8 МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

8.1 Основні поняття оптимізації. Одновимірна оптимізація

Основні поняття оптимізації

Під оптимізацією розуміють процес вибору найкращого варіанту з множини усіх можливих. З точки зору інженерних розрахунків методи оптимізації дозволяють вибирати найкращий варіант конструкції, найкращий розподіл ресурсів і т.ін.

У процесі розв'язку задач оптимізації, як правило, необхідно знайти оптимальне значення деяких параметрів, що визначають дану задачу. При розв'язку інженерних задач їх прийнято називати *проектними параметрами*. В якості проектних параметрів можуть бути значення лінійних розмірів об′єкта, маси, температури та ін.

Вибір оптимального рішення або порівняння двох альтернативних рішень проводиться за допомогою деякої залежної величини (функції). Ця величина називається *цільовою функцією* або *критерієм якості*. В процесі розв'язку задачі оптимізації повинні бути знайдені такі значення проектних параметрів, при яких цільова функція має максимум (або мінімум). Таким чином, цільова функція – це глобальний критерій оптимальності в математичних моделях, за допомогою яких описуються інженерні задачі.

Цільову функцію можна записати у вигляді:

$$u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \quad (1)$$

Прикладами цільових функцій, що зустрічаються в інженерних розрахунках, є міцність чи маса конструкції, потужність установки, об'єм випуску продукції, вартість перевезення вантажів і ін.

У випадку одного проектного параметра ($n=1$) цільова функція (1) є функцією однієї змінної та її графік – деяка крива на площині. При $n=2$ цільова функція є функцією двох змінних та її графіком є поверхня.

Варто зазначити, що цільова функція не завжди може бути представлена у вигляді формули. Інколи вона може приймати лише деякі дискретні значення, задаватися у вигляді таблиці.

Одновимірна оптимізація

Одновимірна задача оптимізації формулюється наступним чином. Знайти найменше (або найбільше) значення цільової функції $y = f\left(x\right)$, заданої на множині σ, і визначити значення проектного параметра $x \in \sigma$, при якому цільова функція набуває екстремального значення.

У випадках, коли цільова функція задана в табличному вигляді або може бути обчислена при деяких дискретних значеннях аргументу, використовуються різноманітні методи пошуку. Вони базуються на обчисленні цільової функції в окремих точках і виборі серед них найбільшого або найменшого значення. Існує ряд алгоритмів розв’язку даної задачі. Розглянемо один з них.

Метод золотого перерізу

Метод золотого перерізу є одним з найбільш ефективних методів, у яких при обмеженій кількості обрахунків $f(x)$ досягається найкраща точність. Він полягає в побудові послідовності відрізків $[a_0,b_0]$, $[a_1,b_1]$,..., що стискаються до точки мінімуму функції $f(x)$. Ця точка, що називається *золотим перерізом*, вибирається спеціальним чином.

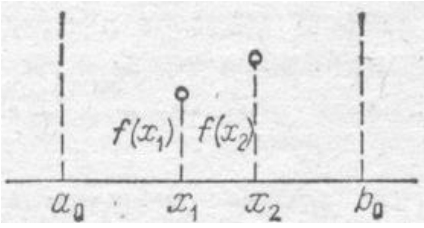


Рисунок 1 – Графічна інтерпретація методу золотого перерізу (крок 1)

На першому кроці процесу оптимізації всередині відрізка $[a_0,b_0]$ (рис.1) вибираються дві внутрішні точки x_1 та x_2 і обчислюються значення цільової функції $f(x_1)$ та $f(x_2)$. Оскільки у даному випадку $f(x_1)<f(x_2)$, то мінімум розміщується в одному із прилягаючих до x_1 відрізків $[a_0,x_1]$ або $[x_1,x_2]$. Тому відрізок $[x_2,b_0]$ можна відкинути, звузивши тим самим початковий інтервал невизначеності.

Другий крок проводиться на відрізку $[a_1,b_1]$, де $a_1=a_0$, $b_1=x_2$. Необхідно знову вибрати дві внутрішні точки, але одна з них x_1 залишилась з попереднього кроку, тому достатньо вибрати тільки одну точку x_3, визначити значення $f(x_3)$ і виконати порівняння.

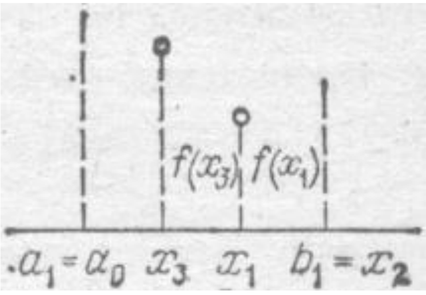
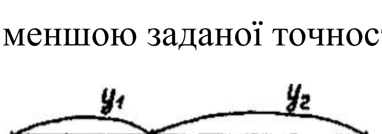


Рисунок 2 – Графічна інтерпретація методу золотого перерізу (крок 2)

Оскільки у даному випадку $f(x_3)>f(x_1)$, то мінімум знаходиться на відрізку $[x_3,b_1]$.

