

**Приклад 2.** Побудувати кубічний сплайн для функції, що задана

|        |   |    |   |    |
|--------|---|----|---|----|
| $x$    | 2 | 3  | 5 | 7  |
| $f(x)$ | 4 | -2 | 6 | -3 |

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1) Побудуємо кубічний сплайн  $S(x)$ :

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{для } x \in [x_0; x_1] \\ S_2(x) & \text{для } x \in [x_1; x_2] \\ \dots & \dots \\ S_n(x) & \text{для } x \in [x_{n-1}; x_n] \end{cases}$$

де кубічний сплайн на кожному частинному відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$  має вигляд

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

$a_i, b_i, c_i, d_i$  — четвірка невідомих коефіцієнтів для одного частинного відрізка  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Отже, в даному випадку

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{для } x \in [2; 3], \\ S_2(x) & \text{для } x \in [3; 5], \\ S_3(x) & \text{для } x \in [5; 7]. \end{cases}$$

$$a_i = y_{i-1} \qquad a1 := y_0 = 4 \qquad a2 := y_1 = -2 \qquad a3 := y_2 = 6$$

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 4 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, \quad x \in [2; 3]; \\ S_2(x) &= -2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3, \quad x \in [3; 5]; \\ S_3(x) &= 6 + b_3(x-5) + c_3(x-5)^2 + d_3(x-5)^3, \quad x \in [5; 7]. \end{aligned}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \text{ — довжина частинного відрізка } [x_{i-1}; x_i].$$

$$h1 := x_1 - x_0 = 1 \qquad h2 := x_2 - x_1 = 2 \qquad h3 := x_3 - x_2 = 2$$

Складемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів  $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$

$$\begin{cases} b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1}, & (i=1, 2, \dots, n) \\ b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0, & (i=1, 2, \dots, n-1) \\ c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0, & (i=1, 2, \dots, n-1) \\ c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0 \end{cases}$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 b1 \cdot h1 + c1 \cdot h1^2 + d1 \cdot h1^3 &= y_1 - y_0 & b1 + c1 + d1 &= -6 \\
 b2 \cdot h2 + c2 \cdot h2^2 + d2 \cdot h2^3 &= y_2 - y_1 & 2 \cdot b2 + 4 \cdot c2 + 8 \cdot d2 &= 8 \\
 b3 \cdot h3 + c3 \cdot h3^2 + d3 \cdot h3^3 &= y_3 - y_2 & 2 \cdot b3 + 4 \cdot c3 + 8 \cdot d3 &= -9 \\
 b2 - b1 - 2 \cdot c1 \cdot h1 - 3 \cdot d1 \cdot h1^2 &= 0 & b2 - b1 - 2 \cdot c1 - 3 \cdot d1 &= 0 \\
 b3 - b2 - 2 \cdot c2 \cdot h2 - 3 \cdot d2 \cdot h2^2 &= 0 & b3 - b2 - 4 \cdot c2 - 15 \cdot d2 &= 0 \\
 c2 - c1 - 3 \cdot d1 \cdot h1 &= 0 & c2 - c1 - 3 \cdot d1 &= 0 \\
 c3 - c2 - 3 \cdot d2 \cdot h2 &= 0 & c3 - c2 - 6 \cdot d2 &= 0 \\
 c1 &= 0 & c1 &= 0 \\
 c3 + 3 \cdot d3 \cdot h3 &= 0 & c3 + 6 \cdot d3 &= 0
 \end{aligned}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою блока Given - Fined:

|              |   |           |           |
|--------------|---|-----------|-----------|
| Guess Values | $b1 := 0$   | $b2 := 0$ | $b3 := 0$ |
|              | $c1 := 0$   | $c2 := 0$ | $c3 := 0$ |
|              | $d1 := 0$   | $d2 := 0$ | $d3 := 0$ |
| Constraints  | Given   |           |           |
|              | $b1 \cdot h1 + c1 \cdot h1^2 + d1 \cdot h1^3 = y_1 - y_0$   |           |           |
|              | $b2 \cdot h2 + c2 \cdot h2^2 + d2 \cdot h2^3 = y_2 - y_1$   |           |           |
|              | $b3 \cdot h3 + c3 \cdot h3^2 + d3 \cdot h3^3 = y_3 - y_2$   |           |           |
|              | $b2 - b1 - 2 \cdot c1 \cdot h1 - 3 \cdot d1 \cdot h1^2 = 0$   |           |           |
|              | $b3 - b2 - 2 \cdot c2 \cdot h2 - 3 \cdot d2 \cdot h2^2 = 0$   |           |           |
|              | $c2 - c1 - 3 \cdot d1 \cdot h1 = 0$   |           |           |
|              | $c3 - c2 - 3 \cdot d2 \cdot h2 = 0$   |           |           |
|              | $c1 = 0$  |           |           |
|              | $c3 + 3 \cdot d3 \cdot h3 = 0$  |           |           |
| Solver       | $solution := find(b1, b2, b3, c1, c2, c3, d1, d2, d3) =$  |           |           |
|              | $\begin{bmatrix} -8.2045 \\ -1.5909 \\ 1.9545 \\ 0 \\ 6.6136 \\ -4.8409 \\ 2.2045 \\ -1.9091 \\ 0.8068 \end{bmatrix}$ |           |           |

