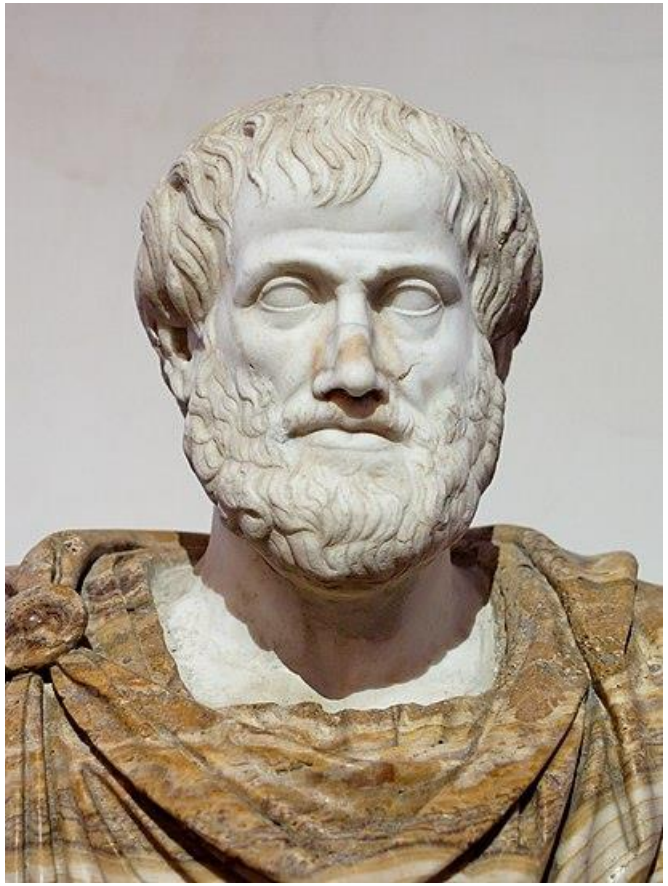
4 МАТЕМАТИЧНА

ЛОГІКА

Як наука логіка виникла у IV ст. до н.е. в працях старогрецького філософа Аристотеля (384 до н. е. — 322 до н. е.)

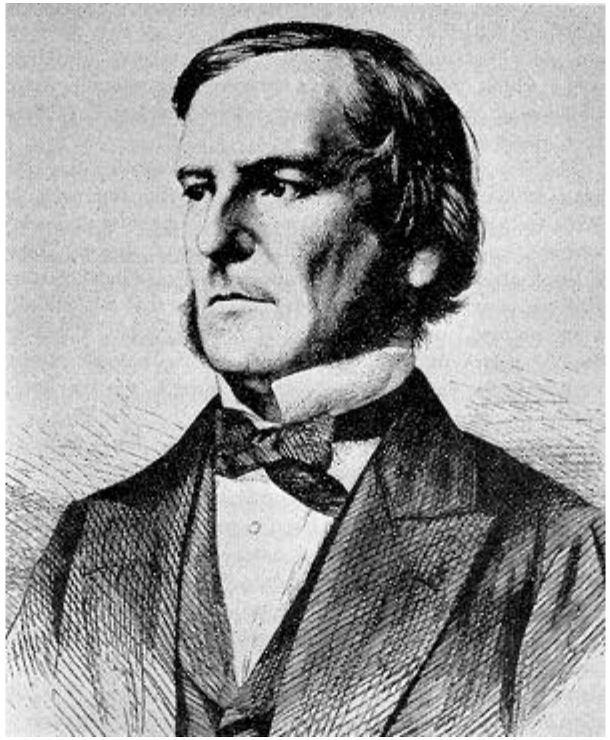


Ідею математизації логіки висловив у XVII ст. великий німецький вчений Лейбниць (1646 — 1716)

Основна ідея Лейбниця:

необхідно створити обчислення, в якому природні, змістовні доведення були б замінені формальними обчисленнями; таке обчислення припускає спеціальну символіку, в якій можуть бути зображені аксіоми, теореми та визначення математики

У середині XIX ст. ірландський математик Джордж Буль (1815 — 1864) частково втілив у життя ідею Лейбниця в роботах «Математичний аналіз»,



«Закони мислення» (було закладено основи булевої алгебри і алгебри логіки)

За допомогою алгебри логіки можна описувати міркування та «обчислювати» їх результати, якщо символам змінних поставити у відповідність деякі твердження, що називаються *висловлюваннями*, таке застосування алгебри логіки одержало назву ***логіки висловлювань***.

Логіка висловлювань була розширена додаванням змінних, що приймають значення із множини понять, що сформувало ***логіку предикатів***.

