1 МНОЖИНИ ТА ВІДНОШЕННЯ

1.1 Множини

1.1.1 Основні поняття теорії множин

В повсякденному житті та практичній діяльності часто доводиться говорити про деякі сукупності різних об'єктів: предметів, понять, чисел, символів тощо. Наприклад, сукупність деталей механізму, аксіом геометрії, чисел натурального ряду, літер абетки. На основі інтуїтивних уявлень про подібні сукупності сформувалося математичне поняття *множини*.

Поняття множини — одне з основних, якщо не основне, поняття математики. Воно не має точного визначення, і його слід віднести до аксіоматичних понять. Такими аксіоматичними поняттями, наприклад, в елементарній геометрії є поняття точка, пряма, площина.

Значний внесок до теорії множин зробив Георг Кантор[1]. Згодом завдяки його дослідженням теорія множин стала цілком визначеною та обґрунтованою галуззю математики, а на сьогодні вона здобула фундаментального значення. Теорія множин є підставою для всіх розділів дискретної математики та комп'ютерних наук в цілому, є однією з основ функціонального аналізу, топології, загальної алгебри. Глибокі дослідження в самій теорії множин пов'язані з основами математики.

Теорія множин разом з іншими розділами дискретної математики має безліч корисних застосувань у програмуванні. Вона використовується для побудови систем управління базами даних, під час побудови та організації роботи комп'ютерних мереж, зокрема мережі Інтернет.

Множина є настільки загальним і водночас початковим поняттям, що її строге визначення через більш прості поняття дати важко. Тому вслід за Г. Кантором ми приймаємо інтуїтивне уявлення про **множину** як сукупність деяких **елементів**, цілком визначених у випадку кожної конкретної множини.

Прикладами множин є множина натуральних чисел, множина парних чисел, множина студентів у аудиторії, множина дерев у лісі.

Для позначення конкретних множин використовують великі літери A, S, X... Для позначення елементів множин загалом застосовують малі літери a, s, x... Для позначення того, що x є елементом множини S (тобто x належить S), будемо застосовувати запис $x \in S$, а запис $x \notin S$ означатиме, що елемент x не належить множині S. Символ $\in$ називається символом належності.

---

[1] Ге́орг Фердина́нд Лю́двіг Пили́п Ка́нтор (нім. Georg Cantor, 3 березня 1845 — 6 січня 1918) — німецький математик, один із основоположників теорії множин

Наприклад, запис $A=\{a, b, c, d\}$ означає, що множина A складається з чотирьох елементів a, b, c, d.

В загальному вигляді твердження, що скінченна множина A складається з n елементів, записується так: $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Зокрема, $\{x\}$ — так звана **одинична множина**, — є одноелементна множина, єдиним елементом якої є x.

Якщо множина S скінченна, то кількість елементів в множині позначається $|S|$. Наприклад, для $S = \{a, b, c\}$, $|S| = 3$.

Порядок слідування елементів у множині не має значення. Наприклад, $\{a, b, c\}$ та $\{c, a, b\}$ – це одна й та сама множина.

Далі використовуються такі загальноприйняті позначення основних числових множин:

N — *множина натуральних чисел*, $N=\{1, 2, 3, ...\}$;

Z — *множина цілих чисел*, $Z=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

Q — *множина раціональних чисел*; будь-яке раціональне число можна зобразити у вигляді дробу: a/b, де $a, b \in Z,\ b \neq 0$;

R — *множина дійсних чисел*; будь-яке дійсне число можна зобразити у вигляді нескінченного десяткового дробу $a,b_1b_2b_3...b_n...$ із цілою частиною $a \in Z$ і $b_k \in \{0, ..., 9\}$; множині дійсних чисел відповідає множина точок на числовій прямій.

Елементами множин можуть бути інші множини, тоді ці елементи позначатимуться великими літерами.

Приклад. $A=\{C, D\}$, $C=\{a, b\}$, $D=\{c, d, e\}$. При цьому $C \in A,\ D \in A,$ але $a \notin A,\ c \notin A$.

