# 3.3 МІНІМІЗАЦІЯ

# БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

### 3.3.1 Індекс простоти

***Канонічною задачею мінімізації*** називається задача мінімізації на множині ДНФ і КНФ кількості символів змінних та операцій, що містяться у формулі.

Мінімальні форми, що одержані в результаті її розв'язку, називаються *мінімальними ДНФ і КНФ*.

**Коефіцієнти простоти:**

- $L_1(A)$ — число символів змінних, які зустрічаються в запису ДНФ;
- $L_2(A)$ — число елементарних кон'юнкцій, що входять у функцію $A$;
- $L_3(A)$ – число символів інверсій, які зустрічаються в запису ДНФ.

**Приклад.** Нехай

$$A = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee$$

$$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3),$$

$$B = A = (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee x_1.$$

Коефіцієнти простоти:

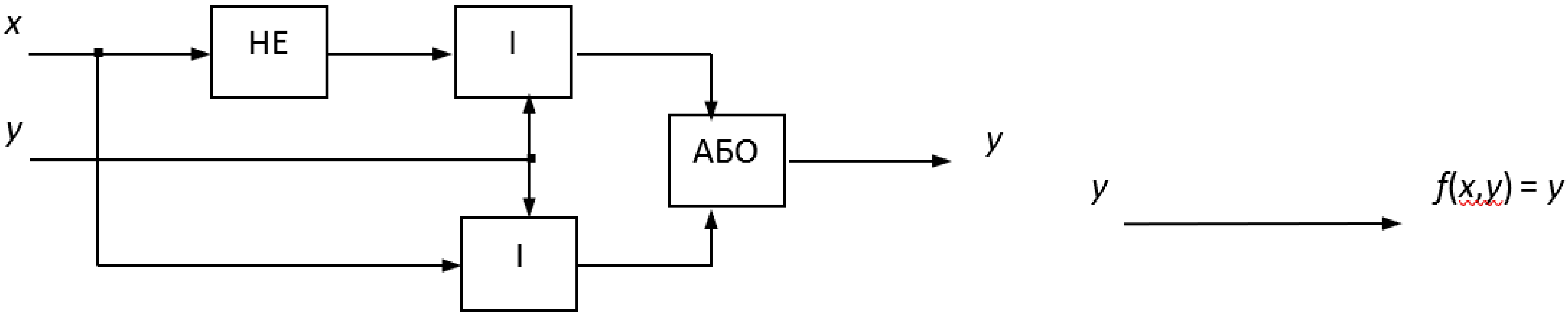
$$L_1(A) = 15, \quad L_1(B) = 3.$$

$$L_2(A) = 5, \quad L_2(B) = 2.$$

$$L_3(A) = 7, \quad L_3(B) = 2.$$

Досконалі ДНФ та КНФ є незручними для опису і побудови логічних схем.

**Приклад.** Нехай $f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = y$.




а б

Рис. 1. Види схем для функції $f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = y$

ДНФ (КНФ) функції називається ***мінімальною***, якщо кількість символів, які вона містить, буде не більшою, ніж у будь-якої іншої ДНФ (КНФ) тієї самої функції.

***Мінімізацією*** називаються перетворення функції, яке веде до зменшення числа символів, а отже, числа змінних.

## 3.3.2 Скорочена форма

***Імплікантою*** деякої функції $f$ називається така функція $g$, що на всіх інтерпретаціях, на яких $g$ дорівнює одиниці, $f$ теж дорівнює одиниці.

**Приклад.** Конституенти одиниці функції (мінтерми) є її імплікантами;

елементарні кон'юнкції, що входять до складу ДНФ функції, є її імплікантами.

**Приклад.** Таблиця істинності функції $f(x, y, z)$ та її імпліканти $g(x, y, z)$:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x, y, z)$ | $g(x, y, z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Множина $S$, що складається з імплікант функції $f$, називається ***покриттям*** (або ***повною системою імплікант***) функції $f$, якщо кожне одиничне значення функції $f$ покривається одиницею хоча б одної імпліканти з множини $S$.

