1.2 Відношення

Відношення реалізують у математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними об'єктами.

Відношення застосовуються при побудові комп'ютерних баз даних, які організовані у вигляді таблиць даних. Зв'язки між групами даних у таблицях описуються мовою відношень. Самі дані обробляються і перетворюються за допомогою операцій, математично точно визначених для відношень. Такі бази даних називаються реляційними і широко застосовуються для збереження та обробки найрізноманітнішої інформації: виробничої, комерційної, статистичної тощо. Відношення також часто використовуються в програмуванні. Такі структури даних, як списки, дерева тощо використовуються для опису деякої множини даних разом з відношенням між елементами цієї множини.

Для формального опису всіляких комбінацій з елементів множин, що входять до відношення, використовується поняття декартового добутку множин. Розглянемо це поняття і потім, використовуючи його, визначимо формально поняття відношення.

1.2.1 Декартів добуток

Нехай A і B – дві множини. Розглянемо множину $C = \{(a, b) \mid a\in A, b\in B\}$. Ця множина називається **декартовим добутком множин** A і B та позначається $A\times B$. Якщо множини A і B скінченні і складаються відповідно із m і n елементів, то очевидно, що C складається із $m\cdot n$ елементів.

Приклад. Нехай $A = \{1,2\}$ і $B = \{2,3,4\}$. Тоді $A\times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$.

Елементами декартового добутку є **упорядковані пари**, де перший елемент пари належить першій множині, а другий – другій. Порядок входження пар може бути будь-яким, але розташування елементів у кожній парі визначається порядком множин, що перемножуються. Тому $A\times B\neq B\times A$, тобто декартів добуток властивості комутативності не має.

Окремий інтерес викликає випадок, коли множини A і B рівні між собою. Тоді елементами упорядкованої пари множини $A\times B$ будуть об’єкти, які складаються із двох не обов’язково різних елементів множини A. Також важливим залишається порядок елементів у парі. Для наведеної вище множини A, упорядковані пари (1,2) та (2,1) слід вважати різними.

Множина $C = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2\in \mathrm{A}\}$ всіх впорядкованих пар елементів із множини A називається **декартовим квадратом множини** A і позначається A^2.

Поняття упорядкованої пари можна розширити на упорядковані трійки елементів (a_1, a_2, a_3), упорядковані четвірки (a_1, a_2, a_3, a_4) і т.д. Взагалі, упорядкована n-ка елементів із множини A – це n не обов'язково різних між собою елементів із A, заданих в певній послідовності.

Наведене вище означення декартового добутку двох множин і декартового квадрату множини можна звичайним способом узагальнити і на випадок довільної скінченної сукупності множин.

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається сукупність послідовностей (тобто сукупність упорядкованих n-ок елементів) виду $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $a_i \in A_i$, $i = 1,..,n$.

Елементи декартового добутку називають також **кортежами** або **векторами** довжиною n.

Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то декартів добуток $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається **декартовим добутком *n*-го степеню множини *A*** (A^n).

Властивості асоціативності для декартового добутку не виконуються, але виконується властивість дистрибутивності відносно об'єднання, перетину і різниці:

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$$
$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$$
$$(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$$

Операція декартового добутку відрізняється від операцій, введених раніше, тим, що елементи добутку множин суттєво відрізняються від елементів співмножників і є об'єктами іншої природи. Наприклад, якщо R – множина дійсних чисел, то декартів добуток $R \times R$ – множина всіх точок площини.

1.2.2 Відношення

Довільна підмножина множини $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається **відношенням**, заданим або визначеним на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Коли $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, то говорять, що елементи a_i ($i = 1,..,n$) знаходяться між собою у відношенні R або відношення R істинне для $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin R$, то вважають, що R хибне для $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, тобто мова йде про декартів добуток n-ого степеню множини A, то відношення R, яке задано на множинах $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, називається ***n*-арним відношенням на множині *A***.

При n=1 відношення називається **унарним**, при n=2 – **бінарним**, при n=3 – **тернарним**. Зауважимо, що унарне відношення R на множині X – це підмножина в самому X: $R \subset X$.

Загалом відношення означає який-небудь зв'язок між предметами або поняттями. Приклади бінарних відношень: відношення включення множин, рівності дійсних чисел, нерівності, бути братом, ділитися на яке-небудь натуральне число, входити до складу якого-небудь колективу.