Отже, коефіцієнти сплайнів:

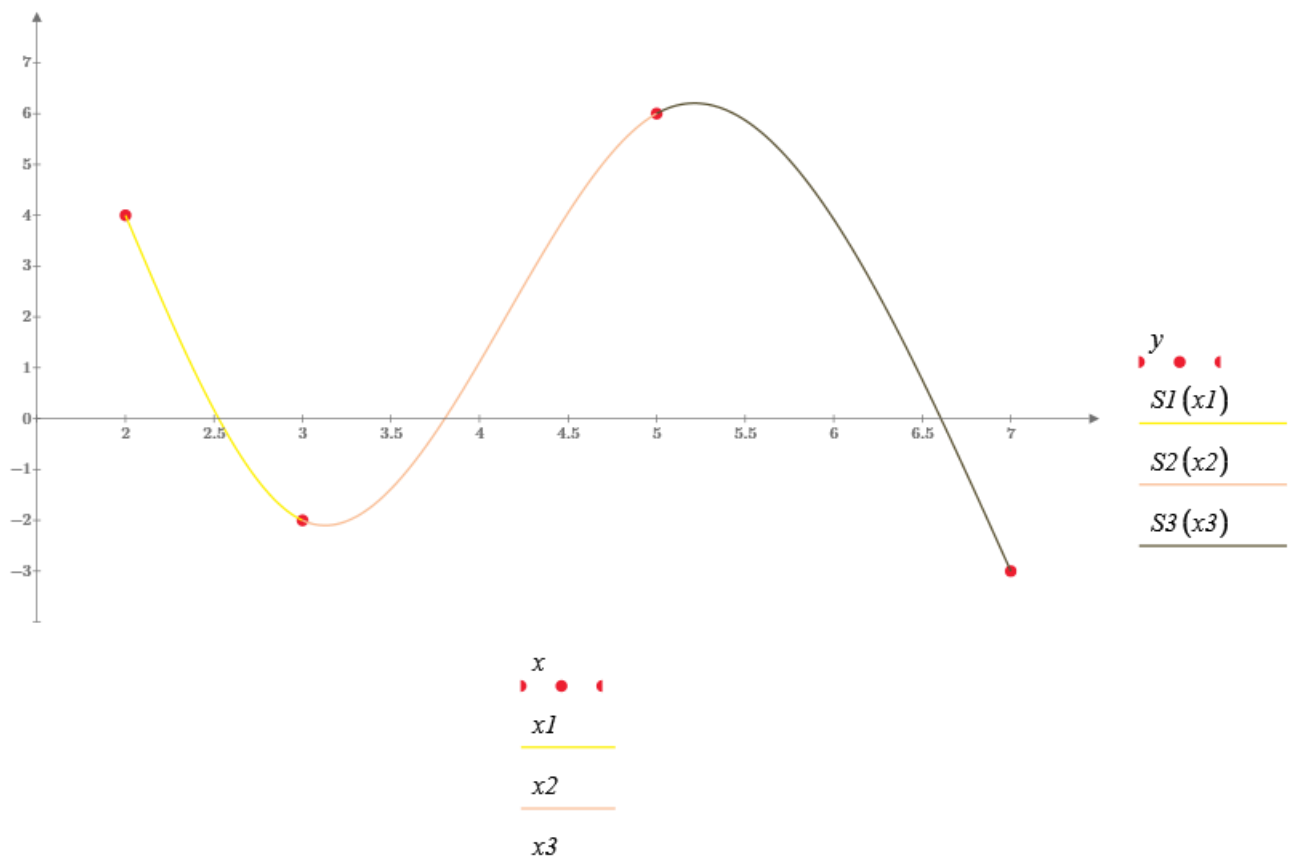
|           |                              |                              |                              |
|-----------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $a1 = 4$  | $b1 := solution_0 = -8.2045$ | $c1 := solution_3 = 0$       | $d1 := solution_6 = 2.2045$  |
| $a2 = -2$ | $b2 := solution_1 = -1.5909$ | $c2 := solution_4 = 6.6136$  | $d2 := solution_7 = -1.9091$ |
| $a3 = 6$  | $b3 := solution_2 = 1.9545$  | $c3 := solution_5 = -4.8409$ | $d3 := solution_8 = 0.8068$  |

Таким чином, шуканий кубічний сплайн має вигляд

$$S(x) = \begin{cases} 4 - 8,205 \cdot (x-2) + 0 \cdot (x-2)^2 + 2,205 \cdot (x-2)^3, & x \in [2, 3]; \\ -2 - 1,591 \cdot (x-3) + 6,614 \cdot (x-3)^2 - 1,909 \cdot (x-3)^3, & x \in [3, 5]; \\ 6 + 1,955 \cdot (x-5) - 4,841 \cdot (x-5)^2 + 0,807 \cdot (x-5)^3, & x \in [5, 7]. \end{cases}$$

