ЛЕКЦІЯ 14

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Граничні теореми теорії ймовірностей умовно поділяють на дві групи. Перша група теорем, яку називають Законом Великих Чисел, встановлює стійкість середніх значень, тобто при великої кількості експериментів їх середній результат перестає бути випадковим і може бути передбаченим з достатньою точністю. Друга група теорем, яку називають Центральною Граничною Теоремою, встановлює умови, при яких закон розподілу суми великого числа випадкових величин необмежено наближається до нормального.

14.1. Закон Великих Чисел

Під законом великих чисел у широкому сенсі розуміють загальний принцип, згідно з яким, за формулюванням академіка О.М. Колмогорова, сукупна дія великої кількості випадкових факторів призводить (за деяких вельми загальних умов) до результату, майже не залежного від випадку. Іншими словами, при великому числі випадкових величин їхній середній результат перестає бути випадковим і може бути передбачений з великим ступенем визначеності.

Закон Великих Чисел — фундаментальний принцип теорії ймовірностей, який описує поведінку середніх значень великих наборів випадкових величин. Він вказує, що середнє значення великої кількості незалежних і однаково розподілених випадкових величин наближається до математичного сподівання цих величин зі збільшенням кількості спостережень.

Закон Великих Чисел є важливим результатом теорії ймовірностей, який описує стабілізацію середніх значень великих наборів випадкових даних. Він забезпечує теоретичну основу для багатьох методів статистичного аналізу і моделювання, дозволяючи робити надійні висновки на основі вибіркових даних.

Інтуїтивне пояснення

Закон Великих Чисел можна інтуїтивно зрозуміти як принцип, згідно з яким випадкові коливання середніх значень врівноважуються зі збільшенням числа спостережень. Наприклад, якщо ми підкидаємо монету багато разів, відсоток випадків випадання орла наближатиметься до 50%.

Приклади застосування

Статистичне оцінювання: У вибіркових дослідженнях середнє значення вибірки використовується для оцінювання середнього значення генеральної сукупності. Закон великих чисел гарантує, що ця оцінка буде точною при достатньо великій вибірці.

Страхування: Закон великих чисел є основою для страхових компаній, які використовують середні значення для прогнозування виплат по страхових випадках.

Гральні ігри: В азартних іграх закон великих чисел пояснює, чому казино завжди виграють у довгостроковій перспективі — середній виграш казино стабілізується навколо значення, що забезпечує прибуток.

До закону великих чисел належать:

1. Нерівність Маркова

Нерівність Маркова — один з основних результатів теорії ймовірностей, який дозволяє оцінити ймовірність того, що випадкова величина перевищить певне значення. Ця нерівність застосовується до не від'ємних випадкових величин і дозволяє робити корисні оцінки в різних задачах.

Теорема 14.1. *Нехай* X *— не від'ємна випадкова величина, тобто* $X \geq 0$, *і нехай існує константа* $A > 0$. *Тоді виконується нерівність* (14.1):

$$P(X \geq A) \leq \frac{M(X)}{A}, \qquad (14.1)$$

або з нерівність (14.2):

$$P(X < A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A}, \qquad (14.2)$$

де $M(X)$ *— математичне сподівання випадкової величини* X.

Доведення. Доведення проведемо для дискретної випадкової величини X. Розташуємо її значення в порядку зростання наступним чином: частина значень $x_1, \ldots, x_k$, які будуть не більшими за число A, а інша частина значень $x_{k+1}, \ldots, x_n$, які будуть більшими за A, тобто $x_1 \leq A, \ldots, x_k \leq A, x_{k+1} > A, \ldots, x_n > A$ (рис. 14.1).

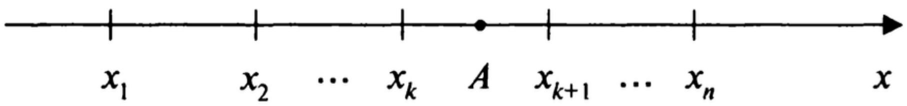


Рис. 14.1. Розташування значень випадкової величини X

Математичне сподівання дорівнює:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + \cdots + x_k \cdot p_k + x_{k+1} \cdot p_{k+1} + \cdots + x_n \cdot p_n,$$

де $x_1, \ldots, x_n$ – значення випадкової величини; $p_1, \ldots, p_k$ – ймовірності їх набуття.