**Приклад.** Набір всіх конституент одиниці функції, що входять до її ДДНФ, є покриттям даної функції.

Будь-яку елементарну кон'юнкцію $A$, що входить до складу елементарної кон'юнкції $B$ і містить менше змінних, ніж кон'юнкція $B$, називають ***власною частиною кон'юнкції*** $B$.

**Приклад.** Добуток $(x \wedge y \wedge z)$ має власні частини: $x \wedge y$, $x \wedge z$, $y \wedge z$, $x$, $y$, $z$.

***Простими імплікантами*** булевої функції називаються елементарні кон'юнкції, що самі входять у задану функцію $f$, але ніяка власна частина їх у функцію $f$ не входить.

**Приклад.** Нехай

$$f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}).$$

Кон'юнкції $(\overline{x}\wedge y\wedge z)$ та $(x\wedge\overline{y})$ — прості імпліканти;

$(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})$ та $(x\wedge\overline{y}\wedge z)$ не є простими імплікантами.

**Теорема 1.** Будь-яка булева функція дорівнює диз’юнкції всіх своїх простих імплікант.

Диз’юнкція всіх простих імплікант функції називається **скороченою ДНФ** булевої функції.

## 3.3.3 Метод Квайна утворення скороченої диз'юнктивної нормальної форми

**Операції неповного склеювання і поглинання**

Операція неповного склеювання

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) = y \wedge (x \vee \bar{x}) = y,$$
$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) = y \vee (x \wedge \bar{x}) = y.$$

Операція поглинання

$$(x \wedge y) \vee y = y,$$
$$(x \vee y) \wedge y = y.$$

**Теорема 2 (Квайна).** Якщо в ДДНФ булевої функції виконати операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то дістанемо скорочену ДНФ, тобто диз'юнкцію всіх простих імплікант.

**Приклад**. Нехай задана булева функція:

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z).$$

Всі операції неповного склеювання:

$$(\bar{x}\wedge y\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z)=\bar{x}\wedge z,$$

$$(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)=x\wedge\bar{y},$$

$$(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge z)=\bar{y}\wedge z.$$

Скорочена ДНФ:

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y})\vee(\bar{y}\wedge z).$$

## 3.3.4. Тупикові нормальні форми

***Диз'юнктивним ядром булевої функції f*** називається така множина її простих імплікант, яка створює покриття *f*, але після видалення будь-якої імпліканти втрачає цю властивість, тобто перестає бути повною системою імплікант.

***Тупиковою ДНФ*** називається ДНФ даної булевої функції, що складається тільки з простих імплікант.

**Алгоритм утворення тупикових ДНФ** (алгоритм спрощення або алгоритм найшвидшого спуску):

1. Функцію подають у ДДНФ.
2. Упорядковують ДДНФ (записують співмножники так, щоб було зручно здійснювати перетворення).
3. До ДДНФ застосовують операцію вилучення елементарних кон'юнкцій, а потім операцію вилучення співмножників.

**Теорема 3.** ДНФ, утворена після застосування алгоритму найшвидшого спуску, є тупиковою.

Для утворення мінімальної ДНФ досить знайти всі тупикові форми заданої функції і вибрати з них мінімальні.

## *Метод імплікативних матриць*

**Приклад.** Розглянемо функцію

$$f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)$$

з попереднього прикладу, де отримали її скорочену ДНФ:

$$f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y})\vee(\overline{y}\wedge z).$$

Для знаходження мінімальної ДНФ побудуємо імплікативну матрицю, в якій у рядках записані імпліканти, а в стовпцях – мінтерми.

| | | $\overline{x} \wedge y \wedge z$ | $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$ | $x \wedge \overline{y} \wedge z$ | $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$ |
|---|---|---|---|---|---|
| * | $\overline{x} \wedge z$ | $\times$ | | | $\times$ |
| * | $x \wedge \overline{y}$ | | $\times$ | $\times$ | |
| | $\overline{y} \wedge z$ | | | $\times$ | $\times$ |
| | | * | * | + | + |

Мінімальна ДНФ:

$$f(x, y, z) = (\overline{x} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y}).$$

Для аналізу різних зображень булевої функції через КНФ і одержання мінімальних КНФ легко трансформувати викладені вище поняття за принципом двоїстості: ***імпліцента, проста імпліцента, повна система імпліцент, скорочена КНФ, тупикова КНФ, мінімальна КНФ***.