Приклад. $X=\{\{1, 2\}, 3\}$. Цей запис означає, що множина Z містить два елементи: множину $\{1, 2\}$ та елемент 3.

Множина називається **скінченною**, якщо вона містить скінченне число елементів, і **нескінченною**, якщо вона містить необмежене число елементів.

Приклад. Множина A=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ цифр в десятковій системі числення скінченна, а множина точок кола нескінченна.

Упорядкованою вважається така множина, в якій важливі не тільки її елементи, але і порядок їх наступності у множині. Наприклад, упорядкованою є множина, в якій кожний елемент має свій порядковий номер. Позначають упорядковану множину, як правило, або круглими, або трикутними дужками. Наприклад,

$A = <1, 2, 3>$;

$A = < a_1, a_2, ..., a_n >, \quad n \in N$;

$B = (a, b, c)$.

Приклад. Розглянемо упорядковану множину $A = (x, y)$ географічних координат довготи *x* та широти *y*. Якщо довготу і широту поміняти місцями, в результаті можна потрапити в іншу точку всесвіту.

Вказати порядковий номер для всякого дійсного числа на множині *R* неможливо, і порядок у *R* задається за допомогою порівнянь $<$ та $\leq$. Тому загальне визначення упорядкованої множини *X* припускає, що для всіх пар елементів з *X* визначено *відношення порядку* (буде розглянуто далі).

1.1.2 Способи задання множин

Є кілька способів задання множин.

1. Множину можна задати простим **переліком елементів** $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Приклад. Множину відмінників у групі позначимо O і задамо її переліком: O = {Іванов, Петров, Сидоров, Кукушкіна}.

Спосіб задання множини переліком її елементів не придатний для задання нескінченних множин, а у випадку скінченних множин його практично часто не можна реалізувати. Так, не можна перелічити множину риб у Тихому океані, хоча їхне число скінченне.

2. Інший спосіб задання множини складається з опису елементів **визначеною властивістю**: $X = \{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ означає, що елемент *x* має властивість $P(x)$.

Приклад. Множину N_{10} всіх натуральних чисел, менших за 10, можна задати так: $N_{10} = \{x \mid x \in N, x < 10\}$.

Властивості елементів можуть бути задані не формально, а за допомогою опису на природній мові.

Приклад. Множина S студентів групи ІС-12, які одержують стипендію.

Приклад. У геометрії часто доводиться мати справу з множинами, що задані своїми характеристичними властивостями. Так, коло — геометричне місце точок площини, що рівновіддалені від центра даної точки цієї площини.

3. Множина може бути задана **рекурсивно** вказівкою способу послідовного породження її елементів.

Приклад. Множина значень рекурсивної функції є рекурсивно-заданою множиною $F = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\}$, де $\varphi_i \in N$, $i = 1, 2, 3, ...$ Нехай $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 2$, а кожне наступне число залежить від двох попередніх таким чином:

$$\varphi_n = 3\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}, \quad n = 3, 4, ...$$

Тоді

$$\varphi_3 = 3\varphi_1 + \varphi_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5;$$

$$\varphi_4 = 3\varphi_2 + \varphi_3 = 3 \cdot 2 + 5 = 11 \text{ і т.д.}$$

При заданні множин можуть виникати помилки та протиріччя. Множина задана коректно, якщо для будь-якого елемента можна визначити, належить він множині чи ні.

Приклад. Визначення множини *A* як множини, що містить будь-які п'ять натуральних чисел, не є коректним, оскільки неможливо визначити точно елементи *A*. Множина всіх простих чисел визначена коректно. Для будь-якого натурального числа можна перевірити, чи є воно простим, хоча практично на це може знадобитися дуже багато часу.

Приклад. Множина всіх динозаврів, що жили на Землі, є множиною, що задана правильно. Хоча практично неможливо визначити елементи цієї множини, але теоретично ясно, що якщо тварина, яка будь-коли жила на Землі, є динозавром, то вона належить до цієї множини, у протилежному випадку — ні.

При заданні множин можуть бути неточності або збитковості, які необхідно усувати.

