n елементів $a_1, a_2, ..., a_n$

$\{x\}$ — одинична множина

Якщо множина S скінченна, то кількість елементів в множині позначається $|S|$.

Приклад. $S = \{a, b, c\}$, $|S| = 3$.

Порядок слідування елементів у множині не має значення.

Наприклад, $\{a, b, c\}$ та $\{c, a, b\}$ — одна й та сама множина.

Позначення основних числових множин:

N — *множина натуральних чисел*, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$;

Z — *множина цілих чисел*, $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;

Позначення основних числових множин:

Q — *множина раціональних чисел*; будь-яке раціональне число можна зобразити у вигляді дробу: a/b, де $a, b \in Z$, $b \neq 0$;

R — *множина дійсних чисел*; будь-яке дійсне число можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу $a, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$ із цілою частиною $a \in Z$ і $b_k \in \{0, \ldots, 9\}$.

Приклад. $A = \{C, D\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{c, d, e\}$.

При цьому $C \in A$, $D \in A$, але $a \notin A$, $c \notin A$.

Приклад. $X = \{\{1, 2\}, 3\}$.

Множина називається **скінченною**, якщо вона містить скінченне число елементів,

нескінченною — якщо вона містить необмежене число елементів.

Приклад.

A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0} — множина цифр в десятковій системі числення скінченна;

$N = \{1, 2, 3, ...\}$ — множина натуральних чисел нескінченна.

Упорядкованою вважається така множина, в якій важливі не тільки її елементи, але і порядок їх наступності у множині.

Приклад.

$A = <1, 2, 3>$;

$A = < a_1, a_2, ..., a_n >, \; n \in N$;

$B = (a, b, c)$.

1.1.2 Способи задання множин

1) переліком елементів

Приклад.

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

O = {Іванов, Петров, Сидоров, Кукушкіна}.

2) **визначення властивості елементів** (характеристичний предикат)

Приклади.

$$X = \{x \mid P(x)\};$$

$$N_{10} = \{x \mid x \in N,\, x < 10\};$$

множина S студентів групи ІС-12, які одержують стипендію.

3) рекурсивно (породжуюча процедура)

Приклад.

Нехай $F = \left\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ... \right\}$, де $\varphi_i \in N$, $i = 1, 2, 3, ...$

$\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 2$, $\varphi_n = 3\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}$, $n = 3, 4, ...$

Тоді

$$\varphi_3 = 3\varphi_1 + \varphi_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5;$$

$$\varphi_4 = 3\varphi_2 + \varphi_3 = 3 \cdot 2 + 5 = 11 \text{ і т.д.}$$

Множина задана коректно, якщо для будь-якого елемента можна визначити, належить він множині чи ні.

Приклади.

A — множина, що містить будь-які п'ять натуральних чисел;

B — множина всіх простих чисел

При заданні множин можуть бути неточності або збитковості, які необхідно усувати.

Приклад. A — множина залишків, що одержуються при послідовному діленні натуральних чисел $\{3, 4, 5, 6, ...\}$ на 3:

$A = \{0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, ...\}$.

1.1.3 Основні поняття теорії множин

Дві множини **рівні**, якщо вони містять однаковий набір елементів. Позначається $A = B$. Якщо множини не рівні, це позначається $A \neq B$.

Приклад. Нехай задані множини

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\};$

B — множина натуральних чисел від 1 до 5;

$C = \{c \mid 1 \leq c \leq 5,\ c \in N\};$

$D = \{4, 1, 5, 2, 3\}.$

Чи є серед множин A, B, C, D — рівні?

Двостороннє включення

$A = B$ тоді і тільки тоді, коли з $x \in A$ виходить $x \in B$ і з $y \in B$ виходить $y \in A$.

