4 МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Як наука логіка виникла ще у IV ст. до н.е. в працях старогрецького філософа Аристотеля, основоположника формальної *логіки*. Перший його твір, що дійшов до нас, спеціально присвячений логіці, — «Аналітики» (384-322 р. до н.е.). Аристотелю належить відкриття формального характеру логічного висновку, яке полягає в тому, що в наших міркуваннях одні пропозиції виходять з інших через певний зв'язок між їх формою, структурою незалежно від їх змісту. Протягом багатьох століть логіка майже не розвивалася. Справжній прогрес було досягнуто тільки у XIX ст., коли у логіці стали застосовувати математичні методи.

Ідею математизації логіки висловив ще у XVII ст. великий німецький вчений Лейбниць. Він сформулював задачу створення нової логіки, яка була б «мистецтвом обчислення». В цій логіці, за думкою Лейбниця, кожному поняттю відповідав би символ, а міркування мали б вигляд обчислень. Часи Лейбниця були епохою, коли аксіоматична геометрія стародавніх греків переживала новий розквіт. Математика зображувала науку, в якій умовивід відігравав більш важливу роль порівняно з іншими науками. Всі математичні теореми опиралися на точні доведення, засновані на висновку наслідків із загальноприйнятих математичних аксіом або постулатів. Тому не дивно, що вчені при аналізі математичних міркувань відкрили величезну кількість схем (способів) побудови умовиводів. Лейбниць вирішив так сформулювати правила математичного доведення, щоб при їх застосуванні не приходилося більше думати про змістовний сенс математичних виразів. Для цього необхідно створити обчислення, в якому природні, змістовні доведення були б замінені формальними обчисленнями і тим самим стали б предметом математики. Таке обчислення, розуміється, припускає спеціальну символіку, в якій можуть бути зображені аксіоми, теореми та визначення математики.

Тільки у середині XIX ст. ірландський математик Дж. Буль частково втілив у життя ідею Лейбниця. В його роботах «Математичний аналіз», «Закони мислення», а також у роботах Де Моргана було закладено основи булевої алгебри і алгебри логіки. За допомогою алгебри логіки можна описувати міркування та «обчислювати» їх результати, якщо символам змінних поставити у відповідність деякі твердження, що називаються висловлюваннями. Таке застосування алгебри логіки одержало назву ***логіки висловлювань*** і згодом було поширено додаванням змінних, що приймають значення із множини понять, що сформувало ***логіку предикатів***.

У зв'язку з тим, що в математичній логіці прийнята символічна мова, вона також називається символічною логікою. В роботах Пеано, Пірса та Шредера також створювалася й удосконалювалася математична символіка для законів мислення. Ці роботи вселяли віру у безмежні можливості формалізації.

Зусиллями таких видатних вчених, як Рассел, Уайтхед, Гільберт, Бернайс, Гедель і Черч, формалізація у рамках сучасних логічних обчислень досягла високого рівня. При спробах реалізувати практично ідею формалізації виникли труднощі логічного характеру, які виявилося неможливо здолати засобами класичної формальної логіки. Ці труднощі остаточно не усунуті і по цей час, але спроби їх здолання дали могутній поштовх розвиткові нових розділів логіки — неокласичних, модальних, інтуїційних.

Широке застосування комп'ютерів зажадало відповідного математичного забезпечення: розробки спеціальних мов для баз даних і для уявлення знань, поглибленого логічного аналізу природних мов. Ці проблеми і прагнення змоделювати на комп'ютері великий клас інтелектуальних процедур (ідеї штучного інтелекту) поставили перед логічною наукою нові задачі. Результати розв'язку зазначених задач знаходять нині все нові і різноманітні застосування у багатьох галузях науки і техніки. Математична логіка займається формалізацією деякої області людського мислення, у тому числі з ціллю надання можливості написання програми для обчислювальної машини, яка в цьому розумінні придбає здатність міркувати.

4.1 Логіка висловлювань

4.1.1 Логіка висловлювань

В природних мовах інформація передається за допомогою слів, об'єднаних у речення. Формальна логіка займається аналізом речень, звертаючи основну увагу на форму і відволікаючись від змісту.