Приклад. Розглянемо множину *A* залишків, що одержуються при послідовному діленні натуральних чисел {3, 4, 5, 6, ...} на 3: *A* = {0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, ...}. Ця множина містить всього три елементи: 0, 1, 2. Тому її можна записати у вигляді *A* = {0, 1, 2}.

Приклад. Нехай *B* — множина всіх видів шахових фігур, а *C* — множина всіх шахових фігур, що беруть участь в одній грі. Тоді |*B*| = 6 (пішак, тура, слон, кінь, ферзь, король), а |*C*| = 32 (16 білих і 16 чорних).

1.1.3 Парадокс Рассела

Введені вище поняття теорії множин з успіхом можуть бути використані в основах аналізу, алгебрі, математичній логіці. Однак при більш строгому розгляді такі інтуїтивні уявлення можуть виявитися незадовільними. Недосконалість інтуїтивних уявлень про множини, їх недостатність ілюструється, наприклад, відомим парадоксом, що його винайшов англійський філософ та математик Бертран Рассел.

Множини є або елементами самих себе, або не є такими. Так, множина абстрактних понять сама є абстрактним поняттям, а множина всіх зірок на небі не є зіркою. Множина звуків також є звуком. Аналогічно, множина всіх множин є множиною.

Розглянемо множину A всіх множин X, що X не є елементом X, тобто $A = \{X \mid X \notin X\}$.

Якщо множина A існує, то ми маємо відповісти на запитання: $A \in A$? Нехай A не є елементом A, то за означенням A також є елементом A. З іншого боку, якщо A є елементом A, то $A \notin A$. Отримали логічне протиріччя, яке відомо як *парадокс Рассела*.

Цей парадокс відомий у популярній формі як *парадокс цирульника*. В одному селищі цирульник зобов'язується голити всіх тих мешканців та тільки тих, які не голяться самі. Як бути самому цирульнику: чи має він голити сам себе? Очевидно, що будь-яка відповідь приводить до протиріччя.

Такі протиріччя називаються логічними парадоксами і вивчаються у математичній логіці.

Існування та аналіз парадоксів у теорії множин сприяли розвитку так званого *конструктивізму* – напрямку у математиці, в межах якого розглядаються тільки такі об'єкти, для яких відомі процедури (алгоритми) їх побудови. У конструктивній математиці виключаються ті поняття та методи класичної математики, які не задані алгоритмічно.

Парадоксу Рассела можна запобігти, обмеживши множини, які розглядаються. Наприклад, достатньо заборонити використання в якості множин, класів, які містять самі себе. При цьому немає повної впевненості, що не з'являться інші протиріччя. Повноцінним виходом є аксіоматична побудова теорії множин та доведення побудованої формальної теорії.

1.1.4 Основні поняття теорії множин

Дві множини **рівні**, якщо вони містять однаковий набір елементів. Позначається $A = B$. Якщо множини не рівні, це позначається $A \neq B$.

Приклад. Нехай задані множини

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

B — множина натуральних чисел від 1 до 5;

$C = \{c \mid 1 \leq c \leq 5,\ c \in N\}$;

$D = \{4, 1, 5, 2, 3\}$.

Ці множини містять один набір елементів, тому A = B = C = D.

Для множин A і B з нескінченним або великим числом елементів перевірка збігу наборів всіх елементів може бути важкою. Більш ефективною виявляється логічна перевірка **двостороннього включення**. А саме, $A = B$ тоді і тільки тоді, коли з $x \in A$ виходить $x \in B$ і з $y \in B$ виходить $y \in A$.

Для нескінченних множин крім поняття рівності вводиться ще одне – еквівалентність або рівнопотужність.

Множини A і B називаються **еквівалентними** або **рівнопотужними** ($A \sim B$), якщо між ними можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

Взаємнооднозначною називається така відповідність між множинами A і B, при якій кожному елементу $a \in A$ відповідає один і тільки один елемент $b \in B$, і кожному елементу $b \in B$ відповідає один і тільки один елемент $a \in A$.