Відкидаючи перші k невід'ємних доданків (оскільки всі $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$), отримаємо

$$x_{k+1} \cdot p_{k+1} + \cdots + x_n \cdot p_n \leq M(X).$$

Замінюючи x_i на A матимемо:

$$A \cdot p_{k+1} + \cdots + A \cdot p_n \leq M(X) \Rightarrow A \cdot (p_{k+1} + \cdots + p_n) \leq M(X) \Rightarrow$$

$$p_{k+1} + \cdots + p_n \leq \frac{M(X)}{A} \Rightarrow P(X \geq A) \leq \frac{M(X)}{A}.$$

Нерівність (14.2) отримується за допомогою властивостей протилежних подій.

Інтуїтивне пояснення

Нерівність Маркова (14.1) стверджує, що ймовірність того, що випадкова величина X перевищує певне значення A, не може бути більшою, ніж відношення математичного сподівання X до цього значення A. Іншими словами, чим більше A порівняно з $M(X)$, тим менша ймовірність того, що X перевищить A.

Нерівність Маркова можна застосовувати до будь-яких невід'ємних випадкових величин.

Приклад 14.1. *Нехай X — випадкова величина, яка приймає значення числа від 0 до 10. Припустимо, що $M(X) = 4$. Оцінити ймовірність того, що X перевищує 8.*

Розв'язання. За нерівністю Маркова (14.1).

$$P(X \geq 8) \leq \frac{M(X)}{8} = \frac{4}{8} = 0{,}5.$$

Це означає, що ймовірність того, що X перевищує 8, не може бути більшою за $0{,}5$.

Відповідь. $P(X \geq 8) \leq 0{,}5$.

2. Нерівність Чебишева

Нерівність Чебишева — це важливий результат у теорії ймовірностей, який надає оцінку ймовірності того, що випадкова величина значно відхиляється від свого середнього значення. Вона є узагальненням нерівності Маркова і застосовується до випадкових величин з кінцевою дисперсією.

Теорема 14.2. *Нехай X — випадкова величина з математичним сподіванням $M(X)$ і дисперсією $D(X)$. Тоді для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність* (14.3):

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \qquad (14.3)$$

або нерівність (14.4):

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (14.4)$$

Доведення. Застосовуючи нерівність Маркова (14.1) до випадкової величини $X^* = (X - a)^2$ та поклавши $A = \varepsilon^2$, матимемо:

$$P(X^* \geq A) = P((X - a)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{M(X-a)^2}{\varepsilon^2}.$$

Оскільки з $(X - a)^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow |X - a| \geq \varepsilon$, а $M(X - a)^2 = D(X)$, то отримуємо нерівність (14.3).

Нерівність (14.4) отримується за допомогою властивостей протилежних подій.

Інтуїтивне пояснення

Нерівність Чебишева (14.3) стверджує, що ймовірність того, що випадкова величина X відхилиться від свого математичного сподівання $M(X)$ щонайменше, ніж на ε, не перевищує $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Іншими словами, вона надає верхню межу ймовірності великих відхилень від середнього значення.

Нерівність Чебишева застосовна для багатьох випадкових величин. У формі (14.3) вона встановлює верхню границю, а у формі (14.4) – нижню межу ймовірності розглянутої події, що розглядається.

Приклад 14.2. *Нехай X — випадкова величина з математичним сподіванням $M(X) = 50$ і стандартним відхиленням $\sigma = 5$. Оцінити ймовірність того, що X відхилиться від свого математичного сподівання на більше, ніж 3 стандартні відхилення (тобто на більше, ніж 15).*

Розв'язання. За нерівністю Чебишева:

$$P(|\,X - 50\,| \geq 15) \leq \frac{25}{225} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111.$$

Це означає, що ймовірність того, що X відхилиться від свого середнього значення на більше, ніж 15, не перевищує приблизно 11,1%.

Відповідь. $P(|\,X - 50\,| \geq 15) \leq \frac{1}{9}$.

3. Теорема Чебишева

Теорема Чебишева, також відома як *теорема Бернштейна-Чебишева*, є важливим результатом у теорії ймовірностей. Вона є узагальненням закону великих чисел і стверджує, що середнє значення великої кількості незалежних випадкових величин, які мають скінченну дисперсію, збігається до їх математичного сподівання в ймовірнісному сенсі.