Математична логіка вивчає та модулює тільки оповідальні речення. Наказові, окличні та питальні речення знаходяться поза сферою розгляду.

Висловлювання — це оповідальне речення, про яке можна сказати, істинне воно або хибне, але не те й інше одночасно.

Приклад. Наведемо приклади речень.

1. Сніг білий.
2. Київ — столиця України.
3. $x+1=3$.
4. Котра година?
5. Читай уважно!

Два перші речення — висловлювання, решта три — ні, оскільки третє речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x, четверте та п’яте речення — не розповідні.

Значення “істина” чи “хибність”, яких набуває висловлювання, називають його **значеннями істинності**. Значення “Істина” позначають буквою *I*, *T* (від англ. “*truth*” — істина) або 1, а “Хибність” — буквою *X, F* (від англ. “*false*” — хибність) або 0.

Оповідальні речення бувають простими та складними. Складні речення, як правило, складаються з простих речень, поєднаних сполучниками. Кожне просте речення є самостійним твердженням, і воно вже не може бути розбите на більш дрібні речення. Ці прості речення та сполучники є елементами словника, необхідного для формалізації природної мови за допомогою логіки висловлювань.

Атомами (елементарними висловлюваннями) називаються висловлювання, які відповідають простим оповідальним реченням, тобто не мають складових частин.

Як символи для позначення атомів використовуються великі букви латинського алфавіту *A*, *B*, *C*, ... або великі букви з індексами. Кожна буква у міркуванні повинна позначати одне і тільки одне елементарне висловлювання.

Складні висловлювання складаються з простих за допомогою логічних операцій: заперечення ($\neg$), кон’юнкції (& або $\wedge$), диз’юнкції ($\vee$), імплікації ($\rightarrow$), еквівалентності (~ або $\equiv$). Символи операцій називають **пропозиційними зв’язками**. Істинність або хибність складного висловлювання залежить від істинності або хибності простих висловлювань, що входять до нього, а також тим способом, яким вони комбінуються, тобто зв’язками, які використовуються для побудови складного висловлювання.

Формули логіки висловлювань можна задавати таблицями істинності подібно до булевих функції. Наведемо таблицю істинності для логічних зв'язок логіки висловлювань:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T

Розглянемо приклади і вирази природної мови, які відповідають логічним зв'язкам.

Заперечення. Заперечення $\neg A$ істинне тоді і тільки тоді, коли А хибне. Наприклад, якщо висловлювання *A* — “горобець — птах” істинне, то висловлювання $\neg A$ — “горобець — не птах” — хибне, а висловлювання $\neg\neg A$ — “Невірно, що горобець не птах” еквівалентне висловлюванню “горобець — птах”.

Кон'юнкція. Висловлювання $A \wedge B$, що називається кон'юнкцією A і B, істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлювання A і B. Ця логічна операція відповідає у природній мові зв'язкам "і", "та", що з'єднують два речення. Наприклад, твердження "найбільше місто України, Київ (A), є її столицею (B)" можна записати як $A \wedge B$. Висловлювання "на вулиці йде дощ (A) з сильним вітром (B)" також виражається формулою $A \wedge B$. Кон'юнкція комутативна, тому висловлювання "на вулиці сильний вітер (B) та дощ (A)", яке виражається формулою $B \wedge A$, еквівалентне попередньому. Але, в природних мовах подібні висловлювання не завжди еквівалентні, наприклад, висловлювання "я пішов в театр (A) і зустрів друга (B)" та "я зустрів друга (B) і пішов в театр (A)", які еквівалентні в силу комутативності кон'юнкції, швидше за все, різні, тому що описують ситуації, у яких неявно представлена часова послідовність подій. Для опису таких ситуацій засобів логіки висловлювань недостатньо.

Диз'юнкція. Висловлювання $A \vee B$, що називається диз'юнкцією A і B, хибне тоді і тільки тоді, коли хибні обидва висловлювання A і B. Ця логічна операція відповідає поєднанню висловлювань природної мови за допомогою зв'язки "або". Наприклад, висловлювання "два помножити на два — чотири (A) або п'ять (B)" виражається формулою $A \vee B$ і є істинним.