### 3.3.5 Метод мінімізаційних карт (діаграм Карно-Вейча, карт Карно)

Діаграми Карно-Вейча — це спеціальні таблиці, що використовуються для задання булевих функцій і дають змогу спростити процес пошуку мінімальних форм.

Нехай функція подана у ДДНФ.

Тотожність неповного склеювання:

$$(x \wedge A) \vee (\overline{x} \wedge A) = A \wedge (x \vee \overline{x}) = A.$$

### 3.3.5.1 Мінімальні ДНФ (МДНФ)

*Карта Карно* для ДНФ (*діаграма Вейча* — для КНФ) є аналогом таблиці істинності, зображеній у спеціальній формі:

1) значення змінних розташовані у заголовках рядків і стовпців карти;
2) кожній конституенті одиниці функції відповідає одна клітка (комірка) таблиці;
3) нуль або одиниця в клітці визначає значення функції на даній інтерпретації;

4) значення змінних розташовані так, щоб сусідні рядки і стовпці таблиці відрізнялись значенням тільки однієї змінної: (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0); перший і останній рядки (стовпці) таблиці вважаються сусідніми (протилежні границі таблиці вважаються співпадаючими).

При такому розташуванні конституенти одиниці розташовуються у сусідніх клітках карти і склеювання проводиться графічно за допомогою об'єднання кліток у групи.

Структура карти Карно для функції двох змінних:

| $y \backslash x$ | 0 | 1 |
| --- | --- | --- |
| 0 | $\bar{x}\,\bar{y}$ | $x\,\bar{y}$ |
| 1 | $\bar{x}\,y$ | $x\,y$ |

Структура карти Карно для функції трьох змінних:

| $z \backslash xy$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ | $\bar{x}\,y\,\bar{z}$ | $x\,y\,\bar{z}$ | $x\,\bar{y}\,\bar{z}$ |
| 1 | $\bar{x}\,\bar{y}\,z$ | $\bar{x}\,y\,z$ | $x\,y\,z$ | $x\,\bar{y}\,z$ |

Заповнення карти Карно:

1) у клітках, що відповідні інтерпретаціям, на яких функція дорівнює одиниці, записують одиниці (ці клітки відповідають конституентам одиниці, що присутні у ДДНФ функції);
2) в інші клітки записують нулі.

**Приклад**. Побудувати карту Карно для функції

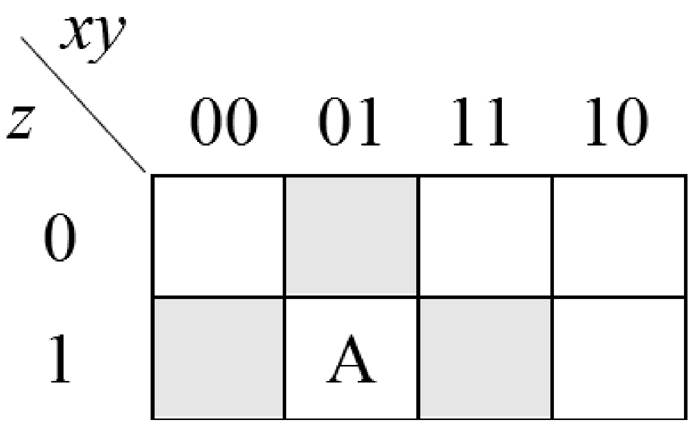
$$f(x, y, z) = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}.$$

