Приклад. Відокремити корені многочлена $P(x) = x^4 - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$ **аналітичним методом**

$P(x) := x^4 - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$

$n := 4$ отже, рівняння має чотири корені

$a4 := 1 \quad a3 := 0 \quad a2 := -5 \quad a1 := -2 \quad a0 := 2$

1) Оцінимо модулі коренів рівняння за теоремою 3

Теорема 3 (про оцінку модулів коренів рівняння (1))

Нехай $A = \max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\}$, $B = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|\}$, де $a_k,\ k = \overline{0,n}$ — коефіцієнти рівняння $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

Тоді модулі всіх коренів x_i^* $(i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$ рівняння задовольняють нерівність

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} < |x_i^*| \le 1 + \frac{A}{|a_n|}, \quad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}. \qquad (2)$$

Наслідок. Числа $r = \dfrac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}}$ та $R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$ є відповідно нижньою і верхньою межами додатних коренів алгебраїчного рівняння $r < x_i^{*+} < R$. Аналогічно числа $-R$ та $-r$ є нижньою і верхньою межами від'ємних коренів рівняння $-R < x_i^{*-} < -r$.

$A := \max(|a3|, |a2|, |a1|, |a0|) = 5$

$B := \max(|a4|, |a3|, |a2|, |a1|) = 5$

$r := \dfrac{1}{1 + \frac{B}{|a0|}} \to \dfrac{2}{7} = 0.29 \qquad R := 1 + \dfrac{A}{|a4|} \to 6$

Отже, за наслідком з теореми 3 додатні корені рівняння лежать в інтервалі (2/7; 6), а від'ємні - (-6; -2/7).

2) Застосуємо теореми 4 та 5 для уточнення результатів, отриманих в п.1)

Теорема 4 (теорема Лагранжа про верхню межу додатних коренів рівняння (1))

Нехай $a_n > 0$ та a_i — перший від'ємний коефіцієнт в послідовності $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$; C — найбільше з абсолютних значень від'ємних коефіцієнтів. Тоді за верхню межу додатних коренів рівняння (1) може бути прийняте число

$$R = 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}}. \qquad (3)$$

2.1) Знайдемо верхню межу додатних коренів за теоремою 3

$a4 = 1 \quad a3 = 0 \quad a2 = -5 \quad a1 = -2 \quad a0 = 2$

$a2$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i := 2$

$C := \max(|-5|, |-2|) = 5$

$R := 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a4}} \rightarrow \sqrt{5} + 1 = 3.24$

2.2) Знайдемо нижню межу додатних коренів

Теорема 5 (про нижню і верхню межі додатних та від'ємних коренів алгебраїчного рівняння)

Нехай R — верхня межа додатних коренів рівняння $P_n(x) = 0$,

R_1 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^1(x) = x^n P_n(\frac{1}{x}) = 0$,

R_2 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^2(x) = P_n(-x) = 0$,

R_3 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^3(x) = x^n P_n(-\frac{1}{x}) = 0$.

Тоді додатні корені x_i^{*+} та від'ємні корені x_i^{*-} рівняння (1) задовольняють нерівності

$$\frac{1}{R_1} \le x_i^{*+} \le R; \quad -R_2 \le x_i^{*-} \le -\frac{1}{R_3}. \tag{4}$$

Складемо рівняння P1(x)

$$P1(x) := x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^4} - 5 \cdot \frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x} + 2\right)$$

$$P1(x) := 2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 1$$

Знайдемо верхню межу додатних коренів полінома P1(x) за теоремою 3

$a4 := 2 \quad a3 := -2 \quad a2 := -5 \quad a1 := 0 \quad a0 := 1$

$a3$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i := 3$

$C := \max(|-2|, |-5|) = 5$

$R1 := 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a4}} \rightarrow \frac{7}{2} = 3.5$

$\frac{1}{R1} = 0.29$ - нижня межа додатних коренів рівняння P(x)=0

$R = 3.24$

Таким чином, **додатні корені** рівняння P(x)=0 належать інтервалу **(0,29; 3,24)**.