Імплікація. Висловлювання $A \rightarrow B$, що називається імплікацією (умовним реченням), хибне тоді і тільки тоді, коли A істинне, а B хибне.

В імплікації $A \rightarrow B$ висловлювання A називається *засновком* (умовою, антецедентом), B — *наслідком* (висновном, консеквентом). Причинно-наслідковий зв'язок між A і B, що виражається імплікацією, на природній мові описується такими зворотами: "якщо A, то B", "A є достатньою підставою для B", "B, тому що A", "B, за умови виконання A", "A тягне B" тощо.

Щоб зрозуміти, чому імплікація набуває таких значень істинності, слід сприймати її як зв'язок обов'язкового й очікуваного. Наприклад, розглянемо звернення, адресоване студентам: "якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку". Це означає, що в разі виконання студентами всіх завдань, вони одержать відмінну оцінку. Якщо ж студенти не виконають всіх завдань, то вони можуть отримати оцінку "відмінно", а можуть й не отримати її залежно від інших обставин. Однак якщо студенти зробили всі завдання, а викладач не поставив оцінку "відмінно", то студенти відчуватимуть себе ображеними. Це відповідає ситуації, коли в імплікації $A \rightarrow B$ припущення A "Ви виконаєте всі завдання" істинне, а її висновок B "Ви отримаєте відмінну оцінку" хибний.

Еквівалентність. Якщо A і B — висловлювання, то висловлювання $A \sim B$ істинне тоді і тільки тоді, коли A і B або обидва істинні, або обидва хибні. Наприклад, висловлювання "тварина є птахом (A) тоді і тільки тоді, коли в неї є крила (B)" виражається формулою $A \sim B$.

За допомогою логічних зв'язок складні висловлювання можна записати у вигляді формули, яку називають пропозиційною формулою.

(1) Кожна пропозиційна літера (атом) є формулою.

(2) Якщо A та B — формули, то формулами є: $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \sim B$.

(3) Інших формул немає.

Побудувавши формулу логіки висловлювань, ми відволікаємося від її змісту та оперуємо тільки поняттями істинності та хибності.

Приписування пропозиційним літерам їх значень істинності називається **інтерпретацією** формули. Множина всіх інтерпретацій формули утворює її **таблицю істинності**. Якщо виконати відображення $0 \Leftrightarrow F$ та $1 \Leftrightarrow T$, то кожній пропозиційній зв'язці буде відповідати булева операція, а кожній формулі логіки висловлювань — булева формула, відповідно, логіка висловлювань є інтерпретацією булевої алгебри. У зв'язку з цим в ній зберігаються всі аксіоми і теореми булевої алгебри, враховуючи представлення формул логіки висловлювань у вигляді ДДНФ та ДКНФ.

Формула називається **тавтологією** (або *тотожно істинною,* або *загальнозначущою),* якщо вона приймає значення "Істина" на всіх інтерпретаціях (наборах значень змінних).

Формула називається **суперечністю** (або *тотожно хибною*, або *нездійсненною*), якщо вона приймає значення "Хибність" на всіх інтерпретаціях.

Формула називається *незагальнозначущою, нейтральною* або *несуперечливою,* якщо вона на одних інтерпретаціях приймає значення "Істина", а на інших — "Хибність".

Формула, яка приймає істинне значення хоча б на одній своїй інтерпретації, називається *виконуваною*.

Дві формули називаються **еквівалентними**, якщо їх таблиці істинності співпадають.

Якщо формула A є тавтологією, то це позначають $\vdash A$. Очевидно, що якщо A — тавтологія, то $\neg A$ — суперечність.

Приклад 1. Записати формулу, яка відповідає висловлюванням:

1) "Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики або не повторить матеріал самостійно, то він погано напише модульну контрольну".

2) "Оскільки Петро пізно ліг спати, то він проспав і через це не встиг на автобус та спізнився на пару"

Розв’язання.

1) Виділимо елементарні висловлювання, які входять до складу нашого першого складного висловлювання:

A — "Іван пропустить лекцію з дискретної математики",

B — "Іван повторить матеріал самостійно",

C — "Іван напише модульну контрольну погано".