Частіше за все бінарні відношення записуються у вигляді співвідношень aRb, де R – відношення, яке встановлює зв'язок між елементами $a \in A$ та $b \in B$.

Наведемо ще декілька прикладів бінарних відношень.

1. Якщо A – множина дійсних чисел, то $\{(x,y) \mid x \in A, y \in A, x^2+y^2=4\}$ є бінарне відношення на A.
2. Нехай A – множина товарів в магазині, а B – множина дійсних чисел. Тоді $\{(x,y) \mid x \in A, y \in B, y$ – ціна $x\}$ – відношення на множинах A та B.
3. Якщо A – множина людей, то $\{(x,y) \mid x \in A, y \in A, y$ є рідним $x\}$ є бінарне відношення на A.

Область визначення відношення R на A та B є множина всіх $a \in A$ таких, що для деяких $b \in B$ маємо $(a, b) \in R$. Іншими словами, область визначення R є множина всіх перших координат впорядкованих пар із R.

Множина значень відношення R на A та B є множина всіх $b \in B$ таких, що $(a, b) \in R$ для деяких $a \in A$. Іншими словами, множина значень R є множина всіх других координат впорядкованих пар із R.

В наведених прикладах вище, у (1) область визначення і множина значень співпадають із множиною $\{t: t \in [-2;2]\}$. В (2) область визначення є множина A, а множина значень є множина всіх дійсних чисел, кожне з яких співпадає із ціною деякого товару в магазині. В (3) область визначення і множина є множиною всіх людей, які мають рідних.

Цікавими є такі окремі випадки відношень на A.

1. **Повне (універсальне)** відношення $U = A \times A$, яке справджується для будь-якої пари (a_1, a_2) елементів з A. Наприклад, U – відношення "вчитися в одній групі" у множині A, де A – множина студентів групи ІС-21.
2. **Тотожне (діагональне)** відношення I, що виконується тільки між елементом і ним самим. Наприклад, рівність на множині дійсних чисел.
3. **Порожнє** відношення, яке не задовольняє жодна пара елементів з A. Наприклад, R – відношення "бути братом" у множині A, де A – множина жінок.

Оскільки відношення, задані на A та B – підмножини $A \times B$, то для них визначені операції об'єднання, перетину, різниці і доповнення (наступне справедливо для загального випадку відношення):

- $(a, b)\in R_1\cup R_2 \Leftrightarrow (a, b)\in R_1$ або $(a, b)\in R_2$
- $(a, b)\in R_1\cap R_2 \Leftrightarrow (a, b)\in R_1$ і $(a, b)\in R_2$
- $(a, b)\in R_1\backslash R_2 \Leftrightarrow (a, b)\in R_1$ і $(a, b)\notin R_2$
- $(a, b)\in R' \Leftrightarrow (a, b)\notin R$ (заперечення)

Крім того, виділяються специфічні для відношень операції: обернення (симетризація) і композиція.

Нехай $R\subseteq A\times B$ є відношення на $A\times B$. Тоді відношення R^{-1} на $B\times A$ визначається наступним чином

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b)\in R\}.$$

Іншими словами, $(b, a)\in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b)\in R$, або, що рівнозначно, $bR^{-1}a$ тоді і тільки тоді, коли aRb. Відношення R^{-1} називається **оберненим (симетричним) відношенням** до даного відношення R.

Перехід від R до R^{-1} здійснюється взаємною перестановкою координат кожної впорядкованої пари. Наприклад, відношення R – “x дільник y”, має обернене до нього R^{-1} – “x кратне y”. А відношення $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ буде мати обернене відношення $R^{-1}=\{(2,1), (4,3), (6,5)\}$. При переході від R до R^{-1} область визначення стає областю значення і навпаки.

Нехай $R\subseteq A\times B$ – відношення на $A\times B$, а $S\subseteq B\times C$ – відношення на $B\times C$. **Композицією** відношень R та S є відношення $T\subseteq A\times C$, визначене наступним чином:

$$T = \{(a, c) \mid a\in A,\ c\in C \text{ та } \exists b\in B,\ (a, b)\in R \text{ та } (b, c)\in S\}.$$

Це відношення позначається $T = R\circ S$.

