# 3.1 БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

### 3.1.1 Булеві змінні та функції

Нехай $B=\{0,1\}$.

Змінні, які можуть приймати значення тільки з множини $B$, називаються ***логічними*** або ***булевими змінними***.

Значення 0 і 1 булевих змінних називаються ***булевими константами***.

Функція виду $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, аргументи $x_i$ і значення $y$ якої належать множині $B$, називається ***n-місною булевою функцією***. Такі функції також називають ***логічними*** або ***перемикальними*** функціями.

Кортеж $(x_1, x_2, ..., x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається ***двійковим словом (n-словом)*** або ***булевим набором*** довжини $n$.

Для булевої функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ конкретне значення булевого набору $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається ***інтерпретацією булевої функції*** $f$.

## 3.1.2 Способи задання булевих функцій

1) за допомогою таблиці істинності (значеннями на кожній з інтерпретацій);

2) порядковим номером, який має ця функція;

3) аналітично (у вигляді формули).

### 3.1.2.1 Таблиці істинності

Таблиці, в яких кожній інтерпретації функції поставлено у відповідність її значення, називаються ***таблицями істинності булевої функції***.

# Приклад

| $x$ | $y$ | $f(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Таблиця істинності функції $n$ змінних:

| $x_1$ | … | $x_{n-1}$ | $x_n$ | $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | … | 0 | 0 | $f(0,\ldots,0,0)$ |
| 0 | … | 0 | 1 | $f(0,\ldots,0,1)$ |
| 0 | … | 1 | 0 | $f(0,\ldots,1,0)$ |
| 0 | … | 1 | 1 | $f(0,\ldots,1,1)$ |
| … | … | … | … | … |
| 1 | … | 1 | 1 | $f(1,\ldots,1,1)$ |

Множину наборів у таблиці істинності прийнято записувати у лексикографічному порядку, так що кожний набір являє двійкове число. Відповідне йому десяткове число будемо називати *номером набору* (кортежу).

Наприклад, номер набору 101 дорівнює 5, номер набору 110 – 6.

Лема 1. Кількість наборів булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ від $n$ змінних дорівнює $2^n$.

Кількість булевих функцій від $n$ змінних дорівнює $2^{2^n}$.

Булева функція від двох змінних повністю визначена, якщо задано її значення в кожному із чотирьох можливих наборів ($2^2 = 4$);

булева функція трьох аргументів – в кожному з восьми наборів ($2^3 = 8$).

Кількість різних можливих булевих функцій від двох аргументів дорівнює 16, від трьох – 256.

***Числова форма запису булевої функції***

Для спрощення запису булевої функції замість повного переліку змінних наборів використовують двійкові значення наборів, для яких функція набуває одиничних значень.

Наприклад,

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \bigvee_{1}^{3} F\left(1, 4, 7\right)$$

Відповідна таблиця істинності має вигляд:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1,x_2,x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## Булеві функції від однієї змінної *f*(*x*)

| $x$ | $\varphi_0$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$\varphi_0 = 0$ — функція константа 0,

$\varphi_1 = x$ — функція повторення аргументу,

$\varphi_2 = \overline{x}$ — функція інверсії або заперечення аргументу,

$\varphi_3 = 1$ — функція константа 1.

# Булеві функції від двох змінних $f(x, y)$

| $x$ | $y$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Позначення та назви булевих функцій від двох змінних:

| Функція | Позначення | Назва | Булева формула | Інші позначення |
|---|---|---|---|---|
| $f_0(x, y)$ | 0 | Константа нуль | 0 | |
| $f_1(x, y)$ | $x \wedge y =$ $= x \& y =$ $= xy$ | Кон'юнкція (логічне «і») | $x \wedge y$ | -, &, &&, *, AND, I, ×, min |
| $f_2(x, y)$ | $x \leftarrow y$ | Заперечення (інверсія) імплікації | $x \wedge \overline{y}$ | \ |
| $f_3(x, y)$ | $x$ | Повторення *x* | $x$ | |
| $f_4(x, y)$ | $y \leftarrow x$ | Заперечення (інверсія) оберненої імплікації | $\overline{x} \wedge y$ | \ |
| $f_5(x, y)$ | $y$ | Повторення *y* | $y$ | |
| $f_6(x, y)$ | $x \oplus y$ | Сума за модулем 2 | $(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$ | *, <>, ><, !=, |