Теорема 14.3. *Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – послідовність попарно незалежних випадкових величин з скінченним математичним сподіванням $M(X_k) < +\infty$ і дисперсіями обмеженими однією і тією ж сталою $D(X_k) \leq C$. Тоді для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ справедлива рівність* (14.5):

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (14.5)$$

Доведення. За умовою теореми відомі $M(X_1), \dots, M(X_n)$ та $D(X_1) \leq C, \dots, D(X_n) \leq C$.

$$X = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

$$M(X) = M\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} M(X_k).$$

$$D(X) = D\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} D(X_k) \leq \frac{n \cdot C}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

З нерівності Чебишева (14.3)

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

При $n \to +\infty$ отримуємо рівність (14.5).

Інтуїтивне пояснення

Теорема Чебишева стверджує, що середнє значення великої кількості незалежних однаково розподілених випадкових величин буде з великою ймовірністю дуже близьким до середннього значення математичних сподівань $M(X_k)$ цих величин. Це означає, що ймовірність того, що середнє значення вибірки сильно відхилиться від середнього значення $M(X_k)$, зменшується до нуля зі збільшенням розміру вибірки n.

Приклад 14.3. *Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями $M(X_k) = 10$ і дисперсіями $D(X_k) = 4$. Оцінити ймовірність того, що середнє значення вибірки відхилиться від 10 більше, ніж на 2, коли $n \to +\infty$.*

Розв'язання. Використаємо нерівність Чебишева (14.3):

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k - 10\right| \geq 2\right) \leq \frac{4}{n\cdot 2^2} = \frac{1}{n} \to 0, n \to +\infty.$$

Це означає, що ймовірність того, що вибіркове середнє відхилиться від 10 більше, ніж на 2, є неможливою подією, що узгоджується з теоремою Чебишева (14.5).

Відповідь. Вибіркове середнє не відхилиться від 10 більше, ніж на 2.

4. Теорема Бернуллі

Теорема Бернуллі є спеціальним випадком Закону Великих Чисел для послідовності незалежних випробувань Бернуллі.

Теорема Бернуллі теоретично обґрунтовує властивість стійкості відносної частоти (при необмеженому збільшенні числа випробувань частота випадкової події збігається, за ймовірністю, до ймовірності події, якщо ймовірність події від випробування до випробування не змінюється і дорівнює p).

Теорема 14.4. *Нехай m – число настання події A, при n послідовних незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність настання події A дорівнює p. Тоді для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність* (14.6):

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p\cdot q}{n\cdot\varepsilon^2}, \tag{14.6}$$

яка при $n \to +\infty$ переходить у граничну рівність (14.7):

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{14.7}$$

Доведення. Нерівність (14.6) отримано безпосередньо з нерівності Чебишева (14.4), покладаючи $X = \frac{m}{n}$ та враховуючи біноміальність розподілу.

$$M(X) = n \cdot p \cdot \frac{1}{n} = p; \; D(X) = \; n \cdot p \cdot q \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p \cdot q}{n}.$$

Тоді отримуємо нерівність (14.6).

При $n \to +\infty$ отримуємо рівність (14.7).

Сенс теореми Бернуллі полягає у тому, що при $n \to +\infty$ відносна частота (випадкова величина) гарантовано мало відрізняється від ймовірності (невипадкової величини). Тобто теж стає невипадковою величиною.

Інтуїтивне пояснення

Теорема Бернуллі стверджує, що якщо ми будемо проводити достатньо велику кількість незалежних випробувань, відносна частота успіхів (усереднене значення) наблизиться до справжньої ймовірності успіху p. Це означає, що у великій серії випробувань фактична частка успіхів буде дуже близькою до очікуваної ймовірності успіху.

Приклад 14.4. *Монету підкидаєте* 10000 *разів. Нехай* m *– число випадань герба. Довести, що відносна частота випадання герба буде дуже близькою до ймовірності* $p = 0{,}5$ *зі збільшенням кількості підкидань* n $(\varepsilon = 0{,}05)$.

