5.2 Властивості графів

5.2.1 Степені вершин

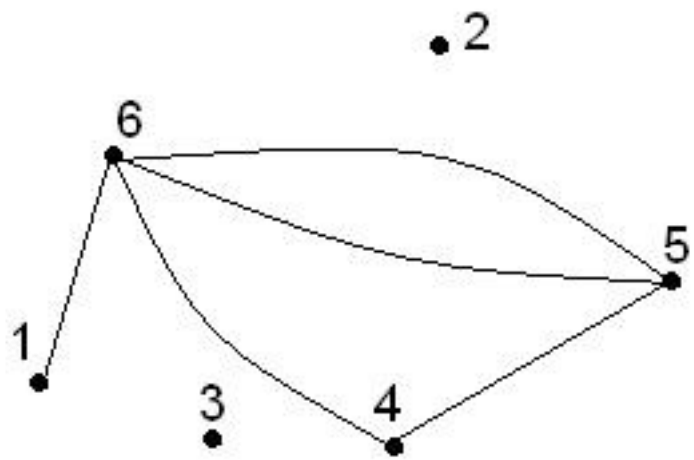
Кількість ребер, які інцидентні вершині v, називається **степенем** (або **валентністю**) вершини v.

Степінь вершини v позначається $d(v)$.

Якщо степінь вершини дорівнює нулю (тобто $d(v) = 0$), то вершина має назву **ізольованої**.

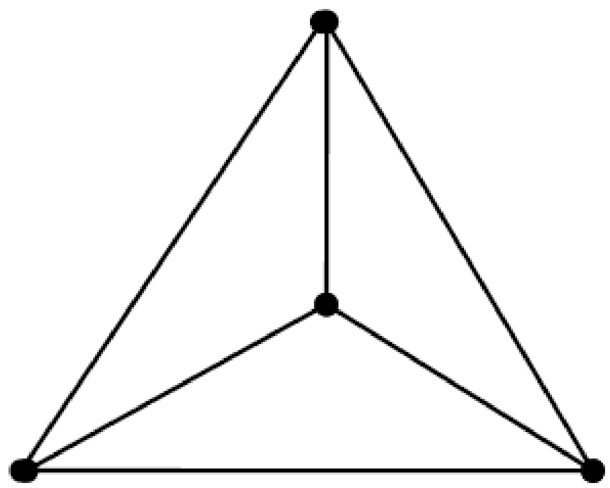
Якщо степінь вершини дорівнює одиниці (тобто $d(v) = 1$), то вершина називається **кінцевою** або **висячою.**

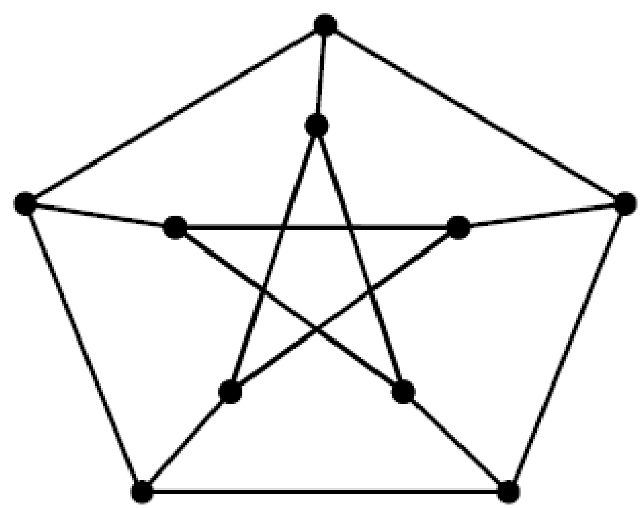
Приклад.



Граф називається **однорідним (регулярним) степеню *k***, якщо степені всіх його вершин дорівнюють k і, отже, є рівними між собою.

