5 Теорія графів

Теорія графів — одна з важливих частин математичного апарату інформатики та кібернетики. У термінах теорії графів можна сформулювати багато задач, пов'язаних із дискретними об'єктами. Велику роль відіграють алгоритми на графах. Як буде показано згодом, між поняттями графу та відношення є глибокий зв'язок — в сутності це рівнозначні поняття. Виникає природне питання, чому тоді графам віддається така явна перевага? Справа в тому, що теорія графів являє собою дуже зручну мову для опису програмних та багатьох інших моделей. Струнка система спеціальних термінів та означень теорії графів дозволяють просто і доступно описувати складні та тонкі речі. Особливо важливим є наявність наглядної графічної інтерпретації поняття графу. Зображення дозволяють відразу розгледіти суть питання на інтуїтивному рівні.

Теорія графів є корисною в дуже різноманітних сферах людської діяльності: фізика, хімія, теорія зв'язку, проєктування обчислювальних машин, електротехніка, машинобудування, архітектура, дослідження операцій, генетика, психологія, соціологія, економіка, антропологія, лінгвістика тощо. Граф є математичною моделлю найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці. Наприклад, у вигляді графа можуть бути зображені:

— електричні і транспортні мережі;
— інформаційні і комп'ютерні мережі;
— карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів;
— моделі кристалів;
— структури молекул хімічних речовин;
— моделі ігор;
— різні математичні об'єкти (відношення, частково впорядковані множини, решітки, автомати, ланцюги Маркова, алгоритми і програми тощо);
— лабіринти;
— плани діяльності або плани виконання певних робіт (розклади);
— генеалогічні дерева тощо.

Приклади застосування теорії графів:

— пошук зв'язних компонентів у комунікаційних мережах;
— пошук найкоротших, "найдешевших" та "найдорожчих" шляхів у комунікаційних мережах;
— побудова кістякового дерева: зв'язність з найменшою можливою кількістю ребер;

— пошук максимальної течії для транспортної мережі, в якій визначено вхідні та вихідні вершини та пропускні спроможності ребер;
— ізоморфізм графів: ідентичність структур молекул (ізометрія);
— знаходження циклів графів:
  • гамільтонів цикл: обійти всі вершини графа, побувавши в кожній з них лише один раз (задача комівояжера);
  • ейлерів цикл: обійти всі ребра (контроль дієздатності мережі);
— розфарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів тощо;
— планарність графів: проєктування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв'язок тощо;
— знаходження центрів графа: вершин, максимальна відстань від яких до всіх інших вершин графа є мінімальною ("столиць") тощо.

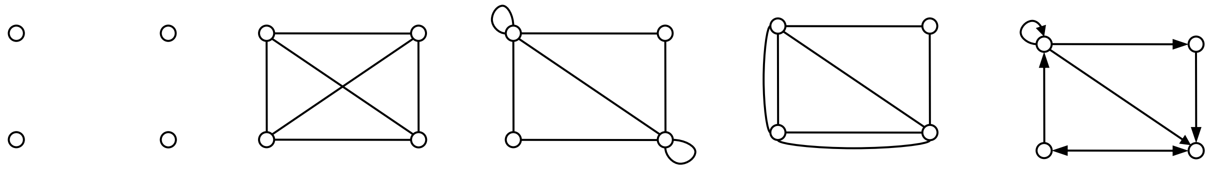
5.1 Основні поняття теорії графів

5.1.1 Графи

З поняттям графу зазвичай пов'язують його графічне представлення, при якому він зображується як множина точок, деякі з яких з'єднані лініями. Але граф відрізняється від геометричних конфігурацій (скажімо, фігур, які також складаються з точок та ліній) тим, що в графі несуттєві відстані між точками, форма з'єднувальних ліній та кути між ними. Важливо тільки те, чи з'єднана дана пара точок лінією, чи ні. Тому граф іноді називають **топологічним об'єктом**, тобто об'єктом, властивості якого не змінюються при розтягуванні, стисненні та викривленні. За цією ж причиною (важливим є тільки наявність або відсутність з'єднань) граф — об'єкт дискретний і може бути заданий двома дискретними множинами: множиною точок, які будемо називати **вершинами**, та множиною ліній, які з'єднують деякі вершини. Лінії будемо називати **ребрами**.

Графом $G = (V, E)$ називається об'єкт, який заданий парою множин (V, E), де V — множина **вершин**, $E \subseteq V \times V$ — множина **ребер**. Граф називається скінченним, якщо множини його вершин і ребер є скінченними. Множину вершин графу G позначають $V(G)$, а множину ребер — $E(G)$.

Кількість вершин графу $n(G) = |V(G)|$, а кількість ребер $m(G) = |E(G)|$. Кількість вершин $n(G)$ графу називають його **порядком**.



а) б) в) г) д)

Рисунок 1 — Приклади графів

Якщо для деякого ребра $e = (v,w) \in E(G)$, то кажуть:
— вершини v та w **суміжні**;
— вершини v та w **інцидентні** ребру e;
— ребро e **інцидентне** вершинам v і w.

Множина вершин, які суміжні з вершиною v, називається **множиною суміжності** вершини v і позначається $\Gamma^{+}(v)$:

$$\Gamma^{+}(v) = \{w \in V \mid (w,v) \in E\}, \quad \Gamma^{*}(v) = \Gamma^{+}(v) + v.$$

Зазвичай $\Gamma^{+}(v)$ позначається просто $\Gamma(v)$. Очевидно, $w \in \Gamma(v)$ тоді й тільки тоді, коли $v \in \Gamma(w)$.

Якщо $A \subset V$ — множина вершин, то $\Gamma(A)$ — множина всіх вершин, суміжних з вершинами з A:

$$\Gamma(A) = \{w \in V \mid \exists v \in A, w \in \Gamma(v)\} = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v).$$

Множина ребер E може бути порожньою (рис. 1, а). Такий граф називається **нуль-графом** і позначається $\varnothing$. Якщо ж множина вершин V — порожня, то порожньою є також множина E. Такий граф називається **порожнім**. Лінії, що зображують ребра графу, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами (рис. 1, б). Ребро може з'єднувати деяку вершину саму із собою (рис. 1, в), таке ребро називається **петлею**. Цей випадок відповідає наявності в множині E пар вигляду (v, v). Різні ребра можуть бути інцидентними одній і тій самій парі вершин (тобто одну й ту саму пару вершин з'єднує більше ніж одне ребро), такі ребра називаються **кратними** (рис. 1, г).

Граф називається **простим**, якщо кожну пару вершин з'єднує не більше, ніж одне ребро. Граф називається **мультиграфом**, якщо він має кратні ребра. Граф називається **псевдографом**, якщо він має петлі та кратні ребра.

Розглядають також орієнтовані графи (до цього були розглянуті неорієнтовані графи).

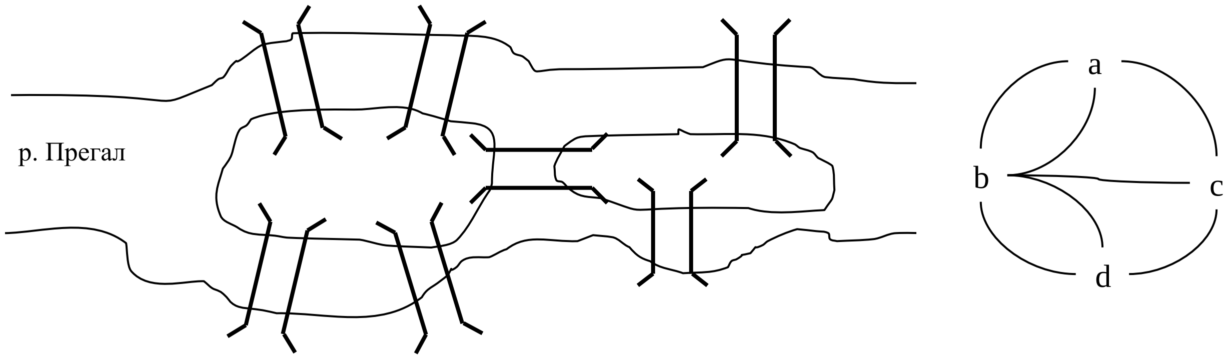
Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $D = (V, E)$, де V — множина вершин, $E \subseteq V \times V$ — множина орієнтованих ребер, або **дуг**.

При зображенні орієнтованих графів напрямки ребер позначаються стрілками (рис. 1, д). Орієнтований граф може мати кратні ребра та петлі.

Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають зворотні напрямки.

5.1.2 Приклади з історії теорії графів

Теорія графів бере початок з розв'язку знаменитим математиком Ейлером задачі про кенігсбергські мости в 1736 році. Задача виникла у пруському містечку Кенігсберг на річці Прегал. Мешканці Кенігсбергу полюбляли прогулюватися стежкою, яка включала сім мостів через річку Прегал. Людям було цікаво, чи можуть вони, почавши шлях з однієї ділянки суші, обійти всі мости, побувавши в кожному лиш один раз, і повернутися в точку початку шляху (перепливати річку також заборонялось). Сім мостів з'єднували два береги річки та два островки так, як показано на рис. 2, а).



а) б)

Рисунок 2

Ейлер побудував мультиграф, зображений на рис. 2, б). В цьому мультиграфі ділянки суші зображені як вершини, а стежки через мости — як ребра. В такому випадку задача здобуває наступне формулювання: починаючи з довільної вершини, проходячи по кожному ребру тільки один раз, повернутися у вихідну вершину. Як виявилось, ця задача не має розв'язків.

Прикладом іншої проблеми, яку можна промоделювати на основі теорії графів, є задача про три будинки та три колодязі. Є три будинки та три колодязі, які якимось чином розташовані на площині. Потрібно провести від кожного будинку до кожного колодязя стежку так, щоб стежки не перетинались (рис. 3). Куратовський у 1930 році показав, що ця задача також не має розв'язків.

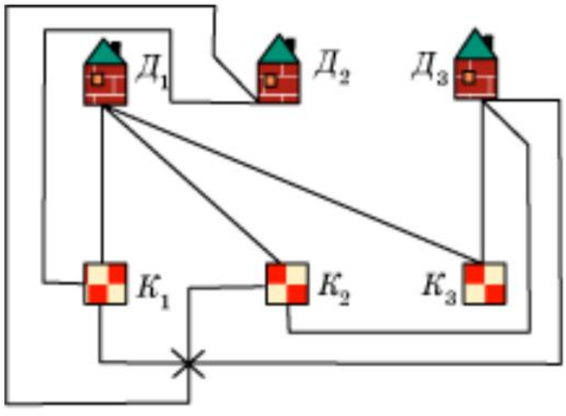


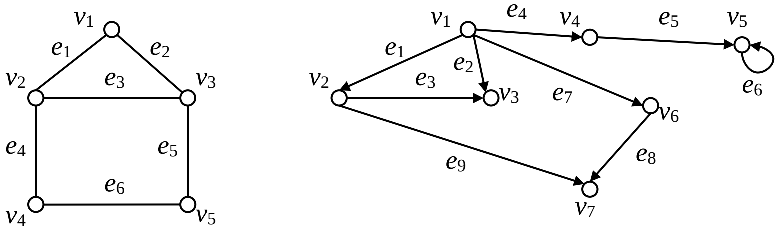
Рисунок 3

5.1.3 Способи задання графів

Задати граф означає задати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Коли граф G — скінченний, для опису його вершин та ребер досить їх занумерувати.

Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — вершини графу G; $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — його ребра. Відношення інцидентності можна означити матрицею $E = \|\varepsilon_{ij}\|$, яка має n рядків та m стовпців. Рядки відповідають вершинам графу, а стовпці — його ребрам. Якщо ребро e_j є інцидентним вершині v_i, то $\varepsilon_{ij} = 1$, в іншому випадку $\varepsilon_{ij} = 0$. Це **матриця інцидентності** звичайного графу G, яка є одним із способів його визначення.

Наприклад, для графу, який зображено на рис. 4, а) матриця інцидентності має вигляд табл. 1, а).



а) б)

Рисунок 4

У матриці інцидентності $\|\varepsilon_{ij}\|$ орієнтованого графу D, якщо вершина v_i — початок дуги e_j, то $\varepsilon_{ij} = -1$, якщо v_i — кінець e_j, то $\varepsilon_{ij} = 1$; якщо e_j — петля, а v_i — інцидентна їй вершина, то $\varepsilon_{ij} = 2$.

Наприклад, для орієнтованого графу, зображеного на рис. 4, б), матриця інцидентності наведена у табл. 1,б).

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0
v_3	0	1	1	0	1	0
v_4	0	0	0	1	0	1
v_5	0	0	0	0	1	1

а)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0
v_2	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1
v_3	0	1	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	2	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	1	1

б)

Таблиця 1

У кожному стовпці матриці інцидентності для неорієнтованого або орієнтованого графу тільки два елементи відмінні від 0 (або один, якщо ребро є петлею). Тому такий спосіб задання графу не досить економний.

Відношення інцидентності можна задати ще **списком ребер** графу. Кожний рядок цього списку відповідає ребру, в ньому записано номери вершин, інцидентних йому. Для неорієнтованого графу порядок цих вершин у рядку довільний, для орієнтованого — першим записується номер або інше найменування початку ребра, а другим — його кінця. У таблиці 2, а) та б) наведено списки ребер відповідно для графів з рисунку 4, а) та б).

Ребро	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_2, v_4
e_5	v_3, v_5
e_6	v_4, v_5

а)

Ребро	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_1, v_4
e_5	v_4, v_5
e_6	v_5, v_5
e_7	v_1, v_6
e_8	v_6, v_7
e_9	v_2, v_7

б)

Таблиця 2

За списком ребер графу можна легко визначити матрицю інцидентності. Справді, кожний рядок цього списку відповідає стовпцю матриці з тим самим номером. Для неорієнтованого графу в рядку списку записуються номери елементів стовпця матриці інцидентності, що дорівнюють 1, а для орієнтованого графу в цьому рядку першим зазначається номер елемента стовпця матриці, який дорівнює -1, другим — номер елемента, що дорівнює 1.

Поняття матриці інцидентності та списку ребер можна легко узагальнити на випадок мультиграфу.

Розглянемо третій спосіб задання графів, за допомогою матриці суміжності.

Матриця суміжності — це квадратна матриця $\Delta = \| \delta_{ij} \|$, стовпцям і рядкам якої відповідають вершини графу. Для неорієнтованого графу δ_{ij} дорівнює кількості ребер, інцидентних i- та j-й вершинам, для орієнтованого — цей елемент матриці відповідає кількості ребер з початком в i-й вершині та кінцем у j-й вершині. Таким чином, матриця суміжності неорієнтованого графу є симетричною ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$), а орієнтованого — необов'язково. Якщо вона все ж симетрична, то для кожного ребра орієнтованого графу існує ребро, яке з'єднує ті самі вершини, але йде у зворотному напрямку. Очевидно, орієнтований граф із симетричною матрицею суміжності відповідає неорієнтованому графу, який має ту саму матрицю суміжності.

Матриці суміжності розглянутих вище графів (див. рисунок 4) наведено в таблиці 3.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	1	1	0	0	1
v_4	0	1	0	0	1
v_5	0	0	1	1	0

а)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	1	1	0	1	0
v_2	0	0	1	0	0	0	1
v_3	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0

б)

Таблиця 3

Як на основі матриці інцидентності можна побудувати список ребер (список інциденцій), так на основі матриці суміжності можна побудувати так званий список суміжностей: для кожної вершини v_i графу наводиться список вершин, які суміжні з вершиною v_i. Список суміжностей для графів з рисунка 4 наводиться у таблиці 4.

Вершина	Вершини
v_1	v_2, v_2
v_2	v_1, v_3, v_4
v_3	v_1, v_2, v_5
v_4	v_2, v_5
v_5	v_3, v_4

а)

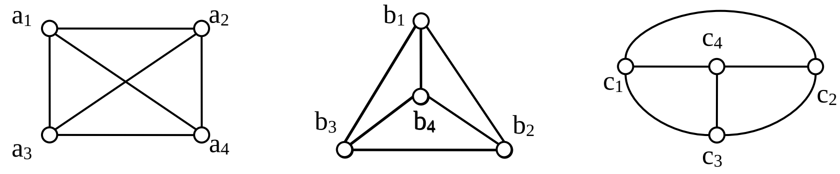
Вершина	Вершини
v_1	v_2, v_3, v_4, v_6
v_2	v_3, v_7
v_3	–
v_4	v_5
v_5	v_5
v_6	v_7
v_7	–

б)

Таблиця 4

5.1.4 Ізоморфізм графів

Отже, граф можна задати різними способами. Він може бути зображений на кресленні (рисунку), заданий матрицею інцидентності, списком ребер або матрицею суміжності. Вигляд креслення залежить від форми ліній і взаємного розташування вершин. Іноді не так легко зрозуміти, чи однакові графи, зображені різними кресленнями, як, наприклад, на рисунку 5. Вигляд матриць та списку ребер залежить від нумерації вершин і ребер графу. Строго кажучи, граф вважається повністю заданим, якщо нумерацію його вершин зафіксовано.



а) б) в)

Рисунок 5

Нехай існує бієкція φ, яка діє з множини вершин графу G на множину вершин графу H так, що для будь-яких вершин v_1 та v_2 графу G їх образи $\varphi(v_1)$ і $\varphi(v_2)$ є суміжними в H тоді й тільки тоді, коли v_1 та v_2 — суміжні в G. Така бієкція називається **ізоморфізмом** графу G на граф H, а графи G і Н є **ізоморфними**.

Таким чином, графи, зображені на рисунку 5 — ізоморфні. Іншими словами, графи є ізоморфними, якщо вони відрізняються тільки нумерацією вершин.

Перенумерація вершин графу задається рядком $a_1, \ldots, a_n$ нових номерів вершин, розташованих у початковому порядку. Нова матриця суміжності утворюється з початкової переміщенням кожного елемента δ_{ij} в a_i-й рядок та a_j-й стовпець, тобто внаслідок перестановки $(a_1, \ldots, a_n)$ рядків і стовпців початкової матриці. Тому, щоб дізнатися, чи зображують дві матриці суміжності ізоморфні графи, можна, наприклад, здійснити усі перестановки рядків та стовпців першої матриці. Якщо після однієї з цих перестановок виникне матриця, що тотожно збігається з другою, графи, які зображаються цими матрицями, є ізоморфними. Проте, щоб пересвідчитися таким способом у тому, що графи не є ізоморфними, доведеться виконати всі $n!$ перестановок рядків і стовпців, а це — досить трудомістка операція.

Матриця інцидентності графу та список його ребер залежать від нумерації ребер і вершин. Перехід від однієї пари нумерації до іншої визначається перестановками $(v_1, \ldots, v_n)$ вершин та $(e_1, \ldots, e_m)$ ребер графу, який розглядається. Матриця інцидентності утворюється з початкової внаслідок перестановки стовпців (j-й на e_j-те місце) і рядків (i-й на v_i-те). Рядки списку ребер переставляються так само, як і рядки матриці інцидентності, причому кожний номер j в рядках списку замінюється номером v_j.

5.1.5 Графи та бінарні відношення

Між простими (без кратних ребер) орієнтованими графами та бінарними відношеннями існує взаємно однозначне співставлення. Довільний граф з множиною вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ визначає бінарне відношення на множині V — відношення суміжності. Матриця суміжності цього графу — це матриця бінарного відношення суміжності. Справедливо й обернене — довільне бінарне відношення R на довільній множині $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ можна зобразити графом G, вершини якого відповідають елементам A, а ребро (a_i, a_j) в цьому графі існує, тоді й тільки тоді, коли виконується $a_i R a_j$. Бінарна матриця відношення R одночасно є матрицею суміжності графу G, а сам граф називається графом відношення R.

За матрицею суміжності графу можна визначити властивості відношення R. Граф рефлексивного відношення містить петлі у всіх вершинах і, відповідно, одиниці на всіх елементах головної діагоналі матриці суміжності. Симетричному відношенню відповідає граф із симетричною матрицею суміжності. Як було зазначено вище, такий граф рівнозначний простому неорієнтованому графу. Граф транзитивного відношення має наступні властивості: якщо є ребра (v_i, v_j) і (v_j, v_k), то існує ребро (v_i, v_k).

Оскільки довільний граф представляє певне відношення, можна визначити операції об'єднання та перетину над графами так само, як і над відношеннями. Доповненню R' відношення R (тобто відношенню, яке істинно, коли R хибне) відповідає доповнення графу G до повного графу, тобто граф G', в якому є ті й тільки ті дуги, яких немає в G. Оберненому відношенню R^{-1} відповідає граф G^{-1}, який отримується з графу G зміною орієнтації всіх його дуг на протилежні.