# ЛЕКЦІЯ 9

# ОСНОВНІ РОЗПОДІЛИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

## 9.1. Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл неперервної випадкової величини $X$ виникає в випробуваннях типу кидання навмання точки на відрізок $[a; b]$ ($X$ — відстань точки від границі $a$ відрізка), або в випробуваннях, зв'язаних з округленням вимірювань фізичних величин за допомогою приладів ($X$ — похибка округлень).

Неперервна випадкова величина $X$, яка приймає можливі значення з відрізку $[a; b]$, називається *рівномірно розподіленою*, якщо її щільність розподілу має стале значення на цьому відрізку:

$$f(x) = \begin{cases} C, \text{де } x \in [a; b]; \\ 0, \text{де } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Значення сталої величини $C$ знаходиться з умови:

$$\int_a^b f(x)dx = C \cdot \int_a^b dx = C \cdot (b - a) = 1, \text{ звідки } C = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, *щільність розподілу* рівномірно розподіленої на відрізку $[a; b]$ випадкової величини приймає вигляд (9.1):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{де } x \in [a; b]; \\ 0, \text{ де } x \notin [a; b]. \end{cases} \qquad (9.1)$$

Графік щільності ймовірності приведений на рис. 9.1.

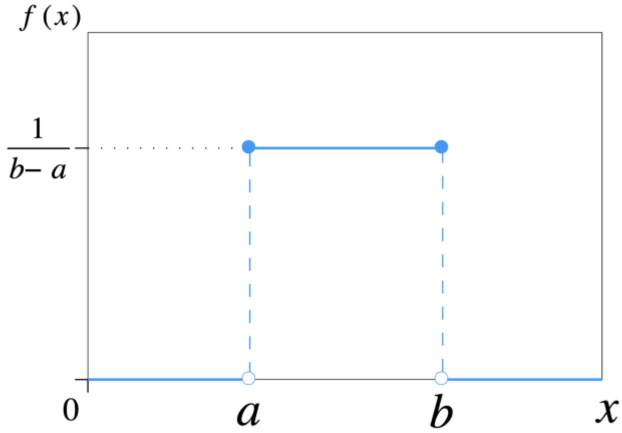


Рис. 9.1. Графік функції щільності $f(x)$ рівномірного розподілу

### Властивості рівномірного розподілу

**1.** *Функція розподілу $F(x)$ для випадкової величини $X$, що має рівномірний розподіл, має вигляд* (9.2):

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ де } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, \text{де } a \le x \le b; \\ 1, \text{ де } x > b. \end{cases} \qquad (9.2)$$

**Доведення.** Функція розподілу $F(x)$ на відрізку $[a;b]$ знаходиться за стандартною формулою:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a},$$

а за властивістю 4 функції розподілу $F(x) = 0$ при $x < a$ і $F(x) = 1$ при $x > b$, отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{де } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{де } a \leq x \leq b; \\ 1, & \text{де } x > b. \end{cases}$$

Графік функції розподілу $F(x)$ поданий на рис. 9.2.

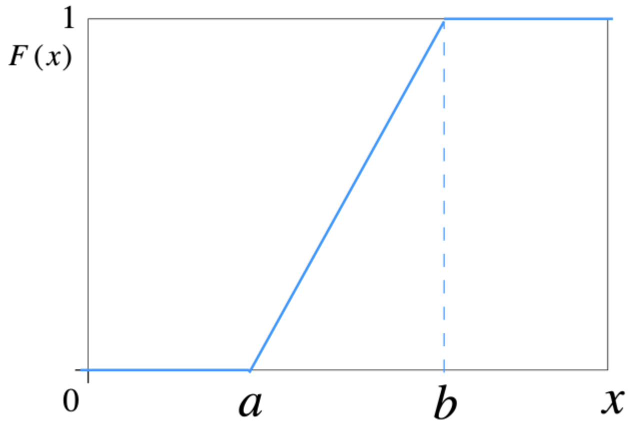


Рис. 9.2. Графік функції розподілу $F(x)$ рівномірного розподілу

**2.** *Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ рівномірно розподіленої випадкової величини обчислюються за формулами* (9.3)-(9.5):

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad (9.3)$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad (9.4)$$

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}}. \quad (9.5)$$

**Доведення.** Числові характеристики знаходяться відповідно за стандартними формулами для неперервних величин:

$$M(X) = \int_a^b \big(x \cdot f(x)\big)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

тобто математичне сподівання $M(X)$ співпадає з серединою відрізка $[a;b]$.

$$D(X) = \int_a^b \left(x^2 \cdot f(x)\right)dx - \left(M(X)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{b^2 + a \cdot b + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2 \cdot a \cdot b + a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2 \cdot \sqrt{3}}.$$

**3.** *Ймовірність того, що в результаті випробування рівномірно розподілена випадкова величина* $X$ *прийме можливе значення з інтервалу* $(\alpha; \beta)$, *який міститься у відрізку* $[a; b]$, *обчислюється за добре відомою формулою* (9.6):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}. \qquad (9.6)$$

**Доведення.** За властивість 2 щільності розподілу

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_\alpha^\beta dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

**4.** *Рівномірний розподіл є багатомодальним.*

**Доведення.** Оскільки в рівномірному розподілі всі значення в інтервалі $[a, b]$ рівноймовірні, то будь-яке значення з інтервалу $[a, b]$ є його модою.

**5.** *Медіана рівномірного розподілу дорівнює середині інтервалу* $[a, b]$.

**Доведення.** Як можна побачити на рис. 9.2, графік щільності розподілу можна візуально розділити навпіл по вертикальній асимптоті, проведеній через точку $x = \frac{a+b}{2}$. Отже, вона і буде медіаною рівномірного розподілу.

**6.** *Коефіцієнт асиметрії рівномірного розподілу* $As(X) = 0$. *Ексцес рівномірного розподілу* $Es(X) = -1{,}2$. *Тобто графік щільності рівномірного розподілу є симетричним та має меншу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом* (*де ексцес дорівнює* 0).

**Доведення.** Для визначення коефіцієнту асиметрії обчислимо центральний момент 3-го порядку за формулою (7.24) лекції 7.

$$v_1(X) = \frac{a+b}{2}, \; v_2(X) = \frac{b^2 + a \cdot b + a^2}{3}.$$

$$v_3(X) = \int_a^b \left(x^3 \cdot f(x)\right)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4 \cdot (b-a)}$$
$$= \frac{(a+b) \cdot (a^2 + b^2)}{4} = \frac{a^3 + a \cdot b^2 + a^2 \cdot b + b^3}{4}.$$
$$\mu_3(X) = v_3(X) - 3 \cdot v_2(X) \cdot v_1(X) + 2 \cdot v_1^3(X)$$
$$= \frac{a^3 + a \cdot b^2 + a^2 \cdot b + b^3}{4} - 3 \cdot \frac{b^2 + a \cdot b + a^2}{3} \cdot \frac{a+b}{2} + 2 \cdot$$
$$\cdot \frac{a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3}{8} = 0.$$

За означенням коефіцієнта асиметрії (7.27) лекції 7

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = 0.$$

Для визначення ексцесу обчислимо центральний момент 4-го порядку за формулою (7.24) лекції 7.

$$v_1(X) = \frac{a+b}{2},\ v_2(X) = \frac{b^2+a \cdot b+a^2}{3},$$
$$v_3(X) = \frac{a^3 + a \cdot b^2 + b^2 \cdot a + b^3}{4},$$
$$v_4(X) = \int_a^b \left(x^4 \cdot f(x)\right)dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^4 dx = \frac{b^5 - a^5}{5 \cdot (b-a)}.$$
$$\mu_4(X) = v_4(X) - 4 \cdot v_3(X) \cdot v_1(X) + 6 \cdot v_2(X) \cdot v_1^2(X) - 3 \cdot v_1^4(X)$$
$$= \frac{(b-a)^4}{80},$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2 \cdot \sqrt{3}}.$$