Приклад. Однорідні графи степеню 3, які також називаються **кубічними** або **трьохвалентними** (другий граф також має назву графу Петерсена)





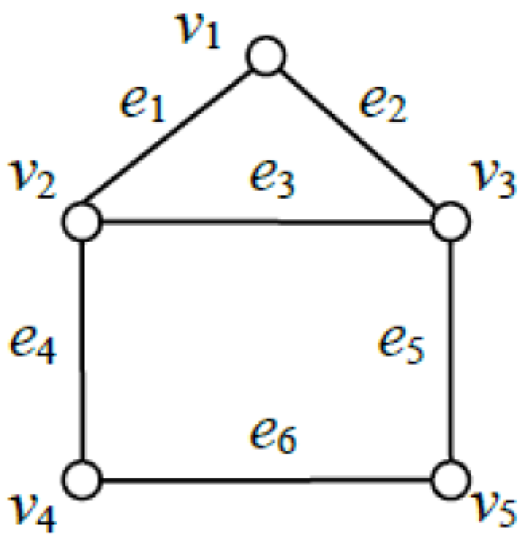
Степені вершин *неорієнтованого графу*

Сума елементів по рядках *матриці інцидентності* рівна степеням вершин

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij} .$$

Суми по рядках та стовпцях *матриці суміжності* збігаються та рівні степеням вершин.

Приклад.



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$d(v)$
v_1	1	1	0	0	0	0	2
v_2	1	0	1	1	0	0	3
v_3	0	1	1	0	1	0	3
v_4	0	0	0	1	0	1	2
v_5	0	0	0	0	1	1	2

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$d(v)$
v_1	0	1	1	0	0	2
v_2	1	0	1	1	0	3
v_3	1	1	0	0	1	3
v_4	0	1	0	0	1	2
v_5	0	0	1	1	0	2
$d(v)$	2	3	3	2	2	

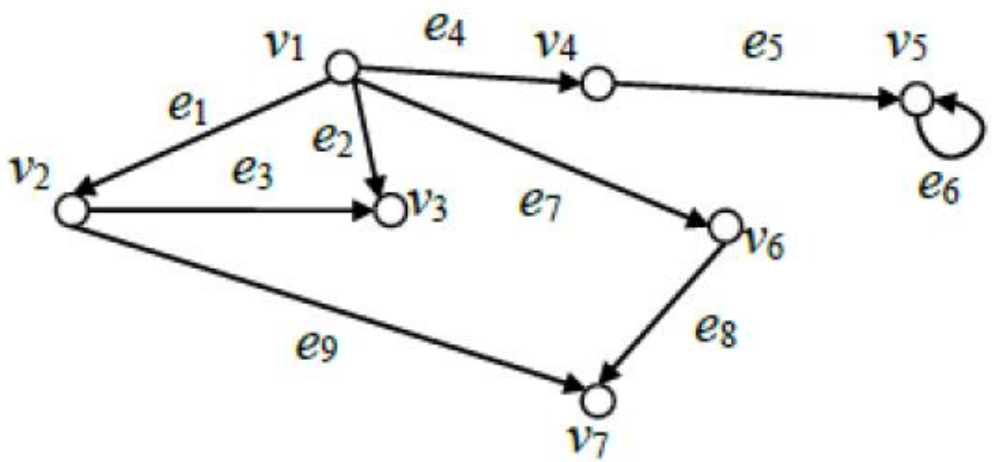
Для *орграфу* кількість дуг, які виходять з вершини v, називається **півстепенем виходу** $d^{-}(v)$, а вхідних — **півстепенем входу** $d^{+}(v)$.

Для орієнтованого графу:

— сума по рядку матриці суміжності дорівнює півстепеню виходу;

— сума по стовпцю матриці суміжності дорівнює півстепеню заходу.

Приклад.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$d^-(v_i)$
v_1	0	1	1	1	0	1	0	4
v_2	0	0	1	0	0	0	1	2
v_3	0	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	1
v_5	0	0	0	0	1	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	0	1	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0
$d^+(v_i)$	0	1	2	1	2	1	2	

Теорема 1 (Ейлера). Сума степенів вершин графу дорівнює подвоєній кількості ребер:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Наслідок 1. Кількість вершин непарного степеню парна.