Приклад. Якщо зал для глядачів заповнений і немає вільних місць, нам не обов'язково рахувати кількість присутніх глядачів, вона дорівнює числу крісел у залі. Щоб зробити цей висновок, ми інтуїтивно використовуємо наявність взаємнооднозначної відповідності між глядачами і кріслами. Відзначимо одну особливість: фактично у цьому випадку реалізована конкретна взаємнооднозначна відповідність глядачі — крісла (кожному глядачеві відповідає одне і тільки одне визначене крісло і навпаки). Після перерви деякі глядачі можуть помінятися місцями, і конкретна відповідність стане іншою, але висновок залишиться попереднім: число глядачів дорівнює числу місць.

Для строгого визначення дискретних та неперервних нескінченних множин використовуються зіставлення дискретних множин натуральному ряду чисел, а неперервних множин — відрізку [0, 1] дійсної вісі.

Множина A називається **зчисленною**, якщо вона еквівалентна натуральному ряду N ($A \sim N$). Термін «**зчисленність**» є точним замінником інтуїтивного поняття «**дискретність**».

Множина A називається **континуальною** (**незчисленною**), якщо вона еквівалентна відрізку [0, 1], а потужність цієї множини — континуум.

Множина A, всі елементи якої належать множині B, називається **підмножиною** множини B.

Нестроге включення позначається $A \subseteq B$, означає, що A — **підмножина** множини B, що, можливо, співпадає з B.

Строге включення позначається $A \subset B$ і означає, що A — підмножина множини B, що не співпадає з B. У цьому випадку кажуть, що A — **власна підмножина** множини B.

Виконання співвідношень $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$ можливе тільки при $A = B$. І зворотно, $A = B$, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$ водночас.

Приклад. Для множини додатних чисел R^{+} використовується знак строгого включення відносно множини дійсних чисел: $R^{+} \subset R$.

Приклад. Позначимо множину учнів деякого класу через X, множину відмінників у цьому класі — через Y. Тоді $Y \subseteq X$, оскільки множина відмінників у класі включена до множини учнів цього класу і теоретично може дорівнювати їй.

Універсальною називається множина, яка містить всі можливі елементи, що зустрічаються в даній задачі. Універсальна множина позначається символом U.

Зауважимо, що універсальна множина U може бути індивідуальною для кожної окремої задачі і визначається в її умові.

Приклад. Розглянемо деяку групу студентів. Нехай A — множина юнаків групи, B — множина відмінників. У цій задачі універсальною є множина студентів групи, а множини A і B є її підмножинами: $A \subseteq U$, $B \subseteq U$.

Треба бути уважним, щоб розрізняти елементи множини та підмножини цієї множини. Наприклад, коли пишуть $a \in \{a,b,c\}$, це означає, що елемент a є членом множини, що складається з трьох елементів: a, b і c. Коли ж пишуть $\{a\} \subset \{a,b,c\}$, це означає, що множина, що складається з одного елемента a, є підмножиною множини, яка складається з трьох елементів: a, b і c.

Порожньою називається така множина, яка не містить ніяких елементів. Така множина позначається спеціальним символом $\varnothing$.

Роль порожньої множини $\varnothing$ аналогічна ролі числа нуль. Це поняття можна використовувати для визначення насправді неіснуючої сукупності елементів (наприклад, множини зелених слонів). Більш істотним мотивом введення порожньої множини є те, що заздалегідь не завжди відомо (або невідомо зовсім), чи існують елементи, які задовольнять характеристичну властивість кожної множини. Наприклад, множина виграшів у наступному тиражі спортлото на куплені квитки може виявитися порожньою.

Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини A, $\varnothing \subseteq A$. Слід пам'ятати, що порожня множина є множиною, тому, якщо деяка множина A не містить жодного елемента, то $A=\varnothing$; $|A| = 0$. Запис $A = \{\varnothing\}$ означає, що A містить один елемент — $\varnothing$, $|A| = 1$.

Таким чином, будь-яка непорожня множина A обов'язково має, як мінімум, дві підмножини — порожню множину і саму цю множину.

