4.2 Числення висловлювань (формальна теорія *L*)

4.2.1 Числення висловлювань

Розглянемо один з прикладів формальних теорій — числення висловлювань. Можна сказати, що це числення висловлювань є базовим та, в деякому сенсі, найпростішим, тому знайомство з формальними теоріями прийнято починати саме з нього.

Для того, щоб означити числення висловлювань, потрібно задати його складові як формальної системи: алфавіт, формули, аксіоми та правила виведення.

Числення висловлювань — це формальна теорія L, в якій:

1) Алфавіт включає пропозиційні літери: A, B, C,... з індексами або без; пропозиційні зв'язки: $\neg$ (заперечення) та $\to$ (імплікація); допоміжні символи: (та);
2) Визначення формули числення L:
   - довільна пропозиційна літера є формулою;
   - якщо A та B формули, то формулами також є $(\neg A)$ та $(A\to B)$;
   - інших формул в численні L не існує.
3) У численні L визначена нескінченна множина аксіом, які будуються за допомогою трьох **схем аксіом**:
   A1. $A\to (B\to A)$;
   A2. $(A\to(B\to C)) \to ((A\to B) \to (A\to C))$;
   A3. $(\neg B\to\neg A) \to ((\neg B\to A) \to B)$.
4) У численні L визначено єдине правило виведення МР: $A, A\to B \vdash B$.

У пункті 3 визначення числення висловлювань йде мова про схеми аксіом. Це означає, що для отримання конкретної аксіоми, ми маємо взяти одну з трьох схем ($A1$, $A2$, $A3$) та замість пропозиційних літер, які входять до неї, підставити певні формули (якими також є й атомарні формули, тобто пропозиційні літери). До того ж, замість однієї й тієї самої пропозиційної літери аксіоми ми маємо підставляти одну й ту саму формулу.

Наприклад, зі схеми $A1$ отримуються такі аксіоми:

- $A\to (A\to A)$;
- $(A\to B) \to (B\to(A\to B))$;
- $A \to (\neg A\to A)$.

Слід звернути увагу на те, що в численні висловлювань використовуються тільки символи зв'язок імплікації та заперечення. Як і в алгебрі висловлювань, це робиться для зменшення кількості операцій. Інші зв'язки ми можемо виразити за допомогою імплікації та заперечення:

- $A\wedge B$ означає $\neg(A\to\neg B)$;

- $A \lor B$ означає $\neg A \to B$;
- $A \sim B$ означає $\neg((A \to B) \to \neg(B \to A))$.

Тепер ми можемо розглянути приклади виведення теорем у теорії L.

Доведемо теорему $A \to A$. Оскільки єдиним правилом виведення є MP, то нам потрібно взяти таку аксіому, щоб формула $A \to A$ була у кінці формули. Для цього підходять перші дві схеми аксіом. Третя не підходить, тому що в ній зустрічається зв'язка заперечення, яка не присутня у теоремі, яку ми доводимо. У схемі $A1$ формула $A \to A$ з'являється в кінці, якщо замінити літеру B на A. Але для того, щоб вивести формулу $A \to A$ з $A \to (A \to A)$ за правилом MP нам необхідна наявність вже виведеної формули A. Тож перша схема не підходить.

Розглянемо схему $A2$ и змінимо літери B та C на формули $A \to A$ та A відповідно. Отримаємо аксіому:

$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$.

Як ми бачимо, в кінці цієї аксіоми зустрічається потрібна нам формула $A \to A$. Але для її виведення нам потрібно тепер вивести дві формули: $A \to ((A \to A) \to A)$ та $A \to (A \to A)$. Обидві формули ми отримуємо з першої схеми за підстановкою замість літери B формул $A \to A$ та A відповідно.

Підсумуємо наші міркування, записавши їх у вигляді наступного виводу, наводячи для кожного пункту схему аксіом або правило виведення із засновками, які застосовувались для отримання цього пункту.

Теорема *L*1. $\vdash A \to A$

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	$A2$
2. $A \to ((A \to A) \to A)$	$A1$
3. $A \to (A \to A)$	$A1$
4. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	MP (1,2)
5. $A \to A$	MP (3,4)

Наведемо приклад виведення ще двох теорем теорії L.

Теорема *L*2. $A \vdash B \to A$

1. A	гіпотеза
2. $A \to (B \to A)$	$A1$
3. $B \to A$	MP (1,2)

Теорема *L*3. $\vdash (\neg A \to A) \to A$

1. $(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to A)$	$A3$
2. $\neg A \to \neg A$	$L1$
3. $(\neg A \to A) \to A$	MP (1,2)

В останньому виводі ми використали вже виведену теорему $L1$. Це дозволяє нам зробити третя властивість виведень з гіпотезами (див. тему 4.1).