| Функція | Позна-чення | Назва | Булева формула | Інші позна-чення |
|---|---|---|---|---|
| | | | | XOR |
| $f_7(x, y)$ | $x \vee y$ $= x + y$ | Диз'юнкція (логічне «або») | $x \vee y$ | OR, АБО, +, max |
| $f_8(x, y)$ | $x \downarrow y$ | Стрілка Пірса-Вебба (стрілка Пірса) | $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ | $x \bar{\vee} y$, $x \circ y$ |
| $f_9(x, y)$ | $x \sim y =$ $= x \equiv y$ | Еквівалентність | $\overline{x \oplus y} =$ $= (x \to y) \wedge (y \to x) =$ $= (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) =$ $= xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$ | $\Leftrightarrow$, $\equiv$, Eqv, $=$ |
| $f_{10}(x, y)$ | $\bar{y} = \neg y$ | Заперечення (інверсія) $y$ | $\bar{y}$ | $\neg y$ |
| $f_{11}(x, y)$ | $y \to x$ | Обернена імплікація | $x \vee \bar{y}$ | $\subset$ |

| Функція | Позна-чення | Назва | Булева формула | Інші позна-чення |
|---|---|---|---|---|
| $f_{12}(x, y)$ | $\bar{x} = \neg x$ | Заперечення (інверсія) $x$ | $\bar{x}$ | $\neg x$ |
| $f_{13}(x, y)$ | $x \to y$ | Імплікація | $\bar{x} \vee y$ | $\supset$, $\Rightarrow$, Imp |
| $f_{14}(x, y)$ | $x \mid y$ | Штрих Шеффера | $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ | $x \barwedge y$ |
| $f_{15}(x, y)$ | 1 | Константа одиниця | 1 | |

### 3.1.2.2 Номери булевих функцій та інтерпретацій

Кожній функції привласнюється порядковий номер у вигляді натурального числа, двійковий код якого зображує стовпчик значень функції у таблиці істинності.

Молодшим розрядом вважається самий нижчий рядок, а старшим — самий верхній.

Вказаний порядковий номер функції, як двійковий, так і десятковий, повністю визначає булеву функцію.

Кожній інтерпретації булевої функції також привласнюється свій номер – значення двійкового коду, який зображує інтерпретація.

Інтерпретації, що записана у верхньому рядку таблиці істинності, привласнюється номер 0, потім йде інтерпретація номер 1 тощо. В самому нижчому рядку розташована інтерпретація за номером $2^n - 1$, де $n$ – кількість змінних, від яких залежить булева функція.

**Приклад**. Знайдемо порядковий номер функції $f(x, y)$, що приймає такі значення: $f(0,0)=1$, $f(0,1)=1$, $f(1,0)=0$, $f(1,1)=1$.

Побудуємо таблицю істинності для цієї функції.

| $x$ | $y$ | $f(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Переведемо двійкове число $1101_2$ у десяткову систему числення:

$$1101_2 = 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 =$$
$$= 13_{10}.$$

Десятковий номер даної функції — 13, тобто розглянута функція імплікації $f_{13}(x,y) = x \to y$.

### 3.1.2.3 Властивості функцій алгебри логіки

Функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***суттєво залежить*** від змінної $x_i$, якщо існує такий набір значень

$a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, що

$$f(a_1,\ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots,a_n) \neq f(a_1,\ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots,a_n).$$

В цьому випадку змінна $x_i$ називається ***суттєвою*** змінною, інакше $x_i$ називають ***несуттєвою*** (***фіктивною***) змінною.

**Приклад.** Нехай булеві функції $f_1(x_1, x_2)$ та $f_2(x_1, x_2)$ задані таблицею істинності:

| $x_1$ | $x_2$ | $f_1(x_1,x_2)$ | $f_2(x_1,x_2)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Для цих функцій змінна $x_1$ – суттєва, а $x_2$ – несуттєва.

