Достатні ознаки збіжності знакододатних числових рядів

доц. І.В. Орловський

Означення 1

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots a_n + \dots$$

називають ***знакододатним*** *(****знаковід'ємним****) числовим рядом, якщо для всіх* $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \geq 0 \quad (a_n \leq 0).$$

Знакододатні та знаковід'ємні числові ряди називаються **знакопостійними**.
Послідовність часткових сум знакододатного ряду є неспадною:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = S_{n+1}.$$

Тому границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ буде скінченною лише у випадку, коли послідовність часткових сум $\{S_n,\, n \geq 1\}$ – обмежена зверху, тобто

$$\exists C > 0 \,:\, \forall n \in \mathbb{N} \,:\, S_n < C.$$

2. Ознаки порівняння

Розглянемо два додатних числових ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Означення 2

Якщо для $\forall n \in \mathbb{N}$ *справджується нерівність*

$$a_n \leq b_n,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *називають* ***мажорантним*** *по відношенню до ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 1 (1-ша ознака порівняння (у формі нерівності))

Нехай дано два знакододатних числових ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$a_n \le b_n,$$

то:

- *зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;*
- *з розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Зауваження

Теорема має місце і у випадку, коли нерівність $a_n \le b_n$ справджується починаючи з деякого N (не обов'язково рівного одиниці).

Теорема 2 (2-га (гранична) ознака порівняння)

Нехай дано два знакододатних числових ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \; (b_n > 0, \; n \in \mathbb{N}).$$

Якщо існує скінченна, відмінна від нуля, границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A, \; (0 < A < \infty),$$

то ці ряди збігаються або розбігається одночасно.

Теорема 3 (Ознака Даламбера)

Нехай дано ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *з* $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *та існує границя (скінченна або нескінченна)*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тоді,

- *якщо* $l < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *є збіжним;*
- *якщо* $l > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *є розбіжним;*
- *якщо* $l = 1$, *то ряд може як збігатися, так і розбігатися.*

Теорема 4 (Радикальна ознака Коші)

Нехай дано ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *з* $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *та існує границя (скінченна або нескінченна)*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тоді,

- *якщо* $l < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *є збіжним;*
- *якщо* $l > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *є розбіжним;*
- *якщо* $l = 1$, *то ряд може як збігатися, так і розбігатися.*

Теорема 5 (Інтегральна ознака Коші)

Нехай дано ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *з* $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *члени якого можна представити як значення деякої неперервної монотонно спадної на* $[1, +\infty)$ *функції* $f(x)$, *тобто*

$$a_n = f(n), \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Тоді числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і невласний інтеграл* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ *збігаються та розбігаються одночасно.*

Зауваження

Замість $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ можна розглядати $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)dx$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Тоді виконання умов Теореми треба перевіряти не з 1, а починаючи з k, оскільки відкидання скінченної кількості членів не впливає не збіжність ряду.

Узагальнений гармонічний ряд

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,$$

де $p > 0$, називають узагальненим гармонічним рядом.

ДЗ. Дослідити на збіжність в залежності від значень p.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.