

3.3 Інші методи розв'язання проблеми

3.3.1 Ітераційні методи знаходження власних значень та власних векторів матриць

Ітераційні методи (Iteration methods) ґрунтуються на багатократному використанні ітераційного алгоритму, що наближає власний вектор, який одержується в кожному циклі, до точного розв'язку.

Розрахунок починається з початкового нормованого вектора $X^{(0)}$, який множиться зліва на матрицю A , і результат дорівнює добутку постійної (власне значення λ) і нормованого вектора $X^{(1)}$:

$$AX^{(0)} = \lambda X^{(1)}.$$

Якщо вектор $X^{(1)}$ збігається з $X^{(0)}$, то розрахунок припиняється. Інакше вектор $X^{(1)}$ використовується як початковий, і всі обчислення повторюються доти, доки $|X_i^{(n)} - X_i^{(n-1)}| \leq \varepsilon$, де $X^{(n)} \in \{x_i^{(n)}\}$ і $X^{(n-1)} \in \{x_i^{(n-1)}\}$ – вектори, що одержані в $n-1$ і n ітераційних циклах, а ε – задана припустима похибка обчислень.

Якщо процес збігається, одержаний постійний множник відповідає найбільшому власному значенню λ_{max} , а нормований вектор – відповідному власному вектору.

Аналогічно можна знайти найменше власне значення. Для цього початкова система рівнянь попередньо множиться на обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X,$$

звідки одержуємо $\frac{1}{\lambda} X = A^{-1}X$.

Подальше розв'язання задачі на власні значення за зазначеним алгоритмом приводить до максимального власного значення $\lambda_{max}^* = \frac{1}{\lambda_{min}}$, за яким знаходиться найменше власне значення λ_{min} .

Визначивши максимальне або мінімальне власне значення, можна знайти наступні за ним за величиною, замінивши вихідну матрицю матрицею, яка містить лише решту власних значень.

Принцип ортогональності власних векторів $X_i^T X_j = 0$ при $i \neq j$ і $X_i^T X_j = 1$ при $i = j$ дозволяє довести твердження, що якщо створити нову матрицю $A^* = A - \lambda_1 X_1 X_1^T$, то вона буде мати власне значення $\lambda_1 = 0$, а всі решта її власних значень будуть збігатися з власними значеннями вихідної матриці A . В результаті знаходимо λ_2 і далі, утворюючи A^{**} і т. д., аналогічно визначаємо всі власні значення і вектори.

3.3.2 Метод степенів

Метод степенів. Цей метод використовується переважно для визначання мажорантного власного значення та його нормалізованого вектора. *Мажорантним власним значенням* називається найбільше за абсолютною величиною власне значення матриці. Говорять, що *власний вектор є нормалізований*, якщо його координата, яка має найбільше значення за абсолютною величиною, дорівнює одиниці.

Припустимо, що матриця A має мажорантне власне значення λ і що існує єдиний нормалізований власний вектор v , який відповідає λ . Нехай початкове наближення власного вектора

$$v^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до методу степенів обчислюватимемо наступні наближення нормалізованого власного вектора за рекурентними формулами

$$y^k = A v^k, \quad c_{k+1} = \max \{ y^k \}, \quad v^{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} y^k, \quad (6.9)$$

де k – номер ітерації; c_{k+1} – найбільша за величиною координата вектора y^k (у разі збігу обирають першу з координат). Послідовності $\{c_k\}$ та $\{v^k\}$ збігаються відповідно до власного числа λ й відповідного до нього нормалізованого вектора v .

Наприклад, використаємо метод степенів, щоби знайти мажорантні власні значення і власний вектор матриці

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix}.$$

Нехай початкове наближення власного вектора $\mathbf{v}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Використовуючи формули (6.9), обчислимо перші ітераційні наближення до власних значення й вектора:

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{A}\mathbf{v}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = \max\{6, 8, 12\} = 12, \quad \mathbf{v}^1 = \frac{1}{c_1} \mathbf{y}^0 = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/12 \\ 8/12 \\ 12/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.67 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Унаслідок другої ітерації матимемо

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{A}\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.67 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.333 \\ 3.333 \\ 5.333 \end{bmatrix},$$

$$c_2 = 5.333, \quad \mathbf{v}^2 = \frac{1}{c_2} \cdot \mathbf{y}^1 = \frac{1}{5.333} \cdot \begin{bmatrix} 2.333 \\ 3.333 \\ 5.333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.438 \\ 0.625 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

У результаті третьої ітерації обчислимо:

$$\mathbf{y}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.438 \\ 0.625 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.875 \\ 2.75 \\ 4.5 \end{bmatrix},$$

$$c_3 = 4.5, \quad \mathbf{v}^3 = \frac{1}{c_2} \cdot \mathbf{y}^2 = \frac{1}{4.5} \cdot \begin{bmatrix} 1.875 \\ 2.75 \\ 4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.417 \\ 0.611 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Продовжуючи ітераційні обчислення, побачимо, що послідовність величин c_k та \mathbf{v}^k , збігається до справжніх значень, які відповідають власному значенню λ і нормалізованому власному векторові \mathbf{v} :

$$c_k \rightarrow \lambda = 4, \quad \mathbf{v}^k \rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{де } k - \text{номер ітерації.}$$

Такий результат у даному прикладі досягнуто на восьмій ітерації (за $k = 8$) з похибкою 0.01.