4.2.2 Теорема дедукції

У математичних міркуваннях часто якесь твердження B доводиться у припущенні правильності якогось іншого твердження A, після чого встановлюють, що правильним є твердження “якщо A, то B”. У численні висловлювань цей метод обґрунтовується такою теоремою.

Теорема 1 (теорема дедукції Ербрана). Нехай Γ — множина формул, A і B — формули й $\Gamma, A \vdash B$. Тоді $\Gamma \vdash A \to B$.

Справедлива обернена зворотна теорема дедукції.

Теорема 2 (зворотна теорема дедукції). Якщо існує вивід $\Gamma \vdash A \to B$, то формула B виводиться з Γ та A, тобто якщо $\Gamma \vdash A \to B$, то $\Gamma, A \vdash B$.

Теорема дедукції має наступні наслідки.

Наслідок 1 (правило силогізму). $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

Побудуємо виведення.

1.	$A \to B$	гіпотеза
2.	$B \to C$	гіпотеза
3.	A	гіпотеза
4.	B	MP (1,3)
5.	C	MP (2,4)

Тоді отримали $A \to B,\ B \to C,\ A \vdash C$. За теоремою дедукції маємо $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

<u>Наслідок 2</u> (правило видалення середньої посилки). $A \to (B \to C),\ B \vdash A \to C$.

Після двократного застосування правила MP дістаємо $A \to (B \to C), B, A \vdash C$. Звідси за теоремою про дедукцію маємо $A \to (B \to C),\ B \vdash A \to C$.

4.2.3 Приклади виведень у теорії *L*

Застосування теореми дедукції та її наслідків дуже спрощує побудову виведень у теорії L. Наведемо декілька прикладів таких виведень.

Теорема *L*4. $\vdash \neg\neg A \to A$

1.	$(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$	A3
2.	$\neg A \to \neg A$	$L1$
3.	$(\neg A \to \neg\neg A) \to A$	наслідок 2 до 1,2

4. $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ A1
5. $\neg\neg A \to A$ наслідок 1 до 3,4

Теорема *L*5. $\vdash A \to \neg\neg A$

1. $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$ A3
2. $\neg\neg\neg A \to \neg A$ $L4$
3. $(\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$ MP (2,3)
4. $A \to (\neg\neg\neg A \to A)$ A1
5. $A \to \neg\neg A$ наслідок 1 до 3,4

Теорема *L*6. $\vdash \neg A \to (A \to B) \Leftrightarrow \neg A, A \vdash B$

1. $\neg A$ гіпотеза 1
2. A гіпотеза 2
3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ A3
4. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ A1
5. $A \to (\neg B \to A)$ A1
6. $\neg B \to \neg A$ MP (1,4)
7. $\neg B \to A$ MP (2,5)
8. $(\neg B \to A) \to B$ MP (3,5)
9. B MP (7,9)

Теорема *L*7. $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \Leftrightarrow \neg A \to \neg B \vdash B \to A$

1. $\neg A \to \neg B$ гіпотеза
2. $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ A3
3. $(\neg A \to B) \to A$ MP (1,2)
4. $B \to (\neg A \to B)$ A1
5. $B \to A$ наслідок 1 до 3,4

Теорема *L*8. $\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B) \Leftrightarrow B \to A \vdash \neg A \to \neg B$

1. $B \to A$ гіпотеза
2. $\neg\neg B \to B$ $L4$
3. $A \to \neg\neg A$ $L5$
4. $\neg\neg B \to A$ наслідок 1 з 1,2
5. $\neg\neg B \to \neg\neg A$ наслідок 1 з 3,4
6. $(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg B)$ $L7$
7. $\neg A \to \neg B$ MP (5,6)

Теорема *L*9. $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A\to B)) \Leftrightarrow A \vdash \neg B \to \neg(A\to B)$

1. A	гіпотеза
2. $((A\to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A\to B))$	$L8$
3. $A, A\to B \vdash B$	правило МР
4. $A \vdash (A\to B) \to B$	теорема дедукції до 3
5. $(A\to B) \to B$	МР (1,4)
6. $\neg B \to \neg(A\to B)$	МР (2,5)

Теорема *L*10. $\vdash (A\to B) \to ((\neg A\to B) \to B) \Leftrightarrow A\to B, \neg A\to B \vdash B$