За означенням коефіцієнта асиметрії (7.27) лекції 7

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{\frac{(b-a)^4}{80}}{\frac{(b-a)^4}{144}} - 3 = 1{,}8 - 3 = -1{,}2.$$

**7.** *Ентропія рівномірного розподілу дорівнює* (9.7):

$$H(X) = log_2\,(b-a). \qquad (9.7)$$

**Доведення.** Ентропія рівномірного розподілу визначається за формулою:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) \cdot log_2\left(f(x)\right)\right) dx =$$
$$= -\int_a^b \left(\frac{1}{b-a} \cdot log_2\left(\frac{1}{b-a}\right)\right) dx = -\left(\frac{1}{b-a} \cdot log_2\left(\frac{1}{b-a}\right)\right) \cdot \int_a^b dx =$$
$$= log_2(b-a).$$

**Приклад 9.1.** *Автобуси «Політ» вирушають до аеропорту Бориспіль з інтервалом* 30 *хв. Час очікування автобуса на зупинці – випадкова рівномірно розподілена величина* $X$ . **1.** *Знайти функцію розподілу, числові характеристики цієї випадкової величини, а також ймовірність того, що час очікування для пасажира, який в випадковий момент підійшов до зупинки, не перевищить* 5 *хв.* **2.** *Обчислити інформаційну ентропію випадкової величини.*

**Розв'язання. 1.** Випадкова величина $X$ рівномірно розподілена на відрізку $[0; 30]$, тому на цьому відрізку щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{30}$, а функція розподілу, згідно з формулою (9.2)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{де } x < 0; \\ \dfrac{x}{30}, & \text{де } 0 \le x \le 30 \\ 1, & \text{де } x > 30. \end{cases}$$

Числові характеристики знаходяться за формулами (9.3)-(9.5):

$$M(X) = 15;\ D(X) = 75;\ \sigma(X) \approx 8{,}66,$$

а ймовірність того, що час очікування не перевищить 5 хв. — за формулою (9.6):

$$P\{0 < X < 5\} = \frac{1}{6}.$$

**2.** За формулою (9.7)

$$H(X) = log_2\,(30) \approx 4{,}91 \text{ біта}.$$

**Відповідь:** 1. $M(X) = 15$; $D(X) = 75$; $\sigma(X) \approx 8{,}66$; $P\{0 < X < 5\} = \frac{1}{6}$; 2. $H(X) \approx 4{,}91$ біта.

**Приклад 9.2.** *Ребро* $l$ *кубу виміряне приблизно, причому* $a \le l \le b$. *Розглядаючи довжину ребра куба як неперервну випадкову величину* $X$, *розподілену рівномірно на* $[a; b]$, *знайти математичне сподівання та дисперсію об'єму кубу.*

**Розв'язання.** Складемо функцію щільності для випадкової величини $X = l$.

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{де } l \in [a; b]; \\ 0, & \text{де } l \notin [a; b]. \end{cases}$$

Враховуючи, що $V_{\text{кубу}} = X^3 = l^3$, обчислимо числові характеристики для випадкової величини $X^3$.

$$M(X^3) = \int_a^b \left(l^3 \cdot \frac{1}{b-a}\right) dx = \frac{l^4}{4 \cdot (b-a)}\bigg|_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4 \cdot (b-a)}.$$

$$M(X^6) = \int_a^b \left(l^6 \cdot \frac{1}{b-a}\right) dx = \frac{l^7}{7 \cdot (b-a)}\bigg|_a^b = \frac{b^7 - a^7}{7 \cdot (b-a)}.$$

$$D(X^3) = M(X^6) - \left(M(X^3)\right)^2 = \frac{b^7 - a^7}{7 \cdot (b-a)} - \left(\frac{b^4 - a^4}{4 \cdot (b-a)}\right)^2 =$$
$$= \frac{9 \cdot a^8 - 16 \cdot a^7 \cdot b - 16 \cdot a \cdot b^7 + 14 \cdot a^4 \cdot b^4 + 9 \cdot b^8}{112}.$$

**Відповідь:** $M(X^3) = \frac{b^4-a^4}{4\cdot(b-a)}$; $D(X^3) = \frac{b^7-a^7}{7\cdot(b-a)} - \left(\frac{b^4-a^4}{4\cdot(b-a)}\right)^2$.

## 9.2. Нормальний розподіл

Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини є одним із найбільш часто вживаних в практичних застосуваннях розподілів. Йому підлягають похибки вимірювань різних фізичних величин, розміри або маса виробів, які сходять з поточної лінії, тощо. Взагалі, будь-яка випадкова величина, яка являє собою суму багатьох незалежних випадкових величин, кожна з яких відіграє незначну роль в утворенні суми, має нормальний розподіл.

Неперервна випадкова величина $X$ називається розподіленою за *нормальним законом* (або *законом Гауса*) з параметрами $a$ (в деяких підручниках позначається $\mu$) і $\sigma$, якщо її *щільність розподілу* має вигляд (9.8):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} \tag{9.8}$$

для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Дамо коротку характеристику графіка щільності ймовірності $f(x)$ нормального розподілу, який називається *нормальною кривою* або *кривою Гаусса*:

- Оскільки різниця $x - a$ входить в аналітичний вираз $f(x)$ (9.8) в квадраті, нормальна крива симетрична відносно прямої $x = a$.
- Перша похідна $f'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ в точці $x = a$ перетворюється в нуль, а при переході через цю точку змінює знак з $+$ на $-$, отже, в точці $x = a$ функція $f(x)$ має максимум $f(a) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}$.
- Друга похідна $f''(x) = \frac{(x-a)^2-\sigma^2}{\sigma^5\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ в точках $x = a \pm \sigma$ перетворюється в нуль, а при переході через ці точки змінює знак, отже, в точках $x = a \pm \sigma$ графік функції має перегин

$$f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}}.$$

- При $x \to \pm\infty$ $f(x) \to 0$, отже, вісь абсцис є лівою і правою асимптотою графіка функції $f(x)$.

Графік щільності ймовірності $f(x)$ поданий на рис. 9.3.

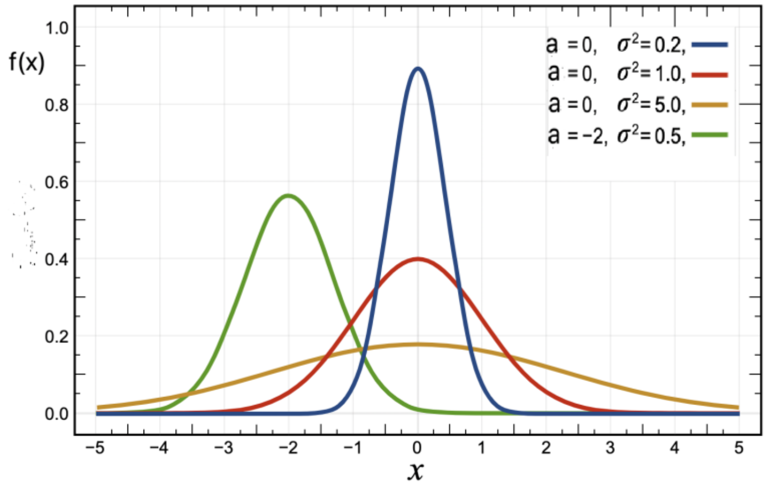


Рис. 9.3. Графік функції щільності $f(x)$ нормального розподілу

## **Властивості нормального розподілу**

**1.** *Функція розподілу $F(x)$ нормально розподіленої випадкової величини $X$ має вигляд* (9.9):

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0{,}5. \tag{9.9}$$

**Доведення.** З формули (9.9) отримуємо:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty)$$
$$= \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0{,}5.$$

Перевіримо, чи задовольняє функція $F(x)$ властивостям функції розподілу випадкової величини.

