ЛЕКЦІЯ 12

СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Упорядкованій набір $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ випадкових величин X_i $(i = 1, \dots, n)$, які задані на одному й тому самому просторі елементарних подій Ω, називається *системою n випадкових величин* або *n-вимірним випадковим вектором*.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини.

Розглянемо систему двох випадкових величин.

12.1. Двовимірні випадкові величини (системи двох випадкових величин)

Пара випадкових величин X і Y утворює *двовимірну випадкову величину* (X, Y) (*вектор*). Розподіл двовимірної випадкової величини задається функцією двох змінних (12.1):

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y). \quad (12.1)$$

Геометрично рівність (12.1) можна тлумачити так: $F(x, y)$ – це ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) попаде в нескінченний квадрат з вершиною (x, y), розміщений лівіше і нижче цієї вершини (рис. 12.1).

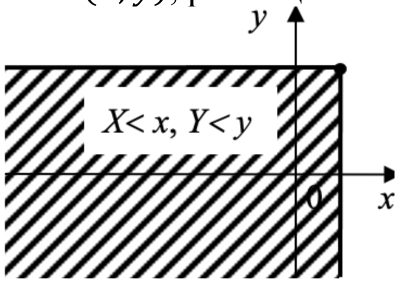

Рис. 12.1. Інтерпретація функція розподілу двовимірної випадкової величини

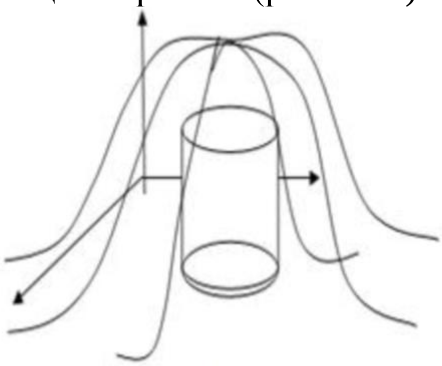

Рис. 12.2. Поверхня розподілу двовимірної випадкової величини

Властивості функції розподілу

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. *Функція розподілу неперервна зліва по кожному аргументу*:

$$\lim_{x \to x_1 + 0} F(x, y) = F(x_1, y); \quad \lim_{y \to y_1 + 0} F(x, y) = F(x, y_1).$$

3. *Функція $F(x, y)$ неспадна по кожному аргументу*:

$$F(x_1, y) \le F(x_2, y), \text{ якщо } x_1 < x_2; \; F(x, y_1) \le F(x, y_2), \text{ якщо } y_1 < y_2.$$

4. $F(x, +\infty) = F_1(x)$ – *функція розподілу компоненти* X,

$F(+\infty, y) = F_2(y)$ – *функція розподілу компоненти* Y.

5. $F(-\infty, y) = 0;\; F(x, -\infty) = 0; F(-\infty, -\infty) = 0; F(+\infty, +\infty) = 1.$

Двовимірну випадкову величину (X, Y) називають *дискретною*, якщо множина значень, які вона може набути, є скінченною або зліченною. Для завдання дискретної двовимірної величини досить задати її можливі значення (x_i, y_j) і ймовірності кожного значення $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $p_i = P\{X = x_i\}$, $q_j = P\{Y = y_j\}$ $(i = 1,2, \dots m,\; j = 1,2, \dots, n)$.

Закон розподілу такої випадкової величини задається таблицею (табл. 12.1):

Таблиця 12.1. *Матриця розподілу системи дискретних випадкових величин* (X, Y)

X	Y				
	y_1	y_2	…	y_n	$\sum_{i=1}^{m} p_i$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}	p_2
…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}	p_m
$\sum_{j=1}^{n} q_j$	q_1	q_2	…	q_n	1

В табл. 12.1 для ймовірностей p_i та q_j $(i = 1,2, \dots m,\; j = 1,2, \dots, n)$ справедливі умови (12.2) та (12.3):

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} p_{1j}, p_2 = \sum_{j=1}^{n} p_{2j}, \dots, p_m = \sum_{j=1}^{n} p_{mj}, \tag{12.2}$$

$$q_1 = \sum_{i=1}^{m} q_{i1}, q_2 = \sum_{i=1}^{m} q_{i2}, \dots, q_n = \sum_{i=1}^{m} q_{in}. \tag{12.3}$$

Сума всіх ймовірностей, що знаходяться в таблиці, дорівнює одиниці. Додаючи ймовірності стовпців і рядків, одержимо закони розподілу компонент X і Y.

Закони розподілу випадкових величин X і Y можна записати (табл. 12.2, 12.3):

Таблиця 12.2. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини* X

x_i	x_1	x_2	…	x_m
p_i	p_1	p_2	…	p_m

В табл. 12.2 ймовірності p_i обчислюються за формулами (12.2).

Таблиця 12.3. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини* Y

y_j	y_1	y_2	…	y_n
q_j	q_1	q_2	…	q_n

В табл. 12.3 ймовірності p_i обчислюються за формулами (12.3).

Двовимірну випадкову величину (X, Y) називають *неперервною*, якщо її функція розподілу $F(x, y)$ має неперервну мішану похідну другого порядку: $F''_{xy} = F''_{yx}$.

