4.3 Логіка предикатів

4.3.1 Поняття предикату. Квантори

Існують такі логічні схеми міркувань, які не можуть бути означені у логіці висловлювань. Розглянемо умовивід: “Всі люди смертні (A). Сократ — людина (B). Відповідно, Сократ смертний (C).” Очевидно, C слідує з A та B, але логічне слідування $A, B \vdash C$ не доводиться у логіці висловлювань. Причина полягає у внутрішній структурі висловлювань, а саме у наявності таких слів, як “всі” або “існує”.

Внутрішню структуру висловлювань можна розділити на суб’єкт та предикат, де суб’єктом є підмет, а предикат визначає властивість суб’єкта. Наприклад, Сократ — це суб’єкт, який має властивість бути людиною. Ця властивість представляє собою одномісний предикат, визначений на множині людей: “бути людиною”. Позначимо його $P(x)$, де x — змінна. Підставляючи на місце змінної x об’єкти з області визначення предиката, отримуємо висловлювання. Таким чином, одномісний предикат, визначений на деякій множині об’єктів, задає властивість, якою ці об’єкти можуть володіти чи не володіти. Отже, предикат розбиває цю множину на дві області: область істинності та хибності.

Одномісним предикатом $P(x)$, визначеним на множині M, називається вираз, який після підстановки в нього замість x об’єкта з області визначення M, перетворюється у висловлювання. Область визначення предиката називається **предметною областю**. Елементи з області визначення називаються **предметними константами**. Змінна, від якої залежить предикат, називається **предметною змінною**.

Отже, одномісний предикат виражає певну властивість деякого об’єкта або предмета з множини визначень. Також можуть існувати й двомісні предикати, та й, взагалі, предикати із довільною місткістю, тобто арністю. Тоді двомісний предикат буде виражати певне відношення між об’єктами. Ці об’єкти можуть належати одній множині, а можуть належати й різним множинам.

Приклад. Речення “x більше y” можна виразити двомісним предикатом $P(x,y)$, $x,y \in R$, який буде приймати істинне значення, якщо число, яке підставлено замість x, буде більше за число, що підставлене замість y.

Речення “місто x є столицею країни y” може бути представлене у вигляді предикату $Q(x,y)$, де x належить множині міст, а y — множині країн.

Прикладом використання тримісного предикату є речення “p народився у місті q у році r”, де p належить множині людей, q — множині міст, а r — множині років, тобто цілих чисел з певного проміжку.

N-**місним предикатом**, визначеним на множинах $M_1,\ldots, M_n$, називається вираз, який перетворюється у висловлювання після заміни кожної предметної змінної на елемент з її області визначення. Якщо всі змінні визначені на одній тій самій множині, то предикат називається **однорідним**.

Отже, предикат можна розглядати як функцію, що відображає множину (або декартовий добуток множин) об'єктів на множину {T, F}. Таким чином, над предикатами визначено всі булеві операції, а також дві нові операції — квантори: $\forall$ — **квантор загальності** та $\exists$ — **квантор існування**.

Якщо $P(x)$ означає деяку властивість на множині M, то формула $\forall xP(x)$ означає висловлювання: "для будь-якого предмету $m\in M$ виконується властивість $P(x)$" або "всі x мають властивість $P(x)$". Формула $\forall xP(x)$ набуває значення "істина", коли властивість P виконується для всіх об'єктів з M, та набуває значення "хибність" у протилежному випадку, тобто коли існує хоча б один об'єкт з множини M, для якого ця властивість не виконується.

Формула $\exists xP(x)$ означає: "існує принаймні один предмет x, який має властивість P» або «деякі x мають властивість P». Значення формули $\exists xP(x)$ є істинним, коли властивість P виконується хоча б для одного об'єкту з множини M, та хибним, коли не існує жодного об'єкта, для якого ця властивість виконувалась би.

Якщо $M = \{a_1,\ldots, a_n\}$ — скінченна область визначення предикату $P(x)$, то формули з кванторами можуть бути виражені через кон'юнкції та диз'юнкції:

$$\forall xP(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$

$$\exists xP(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Таким чином, квантор загальності є узагальненням кон'юнкції, а квантор існування — узагальненням диз'юнкції на нескінченну область визначення.