При $\frac{x-a}{\sigma} \to -\infty$ $F(x) = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$; $\frac{x-a}{\sigma} \to +\infty$ $F(x) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$.

Графік функції розподілу наведено на рис. 9.4.

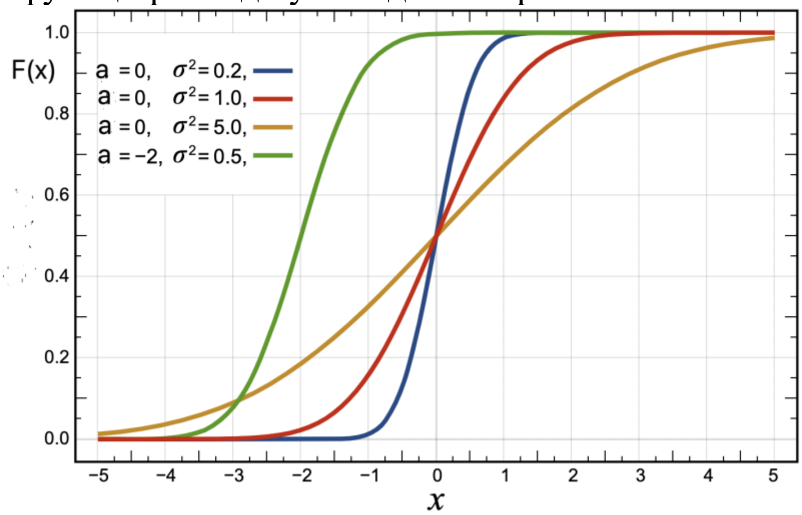


Рис. 9.4. Графік функції розподілу $F(x)$ нормального розподілу

**2.** *Параметри нормального розподілу мають такий ймовірнісний зміст: у нормально розподіленої випадкової величини*

$$M(X) = a;\ D(X) = \sigma^2;\ \sigma(X) = \sigma.$$

**Доведення.** Математичне сподівання випадкової величини $X$:

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x \cdot f(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x \cdot \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}\right)dx =$ $\left[\begin{matrix} t = \frac{x-a}{\sigma\cdot\sqrt{2}} \\ x = t\cdot\sigma\cdot\sqrt{2} + a; dx = (\sigma\cdot\sqrt{2})dt \end{matrix}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left((t\cdot\sigma\cdot\sqrt{2}+a)\cdot\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-t^2}\right)\cdot$ $(\sigma\cdot\sqrt{2})dt = \frac{\sigma\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(t\cdot e^{-t^2})dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt = 0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = a.$

Перший інтеграл дорівнює нулю, як інтеграл від непарної функції; другий інтеграл – інтеграл Ейлера-Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left((x-a)^2\cdot f(x)\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left((x-a)^2\cdot\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}\right)dx$$

$$= \left[\begin{matrix} t = \frac{x-a}{\sigma\cdot\sqrt{2}} \\ x = t\cdot\sigma\cdot\sqrt{2}+a; dx = (\sigma\cdot\sqrt{2})dt \end{matrix}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(t\cdot\sigma\cdot\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-t^2}\right)\cdot(\sigma\cdot\sqrt{2})dt =$$

$$= \frac{2\cdot\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2\cdot e^{-t^2})dt = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}td(e^{-t^2}) =$$

Інтегруємо частинами.

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = \sigma^2.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma.$$

**3.** *Ймовірність того, що в результаті випробування нормально розподілена випадкова величина $X$ прийме можливе значення з інтервалу* $(\alpha;\beta)$, *обчислюється за формулою* (9.10):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{9.10}$$

**Доведення.** Ймовірність того, що в результаті випробування нормально розподілена випадкова величина $X$ прийме можливе значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$, обчислюється за стандартною формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}dx =$$

Застосовуємо заміну $t = \frac{x-a}{\sigma}$, одержуємо $dx = \sigma dt$ і межі інтегрування для змінної $t$ від $\frac{\alpha-a}{\sigma}$ до $\frac{\beta-a}{\sigma}$, отже,

$$= \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\left(\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - -\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа (формула (4.5) лекції 4). Що й треба було довести.

**4.** *Ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини $X$ від її математичного сподівання за абсолютним значенням буде меншим заданого $\varepsilon$ дорівнює* (9.11):

$$P\{|X-a|<\varepsilon\} = 2\cdot\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (9.11)$$

**Доведення.** З формули (9.10) маємо:

$$P\{|X-a|<\varepsilon\} = P\{a-\varepsilon<X<a+\varepsilon\} = \Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right) =$$
$$= 2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

**5. Правило «трьох сігм».** *Ймовірність того, що випадкова величина приймає значення з інтервалу* $(a-3\cdot\sigma; a+3\cdot\sigma)$, *близька до* 1, *отже, ця подія є практично достовірною. Виконання цього правила дає підставу вважати випадкову величину $X$ розподіленою за нормальним законом.*

**Доведення.** З формули (9.11) випливає:

При $\varepsilon=\sigma$ маємо $P\{|X-a|<\sigma\} = 2\cdot\Phi(1)\approx 0{,}6827$;

При $\varepsilon = 2\cdot\sigma$ маємо $P\{|X-a|<2\cdot\sigma\} = 2\cdot\Phi(2)\approx 0{,}9545$;

При $\varepsilon = 3\cdot\sigma$ маємо $P\{|X-a|<3\cdot\sigma\} = 2\cdot\Phi(3)\approx 0{,}9973$.

Отже, дійсно, ймовірність того, що випадкова величина приймає значення з інтервалу $(a-3\cdot\sigma; a+3\cdot\sigma)$, близька до 1.

**6.** *Мода та медіана випадкової величини $X$, що має нормальний розподіл, співпадають з її математичним сподіванням* (9.12).

$$Mo(X) = Me(X) = a. \qquad (9.12)$$

**Доведення.** З властивостей функції щільності $f(x)$ випливає, що $x_{max} = a$ (рис. 9.3). Отже $Mo(X)=a$.

Оскільки функції щільності $f(x)$ є симетричною відносно прямої $x = a$, то $Me(X)=a$.

**7.** *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини $X$, що має нормальний розподіл дорівнюють*: $As(X) = Es(X) = 0$.