1. $A\to B$	гіпотеза 1
2. $\neg A\to B$	гіпотеза 2
3. $(A\to B) \to (\neg B\to\neg A)$	$L8$
4. $(\neg A\to B) \to (\neg B\to\neg\neg A)$	$L8$
5. $\neg B\to\neg A$	МР (1,3)
6. $\neg B\to\neg\neg A$	МР (2,4)
7. $(\neg B\to\neg\neg A) \to ((\neg B\to\neg A) \to B)$	А3
8. $(\neg B\to\neg A) \to B$	МР (6,7)
9. B	МР (5,8)

4.2.4 Методи перевірки тотожної істинності формул логіки висловлювань

Таким чином, на даний момент ми знаємо принаймні три способи перевірки для довільної формули логіки висловлювань чи є вона тавтологією, тобто чи є вона тотожно істинною. Перший, тривіальний, полягає в побудові *таблиці істинності* для цієї формули. Ми можемо це зробити через те, що кількість літер, що входять у довільну формулу є скінченною (n), а кількість можливих кортежів значень, що їх можуть приймати ці літери, відповідно, дорівнюватиме 2^n, що також є скінченним числом. Отже, за скінченну кількість кроків ми можемо побудувати таблицю істинності і, якщо в кожному рядку буде стояти значення “Істина”, то цим буде доведено тотожна істинність обраної формули.

Другий метод відноситься до булевої алгебри. Тому він, відповідно, й називається — *алгебраїчний*. Він полягає у зведенні довільної формули логіки висловлювань до ДНФ або КНФ. Якщо під час такого зведення формула перетвориться на 1, тобто Т, то це й буде означати її тотожну істинність.

Третій метод був розглянутий у цій темі і полягає у побудові для обраної формули виводу у формальній теорії L. Через те, що ця теорія є аксіоматичною, то й метод має відповідну назву — *аксіоматичний*. Якщо у теорії L побудований вивід для певної формули з використанням лише трьох схем аксіом А1, А2, А3, то за властивістю повноти теорії отримуємо, що ця формула буде тавтологією, тобто тотожно істинною.

Перший метод є найпростішим, але й водночас найгроміздкішим. Якщо ж порівнювати другий метод із третім, то з'ясується, що для певних формул найліпшим, тобто економнішим за обчислювальними витратами, буде другий, а для інших — третій.

Нижче ми розглянемо ще два методи: метод Квайна та метод редукції. Для них так само не можна сказати, який з них у порівнянні з рештою є кращим: для формул різного вигляду найкращими будуть різні методи.

Отже, **метод Квайна** полягає в наступному. Нехай $\{A_1, A_2,\dots, A_n\}$ — упорядкована множина пропозиційних літер, що зустрічаються у формулі $P(A_1, A_2,\dots, A_n)$. Візьмемо першу з літер — A_1 і припишемо їй, наприклад, значення T (F). Підставимо це значення у формулу P і виконаємо обчислення, які можуть виникнути в результаті такої підстановки. Після виконання обчислень одержимо деяку формулу $P'(A_2,\dots, A_n)$, до якої знову застосовується описана процедура, тобто вибирається літера A_2, приписується їй значення T (F), виконується обчислення і т.д. Може трапитися так, що на деякому кроці буде отримана формула P'', яка є тавтологією або суперечністю незалежно від значень висловлювань, які входять до складу формули P''. Отже, на цьому кроці роботу алгоритму можна зупинити. Таким чином, метод Квайна в деяких випадках приводить до розгляду значно меншої кількості інтерпретацій, ніж тривіальний алгоритм побудови таблиць істинності.

Приклад 1. Розглянемо формулу

$$P= (((A\wedge B)\to C) \wedge (A\to B)) \to (A\to C).$$

Множина літер $\{A, B, C\}$. Вибираємо літеру A. При цьому можливі два випадки:

1) A = T. Тоді

$$P = (((\mathrm{T}\wedge B)\to C) \wedge (\mathrm{T}\to B)) \to (\mathrm{T}\to C) = ((B\to C) \wedge B) \to C = P'.$$

Тепер вибираємо B і розглядаємо знову можливі випадки:

1.1) B = T. Тоді $P' = ((\mathrm{T}\to C) \wedge \mathrm{T}) \to C = (C \wedge \mathrm{T}) \to C = C\to C$ — тавтологія.

1.2) B = F. Тоді $P' = ((\mathrm{F}\to C) \wedge \mathrm{F}) \to C = (\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \to C = \mathrm{F}\to C = \mathrm{T}$.

2) A = F. Тоді:

$$P = (((\mathrm{F}\wedge B)\to C) \wedge (\mathrm{F}\to B)) \to (\mathrm{F}\to C) = ((\mathrm{F}\to C) \wedge \mathrm{T}) \to \mathrm{T} = (\mathrm{T}\wedge\mathrm{T}) \to \mathrm{T} = \mathrm{T}\to\mathrm{T} = \mathrm{T}.$$

Отже, дана формула є тавтологією.