Оскільки в математичній логіці прийнята символічна мова, вона також називається символічною логікою.

В роботах Пеано, Пірса та Шредера також створювалася й удосконалювалася математична символіка.

Зусиллями таких видатних вчених, як Рассел, Уайтхед, Гільберт, Бернайс, Гедель і Черч, формалізація у рамках сучасних логічних обчислень досягла високого рівня.

Прагнення змоделювати на комп'ютері великий клас інтелектуальних процедур (ідеї штучного інтелекту) поставили перед логічною наукою нові задачі.

Математична логіка займається формалізацією деякої області людського мислення, у тому числі з ціллю надання можливості написання програми для обчислювальної машини, яка в цьому розумінні придбає здатність міркувати.

4.1 Логіка висловлювань

4.1.1 Логіка висловлювань

Висловлювання — це оповідальне речення, про яке можна сказати, істинне воно або хибне, але не те й інше одночасно.

Приклади

1. Сніг білий.
2. Київ — столиця України.
3. $x+1=3$.
4. Котра година?
5. Читай уважно!

Значення “істина” чи “хибність”, яких набуває висловлювання, називають його **значеннями істинності**.

Значення *“Істина”* позначають буквою I, T (від англ. “*truth*” — істина) або 1;

значення *“Хибність”* — буквою X, F (від англ. “*false*” — хибність) або 0.

Атоми (елементарні висловлювання) — висловлювання, які відповідають простим оповідальним реченням, тобто не мають складових частин.

Позначення атомів: A, B, C, ... або великі букви з індексами.

Складні висловлювання складаються з простих за допомогою *логічних операцій*:

- заперечення ($\neg$);
- кон'юнкції ($\wedge$);
- диз'юнкції ($\vee$);
- імплікації ($\rightarrow$);
- еквівалентності ($\sim$ або $\equiv$).

Символи операцій називають **пропозиційними зв'язками**.

Властивості логічних операцій:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \sim B$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T

Заперечення. Заперечення $\neg A$ істинне тоді і тільки тоді, коли A хибне.

Приклад. A — “горобець — птах” — істинне.

$\neg A$ — “горобець — не птах” — хибне.

$\neg\neg A$ — “Невірно, що горобець не птах” — еквівалентне висловлюванню “горобець — птах”.

Кон'юнкція. Висловлювання $A \wedge B$, що називається кон'юнкцією A і B, істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлювання A і B.

Ця логічна операція відповідає у природній мові зв'язкам "і", "та", що з'єднують два речення.

Приклад. Висловлювання “на вулиці йде дощ (A) з сильним вітром (B)” виражається формулою $A \wedge B$.

Кон’юнкція комутативна, тому висловлювання “на вулиці сильний вітер (B) та дощ (A)”, яке виражається формулою $B \wedge A$, еквівалентне попередньому.

Диз'юнкція. Висловлювання $A \vee B$, що називається диз'юнкцією A і B, хибне тоді і тільки тоді, коли хибні обидва висловлювання A і B.

Ця логічна операція відповідає поєднанню висловлювань природної мови за допомогою зв'язки “або”.

Приклад. Висловлювання “два помножити на два — чотири (A) або п’ять (B)” виражається формулою $A \vee B$ і є істинним.

Імплікація. Висловлювання $A \to B$, що називається імплікацією (умовним реченням), хибне тоді і тільки тоді, коли A істинне, а B хибне.

В імплікації $A \to B$ висловлювання A називається *засновком* (умовою, антецедентом), B — *наслідком* (висновком, консеквентом).

Причинно-наслідковий зв'язок між A і B, що виражається імплікацією, на природній мові описується такими зворотами: “якщо A, то B”, “A є достатньою підставою для B”, “B, тому що A”, “B, за умови виконання A”, “A тягне B” тощо.

Приклад. “Якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку”.

Еквівалентність. Якщо A і B — висловлювання, то висловлювання $A \sim B$ істинне тоді і тільки тоді, коли A і B або обидва істинні, або обидва хибні.

Приклад. “Тварина є птахом (A) тоді і тільки тоді, коли в неї є крила (B)”.

За допомогою логічних зв'язок складні висловлювання можна записати у вигляді формули, яку називають *пропозиційною формулою*.

(1) Кожна пропозиційна літера (атом) є формулою.

(2) Якщо A та B — формули, то формулами є: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$.

(3) Інших формул немає.

Приписування пропозиційним літерам їх значень істинності називається **інтерпретацією** формули.

Множина всіх інтерпретацій формули утворює її **таблицю істинності**.