Щільність ймовірностей $f(x, y)$ неперервної випадкової величини (X, Y) визначається формулою (12.4):

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \qquad (12.4)$$

Тоді $F(x, y)$ можна подати у вигляді (12.5):

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dx dy. \qquad (12.5)$$

Властивості щільності розподілу

1. $f(x, y) \geq 0$ *при всіх* (x, y).

2. *Для щільності* $f(x, y)$ *неперервної випадкової величини* (X, Y) *справедлива рівність* (12.6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx = 1. \qquad (12.6)$$

3. *Якщо* D *– довільна область у площині* OXY*, то ймовірність попадання в область* D (*приклад області наведено на рис.* 12.3) *дорівнює* (12.7):

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy. \qquad (12.7)$$

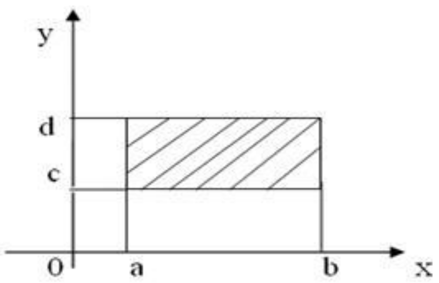

Рис. 12.3. Приклад області D

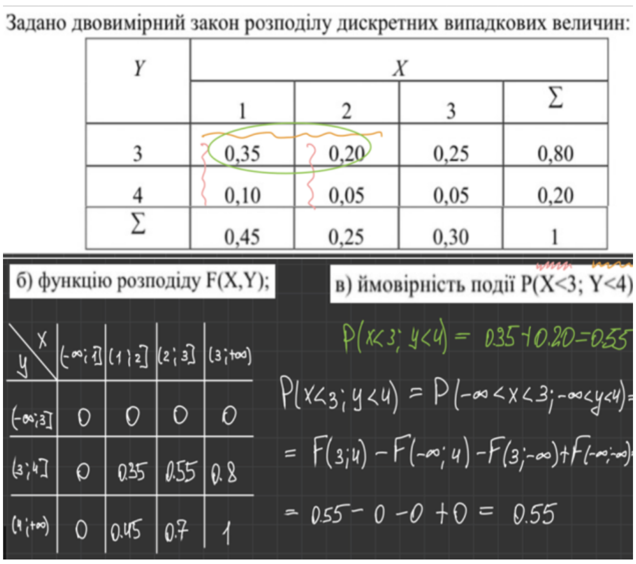

Рис. 12.4. Принцип побудови матриці розподілу для системи (X, Y) та обчислення $P\{a \leq X < b; c \leq Y < d\}$

Якщо область $D = \{a \leq X < b; c \leq Y < d\}$, то справедлива рівність (12.8):

$$P\{(X, Y) \in D\} = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c). \qquad (12.8)$$

Приклад побудови матриці розподілу наведено на рис. 12.4.

Знаючи щільність розподілу $f(x,y)$ двовимірної випадкової величини (X,Y), можна знайти щільність розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ для її компонент X і Y.

Функції розподілу одновимірних випадкових величин X і Y мають вигляд (12.9):

$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy,$$
$$F_2(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy. \qquad (12.9)$$

Диференціюючи функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$ відповідно по аргументам x і y, одержимо рівності (12.10):

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \; f_2(y) = \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \qquad (12.10)$$

Приклад 12.1. *Задано дискретна двовимірна випадкова величина* (*табл.* 12.4):

Таблиця 12.4. *Ряд розподілу системи випадкових величин* (X,Y)

X	Y			
	1	2	3	$\sum$
0	0,1	0	0,1	0,2
2	0	0,3	0,3	0,6
5	0,2	0	0	0,2
$\sum$	0,3	0,3	0,4	1

Знайти закони розподілу компонент X *і* Y.

Розв'язання. Додаючи стовпці і рядки таблиці ймовірностей, дістанемо закони розподілу випадкових величин X і Y відповідно (табл. 12.5, 24.6).

Таблиця 12.5. *Ряд розподілу випадкової величини* X

x_i	0	2	5
p_i	0,2	0,6	0,2

Таблиця 12.6. *Ряд розподілу випадкової величини* Y

y_j	1	2	3
q_j	0,3	0,3	0,4

Відповідь. табл. 12.5; табл. 12.6.

Приклад 12.2. *Задано функція розподілу двовимірної випадкової величини* (X,Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-3\cdot x})\cdot(1-e^{-5\cdot y}), & x \ge 0, y \ge 0, \\ 0, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x,y)$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} 3\cdot e^{-3\cdot x}\cdot(1-e^{-5\cdot y}), & x \ge 0, y \ge 0, \\ 0, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 15 \cdot e^{-3\cdot x} \cdot e^{-5\cdot y}, x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Отже, за формулою (12.4):

$$f(x,y) = \begin{cases} 15 \cdot e^{-3\cdot x} \cdot e^{-5\cdot y}, x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Відповідь. $f(x,y) = \begin{cases} 15 \cdot e^{-3\cdot x} \cdot e^{-5\cdot y}, x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad x < 0, y < 0. \end{cases}$

12.2. Умовні закони розподілу

Умовним законом розподілу називається розподіл однієї випадкової величини, знайдений за умови, що інша випадкова величина системи набула деякого фіксованого значення.

а) Нехай (X, Y) – дискретна двовимірна випадкова величина.

