Розв'язання СЛАР методом простих ітерацій (Якобі)

$\varepsilon := 0.001$ - точність

Дана система рівнянь

$$100 \cdot x1 + 6 \cdot x2 - 2 \cdot x3 = 200$$
$$6 \cdot x1 + 200 \cdot x2 - 10 \cdot x3 = 600$$
$$x1 - 2 \cdot x2 + 100 \cdot x3 = 500$$

Матриці системи:

$$A := \begin{bmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & -2 & 100 \end{bmatrix} \qquad f := \begin{bmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

1) Перевірка збіжності ітераційного процесу

Для збіжності методів Якобі і Зейделя достатньо, щоб матриця A мала ***домінуючу головну діагональ***:

$$|a_{ii}| > \sum_{k=1,\, k \neq i}^{m} |a_{ik}|; \quad i = \overline{1, m} \quad \text{або} \quad |a_{jj}| > \sum_{k=1,\, k \neq j}^{m} |a_{kj}|; \quad j = \overline{1, m},$$

тобто якщо кожний діагональний елемент цієї матриці за модулем більший ніж сума модулів інших елементів цього ж рядка або стовпця.

Перевіримо, чи має матриця *A* діагональну перевагу

Маємо:

$$|100| > |6| + |-2| \qquad 100 > 8$$
$$|200| > |6| + |-10| \quad \text{або} \quad 200 > 16$$
$$|100| > |1| + |-2| \qquad 100 > 3$$

Перевірка:

$$n := 3$$

```
sum := | for i ∈ 1..n
       |   S_i ← Σ_{j=1}^{n} |A_{i,j}| − |A_{i,i}|
       | S
```

$$sum = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$ - сума модулів елементів *i* - го рядка матриці *A*

```
check := | for i ∈ 1..n
         |   if |A_{i,i}| < sum_i
         |     result ← "Матриця А не має діагональної переваги"
         |     break
         |   else
         |     result ← "Матриця А має діагональну перевагу"
         | result
```

$check =$ "Матриця А має діагональну перевагу"

Оскільки матриця *A* є матрицею з діагональною перевагою, то ітераційний процес є збіжним.

2) **Побудова ітераційного процесу (зведення системи рівнянь $A \cdot x = f$ до еквівалентної системи $x = \beta \cdot x + b$)**

Виразимо x1 через перше рівняння системи, x2 – через друге та x3 – через третє. В результаті ми отримаємо систему x=$\beta \cdot x + b$, еквівалентну заданій.

Знаходження матриць β та x:

$$n := 3$$

$$\beta := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad \text{if } i = j \\ \quad\quad\quad \beta_{i,j} \leftarrow 0 \\ \quad\quad \text{else} \\ \quad\quad\quad \beta_{i,j} \leftarrow -\dfrac{A_{i,j}}{A_{i,i}} \\ \beta \end{array} \right. \qquad b := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad b_i \leftarrow \dfrac{f_i}{A_{i,i}} \\ b \end{array} \right.$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Отже, маємо систему рівнянь виду $x = \beta \cdot x + b$

$$x1 = -0.06 \cdot x2 + 0.02 \cdot x3 + 2$$
$$x2 = -0.03 \cdot x1 + 0.05 \cdot x3 + 3$$
$$x3 = -0.01 \cdot x1 + 0.02 \cdot x2 + 5$$

3) Обрання вектору початкових значень

За вектор початкових значень оберемо вектор *b* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Початкове наближення:

$$x0 := b \qquad x0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4) Знаходження розв'язку системи *x* методом простих ітерацій

Обчислюємо значення вектору *x* за формулою

$$x^{(k+1)} = \beta \cdot x^{(k)} + b, \quad \text{де } k = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Критерій закінчення ітераційного процесу:

$$\max_j | x_j^{k+1} - x_j^k | < \varepsilon .$$

Крок 1

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 5.04 \end{bmatrix}$$

або

$$x1 := \beta \cdot x0 + b \qquad x1 = \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 5.04 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо *умову закінчення ітераційного процесу*