Розв'язання. Якщо ми оберемо $\varepsilon = 0{,}05$, то за наслідком 1 з інтегральної теореми Муавра-Лапласа (4.5) лекції 4:

$$P\left(\left|\frac{m}{10000} - 0{,}5\right| < 0{,}05\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p \cdot q}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}05 \cdot \sqrt{10000}}{\sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) =$$
$$= 2 \cdot \Phi(10) = 1.$$

Це узгоджується з теоремою Бернуллі (14.6)

$$P\left(\left|\frac{m}{10000} - 0{,}5\right| < 0{,}05\right) \geq 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{10000 \cdot 0{,}05^2} \approx 0{,}99.$$

і означає, що з дуже високою ймовірністю частка гербів у 10000 підкиданнях буде в інтервалі від $0{,}45$ до $0{,}55$.

Відповідь. $P\left(\left|\frac{m}{10000} - 0{,}5\right| < 0{,}05\right) \geq 0{,}99$

Приклад 14.5. *Знайти ймовірність того, що частота появи шістки в* 10000 *незалежних підкиданнях грального кубику відхиляється від ймовірності появи шістки за абсолютною величиною менше ніж на* $0{,}01$.

Розв'язання. За умовою $n = 10000$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

За формулою (14.6):

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{10000 \cdot 0{,}01^2} \approx 0{,}86.$$

Відповідь. $P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 0{,}86.$

Приклад 14.6. *За даними служби перевезень аеропорту кількість затриманих за метеоумовами рейсів складає* 7% *від їх загальної щорічної кількості. Наступного року планується виконати* 1400 *рейсів.*

Застосовуючи теорему Бернуллі, **а)** *оцінити ймовірність того, що в наступному році відносна частота затримки рейсів відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною менше ніж на* $0{,}02$; **б)** *визначити, в яких межах з ймовірністю, не меншою* $0{,}96$, *буде знаходитись відносна частота затримки рейсів*; **в)** *знайти, скільки потрібно зробити рейсів, щоб з ймовірністю, не меншою* $0{,}9$, *можна було б сподіватись, що абсолютна величина відхилення відносної частоти затримки рейсів від її ймовірності буде меншою* $0{,}01$.

Розв'язання. За умовою $n = 1400$; $p = 0{,}07$; $q = 0{,}93$.

а) За формулою (14.6) при $\varepsilon = 0{,}02$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}02\right) \geq 1 - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{1400 \cdot (0{,}02)^2} \approx 0{,}884.$$

б) Щоб ймовірність була не меншою 0,96, достатньо в формулі (14.6) покласти

$$1 - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{1400 \cdot \varepsilon^2} = 0{,}96, \text{ звідки } \varepsilon = 0{,}034.$$

Отже, з ймовірністю, не меншою 0,96, має місце подія

$$\left|\frac{m}{n} - 0{,}07\right| < 0{,}034 \text{ або } 0{,}036 < \frac{m}{n} < 0{,}104.$$

в) За формулою (14.6)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{0{,}07 \cdot 0{,}93}{n \cdot (0{,}01)^2} \geq 0{,}9, \text{ звідки } n \geq 6510.$$

Відповідь. а) $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}02\right) \approx 0{,}884$; б) $0{,}036 < \frac{m}{n} < 0{,}104$; в) $n \geq 6510$.

14.2. Інші граничні теореми

1. Теорема Маркова

Теорема Маркова формулюється наступним чином:

Теорема 14.5. *Нехай* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *– послідовність випадкових величин з скінченним математичним сподіванням* $M(X_k) < +\infty$ *для яких виконується умова*:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right) = 0. \qquad (14.7)$$

Тоді виконується рівність (14.5) *теореми Чебишева*:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Доведення: З рівності (14.7), враховуючи властивість про обмеженість збіжної послідовності, випливає, що

$$\frac{1}{n^2} \cdot D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} D(X_k) \leq \frac{n \cdot C}{n^2} \Rightarrow D(X_i) \leq C.$$

Таким чином виконуються умови теореми Чебишева, тобто справедлива рівність (14.5).

2. Центральна Гранична Теорема

Центральна Гранична Теорема (ЦГТ) є ключовим результатом, який говорить, що сума (або середнє) великої кількості незалежних випадкових величин, навіть якщо вони не є нормально розподіленими, буде наближатися до нормального розподілу при збільшенні кількості спостережень.