3.3.3 Метод скалярних добутків знаходження максимального власного значення симетричної матриці

Для знаходження першого власного значення λ_1 дійсної матриці A можна вказати дещо інший ітераційний процес, що є іноді є більш вигідним. Метод скалярних добутків заснований на утворенні скалярних добутків

$$(A^k y_0, A'^k y_0) \text{ і } (A^{k-1} y_0, A'^k y_0) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де A' – матриця, транспонована до матриці A , і y_0 – обраний яким-небудь чином початковий вектор.

Перейдемо до викладення самого методу.

Нехай A – дійсна матриця і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – її власні значення, які є різними та задовольняють умову

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Візьмемо деякий ненульовий вектор y_0 і за допомогою матриці A побудуємо послідовність значень

$$y_k = A y_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Для вектора y_0 утворюємо також за допомогою транспонованої матриці A' другу послідовність значень

$$y'_k = A' y'_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де $y'_0 = y_0$.

В просторі E_n оберемо два власні базиси $\{x_j\}$ і $\{x'_j\}$ відповідно для матриць A і A' , що задовольняють умовам біортонормування:

$$(x_i, x'_j) = \delta_{ij},$$

де $Ax_i = \lambda_i x_i$ і $A'x'_j = \lambda'_j x'_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Позначимо координати вектора y_0 в базисі $\{x_j\}$ через a_1, \dots, a_n , а в базисі $\{x'_j\}$ – через b_1, \dots, b_n , тобто

$$y_0 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \text{ і } y_0 = b_1 x'_1 + \dots + b_n x'_n.$$

Звідси

$$y_k = A^k y_0 = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j^k x_j$$

$$y'_k = A'^k y_0 = \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j^{*k} x'_j$$

Складемо скалярний добуток

$$(y_k, y'_k) = (A^k y_0, A'^k y_0) = (y_0, A'^{2k} y_0) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i, \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j^{*2k} x'_j \right).$$

Звідси через умову ортонормування знаходимо:

$$(y_k, y'_k) = \sum_{j=1}^n a_j b_j^* \lambda_j^{2k} = a_1 b_1^* \lambda_1^{2k} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k}.$$

Аналогічно

$$(y_{k-1}, y'_k) = a_1 b_1^* \lambda_1^{2k-1} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k-1} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k-1}.$$

Отже, при $a_1 b_1^* \neq 0$ маємо:

$$\frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_k)} = \frac{a_1 b_1^* \lambda_1^{2k} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k}}{a_1 b_1^* \lambda_1^{2k-1} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k-1} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k-1}} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right).$$

Таким чином,

$$\lambda_1 \approx \frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_k)} = \frac{(A^k y_0, A'^k y_0)}{(A^{k-1} y_0, A'^k y_0)},$$

Цей метод особливо зручний для симетричної матриці A , оскільки тоді $A'=A$, і ми маємо

$$\lambda_1 \approx \frac{(A^k y_0, A^k y_0)}{(A^{k-1} y_0, A^k y_0)},$$

отже, потрібно побудувати тільки одну послідовність $y_k = A^k y_0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Приклад. Методом скалярних добутків знайти найбільше власне значення матриці

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Оскільки матриця A – симетрична, то треба побудувати лише одну послідовність значень $A^k y_0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Обираючи початковий вектор

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

обчислюємо при $k = 5$ і $k = 6$:

$$A^5 y_0 = \begin{bmatrix} 2268 \\ 1089 \\ 333 \end{bmatrix} \text{ і } A^6 y_0 = \begin{bmatrix} 10161 \\ 4779 \\ 1422 \end{bmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} (A^5 y_0, A^6 y_0) &= 2268 \cdot 10161 + 1089 \cdot 4779 + 333 \cdot 1422 = 28\,723\,005, \\ (A^6 y_0, A^6 y_0) &= 10161^2 + 4779^2 + 1422^2 = 128\,106\,846. \end{aligned}$$

Отже,

$$\lambda_1 \approx \frac{(A^6 y_0, A^6 y_0)}{(A^5 y_0, A^6 y_0)} = \frac{128\,106\,846}{28\,723\,005} = 4,46,$$

що відповідає дійсності.

Зауваження. Методи знаходження найбільшого по модулю кореня характеристичного рівняння можна використовувати для знаходження найбільшого по модулю кореня алгебраїчного рівняння

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

Дійсно, рівняння, як легко безпосередньо перевірити, є віковим для матриці

$$P = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

тобто еквівалентно рівнянню

$$\det(xP - E) = 0.$$

Якщо рівняння не має нульового кореня, то аналогічним способом може бути визначений найменший за модулем корінь цього рівняння, а саме, при $p_n \neq 0$, вважаючи $\frac{1}{x} = y$, одержимо:

$$y^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} y^{n-1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 0$$

Обернена величина найбільшого за модулем кореня першого рівняння дає найменший за модулем корінь даного рівняння.