Множини A і B називаються **еквівалентними** або **рівнопотужними** ($A \sim B$), якщо між ними можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

Взаємнооднозначною називається така відповідність між множинами A і B, при якій кожному елементу $a \in A$ відповідає один і тільки один елемент $b \in B$, і кожному елементу $b \in B$ відповідає один і тільки один елемент $a \in A$.

Приклад. Взаємнооднозначна відповідність між глядачами і кріслами (кожному глядачеві відповідає одне і тільки одне визначене крісло і навпаки).

Множина A називається **зчисленною (дискретною)**, якщо вона еквівалентна натуральному ряду N ($A \sim N$).

Множина A називається **континуальною** (**незчисленною**), якщо вона еквівалентна відрізку $[0, 1]$, а потужність цієї множини — континуум.

Множина A, всі елементи якої належать множині B, називається **підмножиною** множини B.

Приклад.

$A = \{1, 2, 3\}$;

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Нестроге включення позначається $A \subseteq B$, означає, що A — **підмножина** множини B, що, можливо, співпадає з B.

Строге включення позначається $A \subset B$ і означає, що A — підмножина множини B, що не співпадає з B.

У цьому випадку кажуть, що A — **власна підмножина** множини B.

Приклад. $R^{+} \subset R$.

Приклад.

X — множина учнів деякого класу,

Y — множина відмінників у цьому класі.

Тоді $Y \subseteq X$.

Виконання співвідношень

$A \subseteq B$ і $B \subseteq A$ можливе тільки при $A = B$.

І зворотно, $A = B$, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$ водночас.

Універсальною називається множина, яка містить всі можливі елементи, що зустрічаються в даній задачі. Універсальна множина позначається символом U.

Приклад. Розглянемо деяку групу студентів. Нехай A — множина юнаків групи, B — множина відмінників.

U — множина студентів групи, $A \subseteq U$, $B \subseteq U$.

Приклад.

$$a \in \{a, b, c\}$$

$$\{a\} \subset \{a, b, c\}$$

Порожньою називається така множина, яка не містить ніяких елементів. Така множина позначається спеціальним символом $\varnothing$.

Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини A, $\varnothing \subseteq A$.

Порожня множина є множиною, тому, якщо деяка множина A не містить жодного елемента, то $A=\varnothing$; $|A| = 0$.

Запис $A = \{\varnothing\}$ означає, що A містить один елемент — $\varnothing$, $|A| = 1$.

Таким чином, будь-яка непорожня множина A обов'язково має, як мінімум, дві підмножини — порожню множину і саму цю множину.

Множину всіх підмножин множини A називають **множиною-степенем** або **булеаном** множини A.

Позначають 2^A (або $P(A)$).

Приклад. Нехай $A = \{a,b,c\}$.

$$2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Для довільної множини A з n елементів кількість всіх її підмножин дорівнює 2^n: $\left|2^A\right| = 2^{|A|} = 2^n$.

Множини зображають графічно за допомогою *діаграм Венна*.

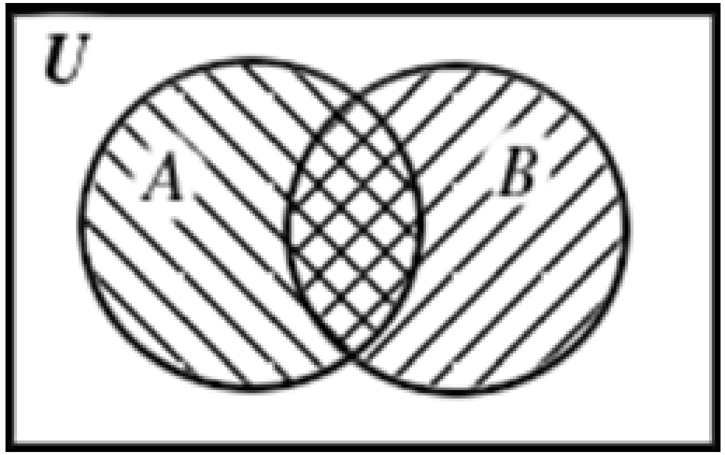
Універсальну множину позначають прямокутником, а всі інші множини — кругами в ньому.