Якщо виконати відображення 0⇔F та 1⇔T, то кожній пропозиційній зв’язці буде відповідати булева операція, а кожній формулі логіки висловлювань — булева формула.

Логіка висловлювань є інтерпретацією булевої алгебри.

Формула називається **тавтологією** (або *тотожно істинною*, або *загальнозначущою),* якщо вона приймає значення “Істина” на всіх інтерпретаціях (наборах значень змінних).

Позначення тавтології: $\vdash A$.

Формула називається **суперечністю** (або *тотожно хибною*, або *нездійсненною*), якщо вона приймає значення “Хибність” на всіх інтерпретаціях.

Формула називається *незагальнозначущою, нейтральною* або *несуперечливою,* якщо вона на одних інтерпретаціях приймає значення “Істина”, а на інших — “Хибність”.

Формула, яка приймає істинне значення хоча б на одній своїй інтерпретації, називається **виконуваною**.

Дві формули називаються **еквівалентними**, якщо їх таблиці істинності співпадають.

Приклад 1. Записати формулу, яка відповідає висловлюванню:

"Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики або не повторить матеріал самостійно, то він погано напише модульну контрольну".

A — "Іван пропустить лекцію з дискретної математики";

B — "Іван повторить матеріал самостійно";

C — "Іван напише модульну контрольну погано".

Формула:

$$A \vee \overline{B} \to C .$$

Приклад 2. Записати формулу, яка відповідає висловлюванню:

"Оскільки Петро пізно ліг спати, то він проспав і через це не встиг на автобус та спізнився на пару"

A — "Петро пізно ліг спати";

B — "Петро проспав";

C — "Петро встиг на автобус";

D — "Петро спізнився на пару".

Формула:

$$(A \to B) \to \bar{C} \wedge D.$$

Приклад 3. Побудувати таблицю істинності формули: $\varphi = \overline{\bar{A} \vee B} \rightarrow \left(C \sim B \wedge \bar{A}\right)$.

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$\overline{\bar{A} \vee B}$	$B \wedge \bar{A}$	$C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A}$	φ
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

4.1.2 Логічне слідування

Нехай A та B — формули.

B **логічно слідує** з A (або з A **логічно випливає** B) якщо всюди де A приймає істинне значення, B також приймає істинне значення.

Позначення: $A \vdash B$ або $A \to B$.

Теорема 1. Логічне слідування $A \vdash B$ виконується тоді і тільки тоді, коли формула $A \to B$ — тавтологія.

Якщо $A \vdash B$ і $B \vdash A$, то формула A **логічно еквівалентна** формулі B.

Позначення: $A \leftrightarrow B$ або $A \equiv B$.

Якщо формула A логічно еквівалентна B, то $A \sim B$ — тавтологія.

Приклад 3. Показати, що висловлювання $(A \wedge B) \vee \overline{C}$ логічно слідує з висловлювання $A \wedge \overline{C}$.

<u>Розв'язання</u>. Доведемо, що

$$\left(A \wedge \overline{C}\right) \to \left(\left(A \wedge B\right) \vee \overline{C}\right) \text{ — тавтологія.}$$

$$\left(A \wedge \overline{C}\right) \to \left(\left(A \wedge B\right) \vee \overline{C}\right) = \left(\overline{A \wedge \overline{C}}\right) \vee \left(\left(A \wedge B\right) \vee \overline{C}\right) =$$

$$= \overline{A} \vee C \vee \left(A \wedge B\right) \vee \overline{C} = \overline{A} \vee \left(A \wedge B\right) \vee C \vee \overline{C} =$$

$$= \overline{A} \vee \left(A \wedge B\right) \vee I = I.$$

Спосіб 2

A	B	C	$A \wedge \neg C$	$(A \wedge B) \vee \neg C$
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	1
1	0	1	0	
1	1	0	1	1
1	1	1	0	

4.1.3 Тавтології

Теорема 2 (правило modus ponens)

Якщо A — тавтологія і $A \to B$ — тавтологія, то B — тавтологія, тобто якщо $\vdash A$ та $\vdash A \to B$, то $\vdash B$.

Правило modus ponens (скорочено MP) встановлює логічне слідування $A, A \to B \vdash B$ і має назву **правила відділення**.

Правило *MP* виражає елементарний акт дедукції.

Імплікацію $A \rightarrow B$ можна інтерпретувати як правило, в якому A є “засновком”, а B — “наслідком”.

Тоді правило MP говорить про те, що наслідок B наступає при виконанні умови A, тобто при істинності засновку.

Приклад. Формула $A \rightarrow B$ може виражати таке правило: “якщо бачиш зеленого чоловічка, то можна переходити дорогу”.