Класичне формулювання

Теорема 14.6. *Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n$ – послідовність взаємно незалежних випадкових величин з однаковими розподілами, які мають скінченне математичне сподівання $a = M(X_k)$ та скінченну дисперсію $\sigma^2 = D(X_k)$.*

Нехай $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Тоді справедливо (14.8):

$$\sqrt{n} \cdot \left(\frac{S_n}{n} - a\right) \to N(0,1), n \to +\infty, \tag{14.8}$$

а для довільних фіксованих α, β $(\alpha < \beta)$ справедливо (14.9):

$$P\left(\alpha < \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{S_n}{n} - a}{\sigma} < \beta\right) \to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{14.9}$$

де $\Phi(x)$ — функція Лапласа.

Доведення. Розглянемо основні кроки доведення.

1. Побудова сум та нормалізація:

Розглянемо суму S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Математичне сподівання:

$$M(S_n) = n \cdot a.$$

Дисперсія:

$$D(S_n) = n \cdot \sigma^2.$$

Нормалізуємо цю суму

$$Z_n = \frac{S_n - n \cdot a}{\sqrt{n} \cdot \sigma} = \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{S_n}{n} - a}{\sigma}.$$

2. Характеристична функція:

Для доведення використовуємо *характеристичну функцію випадкової величини X_k*, тобто математичне сподівання випадкової величини $e^{i \cdot t \cdot X_k}$:

$$\psi(X_k(t)) = M\left(e^{i \cdot t \cdot X_k}\right), \tag{14.10}$$

де t — параметр, i – комплексна одиниця.

Для S_n характеристична функція дорівнює добутку характеристичних функцій для незалежних $X_k = X$:

$$\psi_{S_n}(t) = \left(\psi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)\right)^n.$$

3. Розклад у ряд Тейлора:

Характеристична функція однієї випадкової величини $X_k = X$:

$$\psi_X(u) = 1 + i\cdot\mu\cdot u - \frac{\sigma^2\cdot u^2}{2} + o(u^2).$$

Для нормалізованої величини $\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}$

$$\psi_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right) = 1 + i\cdot\mu\cdot\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma} - \frac{\sigma^2}{2}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)^2\right).$$

4. Добуток характеристичних функцій:

Підставляємо в характеристичну функцію для S_n:

$$\psi_{S_n}(t) = \left(1 + i\cdot\mu\cdot\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma} - \frac{\sigma^2}{2}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)^2\right)\right)^n.$$

При $n \to +\infty$ матимемо:

$$\psi_{S_n}(t) \approx e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

5. Граничний розподіл:

Характеристична функція $\psi_{S_n}(t)$ відповідає $N(0,1)$. Отже, справедливий перехід (14.8). Що й треба було довести.

6. Отримання виразу (14.9):

Вираз (14.9) отримано з формули (6.6) лекції 6, враховуючи функцію розподілу стандартизованого розподілу $N(0,1)$, яка має вигляд:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi(x).$$

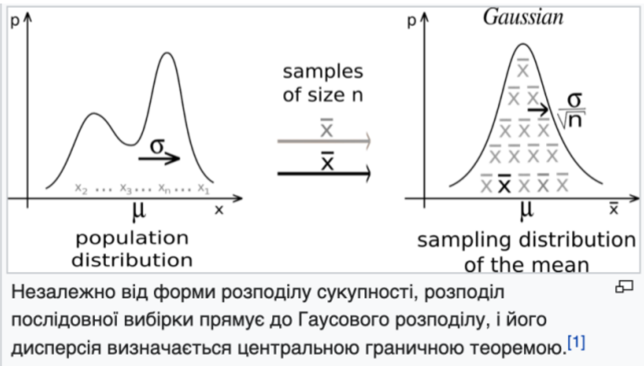


Рис. 14.1. Ілюстрація центральної граничної теореми

Інтерпретація і значення

Центральна Гранична Теорема пояснює поширення нормального закону розподілу, тобто: *якщо випадкова величина S_n формується під впливом багатьох незалежних факторів X_k $(k = \overline{1,n})$, кожен з яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини близький до нормального розродiлу при , $n \to +\infty$.*

На практиці центральна гранична теорема реалізовується при $n = 40$.

Наслідок з центральної граничної теореми

Нехай $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *– послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями* $a = M(X_k)$, *дисперсією* $\sigma^2(X_i) = D(X_i)$ *і їх сума –* $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, *має математичне сподівання* $M(Y_n) = n \cdot a$, та дисперсію $\sigma^2(Y_n) = D(Y_n) = n \cdot \sigma^2$. *Тоді для будь-якого* x *справедлива рівність* (14.10):

$$\lim_{n \to +\infty}\left(P\left(\frac{Y_n - M(Y_n)}{\sigma^2(Y_n}<x\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} dx = 0{,}5 + \Phi(x). \qquad (14.11)$$

Приклад 14.7. *У касі деякої установи залишилася сума* $d = 3500$ (*грн*). *У черзі за одержанням грошей стоять* 20 *осіб. Сума* X, *яку потрібно виплатити окремій особі, – випадкова величина з математичним сподіванням* $M(X) = 150$ (*грн*) *і середнім квадратичним відхиленням* $\sigma(X) = 60$ (*грн*). *Знайти ймовірність того, що суми* d *не вистачить для виплати грошей усім особам, які стоять у черзі.*

Розв'язання. На підставі центральної граничної теореми для однаково розподілених доданків X_i при великому n (а $n = 20$ практично можна вважати великим), випадкова величина $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де – сума, яку потрібно виплатити і-тій особі, має приблизно нормальний розподіл із параметрами:

$$M(Y_n) = n \cdot a; \sigma^2(Y_n) = D(Y_n).$$

або

$$M(Y_n) = 20 \cdot 150 = 3000; \sigma^2(Y_n) = n \cdot \sigma^2 = 20 \cdot 3600 = 72000; \sigma(Y_n) \approx 268.$$

$$P(Y_n > 3500) = 1 - P(Y_n \leq 3500) \approx 1 - 0{,}5 - \Phi(1{,}87) =$$
$$= 0{,}5 - \Phi\left(\frac{3500 - 3000}{268}\right) \approx 0{,}0307.$$

Отже, з ймовірністю, близькою до $0{,}0307$, наявної в касі суми грошей не вистачить для виплати всім бажаючим особам.

Відповідь. $P(Y_n > 3500) \approx 0{,}0307$.

Приклад застосування Центральної Граничної Теореми для прогнозування курсу валюти

Розглянемо вибірку курсу євро до австралійського долара. В якості статистичної вибірки X – вибірка значень курсу євро до австралійського долара за різні періоди з 1999-го року до кінця 2022-го. Об'єм вибірки n.

Рис.14.2. Детальний графік частот для курсу євро по відношенню до австралійського долара

Для дослідження було обрано саме австралійський долар, бо він є досить стабільною валютою і розмах його значень за вказаний період не є великим. Наприклад українська гривня має досить великий розмах за аналогічний період. Тому, цю валюту не рекомендується використовувати для даного дослідження.

Оскільки вибірка значень курсів валют є великою ($n = 756$), розмах вибірки X не є великим (дані не є розрідженими), а також на курс валюти впливають багато незалежних факторів, то Центральна Гранична Теорема є застосовною. Отже, згідно з теоремою можемо припустити, що генеральна сукупність, з якої зроблено вибірку X прямує до нормального розподілу.

Взагалі кажучи дану гіпотезу слід перевіряти за допомогою статистичних критеріїв.

Будемо вважати дану генеральну сукупність, випадковою величиною Y. Тоді можемо скласти функцію щільності для Y. Як відомо, для нормального розподілу вона має вигляд:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}.$$

За допомогою методу моментів:

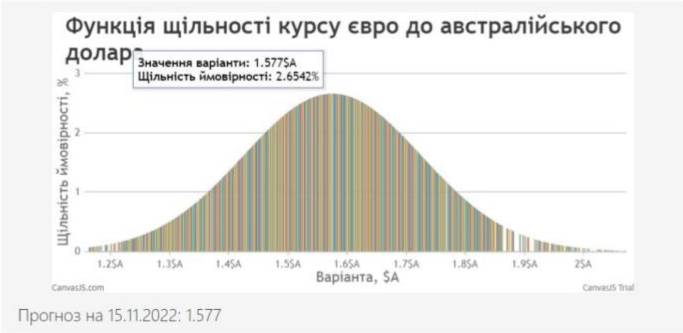
$$a = \overline{x_\text{В}} = 1{,}577;$$
$$\sigma^2 = s^2 = 0{,}0226;$$
$$\sigma = 0{,}1503,$$

де $\overline{x_\text{В}}$ – вибіркове середнє вибірки X; s^2 – виправлена дисперсія вибірки X (буде розглянуто в наступних лекціях).

