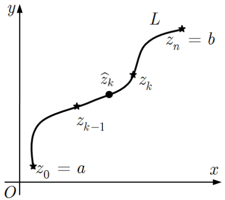
Інтегрування функцій комплексної змінної

доц. І.В. Орловський

Нехай на комплексній площині $\mathbb{C}$ задано кусково-гладку орієнтовану криву L з початком в точці $z = a$ і кінцем в точці $z = b$. Припустимо, що в кожній точці цієї кривої визначено функцію $f(z)$ комплексної змінної z.
Розіб'ємо криву L на n ланок, у напрямі від a до b, точками



$$a = z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},\ z_n = b.$$

На кожній ланці $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ оберемо точку $\widehat{z}_k$, $k = \overline{1, n}$, та утворимо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\widehat{z}_k)\Delta z_k, \tag{1}$$

де $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, яку називають комплексною інтегральною сумою вздовж кривої L.

Перейдемо до границі в (1) при $n \to \infty$ так, що $\max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k| \to 0$.

Означення 1

Якщо існує скінчена границя інтегральних сум (1), яка не залежить ані від способу розбиття кривої L на ланки, ані від вибору точок $\widehat{z}_k$ при кожному з цих розбиттів, тоді її (границю) називають інтегралом від функції $f(z)$ уздовж кривої L і позначають $\int\limits_L f(z)dz$.

Таким чином,

$$\int\limits_L f(z)dz = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max|\Delta z_k| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\widehat{z}_k)\Delta z_k.$$

Зв'язок інтеграла від функції комплексної змінної з криволінійними інтегралами

Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, де $z = x + iy$, є неперервною однозначною функцією в усіх точках гладкої кривої L. Тоді

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \widehat{z}_k = \widehat{x}_k + i\widehat{y}_k.$$

Звідки

$$\sum_{k=1}^{n} f(\widehat{z}_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(u(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k)\Big)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(u(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k)\Delta x_k - v(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k)\Delta y_k\Big) + i\sum_{k=1}^{n} \Big(v(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k)\Delta x_k + u(\widehat{x}_k, \widehat{y}_k)\Delta y_k\Big).$$

Помітимо, що обидві суми у правій частині останньої рівності є інтегральними сумами наступних криволінійних інтегралів 2-го роду

$$\int\limits_L udx - vdy, \quad \text{та} \quad \int\limits_L vdx + udy.$$

З неперервності функції $f(z)$ випливає неперервність функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ і, оскільки L є гладкою, границі інтегральних сум існують. Тому, переходячи до границі в останній рівності при $n \to \infty$ так, що $\max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k| \to 0$, отримаємо

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy. \tag{2}$$

Формула (2) показує, що обчислення інтегралу від функції комплексної змінної зводиться до знаходження двох криволінійних інтегралів 2-го роду від дійсних функцій дійсної змінної. Формулу (2) можна записати у зручному для запам'ятовування вигляді

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u + iv)(dx + idy). \tag{3}$$

Якщо криву L задано параметричним рівнянням $x = x(t),\ \ y = y(y),\ \ t \in [t_a, t_b]$, то переписавши його у комплексній параметричній формі $z(t) = x(t) + iy(t)$, можемо формулу (3) переписати у вигляді наступного визначеного інтеграла

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_a}^{t_b} f(z(t))z'(t)dt.$$

Властивості інтеграла від функції комплексної змінної

I (лінійність)

Для довільних α, $\beta \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_L \Big(\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)\Big) dz = \alpha \int\limits_L f_1(z) dz + \beta \int\limits_L f_2(z) dz.$$

II (адитивність)

Якщо $L = L_1 \cup L_2$, причому $L_1 \cap L_2$ є точкою або порожньою множиною, то

$$\int\limits_L f(z) dz = \int\limits_{L_1} f(z) dz + \int\limits_{L_2} f(z) dz.$$

III (орієнтованість)

$$\int\limits_{L^-} f(z)dz = -\int\limits_{L^+} f(z)dz,$$

де криві L^- та L^+ мають протилежну орієнтацію.

IV (оцінки модуля)

Якщо $|f(z)| \leq M$ в усіх точках кривої L, то

$$\left|\int\limits_{L} f(z)dz\right| \leq M \cdot l,$$

де l – довжина кривої L.

