8.2 Багатовимірні задачі оптимізації. Метод покоординатного спуску

У більшості реальних задач оптимізації цільова функція залежить від багатьох проектних параметрів.

Метод покоординатного спуску. Необхідно знайти найменше значення цільової функції $U = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$. В якості початкового наближення виберемо в n–мірному просторі деяку точку M_0 з координатами $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Зафіксуємо усі координати функції U, крім першої. Тоді $U = f\left(x_1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ – функція однієї змінної x_1. Розв’язуючи одномірну задачу оптимізації для цієї функції, від точки M_0 переходимо до точки $M_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, у якій функція U приймає найменше значення по координаті x_1 при фіксованих решті значень. В цьому випадку перший крок процесу оптимізації зводиться до опису за координатою x_1.

Зафіксуємо тепер усі координати, крім x_2, і розглянемо функцію цієї змінної $U = f\left(x_1^{(1)}, x, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$. Знову розв’язується одновимірна задача оптимізації і шукається її найменше значення при $x_2 = x_2^{(1)}$, тобто в точці $M_2\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$.

Аналогічно відбувається спуск за координатами x_3, x_4, ..., x_n, а потім процедура знову повторюється від x_1 до x_n. В результаті цього процесу виходить послідовність точок $M_0, M_1, \ldots$, в котрих значення цільової функції складають монотонно зменшуючи послідовність $f\left(M_0\right) \geq f\left(M_1\right) \geq \ldots$. На деякому k-му кроці цей процес можна перервати і значення $f\left(M_k\right)$ приймається в якості найменшого значення цільової функції в даній області.

Таким чином, метод покоординатного спуску зводить задачу про знаходження найменшого значення функції багатьох змінних до багаторазового розв’язку одновимірних задач оптимізації за кожним проектним параметром.

Графічна інтерпретація методу покоординатного спуску показана на рисунку 4.

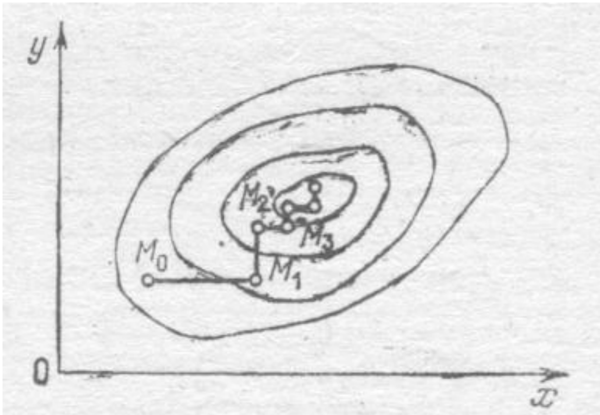

Рисунок 4 – Метод покоординатного спуску

На рисунку нанесені лінії рівня поверхні і процес оптимізації відбувається таким чином. Точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ описує початкове наближення. Проводячи спуск за координатою x, потрапляємо в точку $M_1\left(x_1, y_0\right)$. Далі рухаючись паралельно осі ординат приходимо в точку $M_2\left(x_1, y_1\right)$ і т.д.

Для даного методу важливим є поняття збіжності. Це залежить від виду цільової функції та від вибору початкового наближення. Перевагою даного методу є можливість використання простих алгоритмів одновимірної оптимізації.

Алгоритм методу може бути представлений наступними етапами.

1. Задають вихідну точку пошуку $A_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

2. Визначають напрям пошуку; якщо варіюється змінна *x₁*, то $\overline{p}_1 = \{1,0,0,\ldots,0\}$.

3. Роблять перший крок у напрямку $\overline{p}_1 : x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1^0 e_1$. Значення λ_1, обирають способом подвоєння або мінімізацією функції $f(x_1^0 + \lambda_1 e_1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ по λ_1. Якщо аналітичний вираз цільової функції достатньо простий, для вибору λ_1^0 можна використовувати умову:

$$\frac{df}{d\lambda_1} = 0$$

4. Після визначення положення мінімуму за координатою x_1 роблять крок у напрямку $\overline{p}_2 = \{0,1,0,\ldots,0\}$: $x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2^0 e_2$. Значення λ_2, знаходять, мінімізуючи функцію $f(x_1^1, x_2^0 + \lambda_2 e_2, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0$ за λ_2 і т.д.

5. Пошук завершують при виконанні умови:

$$\max_i \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \le \varepsilon \qquad (15)$$

Приклад. Нехай цільова функція має вигляд $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$. Потрібно знайти її мінімум з точністю $\varepsilon = 0{,}01$.

Розв'язання. 1. Приймемо у якості вихідної точки точку A_0 *(2,1)*. Значення цільової функції в цій точці $f(A_0) = 7$.

2. Напрям пошуку оберемо паралельно до координатної осі OX_1, $\bar{p}_1 = \{1,0\}$.

3. Змінимо змінну x_1.

Значення λ_1^0 знайдемо з умови: $\dfrac{df}{d\lambda_1} = 0$.

$$f(x_1+\lambda_1 e_1, x_2)=2(x_1+\lambda_1 e_1)^2+x_2^2-(x_1+\lambda_1 e_1)\cdot x_2,$$

$$\frac{df}{d\lambda_1}=4(x_1+\lambda_1 e_1)e_1-x_2e_1=0\rightarrow\lambda_1=0{,}25x_2-x_1,$$

$$\lambda_1^0 = 0{,}25x_2^0 - x_1^0 = 0{,}25\cdot 1 - 2 = -1{,}75.$$

Тоді, $x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1^0 e_1 = 2 + (-1{,}75)\cdot 1 = 0{,}25$.

Отже, знайшли точку $A_1(0{,}25;\ 1)$, в якій значення цільової функції $f(A_1) = 0{,}875$.

4. Змінимо змінну x_2.

Значення λ_2^0, знайдемо з умови: $\dfrac{df}{d\lambda_2} = 0$.

$$f(x_1, x_2+\lambda_2 e_2)=2x_1^2+(x_2+\lambda_2 e_2)^2-x_1(x_2+\lambda_2 e_2),$$

$$\frac{df}{d\lambda_2}=2(x_2+\lambda_2 e_2)e_2-x_1e_2=0\rightarrow\lambda_2=0{,}5x_1-x_2,$$

$$\lambda_2^0 = 0{,}5x_1^1 - x_2^0 = 0{,}25\cdot 0{,}5 - 1 = -0{,}875.$$

Тоді $x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2^0 e_2 = 1 + (-0{,}875)\cdot 1 = 0{,}125$.

Знайшли точку $A_2(0{,}25;0{,}I25)$, $f(A_2) = 0{,}109$.

5. Від точки A_2 знову змінимо напрям пошуку та зведемо подальші обчислення в таблицю 4.

Таблиця 4

Номер ітерації k	$\bar{p}_k$	λ	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0			2	1	7
1	(1,0)	-1,750	0,250	1,000	0,875
2	(0,1)	-0,875	0,250	0,125	0,109
3	(1,0)	-0,215	0,030	0,125	0,013
4	(0,1)	-1,108	0,030	0,015	0,001

Після четвертої ітерації виконується умова закінчення пошуку:

$$\max_i \left|x_i^4 - x_i^3\right| = \left|x_2^4 - x_2^3\right| = 0{,}010 = \varepsilon$$

Відповідь: мінімум цільової функції знаходиться в точці *(0,030; 0,015)*, $f(A_{mln}) = 0,001$.

Зазначимо, що точний мінімум цільової функції знаходиться в точці *(0,0)*, $f(0.0) = 0$.