Тоді структуру складного висловлювання описує формула

$$A \vee \overline{B} \rightarrow C .$$

2) Елементарні висловлювання:

A — "Петро пізно ліг спати";

B — "Петро проспав";

C — "Петро встиг на автобус";

D — "Петро спізнився на пару".

Тоді структуру другого складного висловлювання описує формула

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \overline{C} \wedge D.$$

Приклад 2. Побудувати таблицю істинності формули:

$$\varphi = \overline{\overline{A} \vee B} \rightarrow \left(C \sim B \wedge \overline{A}\right).$$

Розв’язання.

Поставимо у відповідність кожній підформулі формули окремий стовпчик таблиці.

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$\overline{\overline{A} \vee B}$	$B \wedge \overline{A}$	$C \Leftrightarrow B \wedge \overline{A}$	φ
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

4.1.2 Логічне слідування

Якщо A та B — формули, то кажуть, що B **логічно слідує** з A, або з A **логічно випливає** B, якщо всюди де A приймає істинне значення, B також приймає істинне значення. Це позначається як $A \vdash B$ або $A \to B$.

Кажуть, що логічне слідування **зберігає істинність**.

Теорема 1. Логічне слідування $A \vdash B$ виконується тоді і тільки тоді, коли формула $A \to B$ — тавтологія.

Формула B логічно слідує з формул $A_1,\ldots,A_n$, всюди де $A_1,\ldots,A_n$ приймають істинні значення одночасно, формула B також приймає істинне значення. Це позначається $A_1,\ldots,A_n \vdash B$.

Якщо $A \vdash B$ і $B \vdash A$, то формула A **логічно еквівалентна** формулі B. Це позначається як $A \leftrightarrow B$ або $A \equiv B$.

Якщо формула A логічно еквівалентна B, то $A \sim B$ — тавтологія.

Приклад 3. Показати, що висловлювання $\left(A \wedge B\right) \vee \bar{C}$ логічно слідує з висловлювання $A \wedge \bar{C}$.

<u>Розв'язання</u>. Достатньо показати, що формула $\left(A \wedge \bar{C}\right) \to \left(\left(A \wedge B\right) \vee \bar{C}\right)$ є тавтологією. Виконаємо еквівалентні перетворення

$$\left(A \wedge \bar{C}\right) \to \left(\left(A \wedge B\right) \vee \bar{C}\right) = \left(\overline{A \wedge \bar{C}}\right) \vee \left(\left(A \wedge B\right) \vee \bar{C}\right) =$$

$$= \bar{A} \vee C \vee \left(A \wedge B\right) \vee \bar{C} = \bar{A} \vee \left(A \wedge B\right) \vee C \vee \bar{C} =$$

$$= \bar{A} \vee \left(A \wedge B\right) \vee I = I .$$

Таким чином, доведено що формула $\left(A \wedge \bar{C}\right) \to \left(\left(A \wedge B\right) \vee \bar{C}\right)$ є тавтологією.

Розглянемо інший спосіб перевірки, чи є висловлювання B логічним наслідком висловлювання A. Побудуємо таблицю істинності висловлювання A. Якщо висловлювання B істинне на всіх інтерпретаціях, на яких істинне висловлювання A, то висловлювання B є логічним наслідком висловлювання A.

A	B	C	$A \wedge \neg C$	$\left(A \wedge B\right) \vee \neg C$
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	1
1	0	1	0	
1	1	0	1	1
1	1	1	0	

4.1.3 Тавтології

Наступні теореми о тавтологіях надають можливості отримувати нові тавтології з доведених раніше.

Теорема 2 (правило modus ponens). Якщо A — тавтологія і $A \rightarrow B$ — тавтологія, то B — тавтологія, тобто якщо $\vdash A$ та $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash B$.

Правило modus ponens (скорочено *MP*) встановлює логічне слідування $A, A \rightarrow B \vdash B$ і має назву **правила відділення**.

Правило *MP* виражає елементарний акт дедукції. Імплікацію $A \rightarrow B$, яка за означенням має зміст "якщо A, то B", можна інтерпретувати, як правило, в якому A є "засновком", а B — "наслідком". Тоді правило МР говорить про те, що наслідок B наступає при виконанні умови A, тобто при істинності засновку.