Приклад 1

Показати, що

$$\oint\limits_{\gamma_r : |z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

2. Теорема Коші

Теорема 1 (Коші для однозв'язної області)

Якщо функція f аналітична в однозв'язній області D, то інтеграл від цієї функції за будь-яким замкненим кусково-гладким контуром L, який лежить в області D, дорівнює нулю, тобто

$$\oint\limits_L f(z)dz = 0.$$

Доведення

Доведемо теорему, припускаючи неперервність похідної $f'(z)$. Маємо

$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L udx - vdy + i\oint\limits_L vdx + udy \tag{4}$$

Завдяки аналітичності $f(z) = u + iv$ і неперервності $f'(z)$ в однозв'язній області D, функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ неперервні й диференційовні в цій області і задовольняють умові Коші–Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

З іншого боку, за вказаних умов на u та v, до інтегралів у правій частині (4) можна застосувати теорему Остроградського–Ґріна, звідки

$$\oint\limits_L udx - vdy = \iint\limits_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0, \quad \oint\limits_L vdx + udy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} dxdy\right) = 0,$$

де G – внутрішність контуру L. Отже, $\oint\limits_\Gamma f(z)dz = 0$. ■

Зауваження

Якщо функція f задовольняє умовам теореми 1, і, крім цього, є неперервною в замкненій області $\bar{D} = D \cup \partial D$, то теорему Коші можна узагальнити наступним чином: інтеграл від функції f, взятий вздовж межі ∂D цієї області, дорівнює нулю:

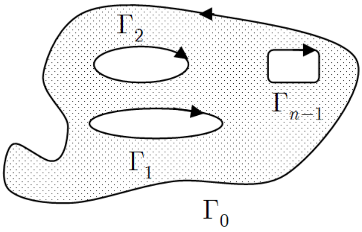
$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Орієнтація межі багатозв'язної області

Розглянемо на комплексній площині n замкнених кусково-гладких контурів $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ таких, що кожний з контурів $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ лежить у зовнішності решти й усі вони розташовані у внутрішності контуру Γ_0.

Множина точок площини, що лежить всередині контуру Γ_0 і за межами контурів $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$, називають n-зв'язною областю D.

Повна межа Γ області D є складеним контуром, утвореним із кривих $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$.



Орієнтуємо повну межу Γ області D таким чином: додатним напрямом обходу межі багатозв'язної області називають такий напрям руху, під час якого область D весь час лишається ліворуч. При цьому зовнішній контур Γ_0 обходиться проти годинникової стрілки, а контури $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$ — за годинниковою стрілкою.

Теорема 2 (Коші, для багатозв'язної області)

Нехай функція f аналітична в багатозв'язній області D й неперервна в замкненій області $\bar{D}$. Тоді

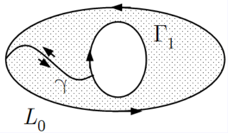
$$\oint\limits_L f(z)dz = 0,$$

де L є повною межею області D, яка утворена контурами $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{n-1}$ і обходиться в додатному напрямі.

Доведення

Доведемо теорему для двозв'язної області з повною межею L, яка складається із зовнішнього контуру Γ_0 і внутрішнього контуру Γ_1.

З'єднуємо зовнішній контур Γ_0 з контуром Γ_1 гладкою кривою γ, тобто проводимо розріз, і розглядаємо область D^*, межа L^* якої утворена кривими Γ_0, Γ_1 та кривою γ. При цьому допоміжну криву γ проходимо двічі у протилежних напрямах; цю криву завжди можна побудувати так, щоб область D^* була однозв'язною.



На підставі узагальненої теореми Коші інтеграл за межею L^* області D^* дорівнює нулю. Оскільки інтеграли вздовж γ взаємно знищуються, то

$$0 = \oint\limits_{L^*} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_1^-} f(z)dz = \oint\limits_{L} f(z)dz.$$

У разі n-зв'язної області маємо співвідношення

$$0 = \oint\limits_{L^*} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n-1} \oint\limits_{\Gamma_k^-} f(z)dz = \oint\limits_{L} f(z)dz,$$

яке можна записати ще у вигляді

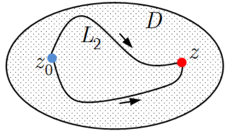
$$\oint\limits_{\Gamma_0^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n-1} \oint\limits_{L_k^+} f(z)dz. \quad \blacksquare$$

Наслідок 1 (з теореми Коші)

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то значення інтеграла $\int\limits_L f(z)dz$, узятого вздовж кусковогладкої кривої L, що належить області D, не залежить від вибору кривої L, а визначається лише положенням початкової точки z_0 та кінцевої точки z цієї кривої.