1.1.4 Операції над множинами

Нехай множини A та B — підмножини універсуму U.

Діаграми Венна: круги зображують множини, що беруть участь в операції, а заштрихована частина — результат операції.

Об'єднання (сума) $(A \cup B)$ множин A і B — множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які входять або до A, або до B, або до A і B одночасно, тобто

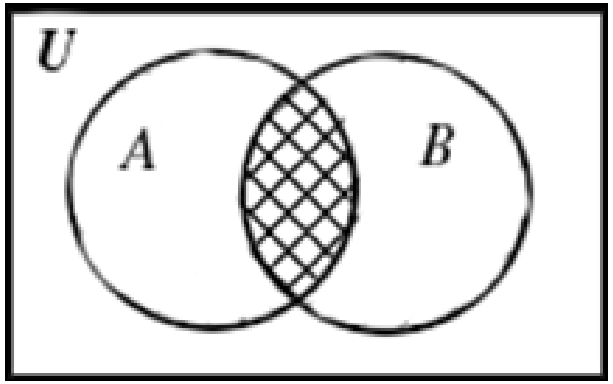


$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$, тоді

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Перетин (добуток) $(A \cap B)$ множин A і B — множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B, тобто

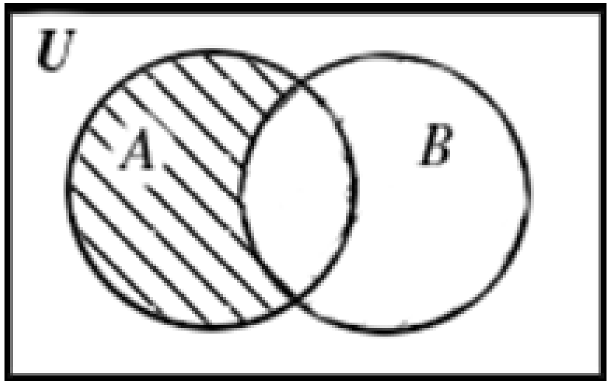


$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}.$$

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3\}$; $B = \{2,3,4\}$, тоді

$$A \cap B = \{2,3\}.$$

Різниця ($A \backslash B$, $A – B$) множин A і B — множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A та не належать множині B, тобто

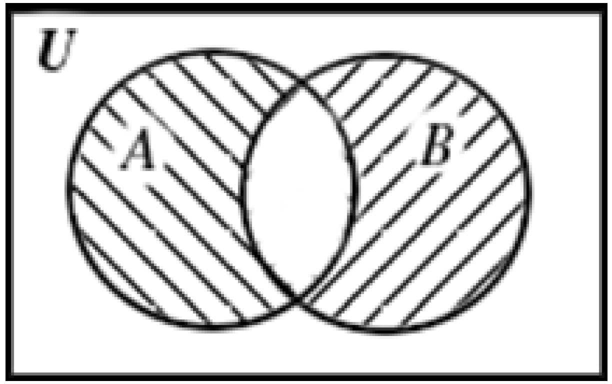


$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B\}.$$

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$, тоді

$$A \setminus B = \{1\}.$$

Симетрична різниця ($A \div B$, $A \triangle B$, $A \oplus B$) A і B — множина, що складається з усіх елементів A, які не належать множині B, й усіх елементів B, які не належать множині A, тобто



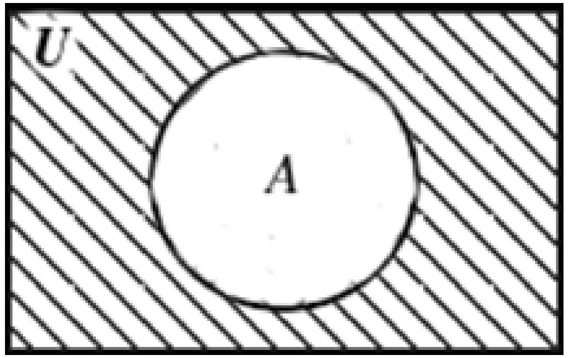
$$A \div B = \{x \mid (x \in A \text{ та } x \notin B) \text{ або } (x \notin A \text{ та } x \in B)\}.$$