Функції $f_1$ та $f_2$ називаються ***рівними***, якщо функцію $f_2$ можна одержати з $f_1$ додаванням і/або вилученням фіктивних аргументів.

Існують два типи функцій, які не мають суттєвих змінних:

- функція, тотожна 0 (константа 0);
- функція, тотожна 1 (константа 1).

### 3.1.2.4 Булева алгебра

***Булева алгебра*** (загальна) — це алгебраїчна структура

$$<A, \{\wedge, \vee, \neg, 0, 1\}>$$

з бінарними операціями $\wedge$, $\vee$: $A^2 \rightarrow A$, унарною операцією «$\neg$»: $A \rightarrow A$ і виділеними елементами 0, 1 в носії $A$, операції якої задовольняють властивості комутативності, асоціативності, дистрибутивності.

Якщо носій алгебраїчної структури $B = \{0, 1\}$ складається з двох елементів, то така структура $<B, \{\wedge, \vee, \neg\}>$ називається ***двохелементною булевою алгеброю***.

***Алгеброю логіки*** називається двохелементна булева алгебра

$$<B, \{\wedge, \vee, \neg, \to, \sim\}>, \quad B=\{0, 1\},$$

в якій множину операцій доповнено двома бінарними операціями: імплікацією та еквівалентністю.

### 3.1.2.5 Булеві функції та пріоритет операцій

Булеві функції можуть бути задані *аналітично*, тобто формулами.

***Формула*** — це вираз, що містить булеві функції та їхні суперпозиції.

***Суперпозицією*** називається спосіб одержання нових функцій шляхом підстановки значень одних функцій замість значень аргументів інших функцій, при цьому деякі з функцій можуть тотожно співпадати з однією із змінних.

## Пріоритет операцій

Якщо у формулі відсутні дужки, то **операції виконуються у такій послідовності**: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація та еквівалентність: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$.

Зображення функції формулою не єдине.

**Приклад.** Функція штрих Шеффера:

$$f_{14} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \quad \text{або} \quad f_{14} = \overline{x_1 x_2},$$

функція стрілка Пірса:

$$f_8 = \bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \quad \text{або} \quad f_8 = \overline{x_1 \vee x_2},$$

Формули, що зображують одну й ту ж функцію, називаються ***еквівалентними*** або ***рівносильними***.

**Приклад**. Побудуємо таблицю істинності для функції $f(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$.

Значення функції на всіх інтерпретаціях:

$$f(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$
$$f(0, 0, 1) = 0 \wedge 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$
$$f(0, 1, 0) = 0 \wedge 1 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$
$$f(0, 1, 1) = 0 \wedge 1 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$
$$f(1, 0, 0) = 1 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$
$$f(1, 0, 1) = 1 \wedge 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$
$$f(1, 1, 0) = 1 \wedge 1 \vee \bar{0} = 1 \vee 1 = 1,$$
$$f(1, 1, 1) = 1 \wedge 1 \vee \bar{1} = 1 \vee 0 = 1.$$

Таблиця істинності:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x, y, z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

### 3.1.3 Двоїстість

Функція $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ називається ***двоїстою*** до функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\right). \tag{1}$$

$$\left(f^*\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)^* = \left(\overline{f}\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\right)\right)^* =$$

$$= \left(\overline{\overline{f}}\left(\overline{\overline{x}}_1, \ldots, \overline{\overline{x}}_n\right)\right) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \Rightarrow \left(f^*\right)^* = f.$$

Функція, двоїста сама собі, тобто $f = f^*$, називається ***самодвоїстою***.

**Правило**:

щоб побудувати таблицю істинності функції, що двоїста даній, необхідно побудувати таблицю істинності заданої функції, кожне значення булевої функції замінити на протилежне і записати одержаний стовпчик у зворотній послідовності.

**Приклад**. Знайти функцію, яка двоїста функції $f(x, y, z)$, якщо відомо, що $f(x, y, z) = 1$ тільки на інтерпретаціях (001), (011), (111).