Приклад. Розглянемо декілька прикладів коли речення природної мови записуються на мові предикатів. Почнемо з речення: "Кожен студент групи вивчав дискретну математику". Спочатку перепишемо речення так, щоб було зрозуміло, як краще розставити квантори: "Про кожного студента групи відомо, що цей студент вивчав дискретну математику". Тепер уведемо змінну x, і речення набуде вигляду: "Про кожного студента x групи відомо, що x вивчав дискретну математику". Уведемо предикат $C(x)$: "x вивчав дискретну математику". Якщо предметна область змінної x — усі студенти групи, то можна записати задане речення як $\forall xC(x)$. Є й інші коректні подання з різними предметними областями та предикатами. Зокрема, можна вважати, що нас цікавлять інші групи людей, окрім тих, які навчаються в одній академічній групі. Узявши як предметну область усіх людей, можна записати задане речення так: "Для кожної особи x, якщо ця особа x — студент групи, то x вивчав дискретну математику". Якщо предикат $S(x)$ має вигляд "особа x навчається в групі", то задане речення треба записати у вигляді $\forall x(S(x) \to C(x))$. Зауважимо, що задане речення не можна записати як $\forall x(S(x) \wedge C(x))$, бо тоді це означало б, що всі особи з предметної області навчаються в групі та вивчали дискретну математику.

І ще один спосіб записати задане речення — це ввести двомісний предикат $Q(x,y)$: "Студент x вивчає дисципліну y". Тоді можна замінити $C(x)$ на $Q(x,$ '*Дискретна математика*'), що дасть можливість переписати формули у вигляді $\forall x Q(x,$ '*Дискретна математика*') чи $\forall x(S(x) \to Q(x,$ '*Дискретна математика*')).

Приклад. Задане речення: "Сума двох додатних чисел — додатне число". Спочатку перепишемо це речення так: "Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число". Уведемо змінні x та y і отримаємо речення: "Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x+y$, яка є додатнім числом". Запишемо його формулою $\forall x \forall y\, (((x>0) \wedge (y>0)) \to (x+y > 0))$. Тут предметна область кожної змінної — усі дійсні числа.

4.3.2 Терми та формули

У мові логіки предикатів присутні наступні символи:

- пропозиційні зв'язки $\neg, \wedge, \vee, \to, \sim$;
- квантори загальності $\forall$ та існування $\exists$;
- допоміжні символи: кома ",", та дужки "(", ")";
- предметні змінні $x_1, x_2, \ldots$;
- предметні константи $a_1, a_2, \ldots$;
- функціональні символи $f_1, f_2, \ldots$;
- предикатні символи $P_1, P_2, \ldots$

Введемо поняття терму та формули логіки першого порядку.

Означення. (1) Кожна предметна змінна є **термом**. (2) Кожна предметна константа є термом. (3) Якщо f — функціональний символ та $t_1, \ldots, t_n$ — терми, то $f\,(t_1, \ldots, t_n)$ є термом. (4) Інших термів не існує.

Означення. (1) $P(t_1, \ldots, t_n)$, де P — предикатний символ, $t_1, \ldots, t_n$ — терми, є **атомарною формулою**. (2) Якщо A та B — формули та x — предметна змінна, то формулами є: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$, $\forall x A$, $\exists x A$. (3) Інших формул немає.

Формула, на яку розповсюджується дія квантора, називається **областю дії квантора**. Змінна, за якою "навішується" квантор та яка попадає в його область дії, називається **зв'язаною змінною**. Змінна, яка лежить за межами області дії квантора, називається **вільною змінною**. Формула, що не містить вільних змінних, називається **замкненою**.

Замкнені формули є висловлюваннями.

Приклад. Розглянемо формулу $\forall x(P(x) \to \exists y\, Q(x,y))$ та її підформули. У підформулу $\exists y\, Q(x,y)$ змінна x входить вільно, а змінна y зв'язана (квантором існування). Таким чином, ця підформула не є замкненою. З іншого боку, теж саме входження змінної x у підформулу $Q(x,y)$ є зв'язаним входженням у формулі $\forall x(P(x) \to \exists y\, Q(x,y))$. В цій формулі всі входження всіх змінних зв'язані, тому ця формула замкнена.

Приклад. Нехай $Q(x,z)$ означає: "x народився у році z", де x належить множині людей, а z — множині років, тоді формула $\forall x \exists z\, Q(x,z)$ означає висловлювання: "Кожна людина народилася в якомусь році", а формула $\exists z \forall x\, Q(x,z)$ — висловлювання: "Існує такий рік, в якому народились люди". З цього прикладу видно, що різні квантори в загальному випадку не комутативні.

У формулах логіки першого порядку можна робити заміну змінних (в загальному випадку — термів) при виконанні певних умов, які полягають в тому, щоб жодне вільне входження змінної не стало зв'язаним внаслідок заміни.

Терм y є **вільним для змінної** x в формулі $A(x)$, якщо жодне вільне входження x в $A(x)$ не знаходиться в області дії жодного квантора по z, де z — змінна, яка входить в терм y.

Будь-який терм, який не містить змінних, є вільним для довільної змінної у будь-який формулі. Будь-який терм є вільним для x в формулі $A(x)$, якщо $A(x)$ не містить вільних входжень x. Терм y є вільним для довільної змінної в формулі A, якщо жодна змінна терму y не є зв'язаною змінною в формулі A.

Приклад. Терм y є вільним для змінної x в формулі $P(x)$, але той самий терм y не є вільним для змінної x в формулі $\forall y P(x)$.

Терм $f(x,z)$ є вільним для змінної x в формулі $\forall y P(x,y) \to Q(x)$, але той самий терм $f(x,z)$ не є вільним для змінної x в формулі $\exists z \forall y P(x,y) \to Q(x)$.

4.3.3 Інтерпретації формул логіки предикатів

Формули мають зміст тільки тоді, коли є яка-небудь інтерпретація символів, які входять до її складу.

Інтерпретацією називається система I, яка складається з непорожньої множини D, яка називається **областю інтерпретації**, а також відповідності, яка ставить кожному n-місному предикату P_i деяке відношення на області D^n, кожній предметній константі a_i — деякий елемент з області D, кожній функціональній літері f_i — деяку n-місну операцію з області D (тобто функцію $D^n \to D$).

Коли задана область інтерпретації всі предметні змінні пробігають всі значення з області D, а логічні зв'язки мають звичайний логічний зміст.

Приклад. Нехай є формула логіки першого порядку $\forall x(P(x) \to Q(x))$. В таблиці 1 наведені три інтерпретації цієї формули.

Таблиця 1 — Приклади інтерпретацій

Область інтерпретації D	Інтерпретація	Висловлювання $\forall x(P(x) \to Q(x))$
Множина живих істот	$P(x)$: x — риба, $Q(x)$: x мешкає у воді	Усі риби мешкають у воді
Множина живих істот	$P(x)$: x — людина, $Q(x)$: x смертний	Усі люди смертні
Множина цілих чисел	$P(x)$: x ділиться на 6, $Q(x)$: x ділиться на 3	Всі числа, які діляться на 6, діляться на 3

Приклад. Нехай задана формула $\exists x \exists y P(f(x,y), t)$. Предикат $P(v, u)$ — двомісний, змінні x, y — зв'язані, t — вільна змінна. Задамо наступну інтерпретацію: область інтерпретації D — множина дійсних чисел R, $t = 1$, $f(x,y) = = x^2 + y^2$, предикат $P(u, t)$: $u = t$. Тоді формула набуває вигляд: $\exists x \exists y(x^2 + y^2 = 1)$. Вона істинна, тому що існують такі x та y, які задовольняють рівнянню кола $x^2 + y^2 = 1$.

Якщо покласти $f(x,y) = x^2 + y^2$, $t = r^2$, то формула $\exists x \exists y(x^2 + y^2 = r^2)$ — одномісний предикат, область істинності якого — множина дійсних чисел, які задовольняють рівнянню кола $x^2 + y^2 = r^2$ з радіусом r.

Інтерпретація називається **моделлю** для даної множини формул Γ, якщо кожна формула з Γ істинна в даній інтерпретації.

Формула називається **виконуваною**, якщо існує хоча б одна інтерпретація, на якій формула істинна. Формула називається **загальнозначущою**, якщо вона істинна на будь-якій інтерпретації для будь-яких значень змінних. Формула, яка є хибною на будь-якій інтерпретації при будь-яких значеннях змінних, називається **протиріччям**.

Загальнозначущі формули позначаються як і тавтології, тобто $\vdash A$.

Через те, що область визначення предиката може бути нескінченною, то, очевидно, що побудова таблиць істинності не може служити алгоритмом для визначення, чи є формула загальнозначущою. Але існують інші способи, які в часткових випадках дозволяють визначити, чи є формула загальнозначущою, виконуваною, або перевірити еквівалентність формул. Можна побудувати таблиці істинності формул логіки предикатів для часткових інтерпретацій на обмежених скінчених областях.

Приклад. Наприклад, візьмемо область інтерпретації, яка складається з двох довільних елементів: $D = \{a, b\}$. Побудуємо таблицю істинності формул:

$$E_1 = \exists x P(x)\ , \quad E_2 = \forall x P(x).$$

Одномісний предикат на області визначень з двох елементів може приймати одне з чотирьох значень, які визначаються таблицями істинності (табл. 2).

Таблиця 2

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

Формули E_1 та E_2 будуть приймати на цих інтерпретаціях наступні значення (табл. 3).

Таблиця 3

$P(\cdot)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$
P_1	F	F
P_2	T	F
P_3	T	F
P_4	T	T

Побудуємо таблиці істинності на області інтерпретації з двох елементів $D = \{a, b\}$ для наступних формул:

$$E_1 = \forall y P(y) \to \exists x Q(x),$$

$$E_2 = \forall y (P(y) \to \exists x Q(x)),$$

$$E_3 = \forall y \exists x (P(y) \to Q(x)).$$

Для цих формул існує 16 інтерпретацій, тому що кожний з одномісних предикатів P та Q приймає по 4 значення у відповідності з таблицею 2. Розглянемо обчислення формул на інтерпретації P_2, Q_1.

$$E_1 = \forall y P_2(y) \to \exists x Q_1(x) = \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T};$$

$$E_2 = \forall y (P_2(y) \to \exists x Q_1(x)) = \forall \begin{pmatrix} P_2(a) \to \mathrm{F} \\ P_2(b) \to \mathrm{F} \end{pmatrix} = \forall \begin{pmatrix} \mathrm{F} \to \mathrm{F} \ = \ \mathrm{T} \\ \mathrm{T} \to \mathrm{F} \ = \ \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F};$$

$$E_3 = \forall y \exists x (P_2(y) \to Q_1(x)) = \forall y \begin{pmatrix} \exists x (P_2(a) \to Q_1(x)) \\ \exists x (P_2(b) \to Q_1(x)) \end{pmatrix} = \forall \begin{pmatrix} \exists x \begin{pmatrix} P_2(a) \to Q_1(a) \\ P_2(a) \to Q_1(b) \end{pmatrix} \\ \exists x \begin{pmatrix} P_2(b) \to Q_1(a) \\ P_2(b) \to Q_1(b) \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \forall y \begin{pmatrix} \exists x \begin{pmatrix} \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T} \\ \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T} \end{pmatrix} = \mathrm{T} \\ \exists x \begin{pmatrix} \mathrm{T} \to \mathrm{F} = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} \to \mathrm{F} = \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F}.$$

Аналогічно можна знайти значення для цих формул для решти 15 інтерпретацій та дізнатись, які з формул є виконуваними.

4.3.4 Властивості формул логіки предикатів

Очевидно, для формул логіки предикатів зберігаються всі рівності та правила рівносильних перетворень логіки висловлювань. Крім того, справедлива наступна теорема.