**Доведення.** Оскільки функції щільності $f(x)$ є симетричною відносно прямої $x = a$, то $As(X) = 0$.

Для обчислення ексцесу, враховуємо, що для нормального розподілу всі непарні центральні моменти дорівнюють нулю, а парні моменти можуть бути виражені через дисперсію $\sigma^2$. Зокрема, четвертий центральний момент дорівнює $\mu_4(X) = 3 \cdot \sigma^4$. Тобто

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = 0.$$

**8.** *Інформаційна ентропія випадкової величини $X$, що має нормальний розподіл, дорівнюють* (9.13):

$$H(X) = \frac{1}{2} \cdot log_2(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \sigma^2) \,. \qquad (9.13)$$

**Доведення.** Ентропія нормального розподілу визначається за формулою:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) \cdot log_2\big(f(x)\big)\right) dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot log_2\left(\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot log_2(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \sigma^2).$$

**Приклад 9.3.** *Нормально розподілена випадкова величина $X$ задана щільністю ймовірності*

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

*Знайти*: **1.** *Скласти функцію розподілу випадкової величини $X$*; **2.** *Обчислити квантиль порядку* 0,75; **3.** *Інформаційну ентропію випадкової величини.*

**Розв'язання.** За умовою. для випадкової величини $X$, $a = 3$, $\sigma = 2$.

**1.** За формулою (9.9)

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right) + 0{,}5.$$

**2.** За означенням квантиля випадкової величини (формула (7.30) лекції 7):

$$F(x_{0,75}) = 0{,}75;$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,75}-3}{2}\right) + 0{,}5 = 0{,}75;$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0,75}-3}{2}\right) = 0{,}25;$$

$$\frac{x_{0,75}-3}{2} = 0{,}68;$$

$$x_{0,75} = 4{,}36.$$

(значення функції $\Phi(x)$ взяті із таблиці значень функції Лапласа (рис. 4.4 лекції 4).

**3.** За формулою (9.13)

$$H(X) = \frac{1}{2} \cdot log_2(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \sigma^2) = \frac{1}{2} \cdot log_2(8 \cdot \pi \cdot e) \approx 3{,}047 \text{ біта.}$$

**Відповідь:** 1. $F(x) = \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right) + \frac{1}{2}$; 2. $x_{0,75} = 4{,}36$; 3. $H(X) \approx 3{,}047$ біта.

**Приклад 9.4.** *За даними відділу технічного контролю* $10\%$ *виробів підприємства має довжину, меншу* $14{,}7$ *см, а* $20\%$ *– довжину, більшу* $15{,}2$ *см. Довжина виробів – нормально розподілена випадкова величина* $X$. *Знайти середній (номінальний) розмір виробів і його середнє квадратичне (стандартне) відхилення.*

**Розв'язання.** За умовою задачі $P\{X < 14{,}7\} = 0{,}1$; $P\{X > 15{,}2\} = 0{,}2$. Згідно з формулою (9.10)

$$P\{X < 14{,}7\} = P\{-\infty < X < 14{,}7\} = \Phi\left(\frac{14{,}7 - a}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) =$$

$$= \Phi\left(\frac{14{,}7 - a}{\sigma}\right) + 0{,}5 = 0{,}1,$$

звідки $\Phi\left(\frac{14{,}7-a}{\sigma}\right) = -0{,}4$.

Із таблиці значень функції Лапласа (рис. 4.4 лекції 4) за відомим значенням функції знаходимо

$$\frac{14{,}7-a}{\sigma} = -1{,}28 \text{ або } a - 1{,}28 \cdot \sigma = 14{,}7.$$

Аналогічно за формулою (9.9)

$$P\{X > 15{,}2\} = P\{15{,}2 < X < +\infty\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{15{,}2 - a}{\sigma}\right) =$$

$$= 0{,}5 - \Phi\left(\frac{15{,}2 - a}{\sigma}\right) = 0{,}2,$$

звідки $\Phi\left(\frac{15{,}2-a}{\sigma}\right) = 0{,}3$; $\frac{15{,}2-a}{\sigma} = 0{,}84$ або $a + 0{,}84 \cdot \sigma = 15{,}2$.

Одержана система

$$\begin{cases} a - 1{,}28 \cdot \sigma = 14{,}7; \\ a + 0{,}84 \cdot \sigma = 15{,}2 \end{cases}$$

має розв'язок $a = 15$; $\sigma = 0{,}235$.

**Відповідь:** Середній розмір виробів дорівнює 15 см, а стандартне відхилення 0,235 см.

**Приклад 9.5.** *Систематична похибка утримання висоти літаком складає* $\pm 20$ *м, а випадкова похибка розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням* $75$ *м. Для польоту літаку надано коридор висотою* $100$ *м. Знайти ймовірність того, що політ буде відбуватись* ***а****) нижче;* ***б****) всередині;* ***в****) вище коридора, якщо літаку задана висота, відповідна середині коридора.*

**Розв'язання.** Позначимо через $X$ сумарну похибку утримання висоти. Її систематична складова $\pm 20$ м, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 75$ м. Оскільки літаку задана висота, відповідна середині коридора, для того, щоб політ відбувався нижче коридора, повинно бути $X < -50$, всередині коридора $-50 < X < 50$ і вище коридора $X > 50$.

За формулою (9.10) одержимо

**а)** $P\{X < -50\} = P\{-\infty < X < -50\} = \Phi\left(\frac{-50-20}{75}\right) - \Phi(-\infty) =$

$$= \Phi(-0{,}93) + 0{,}5 = -0{,}3238 + 0{,}5 = 0{,}1762;$$

**б)** $P\{-50 < X < 50\} = \Phi\left(\frac{50-20}{75}\right) - \Phi\left(\frac{-50-20}{75}\right) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}93) =$

$$= 0{,}1554 + 0{,}3238 = 0{,}4792;$$

**в)** $P\{X > 50\} = P\{50 < X < +\infty\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{50-20}{75}\right) = 0{,}5 - \Phi(0{,}4) =$

$$= 0{,}5 - -0{,}1554 = 0{,}3446.$$

Очевидно, розглянуті події утворюють повну групу, тому їх сумарна ймовірність дорівнює одиниці.

**Відповідь:** а) $P\{X < -50\} = 0{,}1762$; б) $P\{-50 < X < 50\} = 0{,}4792$; в) $P\{X > 50\} = 0{,}3446$.

**Приклад 9.6.** *Коробка з мармеладом пакується автоматично. В середньому маса однієї коробки становить* $1{,}06$ *кг. Знайти середнє квадратичне відхилення, якщо* $5\%$ *коробок мають масу не більшу за* $1$ *кг.* (*Вважається, що ваги коробок розподілені за нормальним законом*).

**Розв'язання.** Оскільки $5\%$ коробок з мармеладом важать менше, ніж $1$ кг, а $M(X) = 1{,}06$, то $|X - 1{,}06| \geq 0{,}06$.

$$P\{|X - 1{,}06| \geq 0{,}06\} = 0{,}05,$$

тоді, ймовірність протилежної події дорівнює:

$$P\{|X - 1{,}06| < 0{,}06\} = 0{,}95.$$

За формулою (9.11)

$$P\{|X - 1{,}06| < 0{,}06\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}06}{\sigma}\right) = 0{,}95.$$

Розв'яжемо рівняння

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}06}{\sigma}\right) = 0{,}95;$$

$$\Phi\left(\frac{0{,}06}{\sigma}\right) = 0{,}475;$$

$$\frac{0{,}06}{\sigma} = 1{,}96;$$

$$\sigma \approx 0{,}03.$$

**Відповідь:** $\sigma \approx 0{,}03$.

**Приклад 9.7.** *Випадкова величина* $X$ *має нормальний розподіл з математичним сподіванням* $a = 25$. *Ймовірність попадання випадкової величини* $X$ *в інтервал* $(20; 30)$ *дорівнює* $0{,}09$. *Чому дорівнює ймовірність попадання в інтервал* $(35; 40)$?