Доведення

Справді, нехай L_1 та L_2 – дві криві в області D, які сполучають точки z_0 та z. За теоремою Коші для однозв'язної області



$$\oint\limits_{L_1 \cup L_2^-} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2^-} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{L_1} f(z)dz - \int\limits_{L_2} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz. \blacksquare$$

У разі, коли інтеграл залежить лише від початкової точки z_0 і кінцевої точки z шляху інтегрування, його позначають як

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds.$$

Якщо зафіксувати точку z_0, а точку z змінювати, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds$ стає функцією від z:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds.$$

Теорема 3 (Морери)

Нехай функція $f(z)$ *аналітична в однозв'язній області* D; *точки* z_0 *та* z *належать* D. *Тоді функція*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

аналітична в області D, *і*

$$F'(z) = f(z).$$

Означення 2

Функцію $F(z)$ називають первісною функції $f(z)$ в області D, якщо в кожній точці цієї області виконано рівність

$$F'(z) = f(z).$$

Якщо $F(z)$ є деякою первісною для $f(z)$, то сукупність усіх первісних має вигляд

$$F(z) + C,$$

де $C = \mathrm{const}$.

Означення 3

Сукупність усіх первісних функції $f(z)$ називають невизначеним інтегралом від функції $f(z)$ і позначають символом

$$\int f(z)dz = F(z) + C,$$

де $F(z)$ – деяка первісна функції $f(z)$.

Методи обчислення невизначених інтегралів від аналітичних функцій в комплексному аналізі ті самі, що й у дійсному.
Для аналітичної функції $f(z)$ правдива також формула Ньютона — Лейбніца:

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(s)ds = F(z) - F(z_0) = F(z)\big|_{z_0}^{z},$$

де $F(z)$ — деяка первісна функції $f(z)$ в області, якій належать точки z_0 та z.

4. Інтегральна формула Коші

Ця формула зв'язує значення аналітичної функції $f(z)$ у будь-якій точці z області D зі значенням цієї функції у межових точках області D.

Теорема 4

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і неперервна в замкненій області $\bar{D} = D \cup L$. Тоді для будь-якої внутрішньої точки z_0 області D правдива інтегральна формула Коші для функції $f(z)$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{5}$$

де L — межа області D, що обходиться в додатному напрямі.

Доведення

Побудуємо коло $\gamma_r\ :\ |z-z_0|=r$ із центром у точці z_0 радіусом r так, щоб це коло містилося всередині області D (коло γ_r не перетинало контур L). Видаленням з області D круга, дістаємо двозв'язну область D^*, обмежену контурами L та γ_r, у якій функція $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ є аналітичною.

Тоді, за теоремою Коші для багатозв'язної області,

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint\limits_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Звідки випливає

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r}\frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}f(z_0)\oint\limits_{\gamma_r}\frac{dz}{z-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

Завдяки тому, що $\oint\limits_{\gamma_r} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, останню рівність можна переписати, як

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz. \qquad (6)$$

Оцінимо інтеграл у правій частині (6). Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. В силу неперервності функції $f(z)$ в точці z_0, знайдеться таке число $r > 0$, що при $|z - z_0| \le r$ є вірною нерівність $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Тоді, використовуючи оцінку модуля інтеграла, будемо мати

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{\gamma_r : |z-z_0|=r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z-z_0|=r} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| \cdot l_{\gamma_r} < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

В силу довільності $\varepsilon > 0$, праву частину останньої нерівності можна зробити як завгодно малою. Оскільки, з іншого боку, ліва частина не залежить від ε, то вона рівна нулю:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0) = 0,$$

з якої випливає (5). ■

Диференціюючи інтегральну формулу Коші за параметром z_0 дістаємо інтегральну формулу Коші для похідної:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \;\; n = 0, 1, 2, \dots .$$

З останньої формули випливає, що похідна аналітичної в області D функції також є аналітичною функцію. Зауважимо, що для функції дійсної змінної це не завжди вірно: з існування похідної не випливає існування наступної похідної.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.