Множину всіх підмножин множини A називають **множиною-степенем** або **булеаном** множини A і позначають 2^A (або $P(A)$).

Приклад. Нехай задана множина $A = \{a,b,c\}$. Булеаном множини A є

$$2^A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\},$$

так, булеан множини A містить 8 елементів.

Порожня множина має тільки одну підмножину — саму порожню множину, тому $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$. Для довільної множини *A* з n елементів кількість всіх її підмножин (тобто $\left|2^A\right|$) дорівнює 2^n:

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Множини можна зображати графічно за допомогою *діаграм Венна*, які запровадив 1881 р. англійський математик Джон Венн[2]. Універсальну множину позначають прямокутником, а всі інші множини — кругами в ньому.

1.1.5 Операції над множинами

Нехай множини *A* та *B* — підмножини універсуму U. Введемо операції над множинами *A* та *B*. Для графічної ілюстрації будемо використовувати діаграми Венна, в яких круги зображують множини, що беруть участь в операції, а заштрихована частина — результат операції.

Об'єднання (сума) ($A \cup B$) множин *A* і *B* — множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які входять або до A, або до B, або до A і B одночасно (рис 1.1,а), тобто

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Приклад. Нехай дані множини $A = \{1,2,3\}$; $B = \{2,3,4\}$, тоді їх об'єднання $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.

Перетин (добуток) ($A \cap B$) множин *A* і *B* — множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині *A* та множині *B* (рис 1.1,б), тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}.$$

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3\}$; $B = \{2,3,4\}$, тоді їх перетин $A \cap B = \{2,3\}$.

Різниця ($A \backslash B$, $A - B$) множин *A* і *B* — множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині *A* та не належать множині *B* (рис 1.1,в), тобто

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B\}.$$

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3\}$; $B = \{2,3,4\}$, тоді їх різниця $A \setminus B = \{1\}$.

Симетрична різниця ($A \div B$, $A \vartriangle B$, $A \oplus B$) *A* і *B* — множина, що складається з усіх елементів *A*, які не належать множині *B*, й усіх елементів *B*, які не належать множині *A* (рис 1.1,г), тобто

$$A \div B = \{x \mid (x \in A \text{ та } x \notin B) \text{ або } (x \notin A \text{ та } x \in B)\}.$$

---

[2] Джон Венн (англ. John Venn; 4 серпня 1834 — 4 квітня 1923, Кембридж) — англійський логік і філософ. Він відомий тим, що запровадив діаграми Венна, які використовуються в багатьох областях, таких як теорія множин, теорія ймовірностей, логіка, статистика й інформатика

За означенням: $A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3\}$; $B = \{2,3,4\}$, тоді їх симетрична різниця $A \div B = \{1,4\}$.

Доповнення (заперечення) ($\overline{A}$, A') (читається «не A») до множини A — множина, що містить усі елементи універсуму, за винятком елементів множини A (рис 1.1,д), тобто

$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

За означенням: $\overline{A} = U \setminus A$.