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x, y, z)$ | $f^*(x, y, z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Приклад**. Самодвоїста функція $f = f^*$.

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x, y, z)$ | $f^*(x, y, z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Нехай функція $F$ задана як суперпозиція функцій $f_0$ і функцій $f_1, ..., f_n$: $F = f_0 (f_1, ..., f_n)$.

Функцію $F^*$, що двоїста $F$, можна одержати, замінивши в формулі $F$ функції $f_0$; $f_1, ..., f_n$ на двоїсті до них $f_0^*$; $f_1^*,..., f_n^*$.

$$F^* = f_0^*( f_1^*,..., f_n^*).$$

Функції, що двоїсті до «елементарних» функцій логіки $\wedge, \vee, \neg$, константа 0, константа 1:

$$f(x, y) = x \wedge y; \qquad f^*(x, y) = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = x \vee y;$$

$$f(x) = \overline{x}; \qquad f^*(x) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x} = f(x);$$

$$f(x) = 0; \qquad f^*(x) = \overline{0} = 1 = f(x).$$

**Правило** одержання двоїстих формул у булевій алгебрі:

«Для того щоб одержати двоїсту формулу булевої алгебри, необхідно замінити в ній всі кон'юнкції на диз'юнкції, диз'юнкції на кон'юнкції, 0 на 1, 1 на 0 і використовувати дужки, де необхідно, щоб **порядок використання операцій залишився попереднім**».

**Приклад**. Знайти функцію, двоїсту функції $f = x \vee \bar{y}z \vee 0.$

$$f^* = \left(x \vee \left(\bar{y}z\right) \vee 0\right)^* = x \wedge \left(\bar{y} \vee z\right) \wedge 1.$$

## 3.1.4 Закони булевої алгебри

***1. Комутативність кон'юнкції та диз'юнкції***

$$x \vee y = y \vee x; \qquad x \wedge y = y \wedge x.$$

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $y \vee x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$(x \vee y)^* = (y \vee x)^* \qquad x \wedge y = y \wedge x.$$

## *2. Асоціативність кон'юнкції та диз'юнкції*

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z;$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

Таблиці істинності для лівої та правої частин другої рівності:

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \wedge z$ | $x \wedge (y \wedge z)$ | $x \wedge y$ | $(x \wedge y) \wedge z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

***3. Дистрибутивність кон'юнкції та диз'юнкції відносно одна одній***

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

| $x$ | $y$ | $z$ | $y \vee z$ | $x \wedge (y \vee z)$ | $x \wedge y$ | $x \wedge z$ | $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 4. Ідемпотентність кон'юнкції та диз'юнкції

$$x \vee x = x; \quad x \wedge x = x.$$

| $x$ | $x \vee x$ | $x \wedge x$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

## 5. *Закон виключеного третього*

$$x \vee \bar{x} = 1.$$

| $x$ | $\bar{x}$ | $x \vee \bar{x}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

***6. Закон протиріччя***

$$x \wedge \overline{x} = 0.$$

## *7. Тотожності з константами*

$x \vee 0 = x; \quad x \wedge 1 = x; \quad x \vee 1 = 1; \quad x \wedge 0 = 0.$

| $x$ | $x \vee 0$ | $x \wedge 1$ | $x \vee 1$ | $x \wedge 0$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

## *8. Закони елімінації*

$$x \wedge (x \vee y) = x; \quad x \vee (x \wedge y) = x.$$

Доведення:

$$x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x;$$

$$x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x.$$

## ***9. Закон подвійного заперечення***

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

| $x$ | $\overline{x}$ | $\overline{\overline{x}}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

*Наслідок*. Якщо до деякої частини $A$ формули $F$ булевої алгебри операція заперечення застосована більше одного разу, то можна видалити будь-яке парне число даних операцій і значення формули $F$ не зміниться.

## 10. Закони де Моргана

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}; \qquad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}.$$

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ | $\overline{x \vee y}$ | $\overline{x}$ | $\overline{y}$ | $\overline{x} \wedge \overline{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |