

Побудова ітераційного процесу та перевірка збіжності

Дана система рівнянь $A \cdot x = f$

$$8 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 26$$

$$x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 = 7$$

$$x_1 - x_2 + 5 \cdot x_3 = 7$$

Дані матриці:

$$A := \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad f := \begin{bmatrix} 26 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1) Побудова ітераційного процесу (зведення системи рівнянь $A \cdot x = f$ до еквівалентної системи $x = \beta \cdot x + b$)

Виразимо x_1 через перше рівняння системи, x_2 – через друге та x_3 – через третє. В результаті ми отримаємо систему $x = \beta \cdot x + b$, еквівалентну заданій.

Знаходження матриць β та x :

$$n := 3$$

$$\beta := \begin{array}{|c|} \hline \text{for } i \in 1..n \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{for } j \in 1..n \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{if } i=j \\ \quad \beta_{i,j} \leftarrow 0 \\ \quad \text{else} \\ \quad \quad \beta_{i,j} \leftarrow -\frac{A_{i,j}}{A_{i,i}} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad b := \begin{array}{|c|} \hline \text{for } i \in 1..n \\ \quad \begin{array}{|c|} \hline b_i \leftarrow \frac{f_i}{A_{i,i}} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & -0.125 & -0.125 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.4 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

Отже, маємо систему рівнянь виду $x = \beta \cdot x + b$

$$x_1 = -0.125 \cdot x_2 - 0.125 \cdot x_3 + 3.25$$

$$x_2 = -0.2 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_3 + 1.4$$

$$x_3 = -0.2 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 1.4$$

2) Перевірка збіжності ітераційного процесу

Умова збіжності ітераційного процесу:

$$\sum_{j=1}^m |\beta_{ij}| < 1 \quad (i=1, 2, 3, \dots, m) \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^m |\beta_{ij}| < 1 \quad (j=1, 2, 3, \dots, m).$$

Перевіримо виконання умови $\sum_{j=1}^3 |\beta_{ij}| < 1 \quad (i=1, 2, 3)$

$$l := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots n \\ \left\| l_i \leftarrow \sum_{j=1}^n |\beta_{i,j}| \right\| \end{array} \right\|$$

$$l = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Оскільки сума модулів елементів рядків менше одиниці, тобто

$$0.25 < 1$$

$$0.4 < 1$$

$$0.4 < 1$$

то ітераційний процес є збіжним.