Тоді

$$f(y) = \frac{1}{0{,}1503\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-1{,}577)^2}{2\cdot 0{,}0226}} = \frac{1}{0{,}1503\cdot\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-1{,}577)^2}{0{,}0452}}.$$

За рис. 14.3 бачимо, що найбільша щільність ймовірності є для $Mo(Y) = a = 1{,}577$, тобто дане значення і буде прогнозом наступного значення для досліджуваної вибірки (наведено дані з 1999-го року по 14.11.2022). Перевіримо офіційне (фактичне) значення курсу на дату 15.11.2022 (рис. 14.4).



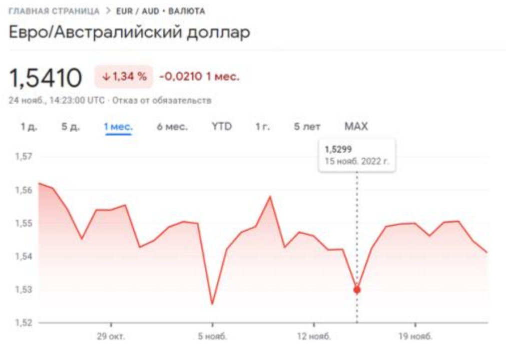


Рис. 14.3 Графік функції щільності розподілу значень курсу євро по відношенню австралійського до долара

Рис. 14.4 Графік фактичних значень курсу євро по відношенню до австралійського долара

Похибка склала $\delta = 1{,}5770 - 1{,}5299 = 0{,}0471$, тобто прогноз має достатню точність і даний метод можна застосовувати для прогнозування стабільних курсів валют.

3. Теорема Ляпунова

Теорема Ляпунова є однією з важливих граничних теорем теорії ймовірностей, яка розширює умови Центральної Граничної Теореми (ЦГТ) для незалежних, але не обов'язково однаково розподілених випадкових величин. Вона встановлює умови, за яких сума незалежних випадкових величин наближається до нормального розподілу.

Класичне формулювання

Теорема 14.7. *Якщо для послідовності попарно незалежних випадкових величин* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *– можна знайти таке число* $\sigma > 0$, *що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} M|X_i - M(X_i)|^{2+\sigma}}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}\right)^{2+\sigma}} = 0,$$

то існує границя (14.12):

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}}\right) \to N(0,\sigma^2), n \to \infty. \qquad (14.12)$$

Інтерпретація і значення

Теорема Ляпунова є важливим узагальненням Центральної Граничної Теореми, оскільки вона не вимагає однаковості розподілів випадкових величин. Умова Ляпунова дозволяє встановити нормальний розподіл суми незалежних випадкових величин, за умови, що відповідні моменти вищого порядку мають обмежений вплив.

14.3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Повернемось до доведення теореми Муавра-Лапласа (теорема 4.4 лекції 4).

Теорема 4.4. *Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні стала і відмінна від 0 і 1, то ймовірність того, що число m появ події A в n незалежних випробуваннях буде міститься у границях від m_1 до m_2 (включно), для достатньо великих n наближено дорівнює* (*формула* (4.5) *лекції* 4):

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ *– функція Лапласа, таблиця значень якої наведена в додатку* 2 *Гмурмана, де* $x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$.

Доведення. Вважатимемо, що розглянута випадкова величина має біноміальний розподіл.

Визначення біноміального розподілу:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Математичне очікування та дисперсія: Математичне очікування $M(X) = n \cdot p$ і дисперсія $D(X) = n \cdot p \cdot q$ є основними характеристиками для нормальної апроксимації.

Центральна гранична теорема: За умов великих n (зокрема, $n \cdot p > 5$ і $n \cdot q > 5$), згідно з центральною граничною теоремою, сума великої кількості незалежних випадкових величин (кожна з яких має біноміальний розподіл) буде наближена нормальним розподілом.

Апроксимація ймовірностей: Нехай S_n— сума n незалежних випадкових величин $\{X = m\}$, що розподілені за біноміальним законом. Згідно з центральною граничною теоремою, стандартний вигляд величини $Z = \frac{S_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ буде асимптотично нормально розподіленим: $Z \approx N(0{,}1)$.