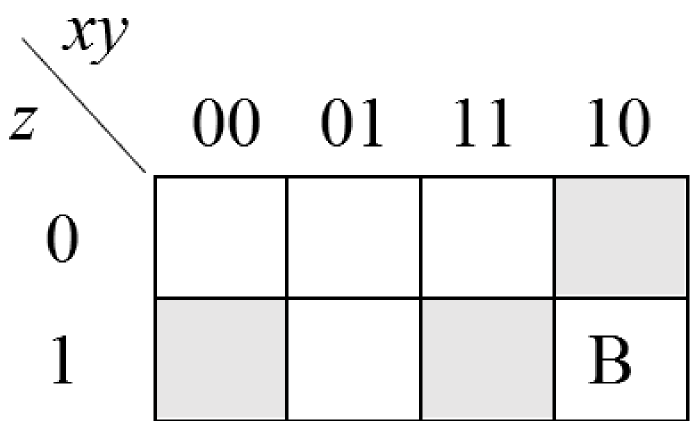
| $z \backslash xy$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

До конституент одиниці, що відповідають будь-яким двом сусіднім кліткам, можна застосувати операцію склеювання, оскільки вони відрізняються тільки однією змінною.

На карті Карно для функції трьох змінних кожна клітка має три сусідні клітки, на карті Карно для функції чотирьох змінних – чотири, для функції п'яти змінних – п'ять тощо.

**Приклад.** На рисунках позначено клітки, сусідні з клітками A і B:



**Правило склеювання кліток і запису мінімальної ДНФ:**

1. будується карта Карно, що відповідає даній функції;
2. клітки об'єднуються у групи, що позначають операції склеювання;
3. в групу можна об'єднати тільки кількість кліток, що дорівнює

$$2^n, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

4. при цьому група може мати тільки прямокутну або квадратну форму;

5. задача склеювання полягає у знаходженні набору максимальних груп кліток (максимальна група — це група, яка не входить цілком у жодну іншу групу і відповідає простій імпліканті функції);

   кількість груп у такому наборі повинна бути мінімальною, оскільки така група відповідає мінімальній тупиковій ДНФ;

   кожна одиниця карти Карно повинна входити хоча б до однієї групи, що забезпечує покриття функції одержаним набором імплікант;

6. кожна група кліток, що одержана після склеювання, відповідає тій імпліканті функції, реальні змінні якої мають однакове значення для всіх кліток групи;

   змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідають одиничні значення, і із запереченням – в іншому випадку;

7. диз'юнкція всіх одержаних простих імплікант зображує результат мінімізації формули і є мінімально ДНФ.

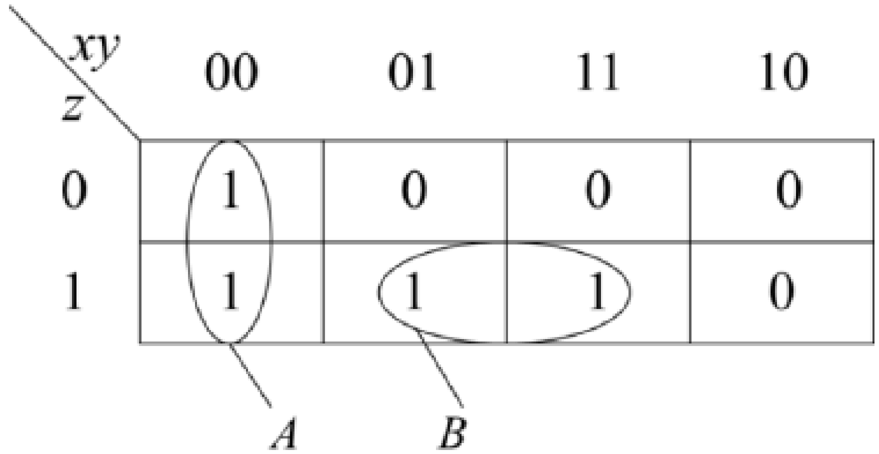
**Приклад**. Знайти мінімальну ДНФ функції

$$f(x, y, z) = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}.$$

Карта Карно:

| $z \backslash xy$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Результатом склеювання є імпліканти $A$ і $B$:




Імпліканта $A = x\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} = \bar{x}\,\bar{y}\,(z \vee \bar{z}) = \bar{x}\,\bar{y}$.

Імпліканта $B = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z = (x \vee \bar{x})\,y\,z = y\,z$.