Наслідок 2. Сума півстепенів вузлів орграфу дорівнює подвійній кількості дуг:

$$\sum_{v \in V} d^{-}(v) + \sum_{v \in V} d^{+}(v) = 2m.$$

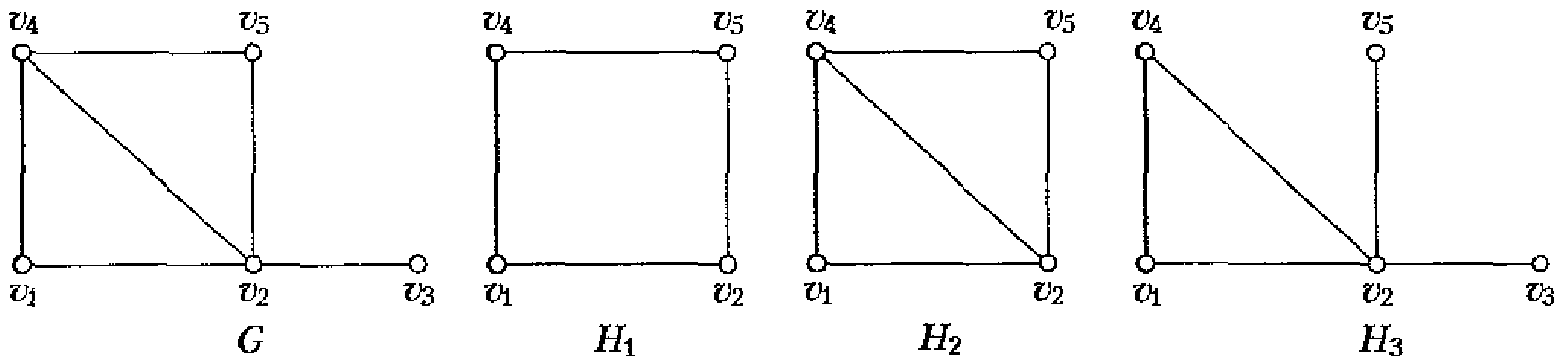
5.2.2 Підграфи. Дводольні графи

Підграфом $G' = (V', E')$ графу $G = (V, E)$ називають граф, такий що множини його вершин та ребер є підмножинами вихідного графу, тобто $V' \subset V,\ E' \subset E$.

Підграф називають **каркасним**, якщо $V' = V$.

Якщо $V' \neq V$, а E' — множина всіх ребер з E, які мають кінці в V', то підграф називають **породженим** (або **індукованим**) **множиною** V' і позначають $G(V')$.

Приклад. Граф G та три його підграфи H_1, H_2, H_3, серед яких H_2 — породжений, а H_3 — каркасний.