Метод редукції дає можливість виконувати перевірку формул логіки висловлювань шляхом зведення до абсурду. Він особливо зручний, коли в записі формули зустрічається багато імплікацій.

Нехай формула P має вигляд імплікації, наприклад, $P = A \to B$. Припустимо, що в деякій інтерпретації I формула P приймає значення F. Тоді у відповідності з таблицею істинності для імплікації маємо $A = \mathrm{T}$ та $B = \mathrm{F}$. Таким чином, перевірка формули P зводиться до перевірки формул A та B. Після цього даний процес застосовується до формул A та B і т.д.

Приклад 2. Розглянемо формулу

$$P = ((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C)).$$

Нехай для деякої інтерпретації I маємо $P = \mathrm{F}$. Тоді $(A \wedge B) \to C = \mathrm{T}$, а $A \to (B \to C) = \mathrm{F}$.

Застосуємо цю процедуру до другої з формул.

Отримуємо $A = \mathrm{T}$ та $B \to C = \mathrm{F}$. Звідси знаходимо, що $A = \mathrm{T}$, $B = \mathrm{T}$, $C = \mathrm{F}$. Але при отриманих значеннях $(A \wedge B) \to C = \mathrm{F}$, що суперечить припущенню. Отже, формула P тотожно істинна.

Приклад 3. Перевірити, чи є формула $A \to \big((A \to B) \to B\big)$ тавтологією.

Розв’язання.

1 спосіб. За допомогою таблиці істинності.

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$A \to \big((A \to B) \to B\big)$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

З таблиці бачимо, що функція скрізь набуває значення T. Тобто, вона є тавтологією.

2 спосіб. Метод редукції.

Припустимо що, $A \to \big((A \to B) \to B\big) = F$.

Це можливо тільки коли $(A \to B) \to B = F$ та $A = T$.

Тобто з першого виразу маємо, що $A \to B = T$ та $B = F$. З чого отримуємо, що $A = F$.

Раніше ми отримали, що $A = T$. Отже, ми прийшли до суперечності. Таким чином, можемо констатувати, що наше припущення було невірне, тобто формула є тавтологією.

3 спосіб. Метод Квайна.

Нехай $A = T$, тоді $T \to ((T \to B) \to B)$.

Якщо $B = T$, то $T \to ((T \to T) \to T) = T$.

Якщо $B = F$, то $T \to ((T \to F) \to F) = T$.

Нехай $A = F$, тоді $F \to ((F \to B) \to B)$.

Якщо $B = T$, то $F \to \big((F \to T) \to T\big) = T$.

Якщо $B = F$, то $F \to ((F \to F) \to F) = T$.

Таким чином, можемо констатувати, що формула є тавтологією.

Приклад 4. Довести теорему в рамках логіки L.

1) $A \to \big((A \to B) \to B\big)$.

2) $\neg A \to (A \to B)$.

3) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$.

4) $A \to B,\ A \to (B \to C) \vdash A \to C$.

Розв'язання.

1) За зворотньою теоремою дедукції $A \vdash \big((A \to B) \to B\big)$. Якщо ще раз застосуємо її, то отримаємо $A, (A \to B) \vdash B$.

1. A Г1
2. $A \to B$ Г2
3. B MP(1,2)

Що й треба було довести.

2) За зворотньою теоремою дедукції, яку ми застосуємо двічі, отримаємо $\neg A,\ A \vdash B$.

1. $\neg A$ Г1
2. A Г2
3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ A3
4. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ A1
5. $A \to (\neg B \to A)$ A1
6. $\neg B \to \neg A$ MP(1,4)
7. $\neg B \to A$ MP(2,5)
8. $(\neg B \to A) \to B$ MP(3,6)
9. B MP(7,8)

Що й треба було довести.

3) За зворотньою теоремою дедукції $(A \to \neg B) \vdash (B \to \neg A)$

1. $A \to \neg B$ Г1
2. $(A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg A)$ L8
3. $\neg\neg B \to \neg A$ MP(1,2)
4. $B \to \neg\neg B$ L5
5. $B \to \neg A$. Правило силогізму (3,4)

Що й треба було довести.

4) Доведемо, що $A \to B,\ A \to (B \to C) \vdash A \to C$.

1. $A \to B$ Г1

2. $A \to (B \to C)$ Г2
3. A ЗТД(1)
4. B МР(1,3)
5. $A \to C$ Правило видалення середньої посилки (2,4)

Що й треба було довести.