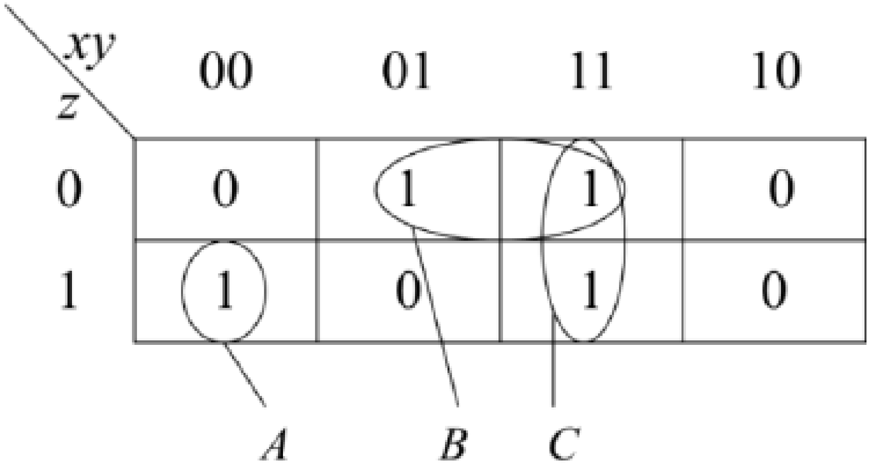
Мінімальна ДНФ (МДНФ):

$$f(x, y, z) = A \vee B = \bar{x}\,\bar{y} \vee y\,z.$$

**Приклад**. Знайти мінімальну ДНФ функції

$$f(x, y, z) = \bar{x}\, y\, \bar{z} \vee x\, y\, \bar{z} \vee \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee x\, y\, z.$$

Карта Карно:



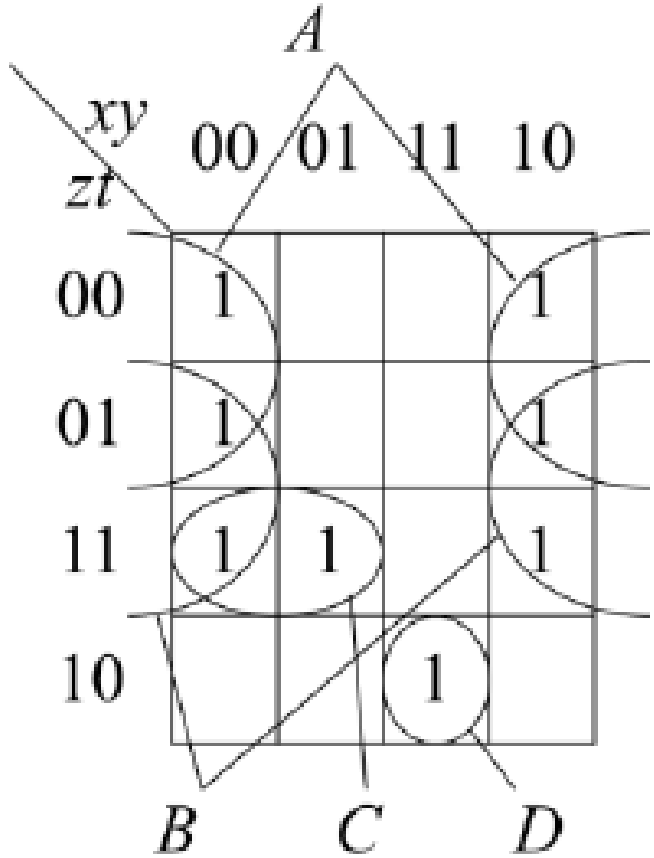

МДНФ: $f(x, y, z) = A \vee B \vee C = \bar{x}\, \bar{y}\, z \vee y\, \bar{z} \vee x\, y.$

**Приклад**. Побудувати МДНФ для функції

$$f(x, y, z, t) = x\,y\,z\,\bar{t} \lor x\,\bar{y}\,z\,t \lor \bar{x}\,y\,z\,t \lor \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \lor$$

$$\lor\, x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \lor \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \lor x\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \lor \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}.$$