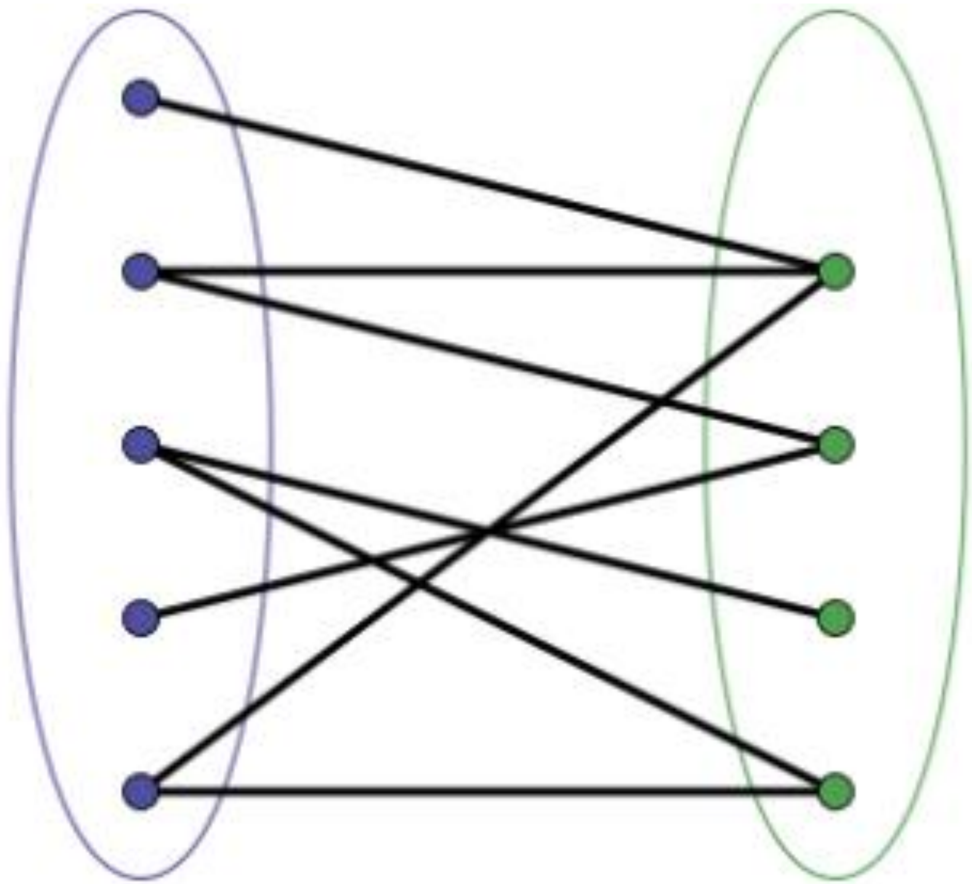


Повним графом називається граф, в якому для кожної пари вершин v_1, v_2, існує ребро, інцидентне v_1 і інцидентне v_2.

Граф називається **дводольним** або **двочастковим**, якщо існує таке розбиття множини його вершин на дві підмножини, при якому жодне ребро не з’єднує вершини однієї і тієї ж підмножини.

Повним дводольним називається двочастковий граф, в якому кожна вершина одної підмножини з'єднана ребром з кожною вершиною іншої підмножини.

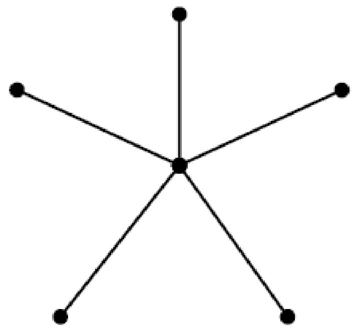
Приклад.



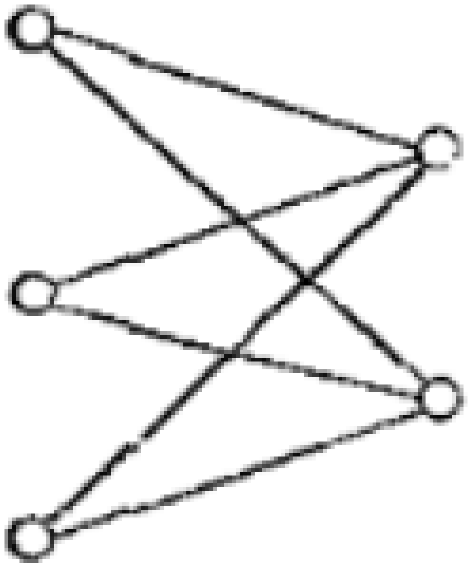
Повний дводольний граф, у якого один клас має m вершин, а другий n вершин, позначають $K_{m,n}$.

Повний дводольний граф виду $K_{1,n}$ називається **зірковим графом**.

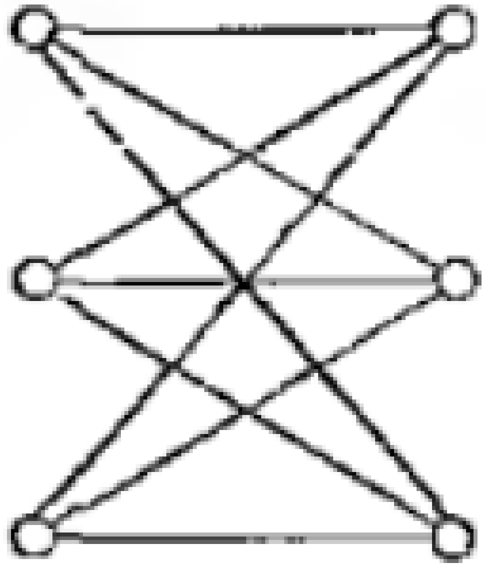
Приклад. Граф $K_{1,5}$



Приклад. Повні дводольні графи $K_{3,\,2}$ та $K_{3,\,3}$



$K_{3,2}$



$K_{3,3}$

Граф називається *k*-**дольним** графом, якщо існує таке розбиття множини його вершин на *k* класів, при якому всяке ребро графу з’єднує дві вершини різних класів.

5.2.3 Маршрути, ланцюги та цикли

Нехай G — неорієнтований граф.

Маршрутом M у графі G називається така скінченна або нескінченна послідовність вершин і ребер, які чергуються,

$$(\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, \ldots),$$

що кожні два сусідні ребра e_{i-1} та e_i мають спільну інцидентну вершину v_i.

Маршрут M можна задавати послідовністю $(\ldots, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ його вершин, а також послідовністю $(\ldots, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ ребер.