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_j$ називається перелік можливих значень випадкової величини $X = x_i$ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_j$. У табличній формі запису цей умовний закон має такий вигляд (табл. 12.7):

Таблиця 12.7. *Закон розподілу величини* $X/Y = y_j$

x_i	x_1	x_2	…	x_m
$P\left({}^{x_i}/{}_{Y = y_j}\right)$	$P\left({}^{x_1}/{}_{Y = y_j}\right)$	$P\left({}^{x_2}/{}_{Y = y_j}\right)$	…	$P\left({}^{x_m}/{}_{Y = y_j}\right)$

Умовні ймовірності $P\left({}^{x_i}/{}_{Y = y_j}\right)$ знаходяться за формулою (12.11):

$$P\left({}^{x_i}/{}_{Y = y_i}\right) = \frac{p_{ij}}{q_j}, (i = 1,2, \dots, m), \tag{12.11}$$

де q_j визначається з ряду розподілу компоненти Y (табл. 12.3).

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $Y = y_i$ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $X = x_i$. У табличній формі запису цей умовний закон має такий вигляд (табл. 12.8):

Таблиця 12.8. *Закон розподілу величини* $Y/X = x_i$

y_j	y_1	y_2	…	y_n
$P\left({}^{y_j}/{}_{X = x_i}\right)$	$P\left({}^{y_1}/{}_{X = x_i}\right)$	$P\left({}^{y_2}/{}_{X = x_i}\right)$	…	$P\left({}^{y_n}/{}_{X = x_i}\right)$

Умовні ймовірності $P\left({}^{y_j}/{}_{X = x_i}\right)$ знаходяться за формулою (12.12):

$$P\left({}^{y_j}/{}_{X = x_i}\right) = \frac{p_{ij}}{p_i}, (j = 1,2, \dots, n), \tag{12.12}$$

де p_j визначається з ряду розподілу компоненти X (табл. 12.2).

б) Нехай (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина.

Умовною щільністю $f(x/y)$ розподілу компоненти X при заданому значенні $Y = y$ називається відношення щільності розподілу двовимірної випадкової величини $f(x,y)$ до щільності розподілу $f_2(y)$ компоненти Y (12.13):

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}. \qquad (12.13)$$

Умовною щільністю $f(y/x)$ розподілу компоненти Y при заданому значенні $X = x$ називається відношення щільності розподілу двовимірної випадкової величини $f(x,y)$ до щільності розподілу $f_1(x)$ компоненти X (12.14):

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \qquad (12.14)$$

Приклад 12.3. *Задано двовимірний закон розподілу дискретних випадкових величин* (*табл.* 12.9):

Таблиця 12.9. *Ряд розподілу системи випадкових величин* (X,Y)

X	Y			
	1	2	3	$\sum$
3	0,15	0,2	0,25	0,6
4	0,1	0,1	0,2	0,4
$\sum$	0,25	0,3	0,45	1

Знайти: **а)** *умовний закон розподілу випадкової величини X при $Y = 2$;* **б)** *умовний закон розподілу випадкової величини Y при $X = 3$.*

Розв'язання. а) Знаходимо з формули (12.11):

$$P\left({}^{x_1}/_{Y=2}\right) = \frac{0,20}{0,30} = \frac{2}{3},\ P\left({}^{x_2}/_{Y=2}\right) = \frac{0,10}{0,30} = \frac{1}{3}.$$

Таблиця 12.10. *Закон розподілу величини* $X/Y = 2$

x_i	3	4
$P(x_i/Y = 2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

б) Знаходимо з формули (12.12):

$$P\left({}^{y_1}/_{X=3}\right) = \frac{0,15}{0,60} = \frac{1}{4},\ P\left({}^{y_2}/_{X=3}\right) = \frac{0,20}{0,60} = \frac{1}{3},\ P\left({}^{y_3}/_{X=3}\right) = \frac{0,25}{0,60} = \frac{5}{12}.$$

Таблиця 12.11. *Закон розподілу величини* $Y/X = 3$

y_j	1	2	3
$P(y_j/X = 3)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

Відповідь. табл. 12.11.

Приклад 12.4. *Двовимірна випадкова величина задана щільністю розподілу:*

$$f(x,y) = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\pi}\cdot e^{-9\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y - y^2}.$$

Знайти умовні закони розподілу компонент.

Розв'язання. Знайдемо умовні щільності розподілу компонент:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9\cdot x^2-2\cdot x\cdot y-y^2}dy=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\pi}\cdot e^{-8\cdot x^2}$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y)^2}d(x+y)=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-8\cdot x^2},$$

враховуючи, що інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$.

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-9\cdot x^2-2\cdot x\cdot y-y^2}dx=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\pi}\cdot e^{-\frac{8}{9}\cdot y^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(3\cdot x+\frac{1}{3}\cdot y\right)^2}d\left(3\cdot x+\frac{1}{3}\cdot y\right)=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{8}{9}\cdot y^2}.$$

Одержимо з формул з формул (12.13) та (12.14):

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\left(3\cdot x+\frac{1}{3}\cdot y\right)^2},$$
$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-(x+y)^2}.$$

Відповідь. $f(x/y)=\frac{3}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\left(3\cdot x+\frac{1}{3}\cdot y\right)^2}$, $f(y/x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-(x+y)^2}$.

