5 НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ТА АПРОКСИМАЦІЇ

5.1 Задачі інтерполяції. Інтерполяційні многочлени Лагранжа та Ньютона

5.1.1 Постановка задачі інтерполяції

При розв'язуванні багатьох задач науково-технічного характеру доводиться використовувати таблично чи графічно задані функції. Крім того, бувають випадки, коли аналітичний вираз функції $f(x)$ відомий, проте є занадто складним і незручним для обчислень. У таких випадках вихідну функцію замінюють на більш просту, яка в деякому сенсі близька до даної. Інтерполювання – це один із способів знаходження таких функцій.

В загальному вигляді задача інтерполювання формулюється наступним чином. Нехай функція $y = f(x)$ задана таблично, тобто в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, ..., x_n$ відомі значення функції

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ ...,\ y_n = f(x_n).$$

Потрібно підібрати функцію $\varphi(x)$, що задовольняє наступним умовам:

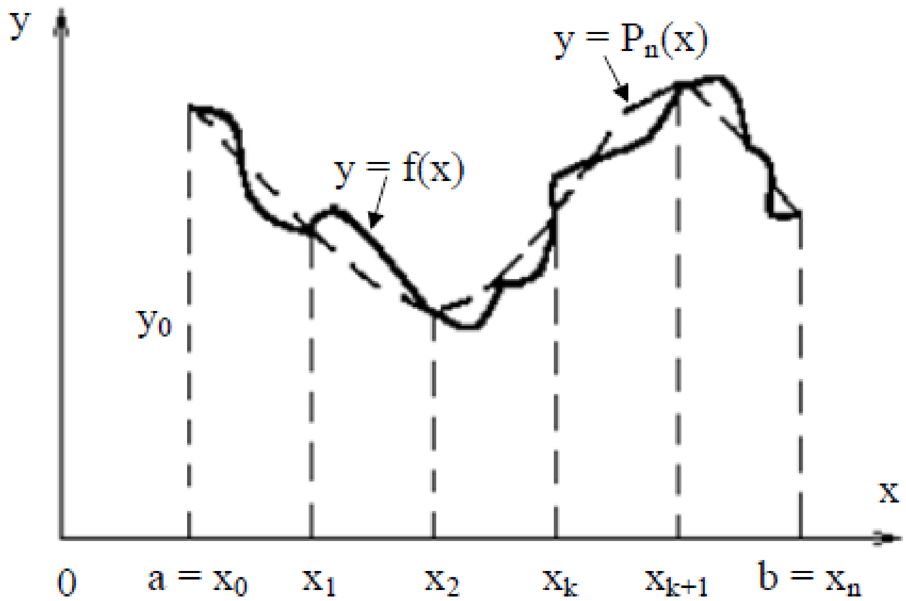
- в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ значення функції $\varphi(x)$ співпадають зі значеннями даної функції $y_i = f(x_i) = \varphi(x_i),\ \ i = \overline{1,n}$;
- в інших точках з області визначення виконується наближена рівність $f(x) \approx \varphi(x)$.

Функція $\varphi(x)$ називається *інтерполюючою функцією*, процес її побудови – *інтерполюванням*, а точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – *вузлами інтерполювання.* Зауважимо, що коли аргумент x знаходиться поза межами проміжку інтерполювання $[x_0, x_n]$, то задача побудови функції $\varphi(x)$ називається *екстраполюванням*.

З геометричної точки зору задача інтерполювання для функції однієї змінної означає побудову кривої, яка проходить через точки площини з координатами $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Однак цілком очевидно, що через дані точки можна провести безліч кривих. Тому задача інтерполювання в її загальному вигляді не є однозначно визначеною.

5.1.2 Параболічне інтерполювання

Якщо інтерполюючу функцію $\varphi(x)$ вибирати з класу многочленів, то в цьому випадку інтерполювання називають *параболічним*. Параболічне інтерполювання найзручніше, оскільки многочлени прості за формою, їх легко обчислювати, диференціювати та інтегрувати, вони не мають особливих точок і можуть набувати довільних значень.



Інколи зручно використовувати інші класи функцій. Якщо, наприклад, функція $f(x)$ періодична, то інтерполюючу функцію доцільно вибирати з класу тригонометричних функцій. У випадках, коли функція набуває нескінченно великих значень в околі деякої точки, функцію $\varphi(x)$ вибирають з класу дробово-раціональних функцій.

Розглядатимемо задачу параболічного інтерполювання, яку сформулюємо так: в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, ..., x_n$ задано значення функції $f(x)$: $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$ і треба побудувати многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \qquad (1)$$

степеня n, який задовольняв би умови

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}, \qquad (2)$$

де $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$.

Для визначення $(n+1)$ невідомих коефіцієнтів многочлена (1) побудуємо систему лінійних рівнянь на основі умов (2)

$$
\begin{cases}
a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = y_0 \\
a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = y_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_n + a_n = y_n
\end{cases}
\qquad (3)
$$

Це є система $n+1$ лінійних рівнянь з $n+1$ невідомими. Зауважимо, що невідомими величинами тут є числа $a_0, a_1, ..., a_n$.