Тому ймовірність $P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P(m_1 \leq X \leq m_2)$ можна оцінити через інтеграл від нормального розподілу:

$$P(m_1 \leq X \leq m_2) \approx P\left(\frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \leq Z \leq \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right).$$

Остаточний результат: Цей підхід дає остаточну формулу для наближеної ймовірності:

$$P\left(\frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \leq Z \leq \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) \approx \Phi\left(m_2 - \frac{n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) - \Phi\left(m_1 - \frac{n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right).$$

Теорема Муавра-Лапласа використовується для уточнення результатів отриманих, за допомогою нерівності Чебишева.

Приклад 14.8. *Нехай X — випадкова величина з математичним сподіванням $M(X) = 50$ і стандартним відхиленням $\sigma = 5$. Оцінити ймовірність того, що X відхилиться від свого математичного сподівання менше, ніж на 3 стандартні відхилення* (*записати довірчій інтервал*).

Розв'язання. За нерівністю Чебишева (14.4):

$$P(|X - 50| < 15) \geq 1 - \frac{25}{225} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889.$$

Це означає, що довірчій інтервал для шуканої ймовірності – [0,889; 1].

Уточнимо результат за теоремою Муавра-Лапласа (формула (4.5) лекції 4):

$$| X - 50 |< 15; 35 < X < 65.$$

$$x_1 = \frac{35-50}{5} = -3,\ x_2 = \frac{65-50}{5} = 3$$

$$P(|X-50| < 15) = P(35 < X < 15) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = 2 \cdot \Phi(3) =$$
$$= 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

Це пояснюється тим, що інтегральна теорема враховує нормальний розподіл і є точнішою, ніж нерівність Чебишева, яка задає лише верхню або нижню межі ймовірності.

З чого робимо висновок, що наближене значення для шуканої ймовірності 0,9973 попадає в довірчій інтервал [0,889; 1].

Відповідь. [0,889; 1].

Приклад 14.9. *В інкубаторі вилуплюється в середньому курчат* 70% *від кількості закладених яєць. Скільки потрібно закласти яєць, щоб з ймовірність не меншою від* 0,95 *очікувати, що відхилення вилуплених курчат від математичного сподівання не перевищувало* 50 (*за абсолютною величиною*)? *Розв'язати задачу за допомогою* **а)** *нерівності Чебишева*; **б)** *інтегральної теореми Муавра-Лапласа*.

Розв'язання. З умови задачі: $p = 0{,}7;\ q = 0{,}3;\ \varepsilon = 50.$

$$M(X) = 0{,}7 \cdot n; D(X) = 0{,}21 \cdot n.$$

а) З нерівності Чебишева (14.4):

$$P(|X - 0{,}7 \cdot n| < 50) \geq 1 - \frac{0{,}21 \cdot n}{2500} \geq 0{,}95.$$

$$1 - \frac{0{,}21 \cdot n}{2500} \geq 095 \ \Rightarrow\ \frac{0{,}21 \cdot n}{2500} \leq 0{,}05 \ \Rightarrow\ n \leq 595.$$

б) За наслідком з інтегральної теореми Муавра-Лапласа (формула (4.5) лекції 4):

$$P(|X - 0{,}7 \cdot n| < 50) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{0{,}21 \cdot n}}\right) \geq 0{,}95.$$

$$\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{0{,}21 \cdot n}}\right) \geq 0{,}475.$$

$$\frac{50}{\sqrt{0{,}21 \cdot n}} \geq 1{,}96.$$

$$\sqrt{0{,}21 \cdot n} \leq 25{,}51.$$

$$n \leq 3099.$$

В даному випадку точнішою виявилася нерівність Чебишева. Цей факт легко перевірити наступним чином:

При $n = 600$ $P(|X - 420| < 50) \geq 1 - \frac{126}{2500} \approx 0{,}9496 < 0{,}95;$

При $n = 3099$ $P(|X - 2169{,}3| < 50) \geq 1 - \frac{650{,}79}{2500} \approx 0{,}7397 < 0{,}95;$

При $n = 595$ $P(|X - 416{,}5| < 50) \geq 1 - \frac{124{,}95}{2500} \approx 0{,}95002 > 0{,}95$;

При $n = 100$ $P(|X - 70| < 50) \geq 1 - \frac{21}{2500} \approx 0{,}9916 > 0{,}95$;

При $n = 1$ $P(|X - 0{,}7| < 50) \geq 1 - \frac{0{,}21}{2500} \approx 0{,}999916 > 0{,}95$;

Відповідь. $n \leq 595$.