12.3. Залежні і незалежні випадкові величини

Дві дискретні випадкові величини X і Y називаються *незалежними*, якщо для кожної ймовірності p_{ij} в матриці розподілусистеми випадкових величин (X,Y) (табл. 12.1) справедлива рівність (12.15):

$$p_{ij}=p_i\cdot q_j, \tag{12.15}$$

де p_i, q_j обчислюються за формулами (12.2), (12.3).

Дві неперервні випадкові величини X і Y називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина, і коли функція розподілу пари (X,Y) дорівнює добутку функцій розподілу компонент (12.16):

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y), \tag{12.16}$$

де $F_1(x), F_2(x)$ обчислюються за формулою (12.9).

В протилежному випадку, при невиконанні рівностей (12.15) або (12.16), випадкові величини X і Y називаються *залежними*.

З формули (12.4) одержимо (12.17):

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y), \tag{12.17}$$

де $f_1(x), f_2(y)$ обчислюються за формулою (12.10).

Приклад 12.5. *Дана функція розподілу двовимірної випадкової величини* (X,Y):

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq 0,\\ 0, & x<0 \text{ або } y<0.\end{cases}$$

Знайти функції розподілив компонент. Перевірити незалежність випадкових величин.

Розв'язання. За властивістю функції розподілу $F(x,y)$ маємо:

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \lim_{y\to+\infty}(1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}) = 1 - 3^{-x},\ x \geq 0.$$

Отже,

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 - 3^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x\to+\infty}(1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}) = 1 - 3^{-y},\ y \geq 0.$$

Отже,

$$F_2(y) = \begin{cases} 1 - 3^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) = (1 - 3^{-x}) \cdot (1 - 3^{-y}) =$$
$$= 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} = F(x, y),$$

де $x \geq 0$ та $y \geq 0$. Таким чином, випадкові величини X і Y незалежні.

Відповідь. X і Y незалежні; $F_1(x) = 1 - 3^{-x}$; $F_2(y) = 1 - 3^{-y},\ x, y \geq 0$.

Приклад 12.6. *Двовимірна випадкова величина* (X, Y) *задана щільністю розподілу*:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + y^2)},\ x, y \in R.$$

Довести, що X *і* Y *незалежні.*

Розв'язання. Маємо за формулами (12.8) та (12.9):

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + y^2)} dy = \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + x^2)} \cdot$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + x^2)} \cdot arctg(y)|_{-\infty}^{+\infty} =$$
$$= \frac{1}{\pi \cdot (1 + x^2)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + x^2)};$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + y^2)} dx = \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + y^2)} \cdot$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dy = \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + x^2)} \cdot arctg(x)|_{-\infty}^{+\infty} =$$
$$= \frac{1}{\pi \cdot (1 + y^2)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + y^2)}.$$

Отже, оскільки

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{\pi^2 \cdot (1 + x^2) \cdot (1 + y^2)} = f(x, y),$$

то X і Y незалежні.

Відповідь. X і Y незалежні.

Залежність між випадковими величинами X і Y називається *ймовірнісною* (*стохастичною* або *статистичною*), якщо залежність між випадковими величинами означає аналітичну залежність щільності умовного розподілу однієї з них від значень, яких набуває друга величини. Виявляється вона не лише у зміні умовних законів розподілу, а й у зміні умовних числових характеристик.

12.4. Нормальний закон розподілу двовимірної випадкової величини

З усіх законів розподілу системи двох випадкових величин найбільше поширення на практиці має нормальний розподіл.

Розглянемо спочатку нормальний розподіл для системи двох незалежних випадкових величин.

Нехай X і Y – нормально розподілені і незалежні випадкові величини, а відповідні їм щільності розподілення мають вигляд:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sigma_1\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\cdot\sigma_1^2}};\ f_2(y)=\frac{1}{\sigma_2\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\cdot\sigma_2^2}}.$$

Отже, щільність розподілу системи (X,Y), на підставі теореми добутку щільностей розподілу для випадку незалежних величин отримаємо у вигляді (12.18):

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}. \qquad (12.18)$$

Двовимірна випадкова величина (X,Y) має *нормальний закон розподілу*, якщо її щільність розподілу має вигляд (12.18).

Якщо центр розсіювання системи збігається з початком координат, то $a_1=a_2=0$, отже, отримаємо (12.19):

$$f(x,y)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}. \qquad (12.19)$$

Вираз (12.19) називається *канонічною формою нормального розподілу на площині*.

Для дослідження виду поверхні розподілу необхідно застосувати метод перерізів. Перетинаємо поверхню розподілу площинами, паралельними координатній площині XOY. Проектуючи переріз на цю координатну площину, ми отримаємо сімейство подібних і однаково розміщених еліпсів зі спільним центром в початку координат. Для того, щоб переконатися в цьому, запишемо рівняння лінії перетину поверхні розподілу площиною

$$z=z_0=const.$$

Очевидно, що сталому значенню z_0 функції (12.18) відповідає стале значення степеня, тобто: $\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}=k^2$ $(k=const)$.