Позначивши цей відрізок $[a_2,b_2]$, знову вибирається одна внутрішня точка і повторюється процедура звуження інтервалу невизначеності. Процес оптимізації триває до тих пір, поки довжина наступного відрізка $[a_n,b_n]$ не стане меншою заданої точності ε.



Тепер розглянемо спосіб розміщення внутрішніх точок на кожному відрізку $[a_k,b_k]$. Нехай довжина інтервалу невизначеності дорівнює ℓ, а точка поділу ділить його на частини ℓ_1 і ℓ_2, причому $\ell_1 < \ell_2$ і $\ell = \ell_1 + \ell_2$. Золотий переріз інтервалу невизначеності вибирається так, щоб відношення довжини більшого відрізка до довжини усього інтервалу дорівнювало відношенню довжини меншого відрізка до довжини більшого відрізка:

$$\frac{\ell_2}{\ell} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \tag{1}$$

або $\frac{\ell - \ell_1}{\ell} = \frac{\ell_1}{\ell - \ell_1}$, так як $\ell_2 = \ell - \ell_1$. Ділячи на ℓ та позначаючи $\frac{\ell_1}{\ell} = k$, отримаємо

$$\frac{1-k}{1} = \frac{k}{1-k}, \quad (1-k)^2 = k, \quad k^2 - 3k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382.$$

Звідки: $\ell_1 \approx 0,382\ell$ і $\ell_2 \approx 0,618\ell$.

Використовуючи отриманні співвідношення, можна записати координати точок поділу y і z відрізка $\left[a_k, b_k\right]$ на $k+1$ кроці оптимізації ($y < z$).

$$y = 0,618a_k + 0,382b_k, \tag{2}$$

$$z = 0,382a_k + 0,618b_k. \tag{3}$$

При цьому довжина інтервалу невизначеності рівна:

$$d_k = b_k - a_k = 0,618^k d_0. \tag{4}$$

Процес оптимізації закінчується при виконанні умови $d_k < \varepsilon$. При цьому проектний параметр оптимізації складає $a_k < x < b_k$.

Приклад

Використовуючи метод золотого перерізу, знайти мінімум функції *f(x)=x²+2x* на інтервалі *(-3,5)*. Довжина скінченого інтервалу невизначеності не повинна перевищувати *0,2*.

Розв'язання. *Перший крок.*

a=-3, b = 5, b-a = 8.

$x_1 = -3 + 0,362 \cdot 8 = 0,056$; $x_2 = 5 - 0,382 \cdot 8 = 1,944$;

$f(x_1) = 0,056^2 + 2 \cdot 0,056 = 0,115$; $f(x_2) = I,944^2 + 2 \cdot 1,944 = 7,667$;

$f(x_1) < f(x_2)$.

Новий відрізок *[-3; 1,944]*.

Другий крок.

a=-3, b = 1,944, b-a =4,944.

$x_1 = -3 + 0,382 \cdot 4,944 = -1.112$; $x_2 = 0,056$;

$f(x_1) = (-1,112)^2 + 2 \cdot (-1,112) = -0.987$; $f(x_2) = 0,115$;

$f(x_1)<f(x_2)$.

Новий відрізок *[-3; 0,056]*.

Подальші обчислення оформимо у вигляді таблиці. Значення функції $f(x_2)$, обчислені на кожному кроці, позначені зірочкою.

№ шага	a	b	b-a	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	-3,000	5,000	8,000	0,056	1,944	0,115*	7,667*
2	-3,000	1,944	4,944	-1,112	0,056	-0,987*	0,115
3	-3,000	0,056	3,056	-1,832	-1,112	-0,308*	-0,987
4	-1,832	0,056	1,888	-1,112	-0,664	-0,987	-0,887*
5	-1,832	-0,664	1,168	-1,384	-1,112	-0,853*	-0,987
6	-1,384	-0,664	0,720	-1,112	-0,936	-0,987	-0,996*
7	-1,384	-0,936	0,448	-1,208	-1,112	-0,957*	-0,987
8	-1,208	-0,936	0,272	-1,112	-1,032	-0,987	-0,999*
9	-1,112	-0,936	0,176				

Після восьми кроків, які містять дев'ять обчислень функції, інтервал невизначеності дорівнює *(-1,112; -0,936),* його довжина *0,176 <0,2*. У якості точки мінімуму може бути взята середина цього інтервалу -1,024; при цьому *f(-1,024)=-0,999*.

Зазначимо, що точкою точного мінімуму є *-1,0*; *f(-1,0)=-1*.