**Розв'язання.** Щільність та функція розподілу випадкової величини мають вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-25)^2}{2 \cdot \sigma^2}}; F(x) = \Phi\left(\frac{x-25}{\sigma}\right) + 0{,}5.$$

$$20 < X < 30 \Rightarrow 20 - 25 < X - 25 < 30 - 25 \Rightarrow |X - 25| < 5.$$

$$P\{|X - 25| < 5\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}09.$$

Розв’яжемо рівняння

$$2\cdot \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)=0{,}09;$$
$$\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)=0{,}045;$$
$$\frac{5}{\sigma}=0{,}11;$$
$$\sigma\approx 45.$$

Таким чином

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-25}{45}\right)+0{,}5.$$

За формулою (9.10) одержимо

$$P\{35<X<40\}=\Phi\left(\frac{40-25}{45}\right)-\Phi\left(\frac{35-25}{45}\right)=$$
$$=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-\Phi\left(\frac{2}{9}\right)\approx 0{,}1293-0{,}0871\approx 0{,}0422.$$

**Відповідь:** $P\{35<X<40\}\approx 0{,}0422$.

## 9.3. Показниковий розподіл

Показниковий або експоненціальний розподіл неперервної випадкової величини має широке застосування в теорії надійності технічного обладнання для характеристики терміну безвідмовної роботи елементів та пристроїв і в теорії масового обслуговування для характеристики тривалості обслуговування або технологічних процесів.

Неперервна випадкова величина $X$ називається розподіленою за *показниковим* (*експоненціальним*) *законом* з параметром $\lambda$, якщо її *щільність розподілу* (9.14)

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-(\lambda\cdot x)}, \text{де } x>0;\\ 0, \qquad\qquad \text{де } x\le 0.\end{cases} \tag{9.14}$$

Графік щільності ймовірності $f(x)$ поданий на рис. 9.5.

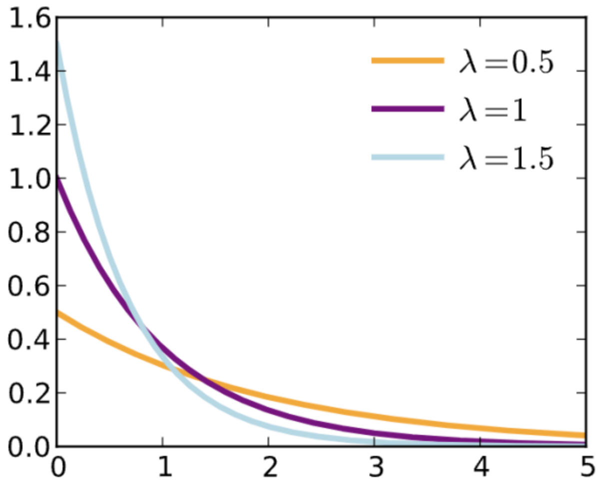


Рис. 9.5. Графік функції щільності $f(x)$ показникового розподілу

## Властивості показникового розподілу

**1.** *Функція розподілу* $F(x)$ *має вигляд* (9.15):

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda \cdot x)}, & \text{де } x > 0; \\ 0, & \text{де } x \leq 0. \end{cases} \quad (9.15)$$

**Доведення.** При $x > 0$

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \lambda \cdot \int_0^x e^{-(\lambda \cdot x)}dx = -e^{-(\lambda \cdot x)} \Big|_0^x = 1 - e^{-(\lambda \cdot x)}.$$

При $x \leq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = 0.$$

Графік функції розподілу $F(x)$ подані відповідно на рис. 9.6.

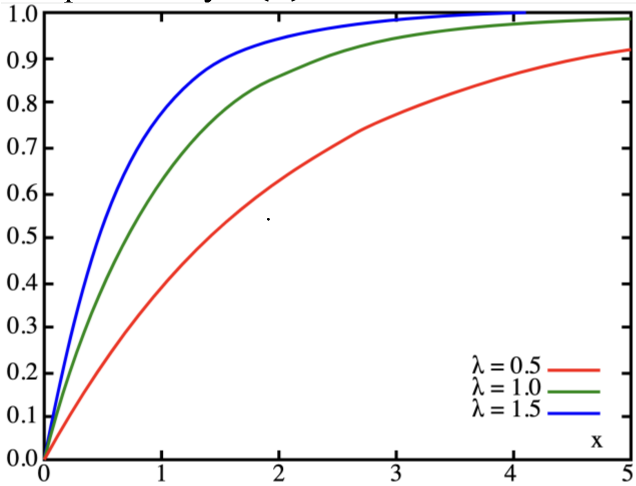


Рис. 9.6. Графік функції розподілу $F(x)$ показникового розподілу

**2.** *Числові характеристики* $M(X), D(X), \sigma(X)$ *показниково розподіленої випадкової величини обчислюються за формулами* (9.16)-(9.18):

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad (9.16)$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad (9.17)$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \quad (9.18)$$

**Доведення.** Математичне сподівання $M(X)$ обчислюється за стандартною формулою:

$$M(X) = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \left(x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \left(x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx = \begin{bmatrix} u = x; du = dx \\ dv = e^{-(\lambda \cdot x)} dx; v = -\dfrac{e^{-(\lambda \cdot x)}}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{\lambda}\Big|_0^b + \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^b e^{-(\lambda \cdot x)} dx\right) =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{b \cdot e^{-(\lambda \cdot b)}}{\lambda} - \frac{e^{-(\lambda \cdot x)}}{\lambda^2}\Big|_0^b\right) =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{b \cdot e^{-(\lambda \cdot b)}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left(e^{-(\lambda \cdot x)} - 1\right)\right) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-b \cdot e^{-(\lambda \cdot b)} - \frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{-(\lambda \cdot b)} - 1\right)\right) = \frac{1}{\lambda},$$

$\lim_{b \to +\infty} \left(b \cdot e^{-(\lambda \cdot b)}\right) = 0$ за правилом Лопіталя.

Тобто математичне сподівання показникового розподілу є величина, обернена до параметра $\lambda$.

Дисперсію $D(X)$ обчислимо за стандартною формулою:

$$D(X) = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \left(x^2 \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx - \frac{1}{\lambda^2} = \lambda \cdot \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \left(x^2 \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2; du = (2 \cdot x) dx \\ dv = e^{-(\lambda \cdot x)} dx; v = -\dfrac{e^{-\lambda \cdot x} e^{-(\lambda \cdot x)}}{\lambda} \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{x^2 \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{\lambda}\Big|_0^b + \frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^b \left(x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx\right) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \lambda \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{b^2 \cdot e^{-(\lambda \cdot b)}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^b \left(x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx\right) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-b^2 \cdot e^{-(\lambda \cdot b)} + 2 \cdot \int_0^b \left(x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx\right) - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

$\lim_{b \to +\infty} \left(b^2 \cdot e^{-(\lambda \cdot b)}\right) = 0$ за правилом Лопіталя, а $\int_0^b \left(x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx = \frac{M(X)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

**3.** *Ймовірність того, що випадкова величина $X$, яка має показниковий розподіл, в результаті випробування прийме можливе значення з інтервалу* $(a; b)$ *при* $a > 0;\ b > 0$, *дорівнює* (9.19):

$$P\{a < X < b\} = e^{-(\lambda \cdot a)} - e^{-(\lambda \cdot b)}. \qquad (9.19)$$

**Доведення.** За стандартною формулою

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b e^{-(\lambda \cdot x)}dx = -\, e^{-(\lambda \cdot x)} \Big|_a^b = e^{-(\lambda \cdot a)} - $$
$$-e^{-(\lambda \cdot b)}.$$

**4.** *Мода та медіана випадкової величини $X$, що має показниковий розподіл, відповідно дорівнюють* (9.9):

$$Mo(X) = 0; Me(X) = \frac{ln\,(2)}{\lambda}. \qquad (9.20)$$

**Доведення.** Функція щільності показникової випадкової величини $X$

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-(\lambda \cdot x)} = \frac{\lambda}{e^{(\lambda \cdot x)}}, \text{де } x > 0,$$

досягає свого максимального значення $f_{max} = \lambda$ в точці $x_{max} = 0$ ($f(0) = \lambda$). Цей факт є очевидним, оскільки вираз $\frac{\lambda}{e^{\lambda \cdot x}} \to 0$ при $x \to +\infty$, а, тому немає необхідності досліджувати на екстремуми за допомогою похідних (також це видно з рис. 9.5). Таким чином, $Mo(X) = 0$.