Це рівняння є рівнянням проекції на координатну площину XOY лінії перерізу поверхні розподілу площиною $z=z_0$. Перетворивши рівняння до вигляду $\frac{x^2}{k^2\cdot\sigma_1^2}+\frac{y^2}{k^2\cdot\sigma_2^2}=1$ побачимо, що воно є рівнянням еліпса, головні півосі якого пропорційні σ_1, σ_2 і збігаються, відповідно, з осями OX, OY, а центр знаходиться в початку координат. Оскільки k може змінюватися від нуля до нескінченності, то ми маємо сімейство подібних і однаково розміщених еліпсів. Кожний еліпс із цього сімейства є геометричним місцем точок, де щільність розподілу $f(x,y)$ дорівнює постійній величині.

Тому вони називаються еліпсами однакової щільності або еліпсами розсіювання. Спільні осі симетрії всіх еліпсів розсіювання називаються головними осями розсіювання. При $\sigma_1 = \sigma_2$ еліпси перетворюються в кола і розподіли називають круговими.

Перетинаючи поверхню розподілу площинами, паралельними координатній площині YOZ, ми будемо отримувати криві, подібні кривим нормального розподілу. Таким чином, поверхня розподілу має вигляд горба, вершина якого знаходиться на осі OZ (рис. 12.5).

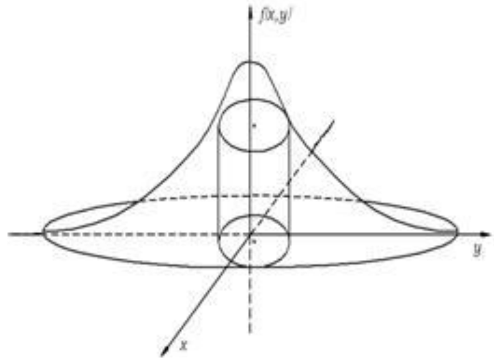

Рис. 12.5. Поверхня розподілу двовимірної нормальної випадкової величини (X, Y)

Поверхня розподілу (рис. 12.2) відрізняється від поверхні розподілу (рис. 12.4) тільки тим, що центр еліпсів розсіювання має координати (a_1, a_2), а головні осі розсіювання паралельні, відповідно, осям координат, тобто поверхня розподілу (рис. 12.2) отримується паралельним перенесенням поверхні розподілу (рис. 12.4).

Обчислимо для розподілу (12.18) ймовірність попадання в прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат. Прямокутник обмежений абсцисами a, b і ординатами c, d (рис. 12.3).

Застосовуючи загальну формулу для розрахунку ймовірності попадання випадкової точки в довільну область для вказаного випадку, запишемо початковий вираз для шуканої ймовірності у вигляді:

$$P(a < X < b; c < Y < d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx =$$
$$= \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) =$$
$$= \left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2 \cdot \sigma_1^2}} \right) dx \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\int_c^d \left(\frac{1}{\sigma_2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2 \cdot \sigma_2^2}} \right) dy \right).$$

Для кожної з випадкових величин (X, Y) використаємо формулу (12.20) для обчислення ймовірностей за нормальним законом розподілу:

$$P(a < X < b; c < Y < d) = \left(\Phi\left(\frac{b-a_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{a-a_1}{\sigma_1}\right)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\Phi\left(\frac{d-a_2}{\sigma_2}\right) - \Phi\left(\frac{c-a_2}{\sigma_2}\right)\right), \quad (12.20)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Якщо сторони прямокутника не паралельні осям координат (головним осям розсіювання), ця формула для ймовірності попадання в прямокутник не застосовуються.

Двовимірний нормальний розподіл допускає узагальнення на систему n випадкових величин $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, а саме:

Якщо випадкові величини $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ *мають нормальний розподіл і незалежні між собою, то система випадкових величин* $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ *має n-вимірний нормальний розподіл зі щільністю ймовірності* (12.21):

$$f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = \frac{1}{(2\cdot\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot\sigma_1\cdot\ldots\cdot\sigma_n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\dots+\frac{(x_n-a_n)^2}{\sigma_n^2}\right)}. \quad (12.21)$$

Розглянемо нормальний розподіл на площині для залежних величин. Щільність нормального розподілу для двовимірної випадкової величини (X, Y) записується формулою (12.22):

$$f(x,y) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\cdot(1-\rho^2)}\cdot\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\cdot\rho\cdot\frac{(x-a_1)\cdot(y-a_2)}{\sigma_1\cdot\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}, \quad (12.22)$$

де a_1, a_2 – математичні сподівання, σ_1, σ_2 – середні квадратичні відхилення, $\rho(X, Y)$ – коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y.

12.5. Числові характеристики двовимірної випадкової величини

Нехай (X, Y) – дискретна двовимірна випадкова величина.

Математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення визначаються формулами (12.23)-(12.29):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m}(x_i \cdot p_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\right)\right). \quad (12.23)$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\right)\right) - M^2(X). \quad (12.24)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (12.25)$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{n}(y_j \cdot q_j) = \sum_{j=1}^{n}\left(y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\right)\right). \quad (12.26)$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{j=1}^{n}\left(y_i^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\right)\right) - M^2(Y). \quad (12.27)$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}. \quad (12.28)$$

$$M(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}). \quad (12.29)$$

Нехай (X, Y) – неперервна двовимірна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x, y)$. Тоді справедливі формули (12.30)-(12.32):

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\cdot f(x,y)\right)dxdy, \qquad (12.30)$$
$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y\cdot f(x,y)\right)dxdy, \qquad (12.31)$$
$$M(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\cdot y\cdot f(x,y)\right)dxdy. \qquad (12.32)$$