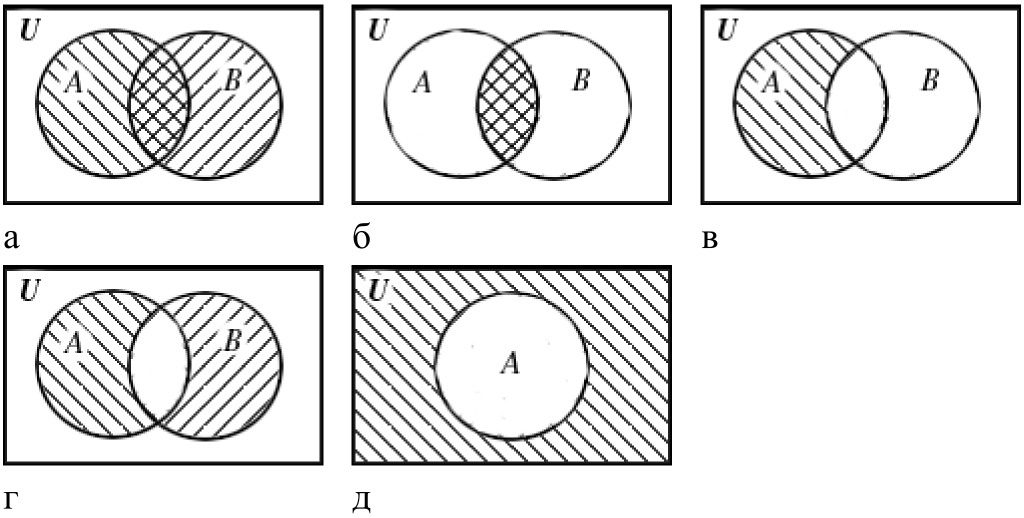


Рис 1.1. Діаграми Венна.

(а – об’єднання, б – перетин, в – різниця, г – симетрична різниця, д – доповнення)

1.1.6 Властивості операцій над множинами

Операції над множинами, як і операції над числами, мають деякі властивості. Останні виражаються сукупністю тотожностей незалежно від конкретного вмісту множин, що входять у них, і є підмножинами деякого універсуму **U**.

Для будь-яких множин *A*, *B* та *C* справедливі наступні властивості:

- *ідемпотентність* (*самопоглинання*)

1а) $A \cup A = A$ 1б) $A \cap A = A$

- *комутативність*

2а) $A \cup B = B \cup A$ 2б) $A \cap B = B \cap A$

- *асоціативність*

3а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 3б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- *дистрибутивність*

4а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 4б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- *властивості порожньої та універсальної множин*

5а) $A \cup \varnothing = A$ 5б) $A \cap \varnothing = \varnothing$

6а) $A \cup \overline{A} = U$ 6б) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

7а) $A \cup U = U$ 7б) $A \cap U = A$

8а) $\overline{\varnothing} = U$ 8б) $\overline{U} = \varnothing$

- *поглинання*

9а) $A \cup (A \cap B) = A$ 9б) $A \cap (A \cup B) = A$

- *закони де Моргана*

10а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 10б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- *властивості доповнення, різниці та рівності*

11) $A \cup B = U$ та $A \cap B = \varnothing \iff B = \overline{A}$

12) $\overline{\overline{A}} = A$ (*інволютивність*)

13) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

14) $A \div B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

15) $A \div B = B \div A$

16) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$

17) $A \div \varnothing = \varnothing \div A = A$

18) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$

19) $A = B \iff (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing$

Доведення цих співвідношень можна ґрунтувати на означеннях операцій над множинами, або доводити за допомогою побудови діаграм Венна для лівої та правої частин співвідношень.

Доведемо, наприклад, співвідношення 3б: $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$.

Нехай $x\in A\cap(B\cap C) \Rightarrow x\in A, x\in B, x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)$ і $x\in C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cap C$ і $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$. Одержання оберненого включення виконується аналогічно.

Тепер наведемо доведення для 4а: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

