

Приклад 3. Розв'язати СЛАР методом прогону

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = -1 \\ 0,1x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ -x_3 + 8x_4 = 40 \end{cases}$$

Дана система рівнянь

$$\begin{aligned} 10 \cdot x_1 + x_2 &= 5 \\ -2 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + x_3 &= -1 \\ 0,1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 - x_4 &= -5 \\ -x_3 + 8 \cdot x_4 &= 40 \end{aligned}$$

Таблиця 1 – Значення коефіцієнтів СЛАР

i	k_i	l_i	m_i	q_i
1	0,0	10	1	5
2	-2	9	1	-1
3	0,1	4	-1	-5
4	-1	8	0	40

$$\begin{aligned} k1 &:= 0 & k2 &:= -2 & k3 &:= 0,1 & k4 &:= -1 \\ l1 &:= 10 & l2 &:= 9 & l3 &:= 4 & l4 &:= 8 \\ m1 &:= 1 & m2 &:= 1 & m3 &:= -1 & m4 &:= 0 \\ q1 &:= 5 & q2 &:= -1 & q3 &:= -5 & q4 &:= 40 \end{aligned}$$

1) Прямий хід прогону. Обчислимо прогоночні коефіцієнти за формулами

$$U_1 = -\frac{m_1}{l_1}, \quad V_1 = \frac{q_1}{l_1} \quad U_i = -\frac{m_i}{k_i U_{i-1} + l_i}, \quad V_i = \frac{q_i - k_i V_{i-1}}{k_i U_{i-1} + l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$U1 := -\frac{m1}{l1} = -0,1$$

$$V1 := \frac{q1}{l1} = 0,5$$

$$U2 := -\frac{m2}{k2 \cdot U1 + l2} = -0,1087$$

$$V2 := \frac{q2 - k2 \cdot V1}{k2 \cdot U1 + l2} = 0$$

$$U3 := -\frac{m3}{k3 \cdot U2 + l3} = 0,2507$$

$$V3 := \frac{q3 - k3 \cdot V2}{k3 \cdot U2 + l3} = -1,2534$$

$$U4 := -\frac{m4}{k4 \cdot U3 + l4} = 0$$

$$V4 := \frac{q4 - k4 \cdot V3}{k4 \cdot U3 + l4} = 5$$

2) Обернений хід прогону. Обчислимо x_i за формулами $x_i = U_i x_{i+1} + V_i, \quad i = n, n-1, \dots, 1$

$$x4 := V4 = 5$$

$$x3 := U3 \cdot x4 + V3 = 0$$

$$x2 := U2 \cdot x3 + V2 = 0$$

$$x1 := U1 \cdot x2 + V1 = 0,5$$

3) Перевірка. Розв'яжемо дану систему рівнянь засобами Mathcad

Values	$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0 \quad x4 := 0$
Constraints	$\begin{aligned} \text{Given} \\ 10 \cdot x1 + x2 &= 5 \\ -2 \cdot x1 + 9 \cdot x2 + x3 &= -1 \\ 0.1 \cdot x1 + 4 \cdot x3 - x4 &= -5 \\ -x3 + 8 \cdot x4 &= 40 \end{aligned}$
Solver	$\mathbf{find}(x1, x2, x3, x4) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$