Якщо $f(x,y)$ приймає значення в деякій області D площини OXY, то справедливі формули (12.30)-(12.35):

$$M(X)=\iint_D\left(x\cdot f(x,y)\right)dxdy, \qquad (12.33)$$
$$M(Y)=\iint_D\left(y\cdot f(x,y)\right)dxdy, \qquad (12.34)$$
$$M(X,Y)=\iint_D\left(x\cdot y\cdot f(x,y)\right)dxdy. \qquad (12.35)$$

Аналогічно для дисперсії справедливі формули (12.36)-(12.37):

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x,y)\right)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2\cdot f(x,y)\right)dxdy-M^2(X), \qquad (12.36)$$
$$D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(y-M(Y)\right)^2\cdot f(x,y)\right)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y^2\cdot f(x,y)\right)dxdy-M^2(Y). \qquad (12.37)$$

Якщо $f(x,y)$ приймає значення в деякій області D площини OXY, то справедливі формули (12.38)-(12.39):

$$D(X)=\iint_D\left(\left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x,y)\right)dxdy=\iint_D\left(x^2\cdot f(x,y)\right)dxdy-M^2(X), \qquad (12.38)$$
$$D(Y)=\iint_D\left(\left(y-M(Y)\right)^2\cdot f(x,y)\right)dxdy=\iint_D\left(y^2\cdot f(x,y)\right)dxdy-M^2(Y). \qquad (12.39)$$

Точка $\left(M(X),M(Y)\right)$ називається *центром розсіювання двовимірної випадкової величини*. Дисперсія випадкової величини (X,Y) характеризує розсіювання випадкової точки (X,Y) навколо точки $\left(M(X),M(Y)\right)$в напрямі OX і OY на площині OXY.

Для з'ясування наявності зв'язку та рівня залежності між випадковими величинами X і Y застосовують таки числові характеристики, як коваріацію та коефіцієнт кореляції.

Коваріацією (*кореляційним моментом*) випадкових величин X і Y називається число, яке обчислюється за формулою (12.40):

$$K(X,Y)=M\left(\left(X-M(X)\right)\cdot\left(Y-M(Y)\right)\right)=M(X,Y)-M(X)\cdot M(Y). \qquad (12.40)$$

Нехай (X,Y) – дискретна двовимірна випадкова величина. Тоді справедлива формула (12.41):

$$K(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i\cdot y_j\cdot p_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{m}\left(x_i\cdot p_i\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(y_j\cdot q_j\right). \qquad (12.41)$$

Для неперервної двовимірної випадкової величини (X,Y) справедлива формула (12.42):

$$K(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x\cdot y\cdot f(x,y)\big)dxdy -$$
$$-\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x\cdot f(x,y)\big)dxdy\Big)\cdot\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(y\cdot f(x,y)\big)dxdy\Big). \quad (12.42)$$

Якщо $f(x,y)$ приймає значення в деякій області D площини OXY, то справедлива формула (12.43):

$$K(X,Y) = \iint_D \big(x\cdot y\cdot f(x,y)\big)dxdy - \left(\iint_D \big(x\cdot f(x,y)\big)dxdy\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\iint_D \big(y\cdot f(x,y)\big)dxdy\right). \quad (12.43)$$

Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами X і Y називається число, що обчислюється за формулою (12.44):

$$\rho(X,Y) = \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}. \quad (12.44)$$

Для будь-яких випадкових величин $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$.

Значення коефіцієнта кореляції (за модулем)	0,1 - 0,3	0,3 - 0,5	0,5 - 0,7	0,7 - 0,9	0,9 - 0,99
Характеристика сили зв’язку	слабкий	помір-ний	поміт-ний	сильний	дуже сильний

Рис. 12.6. Шкала Чеддока виявлення сили зв’язку за значеннями парного коефіцієнту кореляції

Властивості

1. *Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X і Y дорівнює ± 1 тоді і тільки тоді, коли X і Y зв’язані лінійною залежністю $Y = a\cdot X + b$, причому $\rho(X,Y) = 1$ при $a > 0, \rho(X,Y) = 1$ при $a < 0$.*

2. *Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $\rho(X,Y) = 0$. Якщо $\rho(X,Y) \neq 0$, то X і Y залежні випадкові величини.*

Випадкові величини X і Y, для яких $\rho(X,Y) = 0$ називаються *некорельованими*.

Випадкові величини X і Y, для яких $\rho(X,Y) \neq 0$ називаються *корельованими*.

З некорельованості двох випадкових величин, взагалі кажучи, не випливає їх незалежність.

Для нормально розподілених випадкових величин некорельованість рівносильна незалежності.

Коефіцієнт кореляції служить для оцінки тісноти лінійного зв’язку між випадковими величинами X і Y: чим ближче модуль коефіцієнта кореляції до одиниці, тим зв'язок сильніший, чим ближче модуль коефіцієнта кореляції до нуля, тим зв'язок слабший.

Умовне математичне сподівання випадкової величини Y при $X = x$, тобто $\mathrm{M}(Y/X) = \varphi(x)$ називається *функцією регресії випадкової величини Y відносно X*, або *регресією Y по X*.

Аналогічно $\mathrm{M}(Y/X) = \varphi(y)$ називається *функцією регресії X відносно Y*, або *регресією X по Y*.

