Функціональні ряди

доц. І.В. Орловський

Означення 1

Нехай $A \subset \mathbb{R}$, $\{u_n(x),\ x \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$, *тоді ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

членами якого є функції називають функціональним рядом.

Важливими прикладами функціональних рядів є:

1. степеневі ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n;$$

2. тригонометричні ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right).$$

Покладаючи $x = x_0 \in A$ у функціональному ряді, дістаємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots .$$

Якщо отриманий числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається (розбігається), то точку x_0 називають точкою збіжності (розбіжності) функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, а сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжним (розбіжним) в цій точці.

Означення 2

Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *називають областю збіжності цього ряду.*

Означення 3

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *називають абсолютно збіжним в точці* x_0, *якщо в цій точці збігається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$. *При цьому точку* x_0 *називають точкою абсолютної збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Означення 4

Сукупність всіх точок абсолютної збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *називають областю абсолютної збіжності цього ряду.*

Для функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ означують його:

- n-ту часткову суму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x);$$

- n-й залишок

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x);$$

- в області збіжності D функціонального ряду визначено його суму

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \ x \in D.$$

Приклад 1

Знайдіть область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{nx}.$$

Приклад 2

Знайдіть область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}.$$

Приклад 3

Знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Приклад 4

Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n^2 x\right)}{n^2}.$$

Чи буде збіжним ряд з похідних.

Означення 5

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in A$, *називають* *рівномірно збіжним на множині* B, *якщо* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *(яке залежить лише від* ε *і не залежить від* x*) такий, що* $\forall n > N$ *і* $\forall x \in B$ *виконується нерівність*

$$|R_n(x)| < \varepsilon.$$

Позначають

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x),\ x \in B.$$

Зауваження

Умову рівномірної збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині B, з означення 5, можна замінити на наступну, рівносильну, умову:

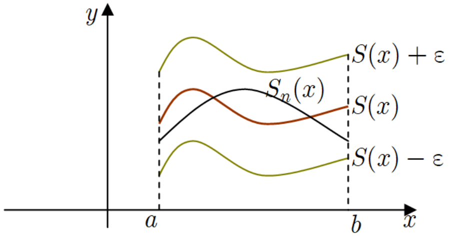
$$d_n = \sup_{x \in B} |R_n(x)| \to 0,\ n \to \infty.$$

Практично рівномірна збіжність ряду означає, що суму ряду $S(x)$ на проміжку $(a;b)$ можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією самою частковою сумою $S_n(x)$:

$$S(x) \approx S_n(x), \ x \in (a;b).$$

Геометрично рівномірна збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині B (наприклад, $B = [a;\, b]$) означає, що графіки всіх n-х часткових сум $S_n(x)$, $x \in [a;\, b]$, з номерами $n > N$ розмістяться на всьому проміжку всередині ε-смуги, що обмежена кривими

$$y = S(x) - \varepsilon, \quad y = S(x) + \varepsilon.$$



Приклад 5

Довести рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2+n}}$$

на відрізку $[-1;1]$.

Теорема 1 (ознака Веєрштраса)

Якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *такий, що* $|u_n(x)| \le a_n,\ \forall x \in B,\ n \in \mathbb{N}$, *то функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *абсолютно й рівномірно збіжний на множині* B.

Означення 6

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *називають мажорантою функціонального ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Приклад 6

Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Приклад 7

Довести рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi - x)\sin^2 nx}{\sqrt[3]{n^6+1}}$$

на відрізку $[0; \pi]$.

3. Властивості рівномірно збіжних рядів

I (про неперервність суми функціонального ряду)

Якщо функції $u_n(x)$, $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$, задовольняють умовам:

1. для всіх $n \in \mathbb{N}$ функції $u_n(x)$ неперервні на множині A;
2. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ рівномірно збігається на A;

тоді сума ряду $S(x)$ є функцією, неперервною на A.

II (про почленне інтегрування функціонального ряду)

Якщо функції $u_n(x)$, $x \in [\alpha; \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, задовольняють умовам:

1. для всіх $n \in \mathbb{N}$ функції $u_n(x)$ інтегровані на відрізку $[\alpha; \beta]$;
2. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ рівномірно збігається на $[\alpha; \beta]$;

тоді сума ряду $S(x)$ є функцією, інтегрованою на $[\alpha; \beta]$, причому

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx.$$

III (про почленне диференціювання функціонального ряду)

Якщо функції $u_n(x)$, $x \in [\alpha; \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, задовольняють умовам:

1. існує $x_0 \in [\alpha; \beta]$, для якої ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається;
2. для всіх $n \in \mathbb{N}$ функції $u_n(x)$ є неперервно диференційовними на відрізку $[\alpha; \beta]$;
3. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ рівномірно збігається на $[\alpha; \beta]$;

тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ збігається на $[\alpha; \beta]$, причому його сума $S(x)$ є неперервно диференційовною на $[\alpha; \beta]$ та є вірною рівність

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \ \ x \in [\alpha; \beta].$$

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.