За означенням: $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$, тоді

$$A \div B = \{1, 4\}.$$

Доповнення (заперечення) ($\bar{A}$, A') до множини A — множина, що містить усі елементи універсуму, за винятком елементів множини A, тобто



$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A).$$

За означенням: $\bar{A} = U \setminus A$.

1.1.5 Властивості операцій над множинами

- *ідемпотентність* (*самопоглинання*)

1а) $A \cup A = A$ 1б) $A \cap A = A$

- *комутативність*

2а) $A \cup B = B \cup A$ 2б) $A \cap B = B \cap A$

- *асоціативність*

3а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

3б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- *дистрибутивність*

4а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- *властивості порожньої та універсальної множин*

5а) $A \cup \varnothing = A$ 5б) $A \cap \varnothing = \varnothing$

6а) $A \cup \bar{A} = U$ 6б) $A \cap \bar{A} = \varnothing$

7а) $A \cup U = U$ 7б) $A \cap U = A$

8а) $\bar{\varnothing} = U$ 8б) $\bar{U} = \varnothing$

- *поглинання*

9а) $A \cup (A \cap B) = A$

9б) $A \cap (A \cup B) = A$

- *закони де Моргана*

10а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

10б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- *властивості доповнення, різниці та рівності*

11) $A \cup B = U$ та $A \cap B = \varnothing \;\Leftrightarrow\; B = \overline{A}$

12) $\overline{\overline{A}} = A$ (*інволютивність*)

13) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

14) $A \div B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

15) $A \div B = B \div A$

- *властивості доповнення, різниці та рівності*

16) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$

17) $A \div \varnothing = \varnothing \div A = A$

18) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$

19) $A = B \;\Leftrightarrow\; (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing$

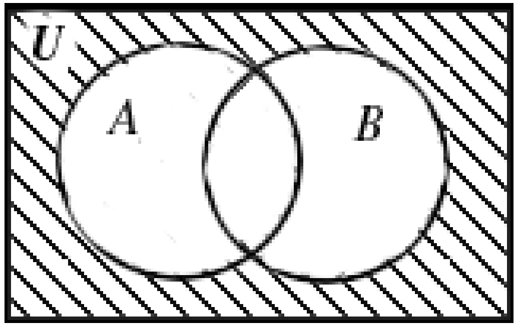
Доведення тотожностей

- за допомогою діаграм Венна
- методом двостороннього включення
- методом алгебраїчних перетворень, використовуючи властивості операцій над множинами

Доведення закону де Моргана за допомогою діаграм Венна

$$10a)\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Діаграма Венна для лівої частини:

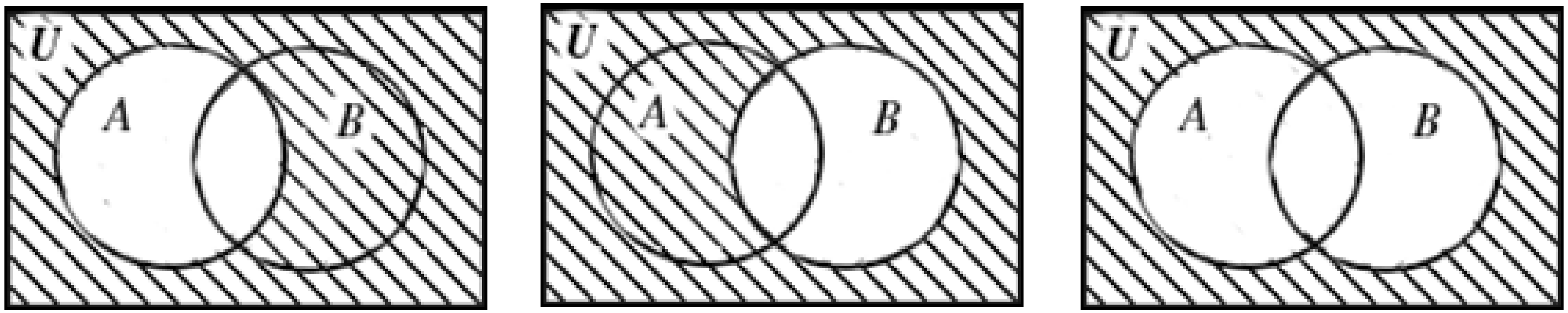


$\overline{A \cup B}$

Доведення закону де Моргана за допомогою діаграм Венна

$$10а)\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Права частина



$\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

Доведення властивості асоціативності

$$3б)\ \ A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C.$$

►Нехай $x\in A\cap(B\cap C) \Rightarrow x\in A,\ x\in B,\ x\in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(A\cap B)$ і $x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cap C \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\cap(B\cap C) \subseteq (A\cap B)\cap C.$$

Аналогічно доводиться, що

$$(A\cap B)\cap C \subseteq A\cap(B\cap C).$$

Отже, $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$. ►

Доведення властивості 1a: $A \cup A = A$.

►$A \cup A = (A \cup A) \cap \mathrm{U} = (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup (A \cap \overline{A}) =$

$= A \cup \varnothing = A$. ►

Доведення властивості дистрибутивності

$$4a)\quad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C).$$

►З одного боку, оскільки

$$(B\cap C) \subseteq B,\ \text{то}\ A\cup(B\cap C) \subseteq A\cup B.$$

Аналогічно

$$B\cap C \subseteq C \quad \text{і} \quad A\cup(B\cap C) \subseteq A\cup C.$$

Значить, $A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C).$

Доведення властивості дистрибутивності

4а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

З іншого боку, якщо $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$.

Якщо $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$. А якщо $x \notin A$, то $x \in B$ і $x \in C$ і тоді $x \in B \cap C$.

Отже, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Разом з отриманим раніше включенням маємо потрібну рівність. ►

Сукупність множин A_1, A_2, ..., A_n називається **розбиттям** множини A, якщо:

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$.

2. $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall\ i \neq j$.

Якщо умова 2 не задовольняється, то сукупність множин буде називатися **покриттям**.

Приклад 1

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} =$$

$$= [(A \cup \bar{A}) \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \qquad (4б)$$

$$= (\mathbf{U} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \qquad (6а)$$

$$= (B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \qquad (7б)$$

$$= (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) = \qquad (10б)$$

$$= \mathbf{U} \qquad (6а)$$

Приклад 2

$$(A\cap B\cap C\cap \bar{D}) \cup (\bar{A}\cap C) \cup (\bar{B}\cap C) \cup (C\cap D) =$$

$$= (A\cap B\cap C\cap \bar{D}) \cup [(\bar{A}\cup \bar{B}\cup D) \cap C] = \qquad (4б)$$

$$= (A\cap B\cap C\cap \bar{D}) \cup [(\overline{A\cap B\cap \bar{D}})\cap C] = \qquad (10б)$$

$$= [(A\cap B\cap \bar{D}) \cup (\overline{A\cap B\cap \bar{D}})] \cap C = \qquad (4б)$$

$$= \mathbf{U} \cap C = \qquad (6а)$$

$$= C \qquad (7б)$$

Приклад 3

$$(\overline{A \cap \overline{B}}) \cup B =$$

$$= (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cup B = \qquad (10б)$$

$$= (\overline{A} \cup B) \cup B = \qquad (12)$$

$$= \overline{A} \cup (B \cup B) = \qquad (3а)$$

$$= \overline{A} \cup B \qquad (1а)$$