З формули (6.18) лекції 6

$$F(Me(X)) = 0{,}5;$$
$$1 - e^{-(\lambda \cdot Me(X))} = 0{,}5;$$
$$e^{-(\lambda \cdot Me(X))} = 0{,}5;$$
$$-\lambda \cdot Me(X) = l\,n(0{,}5);$$
$$-\lambda \cdot Me(X) = -l\,n(2);$$
$$Me(X) = \frac{ln\,(2)}{\lambda}.$$

**5.** *Коефіцієнт асиметрії випадкової величини $X$, що має показниковий розподіл,* $As(X) = 2$. *Ексцес випадкової величини $X$, що має показниковий розподіл,* $Es(X) = 6$. *Тобто показниковий розподіл не є симетричним* (*зсув праворуч від моди*) *в порівнянні з нормальним розподілом* (*де коефіцієнт асиметрії дорівнює* 0). *Також даний розподіл має більшу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом* (*де ексцес дорівнює* 0).

**Доведення.** Для визначення коефіцієнту асиметрії обчислимо центральні момент 3-го порядку. З формули (7.24) лекції 7

$$\mu_3(X) = M\big(X - M(X)\big)^3 = M\left(X - \frac{1}{\lambda}\right)^3 = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \left(\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx = \frac{2}{\lambda^3}.$$

Тоді коефіцієнт асиметрії дорівнює:

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{\frac{2}{\lambda^3}}{\frac{1}{\lambda^3}} = 2.$$

Для визначення ексцесу обчислимо центральні момент 4-го порядку. З формули (7.25) лекції 7

$$\mu_4(X) = M\big(X - M(X)\big)^4 = M\left(X - \frac{1}{\lambda}\right)^4 = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \left(\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^4 \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx = \frac{9}{\lambda^4}.$$

Тоді ексцес дорівнює:

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{\frac{9}{\lambda^4}}{\frac{1}{\lambda^4}} - 3 = 6.$$

**6.** *Інформаційна ентропія випадкової величини X, що має показниковий розподіл, дорівнюють* (9.21):

$$H(X) = log_2\left(\frac{e}{\lambda}\right). \tag{9.21}$$

**Доведення.** Ентропія показникового розподілу визначається за формулою:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(f(x) \cdot log_2\big(f(x)\big)\Big) dx =$$

$$= -\lambda \cdot \int_0^{+\infty} \Big(e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot log_2\big(\lambda \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\big)\Big) dx =$$

$$= -\lambda \cdot \int_0^{+\infty} \Big(e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot \Big(log_2(\lambda) + log_2\big(e^{-(\lambda \cdot x)}\big)\Big)\Big) dx =$$

$$= -\lambda \cdot \int_0^{+\infty} \Big(e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot \big(log_2(\lambda) - (\lambda \cdot x) \cdot log_2(e)\big)\Big) dx =$$

$$= -\lambda \cdot log_2(\lambda) \cdot \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda \cdot x)}\, dx + \lambda^2 \cdot log_2(e) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} \big(x \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\big) dx = log_2(e) - log_2(\lambda) = log_2\left(\frac{e}{\lambda}\right).$$

**Приклад 9.8.** *Час обслуговування пасажира в авіакасі – випадкова величина $T$, розподілена за показниковим законом з середнім значенням, рівним 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який звернувся до каси буде обслуговуватись:* ***а)*** *від 2,5 до 5 хв.;* ***б)*** *більше 10 хв.*

**Розв'язання. а)** За умовою задачі математичне сподівання (середнє значення) $M(T) = 5$, тому за формулою (9.16) параметр розподілу $\lambda = 0{,}2$. Ймовірність того, що час обслуговування пасажира буде знаходитись в межах від 2,5 до 5 хв., обчислюється за формулою (9.19):

$$P\{2{,}5 < X < 5\} = e^{-(0{,}2\cdot 2{,}5)} - e^{-(0{,}2\cdot 5)} = e^{-0{,}5} - e^{-1} \approx 0{,}2386.$$

**б)** Ймовірність того, що час обслуговування буде більший 10 хв., також обчислюється за формулою (9.19):

$$P\{X > 10\} = P\{10 < X < +\infty\} = e^{-2} \approx 0{,}1353.$$

**Відповідь.** а) $P\{2{,}5 < X < 5\} \approx 0{,}2386$; б) $P\{X > 10\} \approx 0{,}1353$.

Якщо випадкова величина $T$ з показниковим розподілом – тривалість безвідмовної роботи деякого елемента, а $\lambda$ – інтенсивність відмов цього елемента, то функція розподілу $F(t) = 1 - e^{-(\lambda\cdot t)}$ $(\lambda > 0)$ визначає ймовірність відмови елемента за час $t$. При цьому функція $R(t) = e^{-(\lambda\cdot t)}$ визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за час $t$ і називається *функцією надійності*.

**Приклад 9.9.** *Тривалість часу безвідмовної роботи елемента системи – випадкова величина $T$, розподілена за показниковим законом з функцією розподілу $F(t) = 1 - e^{-(0{,}01\cdot t)}$. Знайти ймовірність того, що протягом доби елемент:* ***а)*** *відмовить;* ***б)*** *не відмовить.*

**Розв'язання. а)** Розглянемо подію: $A =${елемент системи відмовить}.

Ймовірність відмови $P(A)$ елемента на протязі доби дорівнює значенню функції розподілу $F(t)$ при $t = 24$ год.:

$$P(A) = F(24) = 1 - e^{-0{,}24} \approx 0{,}2134.$$

**б)** Розглянемо подію: $\bar{A} =${елемент системи не відмовить}.

Ймовірність невідмови $P(\bar{A})$ елемента на протязі доби дорівнює значенню функції надійності $R(t)$ при $t = 24$ год.:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = R(t) = e^{-0{,}24} \approx 0{,}7866.$$

**Відповідь.** а) $P(A) \approx 0{,}2134$; б) $P(\bar{A}) \approx 0{,}7866$.

**Приклад 9.10.** *Можна вважати, що час роботи електричної лампи до перегоряння – це неперервна випадкова величина $X$, що має показниковий тип розподілу. Припускаючи, що з ймовірністю p лампа може перегоріти при включені, знайти середній час роботи лампи (лампа вмикається лише один раз).*

**Розв'язання.** Нехай $T$ – момент часу, коли лампа перегорить.

$$P\{0 < X < T\} = 1 - e^{-\left(T\cdot\frac{1}{M(X)}\right)} = p;$$

$$1 - e^{-\left(T\cdot\frac{1}{M(X)}\right)} = p;$$

$$e^{-\left(T\cdot\frac{1}{M(X)}\right)} = 1 - p;$$
$$-\left(T\cdot\frac{1}{M(X)}\right) = ln(q);$$
$$M(X) = -\frac{T}{ln(q)}.$$

**Відповідь.** $M(X) = -\frac{T}{ln(q)}$.

## 9.4. Логнормальний розподіл

Логнормальний розподіл — це ймовірнісний розподіл випадкової величини, логарифм якої має нормальний розподіл. Іншими словами, якщо випадкова величина $X$ має логнормальний розподіл, то $ln(X)$ буде мати нормальний розподіл.