2.3) Уточнимо межі від'ємних коренів

Складемо рівняння P2(x)

$$P2(x) := x^4 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2$$

Знайдемо верхню межу додатних коренів полінома P2(x) за теоремою 3

$a4 := 1 \quad a3 := 0 \quad a2 := -5 \quad a1 := -2 \quad a0 := 2$

$a2$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i := 2$

$C := \max(|-5|, |-2|) = 5$

$R2 := 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a4}} \rightarrow \sqrt{5} + 1 = 3.24$

Складемо рівняння P3(x)

$P3(x) := x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^4} - 5 \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} + 2\right)$

$P3(x) := 2 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 1$

Знайдемо верхню межу додатних коренів полінома P3(x) за теоремою 3

$a4 := 2 \quad a3 := 2 \quad a2 := -5 \quad a1 := 0 \quad a0 := 1$

$a2$ - перший від'ємний коефіцієнт, отже $i := 2$

$C := \max(|-5|) = 5$

$R3 := 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a4}} \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{2} + 1 = 2.58$

$-\frac{1}{R3} = -0.39$ - верхня межа від'ємних коренів рівняння P(x)=0

$-R2 = -3.24$

Таким чином, **від'ємні корені** рівняння P(x)=0 лежать в інтервалі **(-3.24;**

3) Дослідимо структуру коренів рівняння $x^4 - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$=0

Теорема 7 (теорема Гюа про необхідну умову дійсності всіх коренів алгебраїчного рівняння)

Якщо алгебраїчне рівняння (1) має дійсні коефіцієнти та всі його корені є дійсними, то квадрат кожного некрайнього коефіцієнта більше добутку двох його сусідніх коефіцієнтів, тобто виконуються нерівності

$$a_k^2 > a_{k-1} \cdot a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

$a4 := 1 \quad a3 := 0 \quad a2 := -5 \quad a1 := -2 \quad a0 := 2$

$a3^2 > a4 \cdot a2 = 1$
$a2^2 > a3 \cdot a1 = 1$
$a1^2 > a2 \cdot a0 = 1$

за теоремою 7 виконується необхідна умова дійсності коренів рівняння (але теорема Гюа є лише необхідною умовою, вона не гарантує відсутність комплексно-спряжених коренів

4) За теоремою 6 визначимо число додатних і від'ємних коренів

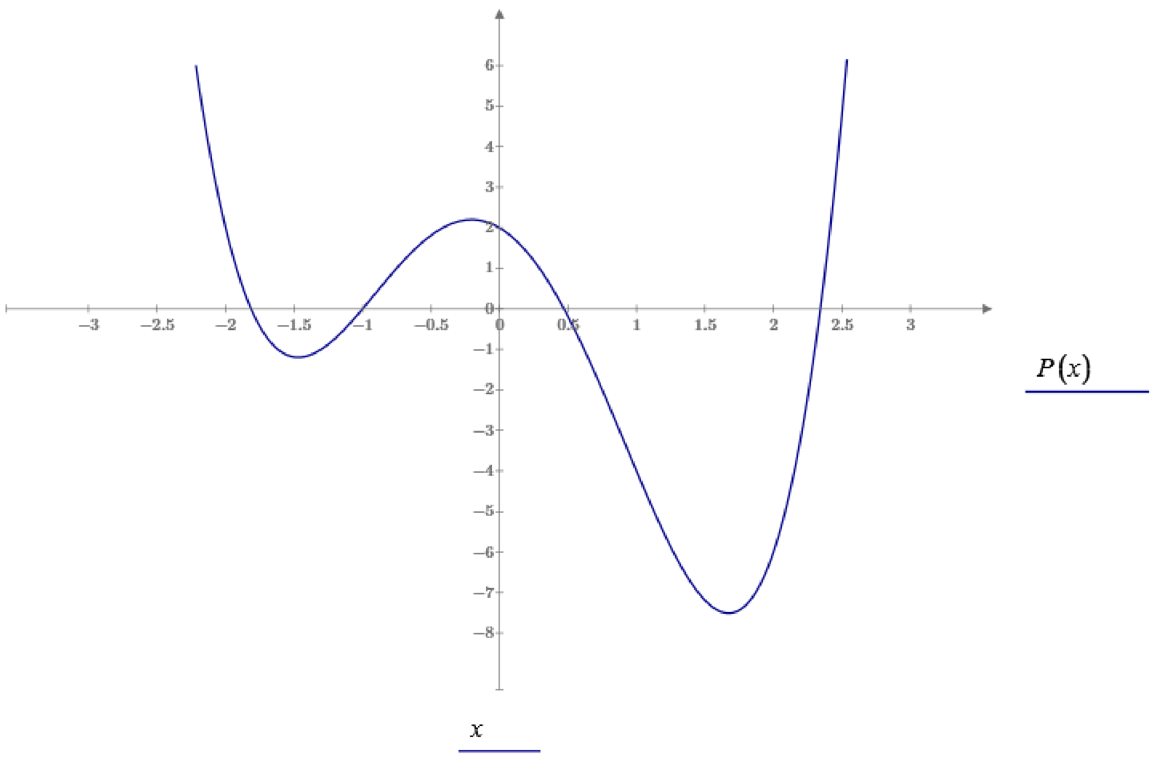
Теорема 6 (теорема Декарта про кількість дійсних коренів алгебраїчних рівнянь)

Число S_1 додатних коренів (з урахуванням їх кратності) алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності коефіцієнтів $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ (коефіцієнти, рівні нулю, не враховують) многочлена $P_n(x)$ або менше цього числа на парне число. Число S_2 від'ємних коренів (з урахуванням їх кратності) алгебраїчного рівняння $P_n(x)=0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ многочлена $P_n(-x)$ або менше цього числа на парне число.