Приклад. Нехай $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ та $S=\{(2,3), (2,7), (4,1), (6,9)\}$, тоді $T_1 = R\circ S = \{(1,3), (1,7), (3,1), (5,9)\}$ та $T_2 = S\circ R = \{(2,4), (4,2)\}$.

Приклад. $R = \{(x, x^2) \mid x\in N\}$ та $S = \{(x, x+2) \mid x\in N\}$, тоді $T_1 = R\circ S = \{(x, x^2+2) \mid x\in N\}$ та $T_2 = S\circ R = \{(x, (x+2)^2) \mid x\in N\}$.

Слід зазначити, що операція композиції відношень може бути і невизначеною, якщо в множині B для заданих елементів a із A та c із C не існує відповідного елемента b. Але якщо $A = B = C$, то ця операція завжди визначена.

Нехай R – відношення на множині A. Степенем відношення R на множині A є його композиція із самим собою. Позначається:

$$R^n = R\circ\ldots(n \text{ разів})\ldots\circ R.$$

Відповідно, $R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R\circ R$ і взагалі $R^n = R^{n-1}\circ R$.

<u>Теорема 2.1.</u> Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то:

а) $(R_1\cup R_2)\circ R = R_1\circ R \cup R_2\circ R$; $R_1\subseteq R_2 \Rightarrow R_1\circ R \subseteq R_2\circ R$.

б) $(R^{-1})^{-1} = R$; $R\subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1}\subseteq R_1^{-1}$.

в) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2^{-1}) \circ (R_1^{-1})$.

г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1}) \cap (R_2^{-1})$.

д) $(R \circ R_1) \circ R_2 = R \circ (R_1 \circ R_2)$.

Доведення. а) Якщо $(a, b) \in (R_1 \cup R_2) \circ R$, то існує елемент $c \in A$ такий, що $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ і $(c, b) \in R$. Значить, $(a, c) \in R_1$ або $(a, c) \in R_2$ і $(c, b) \in R$. Звідси маємо, що $(a, b) \in R_1 \circ R$ або $(a, b) \in R_2 \circ R$, тобто $(a, b) \in R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$. Обернене включення доводиться аналогічно.

Друга частина твердження випливає з того, що коли $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1 \cup R_2 = R_2$, звідки маємо (в силу вище доведеного), що $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R = R_2 \circ R$, тобто $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$.

б) $(a, b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R$. Звідки випливає, що $(R^{-1})^{-1} = R$.

Для доведення другої частини зауважимо, що $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$, $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R^{-1} \Rightarrow (b, a) \in R_1^{-1}$, тобто $R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$.

в) $(a, b) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in (R_1 \circ R_2) \Rightarrow (\exists c \in A \mid (b, c) \in R_1$ і $(c, a) \in R_2)$. Але тоді $(c, b) \in R_1^{-1}$ і $(a, c) \in R_2^{-1} \Rightarrow (a, b) \in (R_2^{-1} \circ R_1^{-1})$, тобто $(R_1 \circ R_2)^{-1} \subseteq (R_2^{-1}) \circ (R_1^{-1})$. Обернене включення доводиться аналогічно.

г) $(a, b) \in (R_1 \cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1$ і $(b, a) \in R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_1^{-1}$ і $(a, b) \in R_2^{-1}$, тобто $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1}) \cap (R_2^{-1})$.

д) Нехай $(a, d) \in (R \circ R_1) \circ R_2$, тоді існує $c \in A$ такий, що $(a, c) \in R \circ R_1$ і $(c, d) \in R_2$. Отже існує такий b, що $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R_1$ і $(c, d) \in R_2$, а це означає, що $(b, d) \in R_1 \circ R_2$ і $(a,d) \in R \circ (R_1 \circ R_2)$, тобто $(R \circ R_1) \circ R_2 \subseteq R \circ (R_1 \circ R_2)$. Обернене включення доводиться аналогічно. ►

1.2.3 Способи задання відношень

Розглянемо відношення $R \subseteq A \times B$. Нехай елемент $a_i \in A$. **Перерізом відношення R за елементом a_i** називається множина елементів b з B, для яких пара $(a_i, b) \in R$:

$$R(a_i) = \{b \in B \mid (a_i, b) \in R\}.$$

Множину всіх перерізів відношення R називають **фактор-множиною** множини B за відношенням R і позначають B/R. Вона повністю визначає відношення R.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Відношення $R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)\}$. Очевидно, $R(1) = \{2, 4\}$, $R(2) = \{3\}$, $R(3) = \{3, 6\}$. Множина $B/R = \{R(1), R(2), R(3)\}$ є фактор-множиною множини B за відношенням R.