Система (3) має єдиний розв’язок, оскільки її визначник відмінний від нуля, бо за умовою задачі всі вузли інтерполювання різні. Таким чином, існує єдиний многочлен виду (1), що задовольняє умови (2).

Многочлен $P_n(x)$ називають *інтерполяційним многочленом,* наближену рівність $f(x) \approx P_n(x)$ – *інтерполяційною формулою.*

Зауважимо, що хоч інтерполяційний многочлен, що задовольняє умови (2), і єдиний, проте можливі різні форми його запису.

Як правило, інтерполяційний многочлен будують в одному з наступних випадків:

- функція задана таблично, а треба знайти її значення для тих значень аргументу, яких в таблиці немає;
- функція задана графічно, а треба знайти її наближений аналітичний вираз;
- функція задана аналітично, але її вираз досить складний і незручний для подальших математичних перетворень.

5.1.3 Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Побудова інтерполяційного многочлена у явному вигляді шляхом розкриття визначника $n+1$ порядку пов’язана із значними обсягами обчислень. Тому розповсюдження набули інші методи побудови інтерполяційного многочлена. Один з таких методів було запропоновано Лагранжем.

Найбільш загальною формулою параболічного інтерполювання є інтерполяційна формула Лагранжа.

Нехай у точках x_i $(i=\overline{0,n})$ $(x_i \neq x_j$, якщо $i \neq j)$ задано значення функції $f(x)$: $y_i = f(x_i)$ $(i=\overline{0,n})$. Треба побудувати многочлен $L_n(x)$ степеня n, який у вузлах x_i $(i=\overline{0,n})$ набуває тих самих значень, що й функція $f(x)$, тобто

$$L_n(x_i)=y_i,\quad i=\overline{0,n}. \tag{4}$$

Шукатимемо інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)+ \\ &+a_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)+\ldots+ \\ &+a_i(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)+\ldots+ \\ &+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}), \end{aligned} \tag{5}$$

де коефіцієнти a_i $(i=\overline{0,n})$ невідомі. Кожен доданок виразу (5) є многочленом степеня n, причому при кожному з коефіцієнтів a_i $(i=\overline{0,n})$ **немає множника** $(x-x_i)$.

Визначимо коефіцієнти a_i $(i=\overline{0,n})$, використавши умови (4). Поклавши в (5) $x=x_0$, дістанемо

$$L_n(x_0)=y_0=a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n),$$

звідки

$$a_0=\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

Якщо в (5) покласти $x=x_1$, то

$$L_n(x_1)=y_1=a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n),$$

а отже

$$a_1=\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}.$$

Аналогічно обчислюємо

$$a_i=\frac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},\quad (i=2,3,\ldots,n).$$

Тепер, якщо підставити ці вирази для коефіцієнтів a_i у формулу (5), отримаємо інтерполяційний многочлен

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,y_i. \tag{6}$$

Многочлен $L_n(x)$ вигляду (6) називають ***інтерполяційним многочленом Лагранжа***, а наближену рівність $f(x)\approx L_n(x)$ – ***інтерполяційною формулою Лагранжа***.

Інтерполяційний многочлен Лагранжа (6) може бути записаний компактніше.

Для цього введемо многочлен $(n+1)$-го степеня:

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$$

Диференціюючи за x цей добуток, дістанемо:

$$\omega'_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n).$$

Поклавши тут $x=x_i$, $i=\overline{0,n}$, отримаємо

$$\omega'_{n+1}(x_i)=\sum_{i=0}^{n}(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n).$$

Підставивши вирази для $\omega_{n+1}(x)$ і $\omega'_{n+1}(x_i)$ у (6), отримаємо

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}\,y_i. \tag{7}$$

Вирази $\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$, $i=\overline{0,n}$, що є коефіцієнтами при y_i у многочленах Лагранжа, називають ***коефіцієнтами Лагранжа***.

Досить поширеними є випадки *лінійного* і *квадратичного* інтерполювання. Відповідні формули дістанемо із загальної, якщо в (6) приймемо $n=1$ і $n=2$.

Нехай $n=1$, тобто значення функції $f(x)$ задано в двох вузлах x_0 і x_1. Позначимо ці значення y_0 і y_1. Тоді з формули (6) отримаємо

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1. \tag{8}$$

Ця формула є ***формулою лінійного інтерполювання***. Многочлен $L_1(x)$ є многочленом першого степеня, який є рівнянням прямої, що проходить через точки (x_0,y_0) і (x_1,y_1).

Поклавши у формулі (6) $n=2$, дістанемо

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Останню рівність називають ***формулою квадратичного інтерполювання***. Функція $y=L_2(x)$ – це квадратична функція, графіком якої є парабола, що проходить через три задані точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2). Суть квадратичного інтерполювання полягає в тому, що дуга кривої на відрізку $[x_0, x_2]$ замінюється дугою параболи, яка в трьох заданих точках (вузлах інтерполювання) перетинається з графіком $y = f(x)$.