Карта Карно:




$$\text{МДНФ:} \quad f(x, y, z, t) = A \vee B \vee C \vee D =$$

$$= \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,t \vee \bar{x}\,z\,t \vee x\,y\,z\,\bar{t}.$$

## 3.3.5.2 Мінімальні КНФ (МКНФ)

Для мінімізації булевої функції на множині КНФ використовуються *діаграми Вейча* (побудова аналогічна картам Карно):

1) на карті позначаються клітки, що відповідають інтерпретаціям, на яких функція дорівнює нулю;

2) проводиться склеювання кліток, що містять нулі і формування мінімальної КНФ;

3) кожна група кліток, що одержана в результаті склеювання, відповідає диз'юнкції тільки тих змінних, які мають однакове значення для всіх кліток групи;

   змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідає нульове значення, і із запереченням – в іншому випадку;

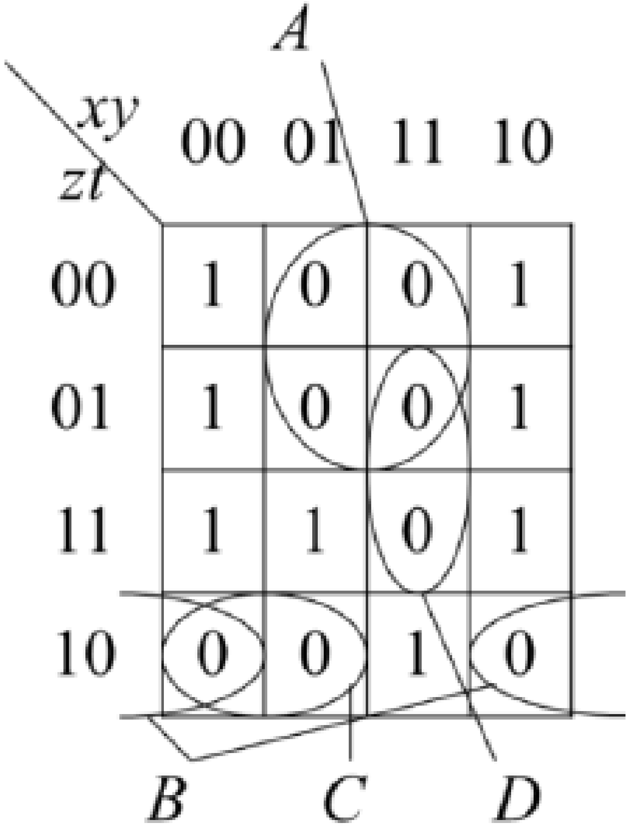
4) кон'юнкція одержаних елементарних диз'юнкцій є результатом мінімізації формули.

**Приклад**. Одержати мінімальну КНФ функції

$$f(x, y, z, t) = x\,y\,z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z\,t \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee$$

$$\vee\, x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}.$$

Діаграма Вейча:




МКНФ: $f(x, y, z, t) = A \wedge B \wedge C \wedge D =$

$$= (\bar{y} \vee z) \wedge (y \vee \bar{z} \vee t) \wedge (x \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{t}).$$

**Приклад.** Функція $f\left(x, y, z, w\right)$ задана за допомогою конституент одиниці, що закодовані десятковими еквівалентами $0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10$. Знайти мінімальні ДНФ та КНФ за допомогою діаграм Карно-Вейча.

<u>Розв'язання.</u> Таблиця істинності:

| | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ | $f(x,y,z,w)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Діаграма Карно-Вейча:

| $xy$ \ $zw$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Мінімальна ДНФ:

$$f\left(x, y, z, w\right) = \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{x}w \vee \overline{y}\,\overline{w}.$$

Діаграма Карно-Вейча:

| $xy \backslash zw$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Мінімальна КНФ:

$$f\left(x, y, z, w\right) = \left(\overline{x} \vee \overline{y}\right) \wedge \left(\overline{x} \vee \overline{w}\right) \vee \left(\overline{y} \vee \overline{z} \vee w\right).$$