Регресія Y по X показує, як змінюється в середньому величина Y при зміні величини X.

Якщо обидві функції $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$ лінійні, то X і Y зв’язані лінійною кореляційною залежністю.

Функція регресії може бути використана для прогнозування однієї з випадкових величин, якщо відоме значення іншої.

Приклад 12.7. *Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин* (X, Y) (*табл.* 12.12):

Таблиця 12.12. *Ряд розподілу системи випадкових величин* (X, Y)

$Y = y_j$ / $X = x_i$	5	6	7	$\sum$
2	0,1	0,1	0,2	0,4
4	0,01	0,02	0,17	0,2
6	0,3	0,05	0,05	0,4
$\sum$	0,41	0,17	0,42	1

Обчислити $M(X); D(X); \sigma(X); M(Y); D(Y); \sigma(Y); K(X,Y); \rho(X,Y); P(2 < X \leq 6; 5 \leq Y < 7)$.

Розв’язання. Числові характеристики обчислюємо за формулами (12.23)-(12.29):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i \cdot p_i) = 5 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}2 = 5{,}9;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i^2 \cdot p_i\right) = 5^2 \cdot 0{,}3 + 6^2 \cdot 0{,}5 + 7^2 \cdot 0{,}2 = 35{,}3;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 35{,}3 - 34{,}81 = 0{,}49;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}7;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \cdot q_j\right) = 2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 = 4;$$

$$M(Y^2) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j^2 \cdot q_j\right) = 2^2 \cdot 0{,}4 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}4 = 19{,}2;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 19{,}2 - 16 = 3{,}2;$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} \approx 1{,}79.$$
$$M(X,Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}\right) =$$
$$= 2\cdot 5\cdot 0{,}1 + 2\cdot 6\cdot 0{,}1 + 2\cdot 7\cdot 0{,}2 + 4\cdot 5\cdot 0{,}01 + 4\cdot 6\cdot 0{,}02$$
$$+ 4\cdot 7\cdot 0{,}17 + 6\cdot 5\cdot 0{,}3 + 6\cdot 6\cdot 0{,}3 + 6\cdot 7\cdot 0{,}05 = 23{,}16;$$
$$K(X,Y) = M(X,Y) - M(X)\cdot M(Y) = 23{,}16 - 5{,}9\cdot 4 = -0{,}44.$$

Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$\rho(X,Y) = \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{-0{,}44}{0{,}7\cdot 1{,}79} \approx -0{,}35.$$

Випадкові величини X і Y залежні. Згідно шкали Чеддока (рис. 12.6) залежність між компонентами системи (X,Y) є помірною.

Знайдемо $P(5 < X \le 7{,}2 \le Y < 7) = 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}2 + 0{,}17 = 0{,}49$.

Відповідь. $M(X) = 5{,}9$; $D(X) = 0{,}49$; $\sigma(X) = 0{,}7$; $M(Y) = 4$; $D(Y) = 3{,}2$; $\sigma(Y) \approx 1{,}79$; $K(X,Y) = -0{,}44$; $\rho(X,Y) \approx -0{,}35$; $P(2 < X \le 6; 5 \le Y < 7) = 0{,}49$.

Приклад 12.8. *Неперервна двовимірна випадкова величина* (X,Y) *задана щільністю розподілу*:

$$f(x,y) = \begin{cases} A\cdot x\cdot y, (x,y) \in D, \\ 0, \qquad\quad (x,y) \notin D, \end{cases}$$

де область D *– трикутник, обмежений прямими* $x + y - 1 = 0, x = 0, y = 0$. *Знайти число* A; $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; $K(X,Y)$; $\rho(X,Y)$.

Розв'язання. Оскільки $f(x,y)$ приймає значення в області D (рис. 12.7), то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = 1.$$

Одержимо:

$$\iint_D (A\cdot x\cdot y)dxdy$$
$$= A\cdot\int_0^1\left(x\cdot\left(\int_0^{1-x} ydy\right)\right)dx = \frac{A}{2}\cdot\int_0^1 (x - 2\cdot x^2 + x^3)dx$$
$$= \frac{A}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2\cdot x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{A}{24} = 1.$$

Звідси $A = 24$.

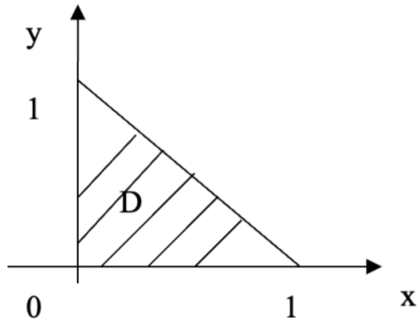

Рис. 12.7. Зображення області D

Отже,

$$f(x,y) = \begin{cases} 24 \cdot x \cdot y, (x,y) \in D, \\ 0, \qquad (x,y) \notin D. \end{cases}$$