Коефіцієнти многочлена P(x):   1, 0, -5, -2, 2.
Оскільки число змін знака S1=2, то рівняння має два додатних корені або жодного.

Коефіцієнти многочлена P(-x):   1, 0, -5, -2, 2.
Оскільки число змін знака S2=2, то рівняння має два від'ємних корені або жодного.

Перевірка. 1. Побудуємо графік функції $P(x):=x^4-5\cdot x^2-2\cdot x+2$



2. Знайдемо корені рівняння за допомогою функції polyroots

$x^4-5\cdot x^2-2\cdot x+2=0$

$$v:=\begin{bmatrix}2\\-2\\-5\\0\\1\end{bmatrix} \qquad x:=\text{polyroots}(v)=\begin{bmatrix}-1.81\\-1\\0.47\\2.34\end{bmatrix}$$

clear(x)

5) Відокремимо корені рівняння методом Штурма

5.1) Побудуємо ряд Штурма

$f(x) := x^4 - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$

$f0(x) := f(x) \rightarrow x^4 - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$

$f1(x) := f'(x) \rightarrow 4 \cdot x^3 - 10 \cdot x - 2$

$$\frac{f0(x)}{f1(x)} \xrightarrow{simplify} \frac{x}{4} - \frac{5 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4}{8 \cdot x^3 - 20 \cdot x - 4}$$

$$-\frac{5 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4}{8 \cdot x^3 - 20 \cdot x - 4} \cdot f1(x) \xrightarrow{expand} -\frac{5 \cdot x^2}{2} - \frac{3 \cdot x}{2} + 2$$

$$f2(x) := -\left(-\frac{5 \cdot x^2}{2} - \frac{3 \cdot x}{2} + 2\right) \cdot 2 \xrightarrow{simplify} 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4$$

$$\frac{f1(x)}{f2(x)} \xrightarrow{simplify} \frac{20 \cdot x - 12}{25} - \frac{134 \cdot x + 98}{125 \cdot x^2 + 75 \cdot x - 100}$$

$$-\frac{134 \cdot x + 98}{125 \cdot x^2 + 75 \cdot x - 100} \cdot f2(x) \xrightarrow{expand} -\frac{134 \cdot x}{25} - \frac{98}{25}$$

$$f3(x) := -\left(-\frac{134 \cdot x}{25} - \frac{98}{25}\right) \cdot 25 \xrightarrow{simplify} 134 \cdot x + 98$$

$$\frac{f2(x)}{f3(x)} \xrightarrow{simplify} \frac{335 \cdot x - 44}{8978} - \frac{7900}{300763 \cdot x + 219961}$$

$$-\frac{7900}{300763 \cdot x + 219961} \cdot f3(x) \xrightarrow{expand} -\frac{15800}{4489}$$

$$f4(x) := -\left(-\frac{15800}{4489}\right) \cdot \frac{4489}{15800} \rightarrow 1$$

Отже, система многочленів Штурма:

$f(x) \rightarrow x^4 - 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$

$f1(x) \rightarrow 4 \cdot x^3 - 10 \cdot x - 2$

$f2(x) \rightarrow 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4$

$f3(x) \rightarrow 134 \cdot x + 98$

$f4(x) \rightarrow 1$

Визначимо знаки цих многочленів при $x=-\infty$ та при $x=\infty$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаків
$-\infty$	+	-	+	-	+	4
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

Висновок: згідно з теоремою Штурма многочлен має рівно 4-0 = 4 дійсних корені

5.2) Відокремимо корені

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаків
$x=-2$	+	-	+	-	+	4
$x=-1$	0	+	-	-	+	2
$x=0$	+	-	-	-	+	2
$x=1$	-	-	+	+	+	1
$x=2$	-	+	+	+	+	1
$x=3$	+	+	+	+	+	0

Висновок. Корені відокремлено:

$$-2<x_1<-1, \quad x_2=-1, \quad 0<x_3<1, \quad 2<x_4<3.$$