Знаходження другого власного значення матриці і другого власного вектора.

Нехай власні значення λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) матриці A такі, що

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

тобто є два відмінних один від одного, найбільших по модулю власних значення λ_1 і λ_2 матриці A . У такому разі прийомом, аналогічним наведеному вище, можна приблизно знайти друге власне значення λ_2 і власний вектор $x^{(2)}$, що відповідає йому.

З формули маємо:

$$\begin{aligned} A^m y &= c_1 \lambda_1^m x^{(1)} + c_2 \lambda_2^m x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^m x^{(n)}, \\ A^{m+1} y &= c_1 \lambda_1^{m+1} x^{(1)} + c_2 \lambda_2^{m+1} x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^{m+1} x^{(n)}. \end{aligned}$$

Виключимо з формул члени, що містять λ_1 . В результаті буде:

$$A^{m+1} y - \lambda_1 A^m y = c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^m (\lambda_n - \lambda_1) x^{(n)}.$$

Введемо позначення

$$\Delta_{\lambda} A^m y = A^{m+1} y - \lambda A^m y,$$

причому вираз будемо називати λ - різницею від $A^m y$. Якщо $c_2 \neq 0$, то перший доданок в правій частині рівності є її головним членом при $m \rightarrow \infty$, і маємо наближену рівність

$$\Delta_{\lambda_1} A^m y \approx c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2)}.$$

Звідси

$$\Delta_{\lambda_1} A^{m-1} y \approx c_2 \lambda_2^{m-1} (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2)}.$$

Нехай

$$A^m y = y^{(m)} = \begin{bmatrix} y_1^{(m)} \\ y_2^{(m)} \\ \vdots \\ y_n^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Буде:

$$\lambda_2 \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_i^{(m)}}{\Delta_{\lambda_1} y_i^{(m-1)}} = \frac{y_i^{(m+1)} - \lambda_1 y_i^{(m)}}{y_i^{(m)} - \lambda_1 y_i^{(m-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Користуючись формулою, можна приблизно обчислити друге власне значення λ_2 .

Що стосується власного вектора $x^{(2)}$, то можна покласти:

$$x^{(2)} \approx \Delta_{\lambda_1} y^{(k)}.$$

Існує розповсюдження даного методу на випадок кратного кореня характеристичного рівняння.

3.3.4 Порівняння методів визначення власних значень

Основними критеріями, що дозволяють оцінити ефективність методів знаходження власних значень стосовно їх алгоритмізації і використання для розв'язання задач на ЕОМ, є точність, швидкодія (кількість обчислювальних операцій) і необхідний розмір пам'яті ЕОМ.

Швидкодія методу залежить від двох складових: кількості операцій в єдиному циклі і кількості циклів, необхідних для одержання результату.

Важливим критерієм оцінювання методів визначення власних значень є їх загальність (універсальність), тобто пристосовність до матриць різних видів, незалежно від симетрії і вигляду елементів (дійсні або комплексні).

Проаналізуємо з точки зору цих критеріїв методи знаходження власних значень.

Прямі методи приводять до необхідності розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь. Методи їх розв'язання достатньо добре розроблені. Але в задачах на власні значення часто зустрічаються кратні корені, при

цьому ітераційні методи не гарантують одержання розв'язку. Швидкодія цих методів різко зменшується при підвищенні порядку матриці внаслідок розкриття вікового визначника.

Ці недоліки ускладнюють використання прямих методів знаходження власних значень для великих матриць (порядку більше 10).

Істотним недоліком ітераційних методів розв'язання задач знаходження власних значень є накопичення помилок при кожному кроці ітераційного процесу (при визначенні максимального значення, створенні нової матриці і т.д.), тому практично ними можна користуватися для визначення не більше трьох-чотирьох власних значень.

В інших випадках доцільно користуватись методами перетворення подібності.

Найбільш ефективні методи перетворення подібності гарантують одержання результату при достатньо високій точності розв'язання. Часто найефективніше розв'язання задачі забезпечується при одночасному використанні декількох методів перетворення подібності. Наприклад, методом Хаусхолдера матриця приводиться до вигляду Гессенберга, а потім методом *QR* визначаються власні значення.

Таким чином, вибір найбільш зручного алгоритму для розв'язання різних задач знаходження власних значень визначається типом власних значень, виглядом матриці і кількістю шуканих власних значень. Чим більш складна задача, тим менше методів та алгоритмів, з яких можна вибирати. Найбільш універсальний алгоритм *QR*, але він і один з найскладніших. При малих порядках матриці $n < 3...5$ можна користуватись найпростішими прямими та ітераційними методами, а при збільшенні порядку і ускладненні вигляду матриці рекомендуються лише методи перетворення подібності. Звичайно пакети математичного забезпечення ЕОМ містять програми, в яких використовується більшість з цих алгоритмів. Одним з ефективних засобів використання наявних ресурсів ЕОМ є одночасне застосування двох підпрограм, що дозволяє поєднати їх найкращі якості.