Нехай маршрут $M(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ має початок v_0 і кінець v_n. Тоді його називають **сполучним**.

Число ребер маршруту є його довжиною.

Якщо $v_0=v_n$, то маршрут називають замкненим, або **циклічним**.

Відрізок $(e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j)$ скінченного або нескінченного маршруту M є маршрутом. Він називається **ділянкою** маршруту M.

Маршрут *M* називається **ланцюгом**, якщо кожне ребро зустрічається в ньому не більше одного разу, і **простим ланцюгом**, якщо будь-яка вершина, крім, можливо, початкової, зустрічається в ньому не більш як один раз.

Якщо ланцюг є замкненим, то його називають **циклом**, а якщо простий ланцюг — замкнений, то це — простий цикл.

Граф, який не містить циклів, називається **ациклічним**.

В орієнтованому графі маршрут називається **шляхом**.

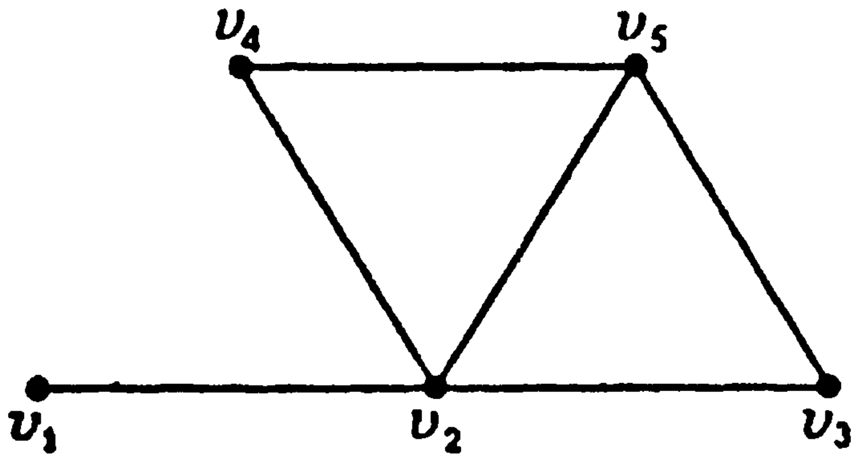
Простий цикл в орієнтованому графі ще називається **контуром**.

Приклад.

$v_1v_2v_5v_2v_3$ — маршрут, який не є ланцюгом;

$v_1v_2v_5v_4v_2v_3$ — ланцюг, який не є простим ланцюгом;

$v_2v_4v_5v_2$ — простий цикл.



5.2.4 Метричні характеристики графів

Відстанню $d(v, w)$ між двома вершинами v і w графу G називається довжина найкоротшого ланцюга між цими вершинами.

Якщо вершини v та w не з'єднані, то покладають $d(v, w) = \infty$.

Найкоротший простий ланцюг часто називають **геодезичним**.

Для неорієнтованого графу:

- $d(v, w) \geq 0$;
- $d(v, w) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $v=w$;
- $d(v, w) = d(w, v)$.

Множина вершин, які знаходяться на однаковій відстані n від вершини v (позначається $D(v, n)$), називається **ярусом**:

$$D(v, n) = \{ w \in V : d(v, w) = n \}.$$

Ексцентриситетом $ecc(c)$ вершини c називається відстань від даної вершини c до найбільш віддаленої від неї вершини:

$$ecc(c) = \max_{v \in V} d(c, v).$$

Вершина з найменшим ексцентриситетом називається **центральною** вершиною графу G, а з найбільшим — **периферійною**.

Множина всіх центральних вершин графу називається **центром** графу G та позначається $C(G)$.