Нехай розподіл випадкової величини $X$ задається *щільністю ймовірності*, що має вигляд (9.22):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(ln(x)-ln\,(a))^2}{2\cdot\sigma^2}}, \text{де } x > 0;\ a > 0. \qquad (9.22)$$

Тоді кажуть, що $X$ має *логнормальний розподіл* з параметрами $a$ і $\sigma$.

Графік щільності ймовірності $f(x)$ поданий на рис. 9.7.

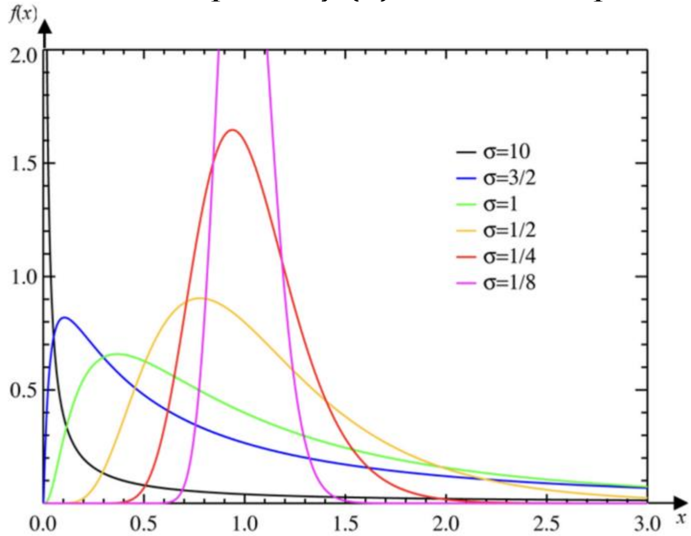


Рис. 9.7. Графік функції щільності $f(x)$ логнормального розподілу

### Властивості логнормального розподілу

**1.** *Функція розподілу $F(x)$ має вигляд* (9.23):

$$F(x) = \Phi\left(\frac{ln(x)-ln\,(a)}{\sigma}\right) + 0{,}5. \qquad (9.23)$$

**Доведення.** Оскільки при $x > 0$ нерівності $X < x$ та $ln(X) < ln(x)$ рівносильні, то функція розподілу логнормального розподілу співпадає з функцією розподілу нормального розподілу для випадкової величини $ln(X)$, тобто

$$F(x) = P\{ln(X) < ln(x)\} = P\{-\infty < ln(X) < ln(x)\} =$$
$$= \Phi\left(\frac{ln(x) - ln(a)}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) =$$
$$= \Phi\left(\frac{ln(x) - ln\,(a)}{\sigma}\right) + 0{,}5,$$

Графік функції розподілу $F(x)$ подані відповідно на рис. 9.8.

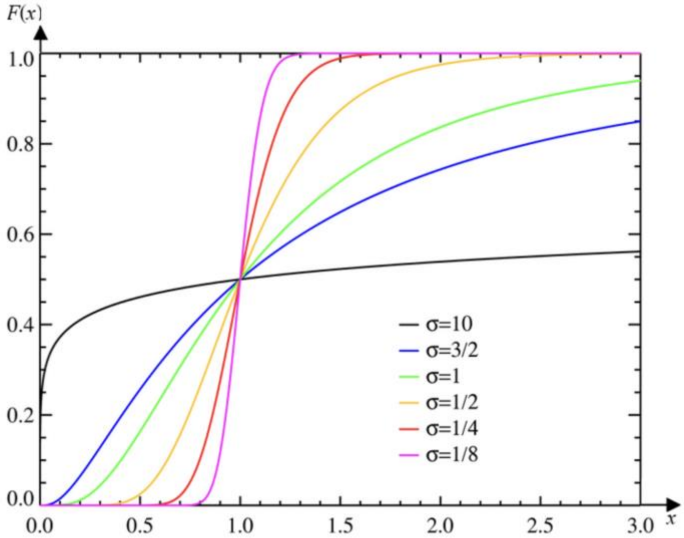


Рис. 9.8. Графік функції розподілу $F(x)$ показникового розподілу

**2.** *Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ логнормально розподіленої випадкової величини обчислюються за формулами* (9.24)-(9.26):

$$M(X) = a \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}; \tag{9.24}$$
$$D(X) = a^2 \cdot e^{\sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right); \tag{9.25}$$
$$\sigma(X) = a \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}. \tag{9.26}$$

**Доведення.**

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \cdot f(x)\right)dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx$$
$$= \left[\begin{array}{c} \frac{ln(x) - ln\,(a)}{\sigma} = t;\ x = e^{(ln(a) + t\cdot\sigma)} \\ dx = \left(\sigma \cdot e^{ln(a) + t\cdot\sigma\cdot}\right)dt \end{array}\right] =$$
$$= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)} \cdot \left(\sigma \cdot e^{(ln(a) + t\cdot\sigma)}\right)dt =$$

Після спрощення

$$e^{\left(-\frac{t^2}{2} + ln(a) + t\cdot\sigma\right)} = a \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(t^2 - 2\cdot t\cdot\sigma)} = a \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot((t-\sigma)^2 - \sigma^2)} = a \cdot e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

отримуємо

$$= a \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt\right) = a \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \cdot 1 = a \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}.$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = \begin{bmatrix} u = t - \sigma \\ dt = du \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{u^2}{2}\right)} du = \sqrt{2 \cdot \pi}.$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 \cdot f(x)\right) dx - \left(M(X)\right)^2 =$$

Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 \cdot f(x)\right) dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^{+\infty} \left(x \cdot e^{-\frac{(ln(x) - \ln(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}}\right) dx = e^{(2 \cdot ln(a) + 2 \cdot \sigma^2)} =$$
$$= a^2 \cdot e^{(2 \cdot \sigma^2)}.$$

обчислюється аналогічно інтегралу при обчисленні математичного сподівання (та сама заміна та спрощення степеня експоненти).

$= a^2 \cdot e^{2 \cdot \sigma^2} - a^2 \cdot e^{\sigma^2} = a^2 \cdot e^{\sigma^2} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right).$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = a \cdot e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}.$$

**3.** *Ймовірність того, що в результаті випробування логнормально розподілена випадкова величина $X$ прийме можливе значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$, обчислюється за формулою* (9.27):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{ln(\beta) - ln(a)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{ln(\alpha) - ln(a)}{\sigma}\right). \qquad (9.27)$$

**Доведення.** Оскільки функція розподілу логнормального розподілу співпадає з функцією розподілу нормального розподілу для випадкової величини $ln(X)$, то ймовірність того, що в результаті випробування логнормально розподілена випадкова величина $X$ прийме можливе значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$, обчислюється за стандартною формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) =$$
$$= 0{,}5 + \Phi\left(\frac{ln(\beta) - ln(a)}{\sigma}\right) - \left(0{,}5 + \Phi\left(\frac{ln(\alpha) - ln(a)}{\sigma}\right)\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{ln(\beta) - ln(a)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{ln(\alpha) - ln(a)}{\sigma}\right)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа (формула (4.5) лекції 4). Що й треба було довести.