Зауваження. У інтерполяційного многочлена Лагранжа явно виступає його залежність від кожного значення функції f_i. Це в багатьох випадках є корисним. Проте при змінюванні n інтерполяційний многочлен Лагранжа необхідно будувати заново. В цьому є його недолік.

Погрішність наближення інтерпольованої функції многочленом Лагранжа сильно залежить від розкиду точок x_i, тобто чим менше інтервал $[x_0, x_n]$, тим точніше многочлен Лагранжа наближає значення функції.

Ясно, що в кожній точці $x \in [a, b]$, яка не є вузлом інтерполяції, задана функція $y = f(x)$ відрізняється від інтерполяційного многочлена $P_n(x)$. Позначимо

$$R_n(x) = |f(x) - P_n(x)|.$$

Функція $R_n(x)$ називається похибкою інтерполяції в точці x. З теорії обчислювальних методів відома оцінка для $R_n(x)$: якщо функція $y = f(x)$ $n+1$ раз є диференційованою на відрізку $[a, b]$, що містить всі вузли інтерполяції $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ та точку x, то

$$R_n(x) \le M_{n+1} \cdot \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!}, \quad \text{де} \quad M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

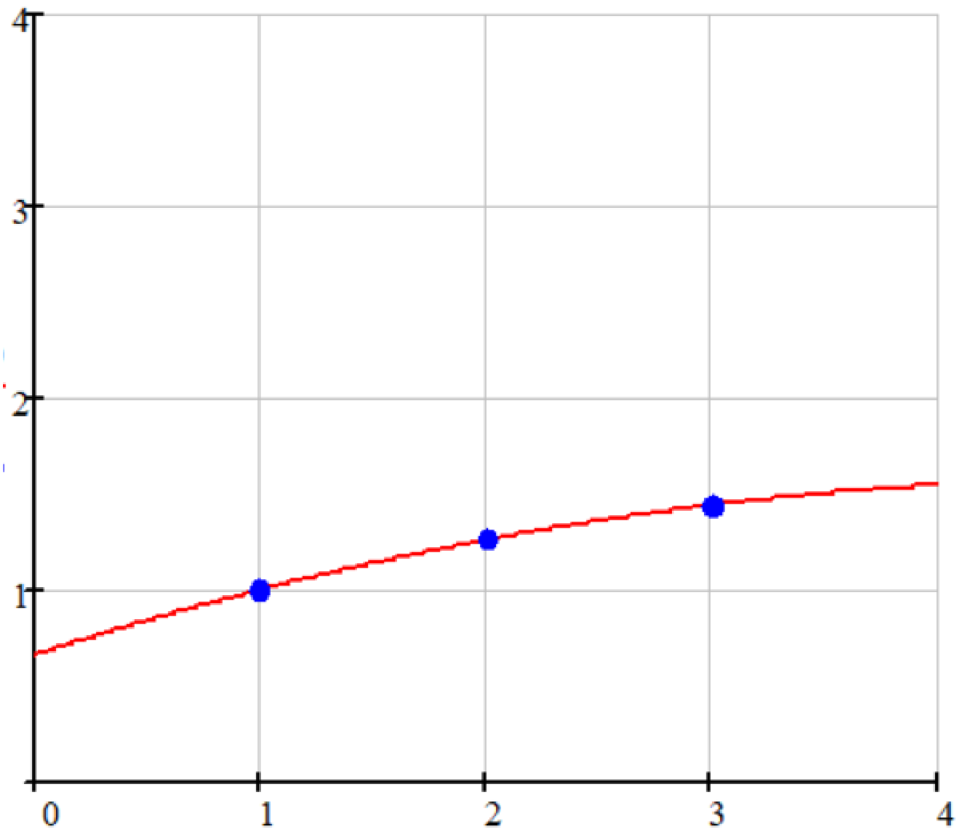
Приклад 1. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0=1, x_1=2, x_2=3$.

Розв'язування. Вхідні дані представимо у вигляді таблиці

x_i	1	2	3
$y_i=\sqrt[3]{x_i}$	1,000	1,260	1,442

Тут $n=2$, тоді інтерполяційний многочлен запишеться у вигляді:

$$P_2(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot 1{,}000+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\cdot 1{,}260+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\cdot 1{,}442=$$
$$=-0{,}039x^2+0{,}377x+0{,}662.$$



Приклад 2. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа за такими даними:

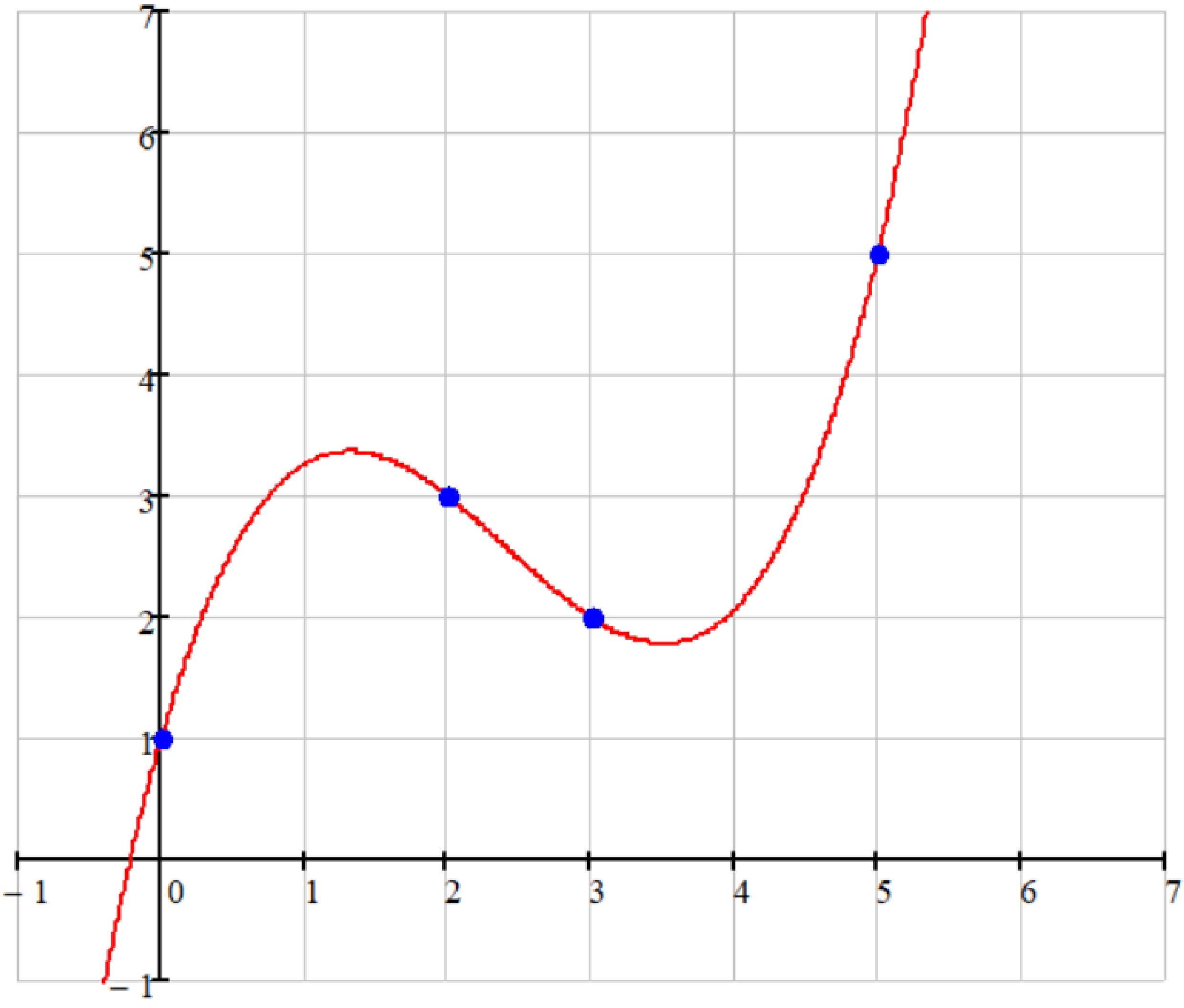
I	0	1	2	3
x_i	0	2	3	5
f_i	1	3	2	5

Розв'язок. Згідно з (6) при $n=3$ маємо

$$L_3(x)=$$

$$=\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}\cdot 1+\frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)}\cdot 3+\frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)}\cdot 2+\frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)}\cdot 5=$$

$$=1+\frac{62}{15}x-\frac{13}{6}x^2+\frac{3}{10}x^3.$$



5.1.4 Інтерполяційний поліном Ньютона

Формула Ньютона дає змогу виразити інтерполяційний поліном через значення y_i в одному з вузлів та через розділені різниці функції $f(x)$, побудованими за іншими вузлами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При змінюванні степеня n у інтерполяційного многочлена Ньютона потрібно лише додати (або відкинути) відповідну кількість стандартних доданків. Це дуже зручно у застосуваннях.

Отже, розглянемо форму запису інтерполяційного полінома $P_n(x)$, яка допускає уточнення результатів інтерполяції послідовним додаванням нових вузлів. При цьому будем використовувати таке поняття як розділені різниці функцій.

Розділеними різницями першого порядку називають відношення

$$\Delta(x_i,\, x_j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j},\ i \neq j,\ i = \overline{1,n}.$$

Розглянемо розділені різниці, побудовані за сусідніми вузлами, тобто вирази $\Delta(x_1,\, x_2),\ \Delta(x_2,\, x_3),\ \ldots, \Delta(x_{n-1},\, x_n)$:

$$\Delta(x_1; x_2) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$\Delta(x_2; x_3) = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3},$$

....

$$\Delta(x_{n-1}; x_n) = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}.$$

За цими розділеними різницями можна побудувати ***розділені різниці другого порядку***:

$$\Delta(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{\Delta(x_1,\, x_2) - \Delta(x_2,\, x_3)}{x_1 - x_3},$$

…....................................

$$\Delta(x_{n-2},\, x_{n-1},\, x_n) = \frac{\Delta(x_{n-2},\, x_{n-1}) - \Delta(x_{n-1},\, x_n)}{x_{n-2} - x_n}.$$

За різницями другого порядку будують ***розділені різниці третього порядку*** і т. д.