Об'єднання перерізів за елементами деякої підмножини $C \subseteq A$ є перерізом $R(C)$ відношення R за підмножиною C, тобто

$$R(C) = \bigcup_{a \in C} R(a).$$

Так для $C = \{1, 2\}$, маємо $R(C) = \{2, 3, 4\} = R(1) \cup R(2)$.

З попереднього зрозуміло, що відношення може бути подане за допомогою фактор-множини. Розглянемо ще два способи подання скінченного бінарного відношення: за допомогою матриці та графа.

Матричний спосіб ґрунтується на поданні відношення $R \subseteq A \times B$ відповідною йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць, де рядки – перші координати, а стовпці – другі, причому на перетині i-го рядка і j-го стовпця буде 1, якщо виконується співвідношення $a_i R b_j$, або 0 – якщо воно не виконується.

Для наведеного вище відношення матриця буде мати такий вигляд:

	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	1

Матриця повного (універсального) відношення – це квадратна матриця, що складається лише з одиниць. Матриця тотожного (діагонального) відношення – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі. Матриця порожнього відношення – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

Відношення $R \subseteq A \times B$ можна також зображати за допомогою **орієнтованого графа**. Елементи множин A та B зображуються точками на площині (вершини), а впорядковані пари – лінією зі стрілкою (дуги), яка направлена від a до b, якщо aRb.

Для наведеного вище відношення граф буде мати наступний вигляд:

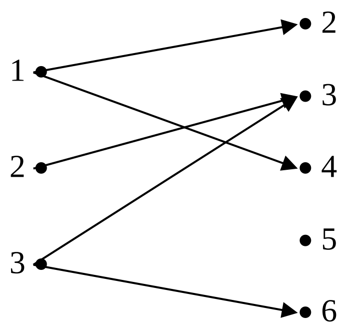


Рис 2.1. Приклад представлення відношення за допомогою графа

Граф бінарного відношення – це дводольний граф. Відношення в A зображується графом із вершинами, що відповідають елементам цієї множини.

Якщо a_iRa_j і a_jRa_i, то вершини зв'язуються двома протилежно спрямованими дугами, які умовно можна замінювати однією не спрямованою дугою (ребром). Співвідношенню a_iAa_i відповідає петля.

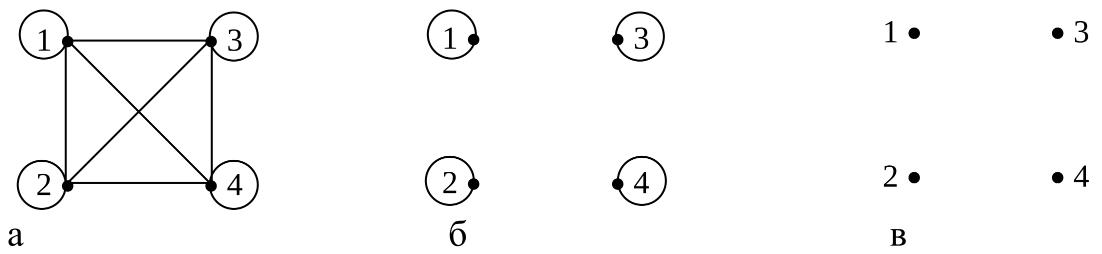


Рис 2.2. Графи універсального (а), тотожного (б) та порожнього (в) відношень

Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді граф універсального відношення на A зображено на рис. 2.2,а, граф тотожного відношення на A – на рис. 2.2,б, а граф порожнього відношення на A – на рис 2.2,в.

Матриця оберненого відношення R^{-1} для відношення R – це транспонована матриця відношення R. Граф оберненого відношення R^{-1} утворюється із графа відношення R заміною всіх дуг на протилежні.