Наприклад, формула $A \rightarrow B$ може виражати таке правило: "якщо бачиш зеленого чоловічка, то можна переходити дорогу". Ми чекаємо моменту, щоб побачити зеленого чоловічка на світлофорі, тобто неявно використовуємо правило МР: коли засновок стає істинним (зелений чоловічок), то істинний і наслідок (можна переходити дорогу). Тим самим ми виконуємо елементарний акт дедукції: з істинності засновків ми виводимо істинні наслідки. Дійсно, цей вивід правильний тільки в тому випадку, коли правило $A \rightarrow B$ істинно.

Теорема 3 (правило підстановки). Якщо A — тавтологія, що містить пропозиційні змінні $x_1, \ldots, x_n$, то формула B, яка отримується з A підстановкою формул $A_1, \ldots, A_n$ замість кожного входження $x_1, \ldots, x_n$ відповідно, також буде тавтологією.

Наприклад, формула $C \rightarrow (D \rightarrow C)$ — тавтологія. Підставимо $E \vee C$ замість C, отримуємо нову тавтологію: $\vdash E \vee C \rightarrow (D \rightarrow E \vee C)$. Таким чином, кожну тавтологію можна розглядати як схему, з якої за допомогою підстановки можна отримувати нескінченну множину тавтологій.

Теорема 4 (правило еквівалентної заміни). Якщо B отримується з A підстановкою формули B_1 замість одного або декількох входжень підформули A_1 до A, то $((A_1 \sim B_1) \rightarrow (A \sim B))$ є тавтологія, і, відповідно, якщо A_1 та B_1 логічно еквівалентні, то A та B також логічно еквівалентні.

Іншими словами, якщо є тавтологія A, то в ній є підформула A_1, і якщо замінити A_1 на еквівалентну їй формулу B_1, то отримана формула B буде еквівалентна A.

Наприклад, у тавтології $C \rightarrow (D \rightarrow C)$ замінимо підформулу $D \rightarrow C$ на еквівалентну їй формулу $\neg D \vee C$, отримаємо нову тавтологію $C \rightarrow (\neg D \vee C)$.

4.1.4 Формальні системи та аксіоматичний підхід

Формальні системи — це системи операцій над об'єктами, які розуміються як послідовності символів (тобто як слова у фіксованих алфавітах). Самі операції також є операціями над словами. Термін “формальний” підкреслює, що об’єкти й операції над ними розглядаються суто формально, без будь-яких змістовних інтерпретацій символів. Передбачається, що між символами не існує жодних зв’язків і відношень, крім тих, які явно описуються засобами самої формальної системи.

Історично поняття формальної системи було розроблено у період інтенсивних досліджень в галузі основ математики для формалізації логіки та теорії доведень. Зараз цей апарат широко використовується при створенні спеціальних числень для розв’язання конкретних прикладних задач.

Формальна система має бути такою, яка алгоритмічно реалізується. Мається на увазі, що для пошуку будь-якого виведення у формальній системі повинен не тільки існувати алгоритм виведення, але цей алгоритм має ще допускати реалізацію на існуючих ЕОМ. Інакше формальна система залишиться абстрактною побудовою.

Таблиці істинності дають змогу відповісти на багато питань, що стосуються формул логіки висловлювань (наприклад, на питання про рівнозначність двох формул). Однак складніші питання логіки висловлювань вже не можуть бути вирішені за допомогою таблиць істинності. Для розв’язання цих проблем використовується інший спосіб опису — аксіоматичний, при якому застосовуються формальні (аксіоматичні) теорії — конкретні випадки формальних систем.

Формальна теорія S — це:

1. множина A символів, які утворюють алфавіт;
2. множина Φ слів алфавіту A, які називаються формулами;
3. підмножина B формул, $B \subset \Phi$, які називаються аксіомами;
4. множина P відношень R на множині формул, $R \in P$, $R \subset \Phi^{n+1}$, які називаються правилами виведення.

Множина символів A може бути скінченною або нескінченною. Зазвичай для утворення символів використовується скінченна множина літер, до яких, якщо необхідно, приписують в якості індексів натуральні числа.