В загальному випадку ***розділені різниці k-го порядку*** розраховують за формулами:

$$\Delta\left(x_j,\ x_{j+1},\ldots,\ x_{j+k}\right)=\frac{\Delta\left(x_j,\ x_{j+1},\ldots,\ x_{j+k-1}\right)-\Delta\left(x_{j+1},x_{j+2}\ldots,\ x_{j+k}\right)}{x_j-x_{j+k}},\ \ j=\overline{1,n-k},$$

де $\Delta\left(x_j,\ x_{j+1},\ldots,\ x_{j+k-1}\right),\ \Delta\left(x_{j+1},x_{j+2}\ldots,\ x_{j+k}\right)$ – розділені різниці (k-1)-го порядку.

Процес розрахунку розділених різниць зручно подати схемою, що зображена на рисунку 1.

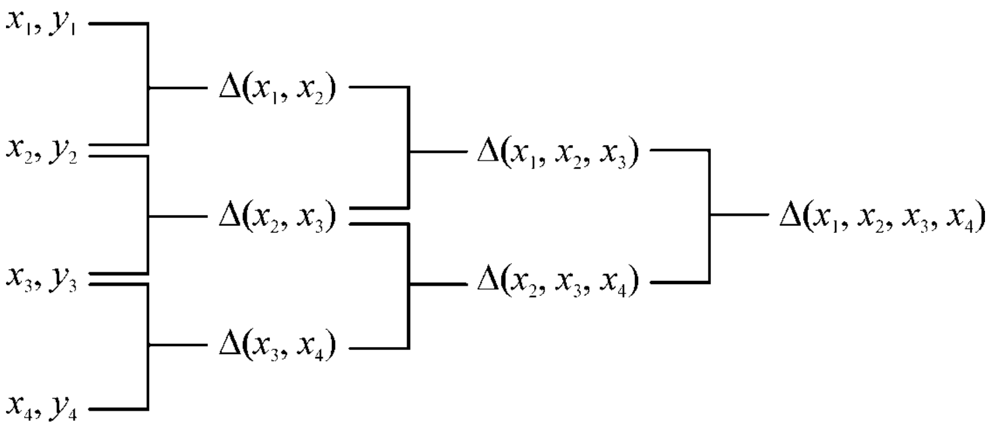


Рисунок 1 – Схема розрахунку розділених різниць

Тепер перейдемо безпосередньо до самого інтерполяційного полінома Ньютона.

Маємо, наприклад, один вузол інтерполяції x_1.

Розглянемо розділену різницю 1–го порядку $\Delta\left(x,\ x_1\right)=\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_1\right)}{x-x_1}$.

Звідси знаходимо

$$f(x) = y_1 + (x - x_1)\Delta(x, x_1).$$

Для розділених різниць другого порядку (два вузли – x_1, x_2) отримаємо

$$\Delta\left(x,\ x_1,\ x_2\right)=\frac{\Delta\left(x,\ x_1\right)-\Delta\left(x_1,x_2\right)}{x-x_2}$$

$$\Delta\left(x,\ x_1\right)=\Delta\left(x_1,x_2\right)+\left(x-x_2\right)\Delta\left(x,\ x_1,\ x_2\right)$$

Підставляючи це значення у формулу для f(x)

$$f\left(x\right)=y_1+\left(x-x_1\right)\cdot\left(\Delta\left(x_1,x_2\right)+\left(x-x_2\right)\Delta\left(x,\ x_1,\ x_2\right)\right)=$$

$$=y_1+\left(x-x_1\right)\Delta\left(x_1,x_2\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Delta\left(x,\ x_1,\ x_2\right).$$

Аналогічно:

$$\Delta\left(x,\,x_1,\,x_2\right)=\Delta\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)+\left(x-x_3\right)\Delta\left(x,\,x_1,\,x_2,\,x_3\right).$$

Повторюючи цей процес, отримаємо (для n вузлів інтерполяції):

$$\begin{aligned} f\left(x\right)\approx y_1+\left(x-x_1\right)\Delta\left(x_1,\,x_2\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Delta\left(x_1,\,x_2,\,x_3\right)+\ldots \\ +\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_{n-1}\right)\Delta\left(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n\right)= \\ =y_1+\sum_{k=2}^{n}\left(\Delta\left(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_k\right)\prod_{j=1}^{k-1}\left(x-x_j\right)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Формулу (9) називають ***формулою Ньютона інтерполювання вперед***, оскільки формула містить значення y, що знаходяться справа від x_1.

Аналогічним чином можна побудувати формулу Ньютона, використовуючи вузли, що знаходяться зліва від x_n :

$$\begin{aligned} f\left(x\right)\approx y_n+\left(x-x_n\right)\Delta\left(x_{n-1},\,x_n\right)+\left(x-x_n\right)\left(x-x_{n-1}\right)\Delta\left(x_{n-2},\,x_{n-1},\,x_n\right)+\ldots \\ +\left(x-x_n\right)\left(x-x_{n-1}\right)\ldots\left(x-x_1\right)\Delta\left(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n\right)= \\ =y_n+\sum_{k=2}^{n}\left(\Delta\left(x_{n-k+1},\,x_{n-k+2},\ldots,\,x_n\right)\prod_{j=n-k+2}^{n}\left(x-x_j\right)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Формулу (10) називають ***формулою Ньютона інтерполювання назад***. Її зручно використовувати для інтерполяції функції у точках, близьких до кінця таблиці.

Зручність використання інтерполяційних формул Ньютона полягає в тому, що при доповненні таблиці новим вузлом не виникає необхідності перерахунку всіх коефіцієнтів поліному, а достатньо розрахувати лише однин коефіцієнт при старшому степені поліному.

Приклад 3. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона для функції, заданої таблицею:

x	0	1	2
y	0	2	10

Використовуючи формулу Ньютона інтерполювання вперед (9), маємо:

$$\Delta\left(x_1,\,x_2\right)=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{0-2}{0-1}=2\,,$$

$$\Delta(x_2,\ x_3) = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{2-10}{1-2} = 8, \qquad \Rightarrow$$

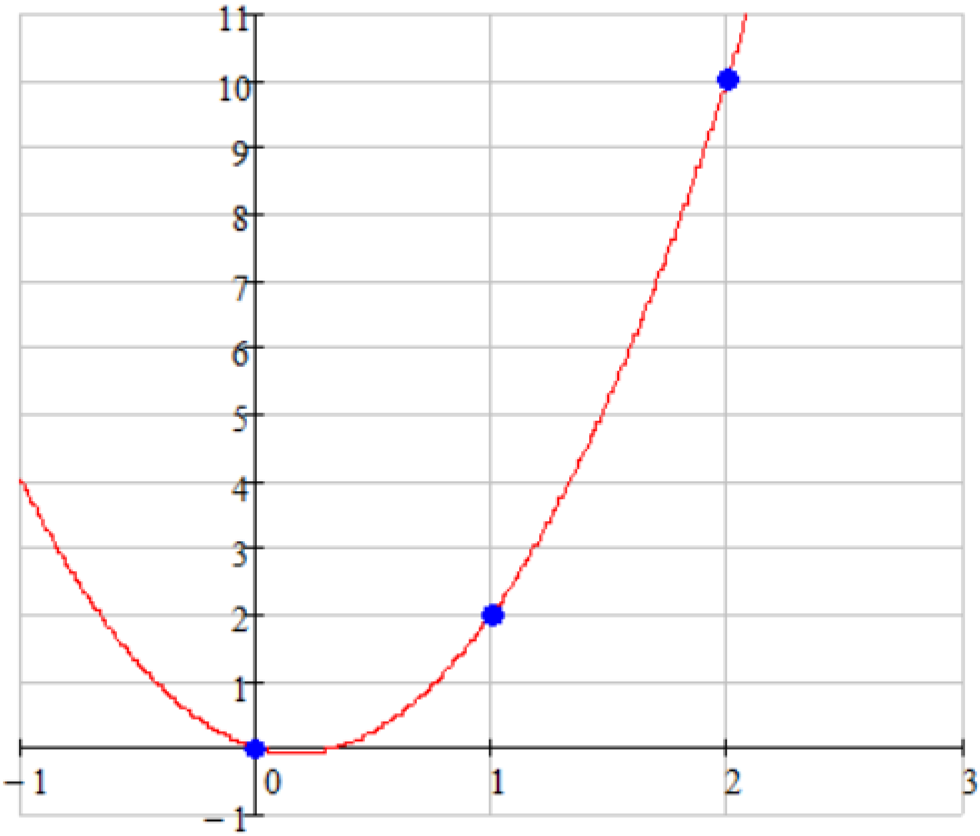
$$\Delta(x_1,\ x_2,\ x_3) = \frac{\Delta(x_1,\ x_2) - \Delta(x_2,\ x_3)}{x_1 - x_3} = \frac{2-8}{0-2} = 3;$$

$$f(x) \approx 0 + (x-0)2 + (x-0)(x-1)3 = 2x + 3(x^2 - x) = 3x^2 - x.$$

Побудуємо многочлен, користуючись формулою Ньютона інтерполювання назад (10):

$$\Delta(x_2,\ x_3) = \frac{2-10}{1-2} = 8, \qquad \Delta(x_1,\ x_2) = \frac{0-2}{0-1} = 2, \qquad \Delta(x_1,\ x_2,\ x_3) = \frac{2-8}{0-2} = 3;$$

$$f(x) \approx 10 + (x-2)8 + (x-2)(x-1)3 = 3x^2 - x.$$



Похибка поліноміальної інтерполяції

Оцінимо похибку поліноміальної інтерполяції. Якщо відомий аналітичний вираз для функції $y(x)$, то похибку інтерполяції можна оцінити за виразом

$$R(x) = y(x) - f(x). \tag{11}$$

Вважатимемо, що функція $y(x)$ має всі похідні до n-го порядку включно. Оскільки у вузлах інтерполяції похибка дорівнює нулю, тобто $R(x_i) = 0,\ i = \overline{1,n}$, то функцію $R(x)$ можна подати у вигляді полінома степеня n:

$$R(x) = m\prod_{j=1}^{n}(x - x_j), \tag{12}$$

де m – обмежена функція.

