Диференціювання функції комплексної змінної

доц. І.В. Орловський

1. Диференційовність функції комплексної змінної

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ означена в деякому околі точки z_0.

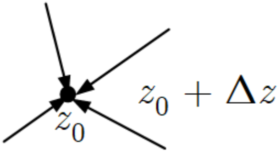
Означення 1

Функцію f називають диференційовною в точці z_0, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1}$$

яку називають похідною функції $f(z)$ у точці z_0 і позначають $f'(z_0)$.

У рівності (1) Δz будь-яким чином прямує до нуля, тобто точка $z_0 + \Delta z$ може наближатись до точки z_0 за будь-яким з нескінченної кількості напрямів.



Диференційовність функції $w = f(z)$ у точці z_0 означає, що її приріст можна зобразити у вигляді

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha \cdot \Delta z,$$

де $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha}{\Delta z} = 0.$

З диференційовності функції $f(z)$ в деякій точці z_0 випливає її неперервність в цій точці.

Означення 2

Функцію називають диференційовною в області, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

З означення похідної і властивостей границь випливає, що для функцій комплексної змінної зберігаються основні правила диференціювання функцій

1. $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$;
2. $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z)g'(z)$;
3. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$;
4. $\Big(f\,(g(z))\Big)'_z = f'_w\,(g(z)) \cdot g'_z(z)$, $(w = g(z))$;
5. $f'(z) = \dfrac{1}{(f^{-1}(w))'}$, $\big(f^{-1}(w) \neq 0\big)$, де $z = f^{-1}(w)$ є функцією, оберненою до $w = f(z)$.

2. Умови Коші — Рімана

Вимога диференційовності функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ у точці $z = x + iy$ накладає певні умови на дійсну та уявну частини цієї функції в околі точки $(x,\ y)$.

Теорема 1

Функція

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

диференційовна в точці $z = x + iy$, тоді й лише тоді, коли функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$:

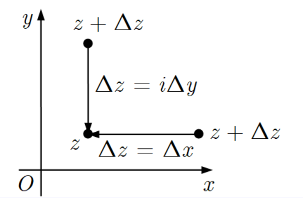
1. *диференційовні в точці $(x,\ y)$;*
2. *справджують умови*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \qquad (2)$$

Рівності (2) називають умовами Коші — Рімана (Ейлера — д'Аламбера).

Доведення

Доведемо необхідність. Нехай функція $f(z)$ диференційовна в точці z. Тоді границя



$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

не залежить від шляху прямування $z+\Delta z$ до z. Оберемо два наступних шляхи:

1. $z+\Delta z \to z$ уздовж прямої, паралельної дійсній осі;
2. $z+\Delta z \to z$ уздовж прямої, паралельної уявній осі.

У 1-му випадку $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta x \to 0$. Тоді

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x},$$

звідки отримуємо, що $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Для 2-го випадку $\Delta x = 0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = i\Delta y \to 0$. Тоді

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y},$$

звідки $f'(z) = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Прирівнюючи вирази для $f'(z)$, будемо мати

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Достатність залишимо без доведення. ■

Приміром, функція $w = \bar{z} = x - iy$ не диференційовна в жодній точці, оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

З доведення теореми й умов Коші–Рімана випливають формули обчислення похідної диференційовної функції $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Можна довести, що функції

$$w = e^z, \quad w = z^n \ (n \in \mathbb{N}),$$
$$w = \sin z, \quad w = \cos z, \quad w = \operatorname{tg} z, \quad w = \operatorname{ctg} z,$$
$$w = \operatorname{sh} z, \quad w = \operatorname{ch} z, \quad w = \operatorname{th} z, \quad w = \operatorname{cth} z$$

диференційовні в будь-якій точці комплексної площини, у якій вони означені. Приміром, доведемо диференційвність функції $w = e^z$.

$$u(x,y) = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y; \quad v(x,y) = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y.$$

$$u'_x = e^x \cos y; \qquad v'_x = e^x \sin y;$$
$$u'_y = -e^x \sin y; \qquad v'_y = e^x \cos y.$$

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

3. Аналітичність функції

Означення 3

Функцію $w = f(z)$ називають аналітичною в точці z, якщо вона диференційовна як у самій точці z, так і в деякому її околі.

Означення 4

Функцію $w = f(z)$, диференційовну в кожній точці деякої області D, називають аналітичною функцією в цій області.

Необхідною умовою аналітичності функції $f(z) = u + iv$ в точці є виконання умов Коші-Рімана для функцій u та v.

Означення 5

Точку z_0, у якій функція $f(z)$ аналітична, називають правильною точкою функції.

Означення 6

Якщо ж функція $f(z)$ аналітична в деякому проколеному околі точки z_0 і не аналітична в самій точці z_0 або не означена в ній, то z_0 називають особливою точкою функції $f(z)$.

Означення 7

Функцію $\varphi(x, y)$ називають *гармонічною в області D*, *якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно і задовольняє в цій області рівнянню Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Нехай функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в області D, причому функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні до 2-го порядку включно. Оскільки в області D виконано умови Коші — Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

то, диференціюючи першу з цих рівностей за змінною x, а другу — за змінною y, дістаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Звідси, враховуючи рівність $v''_{xy} = v''_{yx}$ матимемо співвідношення

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Таке саме рівняння можна одержати і для функції $v(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо функція $f(z) = u + iv$ аналітична в деякій області D, то її дійсна частина $u(x, y)$ та уявна частина $v(x, y)$ є гармонічними функціями у відповідній області площини Oxy.

Теорема 2 (про відновлення аналітичної функції)

Будь-яка гармонічна в однозв'язній області D функція є дійсною (уявною) частиною деякої аналітичної в цій області функції.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.