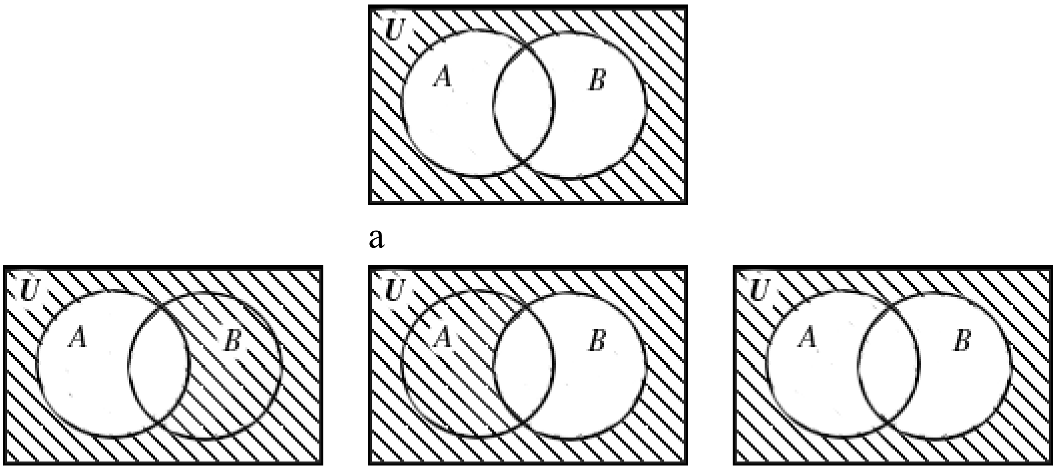
З одного боку, оскільки $(B\cap C) \subseteq B$, то $A\cup(B\cap C) \subseteq A\cup B$. Аналогічно $B\cap C \subseteq C$ і $A\cup(B\cap C) \subseteq A\cup C$. Значить, $A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$. З іншого боку, якщо $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, то $x\in A\cup B$ і $x\in A\cup C$. Якщо $x\in A$, то $x\in A\cup(B\cap C)$. А якщо $x\notin A$, то $x\in B$ і $x\in C$ і тоді $x\in B\cap C$. Отже, $(A\cup B)\cap(A\cup C) \subseteq A\cup(B\cap C)$. Разом з отриманим раніше включенням маємо потрібну рівність.

Доведемо співвідношення 1а: $A\cup A = A$.

$$A\cup A = (A\cup A)\cap \mathbf{U} = (A\cup A)\cap(A\cup A') = A\cup(A\cap A') = A\cup\varnothing = A.$$

Доведемо співвідношення 10а: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ за допомогою діаграм Венна.

Спочатку побудуємо діаграму для $\overline{A \cup B}$ – рис. 1.2, а. Множині $\overline{A}$ відповідає рис. 1.2, б. Множині $\overline{B}$ – рис. 1.2, в. Множині $\overline{A} \cap \overline{B}$ відповідають частини, які заштриховані на рис. 1.2 б, в. Ця множина зображена на рис. 1.2, г.



а

б в г

Рис. 1.2. Діаграми Венна для доведення співвідношення $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
(а — $\overline{A \cup B}$, б — $\overline{A}$, в — $\overline{B}$, г — $\overline{A} \cap \overline{B}$).

Отримали, що множини $\overline{A \cup B}$ та $\overline{A} \cap \overline{B}$ однаково зображуються на діаграмах Венна, тобто $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доведення інших властивостей залишаємо на самостійну роботу. ►

Із властивостей комутативності й асоціативності операції об’єднання випливає, що об’єднання кількох множин можна виконати, послідовно об’єднуючи їх, причому порядок входження множин не впливає на результат.

Сукупність множин A_1, A_2, ..., A_n називається **розбиттям** множини A, якщо:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.
2. $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall\ i \neq j$.

Якщо умова 2 не задовольняється, то сукупність множин буде називатися **покриттям**.

Наприкінці наведемо приклади використання тотожностей 1-19 для спрощення складних виразів, які містять множини, аналогічно тому, як проводяться спрощення виразів в елементарній алгебрі.

1. $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$

$= [(A \cup \overline{A}) \cap B \cap C] \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$ (4б)

$= (\mathbf{U} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$ (6а)

$= (B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$ (7б)

$= (B \cap C) \cup (\overline{B \cap C}) =$ (10б)

$= \mathbf{U}$ (6а)

2. $(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D) =$

$= (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup [(\overline{A} \cup \overline{B} \cup D) \cap C] =$ (4б)

$= (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup [(\overline{A \cap B \cap \overline{D}}) \cap C] =$ (10б)

$= [(A \cap B \cap \overline{D}) \cup (\overline{A \cap B \cap \overline{D}})] \cap C =$ (4б)

$= \mathbf{U} \cap C =$ (6а)

$= C$ (7б)

3. $(\overline{A \cap \overline{B}}) \cup B =$

$= (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cup B =$ (10б)

$= (\overline{A} \cup B) \cup B =$ (12)

$= \overline{A} \cup (B \cup B) =$ (3а)

$= \overline{A} \cup B$ (1а)