Матриця композиції відношень $T = R\circ S$ утворюється як добуток матриць відношень R та S з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

Справді, елемент t_{ik} матриці композиції знайдемо як суму добутків відповідних елементів матриць R та S (відповідно до правила множення матриць):

$$t_{ik} = r_{i1}s_{1k} + r_{i2}s_{2k} + \ldots + r_{in}s_{nk} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}s_{jk}\,.$$

Очевидно, така сума відмінна від нуля тоді й тільки тоді, коли хоча б один доданок відмінний від нуля, тобто дорівнює одиниці:

$$r_{ij}s_{jk} = 1 \Leftrightarrow r_{ij} = 1 \text{ та } s_{jk} = 1 \Leftrightarrow a_iRb_j \text{ та } b_jSc_k \Leftrightarrow a_iR\circ Sc_k.$$

Якщо у виразі t_{ik} не один, а кілька одиничних доданків, то кожен з них відповідає одному й тому самому співвідношенню $a_iR\circ Sc_k$, через що їх сума має бути замінена одиницею.

Для композиції відношень $R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)\}$ та $S = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,2) (4,3)\}$ матриця утворюється так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай $R \subseteq A\times B$ та $S \subseteq B\times C$. Щоб побудувати граф $T = R\circ S$, потрібно до графа відношення R добудувати граф відношення S. Граф композиції відношень дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини *B*. При вилученні вершини b_j кожний шлях, що проходить через неї від вершин множини *A* до вершин множини *C*, замінюється однією дугою з тим самим напрямком.

Для останнього прикладу маємо наступний граф:

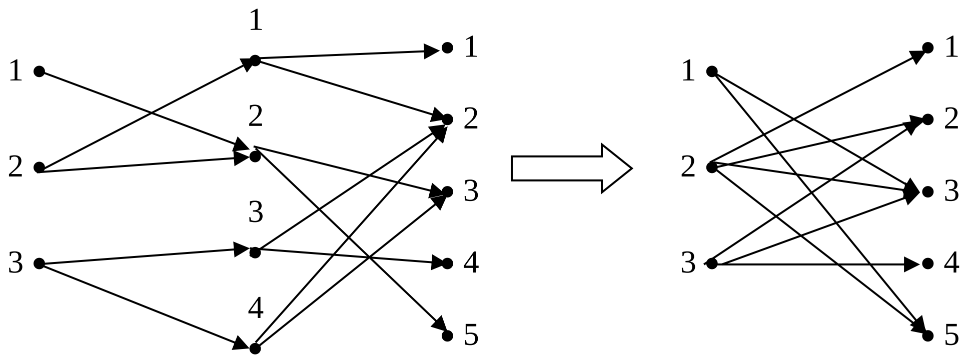


Рис 2.3. Граф композиції відношень

Якщо відношення *R* і *S* задані у вигляді матриць, то для отримання матриці відношення-результату потрібно:

- $R \cup S$ – виконати поелементну диз'юнкцію матриць – одиниці поставити в тих позиціях, де є одиниця або в матриці відношення *R*, або в матриці відношення *S*.
- $R \cap S$ – виконати поелементну кон'юнкцію матриць – одиниці поставити в тих позиціях, де є одиниця і в матриці відношення *R*, і в матриці відношення *S*.
- $R \backslash S$ – одиниці поставити в тих позиціях, де є одиниця в матриці відношення *R*, але немає в матриці відношення *S*.
- $\overline{R}$ – замінити одиниці нулями, а нулі одиницями у матриці відношення *R*.
- R^{-1} – транспонувати матрицю відношення *R*.
- $R \circ S$ – матриця композиції відношень утворюється як добуток матриць відношень *R* і *S* з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

1.2.4 Властивості бінарних відношень

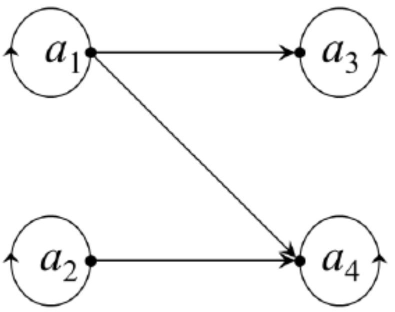
Нехай *R* – бінарне відношення на множині *A* ($R \subseteq A \times A$). Кожне бінарне відношення може мати одну або кілька властивостей. Ці властивості визначають вид матриці і графа відношення.