Теорема 1. В логіці предикатів справедливі наступні рівносильності, які містять квантори:

1. $\overline{\forall x\, P(x)} \sim \exists x\, \overline{P(x)}$
2. $\overline{\exists x\, P(x)} \sim \forall x\, \overline{P(x)}$
3. $\forall x\, P(x) \sim \overline{\exists x\, \overline{P(x)}}$;
4. $\exists x\, P(x) \sim \overline{\forall x\, \overline{P(x)}}$;
5. $\forall x\, (P(x) \wedge S) \sim \forall x\, P(x) \wedge S$;
6. $\forall x\, (S \wedge P(x)) \sim S \wedge \forall x\, P(x)$;
7. $\forall x\, (P(x) \vee S) \sim \forall x\, P(x) \vee S$;
8. $\forall x\, (S \vee P(x)) \sim S \vee \forall x\, P(x)$;
9. $\exists x\, (P(x) \wedge S) \sim \exists x\, P(x) \wedge S$;
10. $\exists x\, (S \wedge P(x)) \sim S \wedge \exists x\, P(x)$;
11. $\exists x\, (P(x) \vee S) \sim \exists x\, P(x) \vee S$;
12. $\exists x\, (S \vee P(x)) \sim S \vee \exists x\, P(x)$;
13. $\forall x\, (P(x) \rightarrow S) \sim \exists x\, P(x) \rightarrow S$;
14. $\forall x\, (S \rightarrow P(x)) \sim S \rightarrow \forall x\, P(x)$;
15. $\exists x\, (P(x) \rightarrow S) \sim \forall x\, P(x) \rightarrow S$;
16. $\exists x\, (S \rightarrow P(x)) \sim S \rightarrow \exists x\, P(x)$;

17. $\forall x\, S \sim S$;

18. $\exists x\, S \sim S$;

19. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \sim \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$

20. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \sim \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

21. $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$

22. $(\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(x) \vee Q(x))$

23. $\forall x\, P(x) \sim \forall y\, P(y)$;

24. $\exists x\, P(x) \sim \exists y\, P(y)$;

25. $\forall x\, \forall y\, R(x,y) \sim \forall y\, \forall x\, R(x,y)$

26. $\exists x\, \exists y\, R(x,y) \sim \exists y\, \exists x\, R(x,y)$

27. $\exists y\, \forall x\, R(x,y) \rightarrow \forall x\, \exists y\, R(x,y)$

Теорема 2. Якщо замінити зв'язану змінну довільної формули A іншою змінною, що не входить у цю формулу, у кванторі й усюди в області його дії, дістанемо формулу, рівносильну A.

Приклад. Побудувати таблицю істинності для предиката на області інтерпретацій $D\{a,b\}$:

1. $E = \exists x \forall y \big(P(x) \wedge Q(y)\big) \rightarrow R$
2. $E = \forall x \exists y \big(P(x) \vee Q(y)\big) \wedge R$
3. $E = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)) \vee R$

Розв'язання. Для виконання цього завдання, нагадаємо, що таблиці істинності для предикатів на області інтерпретацій $D\{a,b\}$ виглядають наступним чином:

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

$P(\cdot)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$
P_1	F	F
P_2	T	F
P_3	T	F
P_4	T	T

На основі рівносильностей, наведених у теоремі 1, спрощуємо предикат і заповнюємо таблиці:

(R=T)

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

(R=F)

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*

1. $E = \exists x \forall y \big(P(x) \wedge Q(y)\big) \to R = \big(\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y)\big) \to R.$

Остаточно отримуємо

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*

Це і є таблиці істинності для першого предиката.

2. $E = \forall x \exists y \big(P(x) \vee Q(y)\big) \wedge R = (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge R.$

Аналогічно, таблиці істинності для другого предиката матимуть вигляд.

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*

Це і є таблиці істинності для другого предиката.

3. За формулами 13 та 16 теореми 1

$$13.\ \forall x\,(P(x) \to S) \sim \exists x\,P(x) \to S$$

$$16.\ \exists x\,(S \to P(x)) \sim S \to \exists x\,P(x)$$

матимемо

$$E = \forall x \exists y \big(P(x) \to Q(y)\big) \vee R = (\exists x P(x) \to \exists y Q(y)) \vee R.$$

Аналогічно, таблиці істинності для третього предиката матимуть вигляд.

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*

Це і є таблиці істинності для третього предиката.