Обчислюємо модуль різниці відповідних елементів векторів x1 та x0

$$l := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| \, l_i \leftarrow |x1 - x0| \right. \\ l \end{array} \right. \qquad l = \begin{bmatrix} 0.21 \\ 0.21 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

$\max\left(l_1, l_2, l_3\right) = 0.21$ - максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів x1 та x0

$$kryterij := \left\| \begin{array}{l} \text{if } \max\left(l_1, l_2, l_3\right) < \varepsilon \\ \quad \left\| \, \text{“Розв’язок системи знайдено з заданою точністю ε ”} \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| \, \text{“Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”} \right. \end{array} \right.$$

$kryterij =$ “Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”

Крок 2

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.92 \\ 3.19 \\ 5.04 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9094 \\ 3.1944 \\ 5.0446 \end{bmatrix}$$

або

$$x2 := \beta \cdot x1 + b \qquad x2 = \begin{bmatrix} 1.9094 \\ 3.1944 \\ 5.0446 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо *умову закінчення ітераційного процесу*

Обчислюємо модуль різниці відповідних елементів векторів x2 та x1

$$l := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| \, l_i \leftarrow |x2 - x1| \right. \\ l \end{array} \right. \qquad l = \begin{bmatrix} 0.012364 \\ 0.012364 \\ 0.012364 \end{bmatrix}$$

$\max\left(l_1, l_2, l_3\right) = 0.012364$ - максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів x2 та x1

$$kryterij := \begin{array}{l} \text{if } \max\left(l_1, l_2, l_3\right) < \varepsilon \\ \quad \text{“Розв'язок системи знайдено з заданою точністю } \varepsilon \text{”} \\ \text{else} \\ \quad \text{“Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”} \end{array}$$

$kryterij =$ “Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”

Крок 3

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.9094 \\ 3.1944 \\ 5.0446 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.909228 \\ 3.194948 \\ 5.044794 \end{bmatrix}$$

або

$$x3 := \beta \cdot x2 + b \qquad x3 = \begin{bmatrix} 1.909228 \\ 3.194948 \\ 5.044794 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо *умову закінчення ітераційного процесу*

Обчислюємо модуль різниці відповідних елементів векторів x3 та x2

$$l := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad l_i \leftarrow |x3 - x2| \\ l \end{array} \qquad l = \begin{bmatrix} 0.000606 \\ 0.000606 \\ 0.000606 \end{bmatrix}$$

$\max\left(l_1, l_2, l_3\right) = 0.000606$ - максимальне значення модуля різниці відповідних елементів векторів x2 та x1

$$kryterij := \begin{array}{l} \text{if } \max\left(l_1, l_2, l_3\right) < \varepsilon \\ \quad \text{“Розв'язок системи знайдено з заданою точністю } \varepsilon \text{”} \\ \text{else} \\ \quad \text{“Умова зупинки ітераційного процесу не виконується”} \end{array}$$

$kryterij =$ “Розв'язок системи знайдено з заданою точністю ε ”

Оскільки за умовою необхідно знайти розв'язок системи рівнянь з заданою точністю $\varepsilon = 0.001$, то для заданої точності умова зупинки ітераційного процесу виконується.

Отже, вектор x3 є розв'язком даної системи рівнянь знайденим з точністю $\varepsilon = 0.001$.

$$x3 = \begin{bmatrix} 1.909228 \\ 3.194948 \\ 5.044794 \end{bmatrix}$$

5) Перевірка. Знаходження розв'язку системи *x* вбудованою функцією Mathcad

Розв'язання вихідної системи Ax=f

$$X := \text{lsolve}(A, f) \qquad X = \begin{bmatrix} 1.909198 \\ 3.194964 \\ 5.044807 \end{bmatrix}$$