За формулами (12.33)-(12.39), (12.43), (12.44)

$$M(X) = \iint_D x \cdot f(x,y)dxdy =$$

$$= 24 \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \left(x^2 \cdot \left(\int_0^{1-x} ydy\right)\right)dx$$

$$= 12 \cdot \int_0^1 (x^2 - 2 \cdot x^3 + x^4)dx = 12 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5};$$

$$M(Y) = \iint_D y \cdot f(x,y)dxdy = 24 \cdot \int_0^1 \left(y^2 \cdot \left(\int_0^{1-y} xdx\right)\right)dy = \frac{2}{5};$$

$$M(X^2) = \iint_D x^2 \cdot f(x,y)dxdy =$$

$$= 24 \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \left(x^3 \cdot \left(\int_0^{1-x} ydy\right)\right)dx$$

$$= 12 \cdot \int_0^1 (x^3 - 2 \cdot x^4 + x^5)dx = 12 \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2 \cdot x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5};$$

$$M(Y^2) = \iint_D y^2 \cdot f(x,y)dxdy = 24 \cdot \int_0^1 \left(y^3 \cdot \left(\int_0^{1-y} xdx\right)\right)dy = \frac{1}{5};$$

$$D(X) = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}, \sigma(X) = \frac{1}{5};$$

$$D(Y) = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}, \sigma(Y) = \frac{1}{5};$$

$$M(X,Y)=\iint_D x\cdot y\cdot f(x,y)dxdy$$
$$=24\cdot$$
$$\cdot\int_0^1\left(x^2\cdot\left(\int_0^{1-x}y^2dy\right)\right)dx$$
$$=8\cdot$$
$$\cdot\int_0^1(x^2-3\cdot x^3+3\cdot x^4-x^5)dx$$
$$=8\cdot\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3\cdot x^4}{4}+\frac{3\cdot x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15};$$
$$K(X,Y)=M(X,Y)-M(X)\cdot M(Y)=\frac{2}{15}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=-\frac{2}{75};$$
$$\rho(X,Y)=\frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=-\frac{2}{3}.$$

Згідно шкали Чеддока (рис. 12.6) кореляційний зв’язок між компонентами системи (X,Y) є помітним.

Відповідь. $A=24$; $M(X)=\frac{2}{5}$; $D(X)=\frac{1}{5}$; $\sigma(X)=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $M(Y)=\frac{2}{5}$; $D(Y)=\frac{1}{5}$; $\sigma(Y)=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $K(X,Y)=-\frac{2}{75}$; $\rho(X,Y)=-\frac{2}{3}$.

Приклад 12.9. *Двовимірна випадкова величина* (X,Y) *задана щільністю розподілу*:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x^2+y^2\le 1,\\ 0, x^2+y^2>1,\end{cases}$$

Обчислити коефіцієнт кореляції та зробити висновок про корельованість випадкових величин X,Y.

Розв’язання. З’ясуємо питання про залежність X,Y.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2}, x\in[-1;1];$$
$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2}, y\in[-1;1].$$
$$\frac{1}{\pi}\ne\frac{4}{\pi^2}\cdot\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-y^2)}, x^2+y^2\le 1,$$

отже $f(x,y)\ne f_1(x)\cdot f_2(y)$. Таким чином, X,Y – залежні.

Знайдемо чисельні характеристики:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\cdot f_1(x)\right)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\left(x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)dx=-\frac{1}{\pi}\cdot$$
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=0;$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\big(y\cdot f_2(y)\big)dy=\frac{2}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\big(y\cdot\sqrt{1-y^2}\big)dy=-\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}d(1-y^2)=0,$$

оскільки у кожному випадку підінтегральна функція непарна і проміжок інтегрування симетричний відносно початку координат.

$$M(X,Y)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{1}xdx\cdot\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}ydx=0,$$

бо у внутрішньому інтегралі підінтегральна функція непарна і проміжок інтегрування симетричний відносно початку координат.

Таким чином:

$$K(X,Y)=M(X,Y)-M(X)\cdot M(Y)=0.$$

Отже, $\rho(X,Y)=0$, тобто випадкові величини X і Y некорельовані і залежні.

Відповідь. $\rho(X,Y)=0$, випадкові величини X і Y некорельовані і залежні.

Приклад 12.10. *Двовимірна випадкова величина* (X,Y) *задана матрицею розподілу* (*табл.* 12.13):

Таблиця 12.13. *Матриця розподілу величини* (X,Y)

X \ Y	1	2	3	$\sum$
0	0,1	0,1	0,1	0,3
1	0,1	0,2	0,1	0,4
2	0,1	0,1	0,1	0,3
$\sum$	0,3	0,4	0,3	1

Обчислити коефіцієнт кореляції та зробити висновок про корельованість випадкових величин X,Y.

Розв'язання. З'ясуємо питання про залежність X,Y.

$$p_0=0{,}3;\ q_1=0{,}3,\text{ тобто } p_0\cdot q_1=0{,}09;\text{ а } p_{01}=0{,}1.$$

Тобто $p_{01}\neq p_0\cdot q_1$. Отже X,Y – залежні.

Знайдемо чисельні характеристики:

$$M(X)=0{,}4+0{,}6=1;$$

$$M(Y)=0{,}3+0{,}8+0{,}9=2;$$

$$M(X,Y)=0{,}1+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}4+0{,}6=2.$$

Таким чином:

$$K(X,Y)=M(X,Y)-M(X)\cdot M(Y)=2-1\cdot 2=0.$$

Отже, $\rho(X,Y)=0$, тобто випадкові величини X і Y некорельовані і залежні.

Відповідь. $\rho(X,Y)=0$, випадкові величини X і Y некорельовані і залежні.