Відношення *R* на множині *A* називають **рефлексивним**, якщо $I \subseteq R$, тобто, іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall a \in A$: aRa).

Як приклад такого відношення можна навести відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці. Граф рефлексивного відношення – тим, що петлі є у всіх вершинах.

Приклад. Рефлексивним є відношення, представлене на рис. 2.4.



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	1	0
a_4	0	0	0	1

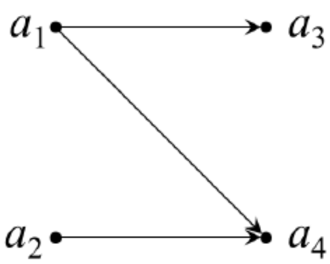
Рис. 2.4. Приклад графа і матриці рефлексивного відношення

Відношення R на множині A називають **антирефлексивним (іррефлексивним)**, якщо $R \cap I = \varnothing$, тобто якщо співвідношення $a_i R a_j$ виконується, то $a_i \neq a_j$.

Це, наприклад, відношення строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел, відношення “бути старшим” у множині людей.

Матриця антирефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі. Граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

Приклад. Антирефлексивним є відношення, представлене на рис. 2.5.



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

Рис. 2.5. Приклад графа і матриці антирефлексивного відношення

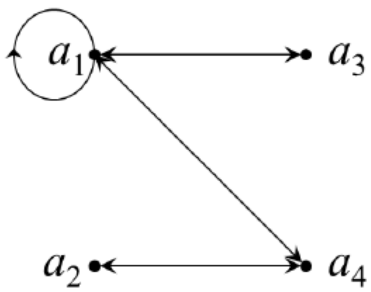
Відношення $\leq$ на множині дійсних чисел рефлексивне, відношення $<$ на множині дійсних чисел — антирефлексивне. Відношення «мати спільний дільник» на множині цілих чисел рефлексивне, відношення «бути сином» на множині людей — антирефлексивне. Відношення «бути симетричним відносно вісі X на множині точок координатної площини» не є ані рефлексивним, ані антирефлексивним: точка площини симетрична сама собі, якщо вона лежить на вісі X, і несиметрична сама собі в протилежному випадку.

Відношення R на множині A називають **симетричним**, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення a_iRa_j виконується співвідношення a_jRa_i.

Як приклад такого відношення можна навести відстань між двома точками на площині, відношення “бути рідним” на множині людей.

Симетричність відношення спричиняє також симетричність матриці. Також для такого відношення вершини графа можуть бути пов’язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (тобто ребрами).

Приклад. Симетричним є відношення, представлене на рис. 2.6.



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	1	1	0	0

Рис. 2.6. Приклад графа і матриці симетричного відношення

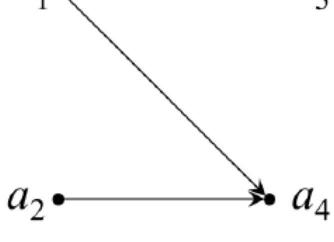
Відношення R на множині A називають **асиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень a_iRa_j та a_jRa_i щонайменше одне не виконується.

Як приклад такого відношення можна навести відношення “бути батьком” у множині людей, відношення строгого включення в множині всіх підмножин деякого універсуму.

Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне.

Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі. У графа такого відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов’язані тільки однією спрямованою дугою.

Приклад. Асиметричним є відношення, представлене на рис. 2.7.



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

Рис. 2.7. Приклад графа і матриці асиметричного відношення

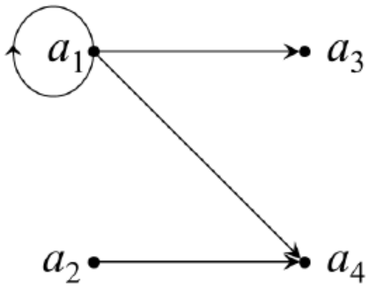
Відношення R на множині A називають **антисиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a_j = a_i$.

Як приклад можна навести нестрогу нерівність.

Властивість антисиметричності є частинним випадком симетричності (а не виключають одне одну).

Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі. У графі такого відношення можуть бути петлі, але зв'язок між вершинами, якщо він є, також відбувається тільки однією спрямованою дугою.

Приклад. Антисиметричним є відношення, представлене на рис. 2.8.



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

Рис. 2.8. Приклад графа і матриці антисиметричного відношення

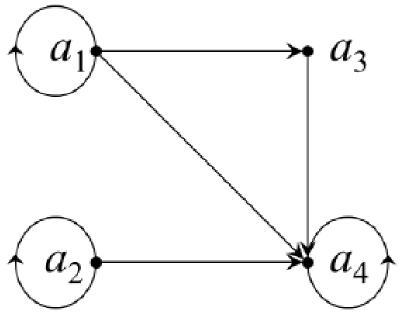
Відношення R на множині A називають **транзитивним**, якщо $R \circ R \subseteq R$, тобто з виконання співвідношень $a_i R a_j$ та $a_j R a_k$ випливає виконання співвідношення $a_i R a_k$.

Як приклад можна навести відношення "бути дільником" на множині цілих чисел, "бути старшим" на множині людей.

Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли $R_{ij}=1$ й $R_{jk}=1$, то $R_{ik}=1$, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивність матриці.

Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з'єднують будь-яку пару вершин з цієї сукупності в напрямку шляху. Як правило, на графі транзитивного відношення зображують тільки цей шлях, а зумовлені транзитивністю дуги опускають. Такий граф називають **графом редукції** або **кістяковим графом**.

Приклад. Транзитивним є відношення, представлене на рис. 2.9.



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	0	1
a_4	0	0	0	1

Рис. 2.9. Приклад графа і матриці транзитивного відношення

1.2.5 Замикання відношень

Нехай R – бінарне відношення на множині A.

Замиканням відношення R за властивістю називається таке мінімальне відношення, що включає в себе вихідне відношення та має задану властивість.

Рефлексивним замиканням R_I відношення R називається відношення $R_I = R \cup I$, де I – тотожне (або діагональне) відношення.

Симетричним замиканням R_S відношення R називається відношення $R_S = R \cup R^{-1}$, тобто якщо $(x_1, x_2) \in R$, то $(x_1, x_2) \in R_S$ та $(x_2, x_1) \in R_S$.

Транзитивним замиканням R_T відношення R називається відношення $R_T = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$, де n – кількість елементів множини A.

Приклад. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3)\}$. Тоді

$$R_I = \{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_4, a_4)\},$$

$$R_S = \{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), (a_3, a_1), (a_4, a_3), (a_2, a_4)\},$$

$$R_T = \{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_2), (a_3, a_2)\}.$$

1.2.6 Алгоритм Уоршелла

Розглянемо алгоритм Уоршелла побудови транзитивного замикання відношення R на множині A, $|A| = n$. На вхід алгоритму подається матриця відношення R, на виході — матриця транзитивного замикання R_T.

Алгоритм Уоршелла побудови транзитивного замикання відношення R

Нехай відношення задано матрицею; i та j змінюються від 1 до n.

Крок 1. Присвоювання початкових значень. Виконати: $W = R, k = 0$.

Крок 2. Виконати $k = k + 1$.

Крок 3. Для всіх $i \neq k$ таких, що $w_{ik} = 1$, і для всіх j виконати операцію

$$w_{ij} = w_{ij} \vee w_{kj}.$$

Крок 4. Перевірка на закінчення. Якщо $k = n$, то отримано розв'язок; якщо $k < n$, то перейти до кроку 2.

Примітка. Операція диз'юнкція (логічне «або») (позначення $x \vee y$):

$$0 \vee 0 = 0,\; 0 \vee 1 = 1,\; 1 \vee 0 = 1,\; 1 \vee 1 = 1.$$

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq A \times A$,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

За алгоритмом Уоршелла побудуємо транзитивне замикання цього відношення.

$$W^{(0)} = R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $k = 1$ перший рядок залишаємо без змін $(i = k)$, другий і третій рядки замінюємо на диз'юнкцію кожного з них з першим:

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $k = 2$ отримаємо, що $W^{(2)} = W^{(1)}$, оскільки всі елементи другого стовпця матриці $W^{(1)}$ нульові.

Для $k = 3$ одержимо

$$W^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

І, нарешті, коли $k = 4$ матимемо остаточний результат — матрицю транзитивного замикання

$$R_T = W^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$