Правило MP: коли засновок стає істинним (зелений чоловічок), то істинний і наслідок (можна переходити дорогу).

Теорема 3 (правило підстановки)

Якщо A — тавтологія, що містить пропозиційні змінні $x_1,\ldots, x_n$, то формула B, яка отримується з A підстановкою формул $A_1,...,A_n$ замість кожного входження $x_1,\ldots, x_n$ відповідно, також буде тавтологією.

Приклад. Формула $C \to (D \to C)$ — тавтологія.

Підставимо $E \vee C$ замість C, отримуємо нову тавтологію: $\vdash E \vee C \to (D \to E \vee C)$.

$\Rightarrow$ кожну тавтологію можна розглядати як схему, з якої за допомогою підстановки можна отримувати нескінченну множину тавтологій.

Теорема 4 (правило еквівалентної заміни)

Якщо B отримується з A підстановкою формули B_1 замість одного або декількох входжень підформули A_1 до A, то $((A_1 \sim B_1) \to (A \sim B))$ є тавтологія, і, відповідно, якщо A_1 та B_1 логічно еквівалентні, то A та B також логічно еквівалентні.

Іншими словами, якщо є тавтологія A, то в ній є підформула A_1, і якщо замінити A_1 на еквівалентну їй формулу B_1, то отримана формула B буде еквівалентна A.

Приклад. У тавтології $C \to (D \to C)$ замінимо підформулу $D \to C$ на еквівалентну їй формулу $\neg D \vee C$, отримаємо нову тавтологію $C \to (\neg D \vee C)$.

4.1.4 Формальні системи та аксіоматичний підхід

Формальні системи — це системи операцій над об’єктами, які розуміються як послідовності символів.

Формальна система має бути такою, яка алгоритмічно реалізується.

Для пошуку будь-якого виведення у формальній системі повинен не тільки існувати алгоритм виведення, але цей алгоритм має ще допускати реалізацію на існуючих ЕОМ.

Формальна теорія S — це:

1. множина A символів, які утворюють алфавіт;
2. множина Φ слів алфавіту A, які називаються формулами;
3. підмножина B формул, $B \subset \Phi$, які називаються аксіомами;
4. множина P відношень R на множині формул, $R \in P$, $R \subset \Phi^{n+1}$, які називаються правилами виведення.

Нехай $F_1,\ldots,F_n$, G — формули теорії S, тобто $F_1,\ldots,F_n$, $G \in \Phi$.

Якщо існує таке правило виведення R, $R \in P$, що $(F_1,\ldots,F_n, G) \in R$, то говорять, що формула G **безпосередньо виводиться** з формул $F_1,\ldots,F_n$ за правилом виведення R.

Позначення: $\dfrac{F_1,\ldots,F_n}{G} R$,

де формули $F_1,\ldots,F_n$ називаються **засновками**, а формула G — **висновком** правила R.

Приклад. Формула $D \to C$ виводиться з формул $C \to (D \to C)$ та C за правилом виведення MP:

$$\frac{C \to (D \to C),\, C}{D \to C}\,\mathrm{MP}.$$

Виведенням формули G **в формальній теорії** S називається така послідовність формул $E_1,\ldots,E_k$, що $E_k = G$, а будь-яка формула E_i $(i<k)$ є або аксіомою $(E_i \in B)$, або безпосередньо виводиться з раніше отриманих формул.

В цьому випадку формула G називається **теоремою** теорії S і позначається це $\vdash_S G$.

Виведенням формули G **з множини формул** Γ **в формальній теорії** S називається така послідовність формул $E_1,\ldots,E_k$, що $E_k = G$, а будь-яка формула E_i $(i<k)$ є або аксіомою $(E_i \in B)$, або належить до множини Γ $(E_i \in \Gamma)$, або безпосередньо виводиться з раніше отриманих формул.

Елементи Γ називаються **посилками виведення** або **гіпотезами**.

Цей факт позначається $\Gamma \vdash_S G$.

***Властивості виведень* з множини гіпотез**

1. Властивість **монотонності виведення**: якщо $\Gamma \vdash A$ та $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta \vdash A$.

2. Властивість **повноти** множини гіпотез: $\Gamma \vdash A$ тоді й тільки тоді, коли існує $\Delta \subseteq \Gamma$, таке що $\Delta \vdash A$.

3. Властивість **транзитивності** відношення виводимості: якщо $\Delta \vdash A$ і для кожного $B_i \in \Delta$, $\Gamma \vdash B_i$, то $\Gamma \vdash A$.