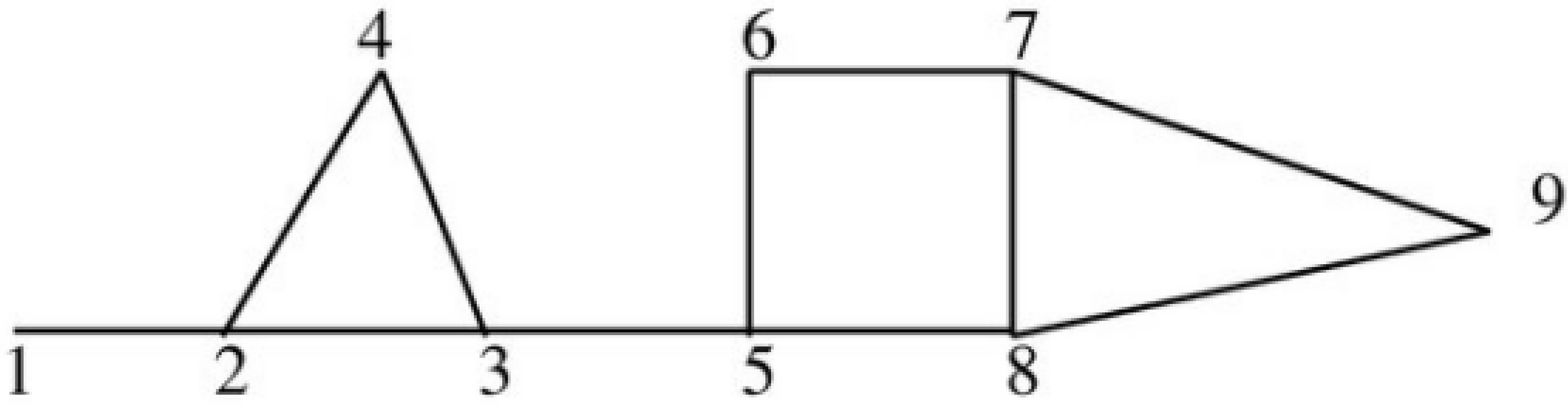
Радіусом $rad(G)$ графу G називається мінімальний ексцентриситет серед всіх вершин графу:

$$rad(G) = \min_{v \in V} ecc(v).$$

Діаметром $diam(G)$ графу G називається максимальний ексцентриситет серед всіх вершин графу, тобто максимальна з відстаней між його вершинами:

$$diam(G) = \max_{v \in V} ecc(v).$$

Приклад.



v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ecc(v)$	5	4	3	4	3	4	5	4	5

радіус графу дорівнює 3:

$$rad(G) = \min_{v \in V} ecc(v) = 3;$$

діаметр графу дорівнює 5:

$$diam(G) = \max_{v \in V} ecc(v) = 5;$$

центральні вершини графу: 3, 5, тобто центр графу

$$C(G) = \{3, 5\};$$

периферійні вершини графу: 1, 7, 9.

5.2.5 Операції над графами

1. **Доповнення графу** $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $\overline{G}(V_1, E_1)$) називається граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \text{ та } E_2 = \overline{E}_1 = \{ e \in V_1 \times V_1 : e \notin E_1 \}.$$

2. **Об'єднанням графів** $G_1(V_1, E_1)$ та $G_2(V_2, E_2)$ (позначається $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, за умовою $V_2 \cap V_1 = \varnothing$, $E_2 \cap E_1 = \varnothing$) називається граф $G(V, E)$, де

$$V = V_1 \cup V_2 \text{ та } E = E_1 \cup E_2.$$

3. **З'єднання графів** $G_1(V_1, E_1)$ та $G_2(V_2, E_2)$ (позначається $G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2)$, за умовою $V_2 \cap V_1 = \varnothing$, $E_2 \cap E_1 = \varnothing$) називається граф $G(V, E)$, де

$$V = V_1 \cup V_2 \quad \text{та}$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \{\, e=(v_1, v_2) : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2 \,\}.$$

4. **Видалення вершини** v з графу $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)-v$, за умовою $v \in V_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \setminus \{v\} \text{ та}$$

$$E_2 = E_1 \setminus \{ e=(v_1, v_2) : v_1 = v \text{ або } v_2 = v \}.$$

5. **Видалення ребра** e з графу $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)–e$, за умовою $e \in E_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \text{ та } E_2 = E_1 \setminus \{e\}.$$

6. **Додавання вершини** v в граф $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)+v$, за умовою $v \notin V_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \cup \{v\} \text{ та } E_2 = E_1.$$

7. **Додавання ребра** e в граф $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)+e$, за умовою $e \notin E_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \text{ та } E_2 = E_1 \cup \{e\}.$$

8. **Стягування підграфу** A графу $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)/A$, за умовою $A \subset V_1$, $v \notin V_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$V_2 = (V_1 \setminus A) \cup \{v\}$,

$E_2 = E_1 \setminus \{ e = (u, w) : u \in A$ або $w \in A\} \cup$

$\cup \{ e = (u, v) : u \in \Gamma(A) \setminus A \}$.