Множина формул Φ зазвичай задається індуктивним означенням, наприклад, за допомогою породжувальної формальної граматики. Як правило, ця множина нескінченна. Множини A та Φ у сукупності визначають мову або сигнатуру формальної системи.

Множина аксіом B може бути скінченною або нескінченною. Якщо множина аксіом нескінченна, то, як правило, вона задається за допомогою скінченної множини схем аксіом та правил породження конкретних аксіом зі схеми аксіом. Зазвичай аксіоми поділяються на два види: **логічні аксіоми** (загальні для цілого класу формальних теорій або систем) та **нелогічні** (або

власні) аксіоми (які визначають специфіку та зміст конкретної теорії або системи).

Множина правил виведення P зазвичай скінчена.

Нехай $F_1,\ldots, F_n, G$ — формули теорії S, тобто $F_1,\ldots, F_n, G \in \Phi$. Якщо існує таке правило виведення R, $R \in P$, що $(F_1,\ldots, F_n, G) \in R$, то говорять, що формула G **безпосередньо виводиться** з формул $F_1,\ldots, F_n$ за правилом виведення R. Зазвичай цей факт записують наступним чином:

$$\frac{F_1,\ldots,F_n}{G} R,$$

де формули $F_1,\ldots, F_n$ називаються **засновками**, а формула G — **висновком** правила R.

Наприклад, формула $D \to C$ виводиться з формул $C \to (D \to C)$ та C за правилом виведення MP:

$$\frac{C \to (D \to C), C}{D \to C} \mathrm{MP}.$$

Позначення правила виведення справа від лінії, яка розділяє засновки та висновок, часто опускають, якщо воно зрозуміло з контексту.

Виведенням формули G в формальній теорії S називається така послідовність формул $E_1,\ldots,E_k$, що $E_k = G$, а будь-яка формула E_i $(i<k)$ є або аксіомою $(E_i \in B)$, або безпосередньо виводиться з раніше отриманих формул. В цьому випадку формула G називається **теоремою** теорії S і позначається це $\vdash_S G$. Індекс формальної теорії можна опускати, коли зрозуміло до якої теорії відноситься виведення.

Виведенням формули G з множини формул Γ в формальній теорії S називається така послідовність формул $E_1,\ldots,E_k$, що $E_k = G$, а будь-яка формула E_i $(i<k)$ є або аксіомою $(E_i \in B)$, або належить до множини Γ $(E_i \in \Gamma)$, або безпосередньо виводиться з раніше отриманих формул. Елементи Γ називаються **посилками виведення** або **гіпотезами**. Цей факт позначається $\Gamma \vdash_S G$.

Розглянемо *властивості виведень* з множини гіпотез.

1. Якщо $\Gamma \vdash A$ та $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta \vdash A$.

Ця властивість називається властивістю **монотонності виведення**. Вона означає, що формула A буде виводитися навіть якщо до множини гіпотез Γ, з яких виводиться формула A, додати інші гіпотези, тобто розширити множину гіпотез Γ до Δ.

2. $\Gamma \vdash A$ тоді й тільки тоді, коли існує $\Delta \subseteq \Gamma$, таке що $\Delta \vdash A$.

Це властивість **повноти** множини гіпотез: для того, щоб формула A виводилась з множини гіпотез Γ, необхідно і достатньо, щоб у Γ існувала підмножина $\Delta \subseteq \Gamma$, з якої виводиться формула A. Іншими словами, не всі гіпотези з заданої множини Γ обов'язково мають використовуватися підчас побудови виводу, — деякі можуть бути зайвими, але заданих гіпотез має бути достатньо для виведення A.

3. Якщо $\Delta \vdash A$ і для кожного $B_i \in \Delta$, $\Gamma \vdash B_i$, то $\Gamma \vdash A$.

Це властивість **транзитивності** відношення виведення. Воно дозволяє використовувати раніше доведені теореми (виведення), не повторюючи всього переліку формул, які складають доведення (виведення). Тому раніше виведені теореми можуть використовуватись в інших виведеннях як схеми, в яких кожне входження змінної (пропозиційної літери) може замінюватись довільною формулою.