**4.** *Мода та медіана випадкової величини $X$, що має логнормальний розподіл, відповідно дорівнюють* (9.28):

$$Mo(X) = a \cdot e^{-\sigma^2}; Me(X) = a. \qquad (9.28)$$

**Доведення.** Обчислимо моду.

Знайдемо похідну функції $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot x^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}} - \frac{ln(x) - ln\,(a)}{\sigma^3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$
$$= -\frac{\sigma^2 + ln(x) - ln\,(a)}{\sigma^3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}}.$$

Знайдемо стаціонарні точки.

$$\sigma^2 + ln(x) - ln\,(a) = 0;$$
$$ln(x) = -\sigma^2 + ln\,(a)$$
$$x = a \cdot e^{-\sigma^2}.$$

Обчислимо 2-гу похідну:

$$f''(x) = -\frac{\sigma^3 \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} - 2 \cdot x \cdot \sigma^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot (\sigma^2 + ln(x) - ln\,(a))}{\left(\sigma^3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}\right)^2} \cdot$$
$$\cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}} + \frac{(\sigma^2 + ln(x) - ln\,(a)) \cdot (ln(x) - ln\,(a))}{\sigma^5 \cdot x^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot$$
$$\cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}} =$$
$$= -\frac{1 - 2 \cdot (\sigma^2 + ln(x) - ln\,(a))}{\sigma^3 \cdot x^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$
$$+ \frac{(\sigma^2 + ln(x) - ln\,(a)) \cdot (ln(x) - ln\,(a))}{\sigma^5 \cdot x^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x) - ln\,(a))^2}{2 \cdot \sigma^2}}.$$

$$f''\left(a \cdot e^{-\sigma^2}\right) =$$
$$= -\frac{1 - 2 \cdot (\sigma^2 - \sigma^2)}{\sigma^3 \cdot \left(a \cdot e^{-\sigma^2}\right)^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} - \frac{(\sigma^2 - \sigma^2) \cdot \sigma^2}{\sigma^5 \cdot \left(a \cdot e^{-\sigma^2}\right)^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot$$
$$\cdot e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)} = -\frac{e^{(2{,}5 \cdot \sigma^2)}}{\sigma^3 \cdot a^3 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} < 0.$$

Тобто $x = a \cdot e^{-\sigma^2}$ – точка максимуму. Отже $Mo(X) = a \cdot e^{-\sigma^2}$.
Обчислимо медіану.

$$F(Me(X)) = 0{,}5;$$
$$\Phi\left(\frac{ln(Me(X)) - ln\,(a)}{\sigma}\right) + 0{,}5 = 0{,}5;$$
$$\Phi\left(\frac{ln(Me(X)) - ln\,(a)}{\sigma}\right) = 0;$$
$$\frac{ln(Me(X)) - ln\,(a)}{\sigma} = 0;$$
$$ln(Me(X)) - l\,n(a) = 0;$$
$$Me(X) = a.$$

**5.** *Чим менше значення параметру σ, то ближчими один до одного є значення моди, медіани та математичного сподівання, а крива розподілу – ближчою до симетрії. Якщо в нормальному законі параметр a виступає як середнє значення випадкової величини, то в логнормальному – як медіана.*

**6.** *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини $X$, що має логнормальний розподіл, відповідно дорівнюють* (9.29):

$$As(X) = \left(e^{\sigma^2} + 2\right) \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}; Es(X) = e^{(4\cdot\sigma^2)} + 2 \cdot e^{(3\cdot\sigma^2)} + 3 \cdot e^{(2\cdot\sigma^2)} - 6. \quad (9.29)$$

**Доведення.** Довести формули (9.29) самостійно.

**7.** *Інформаційна ентропія випадкової величини $X$, що має логнормальний розподіл, дорівнюють* (9.30):

$$H(X) = \frac{1}{2} \cdot ln(2 \cdot e \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot a^2) \;. \quad (9.30)$$

**Доведення.** Ентропія логнормального розподілу визначається за формулою:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(f(x) \cdot ln\big(f(x)\big)\Big)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x)-ln(a))^2}{2\cdot\sigma^2}} \cdot ln\left(\frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x)-ln(a))^2}{2\cdot\sigma^2}}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ln(2 \cdot \pi \cdot e \cdot \sigma^2 \cdot a^2).$$

Логнормальний розподіл використовують для опису розподілу доходів, банківських вкладів, цін активів, місячної заробітної плати, посівних площ під різні культури, довговічності виробів у режимі зношування та старіння тощо.

**Приклад 9.11.** *Проведене дослідження показало, що вклади населення, розміщені в даному банку, можна описати випадковою величиною $X$, що має логнормальний розподіл з параметрами: $a = 530$; $\sigma^2 = 0{,}64$. Знайти*: **а)** *середній розмір вкладу*; **б)** *долю вкладників, розмір вкладу яких складає не менше $1000$ грн.*; **в)** *моду та медіану випадкової величини $X$.*

**Розв'язання. а)** Середній розмір вкладу – математичне сподівання, тому:

$$M(X) = 530 \cdot e^{\left(\frac{0{,}64}{2}\right)} \approx 730 \text{ (грн)}.$$

**б)** Доля вкладників, розмір вкладу яких не менше $1000$ грн., обчислюється за формулою (9.27).

$$P\{X \geq 1000\} = P\{1000 \leq X < +\infty\} = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{ln(1000) - ln(530)}{0{,}8}\right)$$

$$= 0{,}5 - \Phi(0{,}7936) \approx 0{,}5 - 0{,}285 \approx 0{,}2148.$$

**в)** За формулою (9.28)

$$Mo(X) = 530 \cdot e^{-0{,}64} \approx 280 \text{ (грн)};$$

$$Me(X) = 530 \text{ (грн)}.$$

**Відповідь.** а) $M(X) \approx 730$ грн; б) $P\{X \geq 1000\} \approx 0{,}2148$; в) $Mo(X) \approx 280$ грн; $Me(X) = 530$ грн.

**Приклад 9.12.** *Обчислити інформаційну ентропію випадкової величини $X$, що має логнормальний розподіл з параметрами: $a = 1$; $\sigma^2 = 1$, а також її коефіцієнт асиметрії та ексцес.*

**Розв'язання.** За формулою (9.30)

$$H(X) = \frac{1}{2} \cdot ln(2 \cdot e \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 1^2) = \frac{1}{2} \cdot ln(2 \cdot e \cdot \pi) \approx 1{,}418.$$

За формулою (9.29)

$$As(X) = (e^1 + 2) \cdot \sqrt{e^1 - 1} = (e + 2) \cdot \sqrt{e - 1} \approx 6{,}185;$$
$$Es(X) = e^4 + 2 \cdot e^3 + 3 \cdot e^2 - 6 \approx 119{,}936.$$

Тобто даний розподіл не є симетричним (зсув праворуч від моди) в порівнянні з нормальним розподілом (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

Також даний розподіл має більшу «піковість» або «випуклість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

Адекватність отриманих результатів можна побачити на рис. 9.9.

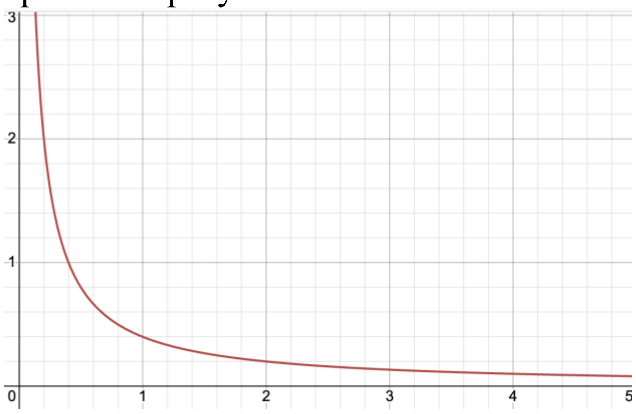


Рис. 9.9. Графік функції $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(ln(x))^2}{2}}$, де $x > 0$

**Відповідь.** $H(X) \approx 1{,}418$; $As(X) \approx 6{,}185$; $Es(X) \approx 119{,}936$.