Враховуючи (11) і (12), отримаємо вираз для $y(x)$:

$$y(x) = f(x) + m\prod_{j=1}^{n}(x - x_j).$$

Обчислимо похідну порядку n функції $y(x)$:

$$y^{(n)}(x) = n!m. \tag{13}$$

З виразу (13) маємо

$$m = \frac{y^{(n)}(x)}{n!}. \tag{14}$$

На підставі виразів (14) та (12) записуємо

$$\left|R(x)\right| \le \left|\frac{\max\limits_{x\in[x_1;x_n]}\left(y^{(n)}(x)\right)}{n!}\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)\right|.$$

Для табличної функції, коли $y(x)$ невідома, замість похідної підставляємо розділену різницю n-го порядку. У результаті маємо

$$\left|R(x)\right| \le \left|\frac{\max\limits_{x\in[x_1;x_n]}\left(\Delta(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n)\right)}{n!}\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)\right|. \tag{15}$$

Якщо відстань між суміжними точками не перевищує деякої величини h, то $\left|\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)\right| \le c_n h^n$, де c_n – деяка додатня константа, що залежить від способу розбиття відрізка $[x_1;\ x_n]$. Враховуючи цю нерівність та (15), маємо:

$$\left|R(x)\right| \le \left|\frac{\max\limits_{x\in[x_1;x_n]}\left(\Delta\left(x,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n\right)\right)c_n h^n}{n!}\right|.$$

Порівняння інтерполяційних многочленів

Приведемо порівняльну характеристику розглянутих інтерполяційних многочленів Лагранжа, першої, другої формул Ньютона:

1. Інтерполяційні многочлени Лагранжа та Ньютона мають степінь, не вище n за умови, що визначення многочленів виконується за таблицею, у якій заданий $n+1$ вузол. При отриманні многочлена Лагранжа вузли можуть бути розташовані довільно, при отриманні многочленів Ньютона вузли повинні бути рівновіддаленими.
2. Многочлен Лагранжа складається із суми рівноправних доданків, кожний з яких є многочленом n-ої степені і повинен брати участь в усіх обчисленнях. У многочленів Ньютона степені їхніх доданків постійно підвищуються, починаючи від нульової в першому доданку до n-ої в останньому. Крім того, у формулах Ньютона знаменники коефіцієнтів містять величину $k!$ Ці числа зі збільшенням k швидко зростають, отже, коефіцієнти зменшуються і при обчисленнях, починаючи з деякого номера, останніми доданками більш високої степені можна зневажити.
3. При додаванні додаткового вузла в таблицю кожний доданок многочлена Лагранжа змінюється, що впливає на значення многочлена в цілому. Додавання ж нового вузла інтерполяції у формулах Ньютона додасть лише новий доданок, але не змінить всіх попередніх доданків.
4. Якщо при отриманні многочленів Лагранжа і Ньютона вузли інтерполяції збігаються, то многочлени є тотожно рівними, тобто рівними є коефіцієнти при однакових степенях. Це випливає з існування тільки одного многочлена степені n за умови проходження функції через задані точки. Зазначені многочлени відрізняються лише способом їхньої побудови.

5.1.5 Багатоінтервальна інтерполяція

Якщо при розв'язуванні задачі інтерполяції в таблиці задана велика кількість вузлів, то доводиться будувати інтерполяційний многочлен досить високої степені, що приводить до великої кількості обчислень, нагромадженню похибок обчислень, збільшенню кількості машинного часу, необхідного для розв'язування задачі. Все це сильно ускладнює розв'язування задачі інтерполяції.

Щоб позбутися зазначених недоліків при розв'язуванні задачі, використовують багатоінтервальну інтерполяцію, що дозволяє знайти значення функції в заданій точці за допомогою лінійної або квадратичної функції, побудованої на значеннях, заданих у сусідніх вузлах.