2) Побудуємо графік побудованого квадратичного сплайну та заданої функції

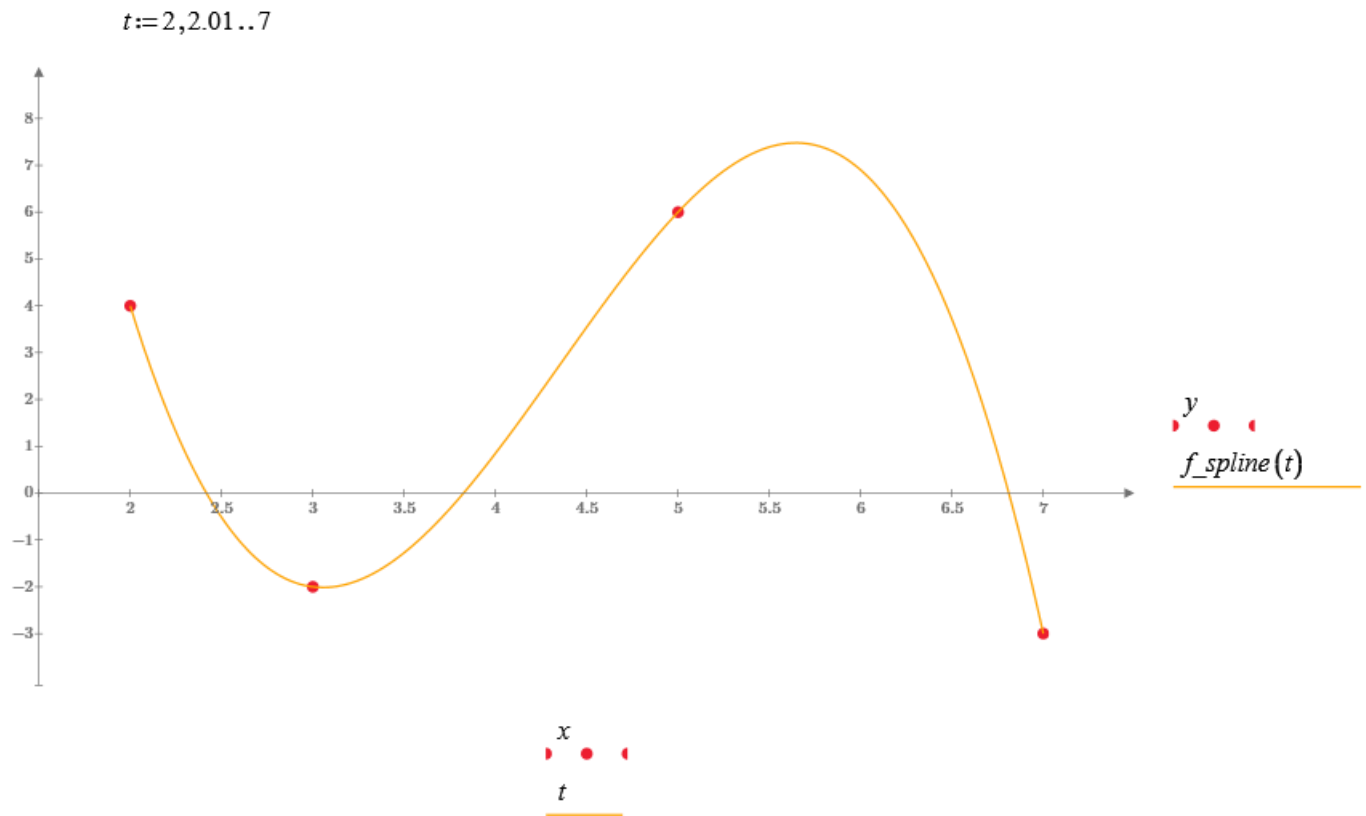
$$\begin{aligned} x1 &:= 2, 2.01 \dots 3 \\ S1(x1) &:= 4 - 8.205 \cdot (x1 - 2) + 0 \cdot (x1 - 2)^2 + 2.205 \cdot (x1 - 2)^3 \\ x2 &:= 3, 3.01 \dots 5 \\ S2(x2) &:= -2 - 1.591 \cdot (x2 - 3) + 6.614 \cdot (x2 - 3)^2 - 1.909 \cdot (x2 - 3)^3 \\ x3 &:= 5, 5.01 \dots 7 \\ S3(x3) &:= 6 + 1.955 \cdot (x3 - 5) - 4.841 \cdot (x3 - 5)^2 + 0.807 \cdot (x3 - 5)^3 \\ t &:= 2, 2.01 \dots 7 \end{aligned}$$



3) Побудуємо кубічний сплайн засобами Mathcad

$$f\_spline(t) := \text{interp}(cspline(x, y), x, y, t)$$

4) Побудуємо графік сплайну, побудованого засобами Mathcad, та заданої функції



5) Побудуємо порівняльний графік обох сплайнів