5.1.5.1 Лінійна багатоінтервальна інтерполяція

Нехай функція задана у вигляді таблиці

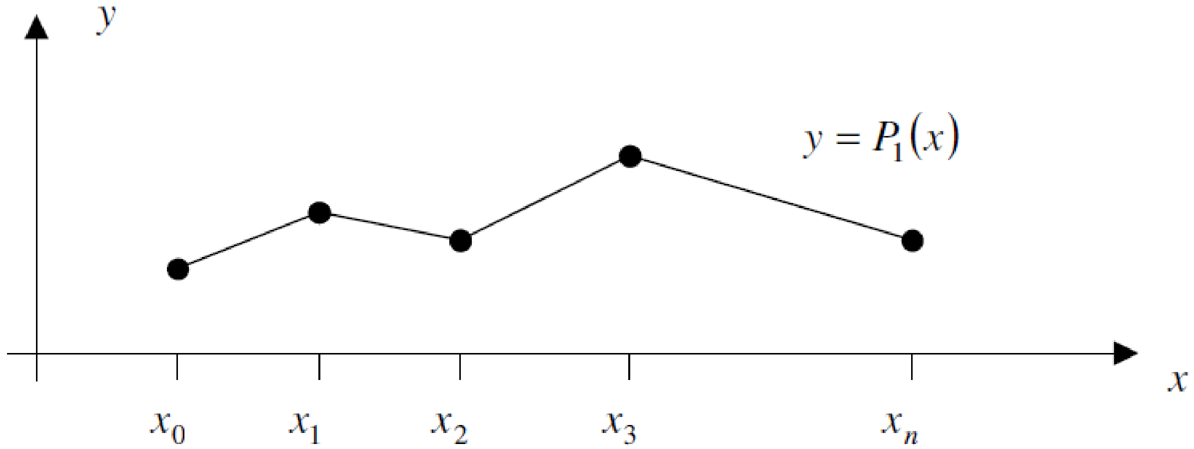
x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Будемо вважати, що $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Побудуємо інтерполяційну функцію $P_1(x)$, що складається з відрізків лінійних функцій $L_1^i(x)$, $i = \overline{1, n}$, побудованих на значеннях, заданих у послідовних вузлах.

Нехай $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, на кожному такому проміжку побудуємо многочлен Лагранжа першої степені вигляду

$$L_1^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i .$$

Сукупність многочленів Лагранжа першої степені, побудованих на всіх часткових проміжках, і є інтерполяційна функція $P_1(x)$. З геометричної точки зору інтерполяційна функція – це ломана лінія, що з'єднує точки площини, координати яких задані таблицею.



5.1.5.2 Квадратична багатоінтервальна інтерполяція

Для таблично заданої функції

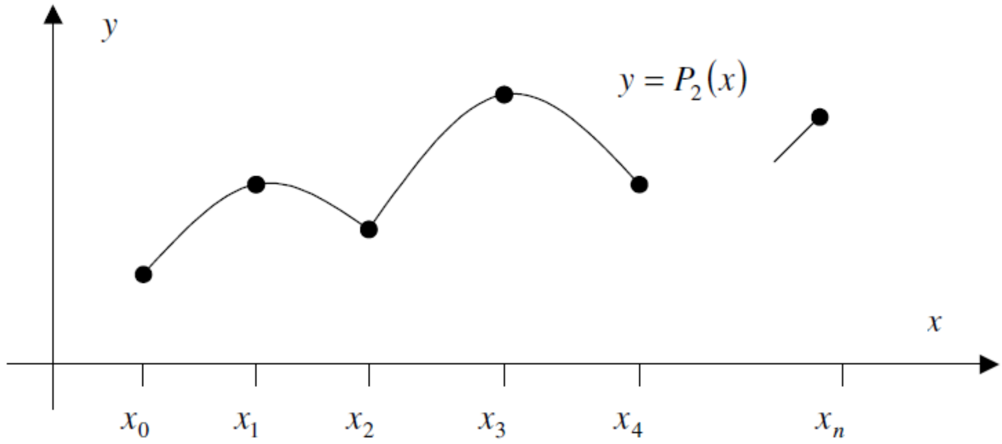
x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

побудуємо інтерполяційну функцію $P_2(x)$, що складається з послідовності квадратичних функцій $L_2^i(x)$, $i = 1, 3, \ldots, n-1$, побудованих на трьох послідовних значеннях з таблиці.

Нехай $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, 3, 5, \ldots, n-1$, де n – парне число. На кожному проміжку побудуємо многочлен Лагранжа другої степені вигляду

$$L_2^i(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}$$

З геометричної точки зору інтерполяційна функція є сукупністю парабол, проведених за трьома послідовними точками на площині, координати яких визначені таблицею.



5.1.5.3 Кубічна багатоінтервальна інтерполяція

Для таблично заданої функції

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

побудуємо інтерполяційну функцію $P_3(x)$, що складається з послідовності кубічних функцій $L_3^i(x)$, $i=2,5,...,n-1$, побудованих за чотирма послідовними значеннями з таблиці.

Нехай $x\in[x_{i-2},x_{i+1}]$, $i=2,5,...,n-1$, де n – кратне трьом. На кожному такому проміжку побудуємо многочлен Лагранжа третьої степені

$$L_3^i(x)=\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-2}-x_{i-1})(x_{i-2}-x_i)(x_{i-2}-x_{i+1})}\cdot y_{i-2}+\frac{(x-x_{i-2})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_{i-2})(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1}+$$
$$+\frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i+\frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}$$

З геометричної точки зору інтерполяційна функція є сукупністю кубічних парабол, проведених за чотирма послідовними точками на площині, координати яких визначені таблицею.

Особливістю багатоінтервальних інтерполяційних функцій є те, що вони складаються із частин лінійних, квадратичних або кубічних функцій, поєднаних в загальних точках. Ці функції є функціями неперервними, однак в загальних точках поєднання у цих функцій не існує похідної, тобто в цих точках не існує дотичної до графіка функції.