3.4 АЛГЕБРА ЖЕГАЛКІНА

3.4.1. Алгебра Жегалкіна

Алгебра $\langle B, \{\wedge, \oplus, 0, 1\}\rangle$, що утворена множиною $B=\{0, 1\}$ разом з операціями $\wedge$ (кон'юнкції), $\oplus$ (додавання за модулем 2) і константами 0, 1, називається ***алгеброю Жегалкіна***.

Приклад. $(x \oplus y \oplus z) \wedge (x \oplus z \oplus 1) \oplus x \wedge y \oplus 1$ — формула алгебри Жегалкіна.

Тотожності алгебри Жегалкіна

Властивості кон'юнкції:

1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ — асоціативність

2) $x \wedge y = y \wedge x$ — комутативність

3) $x \wedge x = x$ — ідемпотентність

4) $x \wedge 0 = 0$, $x \wedge 1 = x$ — дії з константами

Тотожності алгебри Жегалкіна

Властивості операції додавання за модулем 2:

5) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ — асоціативність

6) $x \oplus y = y \oplus x$ — комутативність

7) $x \oplus x = 0$ — закон зведення подібних доданків

8) $x \oplus 0 = x$ — операція з константою 0

9) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ — дистрибутивність $\wedge$ відносно $\oplus$

Властивість операції «сума за модулем 2»:

наявність оберненого елемента x' для кожного $x \in \{0, 1\}$.

Приклад. Нехай $x \oplus a = b$.

$x \oplus a \oplus a = b \oplus a$;

$x \oplus 0 = b \oplus a$;

$x = b \oplus a$.

Заперечення в алгебрі Жегалкіна:

$$\underline{\overline{x} = x \oplus 1}.$$

Доведення.

x	$\overline{x}$	$x \oplus 1$
0	1	1
1	0	0

Диз'юнкція в алгебрі Жегалкіна:

$$\underline{x \vee y = xy \oplus x \oplus y}.$$

Доведення.

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = \overline{(x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)} =$$

$$= (x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= (x \wedge y) \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y.$$

Будь-яка логічна функція може бути зображена формулою в алгебрі Жегалкіна.

3.4.2 Поліном Жегалкіна

Поліномом Жегалкіна називається довільна формула алгебри Жегалкіна, яка має вигляд суми за модулем 2 кон'юнкцій булевих змінних.

Якщо у кожний член поліному Жегалкіна кожна змінна входить один раз та поліном не містить однакових членів, то такий поліном Жегалкіна називається ***канонічним***.

Приклад: $xy \oplus x \oplus 1$.

Кількість змінних, що входять до елементарної кон'юнкції, називається ***рангом елементарної кон'юнкції***.

Кількість попарно різних елементарних кон'юнкцій у поліномі називається ***довжиною полінома***.

Зображення у вигляді поліному існує та єдине для кожної булевої функції.

3.4.2.1 Побудова поліному Жегалкіна аналітичним способом:

- розкрити всі дужки в даній формулі за законом дистрибутивності;
- виконати всі можливі спрощення з використанням законів дій з константами, ідемпотентності і зведення подібних доданків.

Приклад. Зобразити поліномом Жегалкіна логічну функцію імплікацію (→).

$$x \to y = \overline{x} \vee y = (x \oplus 1) \vee y =$$

$$= (x \oplus \mathrm{l})\, y \oplus (x \oplus \mathrm{l}) \oplus y =$$

$$= xy \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus y =$$

$$= xy \oplus x \oplus 1;$$

Приклад. Зобразити поліномом Жегалкіна логічну функцію еквівалентність (~).

$$x \sim y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y} =$$

$$= x\,y\,\bar{x}\,\bar{y} \oplus xy \oplus \bar{x}\,\bar{y} =$$

$$= xy \oplus \bar{x}\,\bar{y} =$$

$$= xy \oplus (x \oplus 1)(y \oplus 1) =$$

$$= xy \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 =$$

$$= x \oplus y \oplus 1.$$

Булева функція називається ***лінійною***, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних.

Приклад. Чи є лінійними операції булевої алгебри?

Приклад. Чи лінійні функції імплікації ($\to$) та еквівалентності ($\sim$)?

Приклад. Дослідити на лінійність функцію

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \to \overline{z}.$$

Розв'язок. Використаємо наступні тотожності:

$$x \to y = \overline{x} \vee y, \quad x \vee y = xy \oplus x \oplus y, \quad \overline{x} = x \oplus 1.$$

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \to \overline{z} = \overline{(x \vee y)} \vee \overline{z} =$$

$$= \overline{(x \vee y)}\,\overline{z} \oplus \overline{(x \vee y)} \oplus \overline{z} =$$

$$= \big((x \vee y) \oplus 1\big)(z \oplus 1) \oplus \big((x \vee y) \oplus 1\big) \oplus (z \oplus 1) =$$

$$= (xy \oplus x \oplus y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus (xy \oplus x \oplus y \oplus 1) \oplus z \oplus 1.$$

$$f(x, y, z) =$$

$$= \left(xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \right) \left(z \oplus 1 \right) \oplus \left(xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \right) \oplus z \oplus 1 =$$

$$= xyz \oplus xy \wedge 1 \oplus xz \oplus x \wedge 1 \oplus yz \oplus y \wedge 1 \oplus 1 \wedge z \oplus 1 \wedge 1 \oplus$$
$$\oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus z \oplus 1 =$$

$$= xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus yz \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus$$
$$\oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus z \oplus 1 =$$

$$= xyz \oplus xz \oplus yz \oplus 1.$$

$\Rightarrow$ функція $f(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow \bar{z}$ не є лінійною.

3.4.2.2 Побудова поліному Жегалкіна методом невизначених коефіцієнтів

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y) = x \to y$, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

$$f(x, y) = x \to y = a_{11}xy \oplus a_{10}x \oplus a_{01}y \oplus a_{00}.$$

$$f(0, 0) = 0 \to 0 = 1,$$

$$1 = a_{11} \wedge 0 \wedge 0 \oplus a_{10} \wedge 0 \oplus a_{01} \wedge 0 \oplus a_{00} \quad \Rightarrow \quad a_{00} = 1;$$

$$f(0, 1) = 0 \to 1 = 1,$$

$$1 = a_{11} \wedge 0 \wedge 1 \oplus a_{10} \wedge 0 \oplus a_{01} \wedge 1 \oplus 1 =$$

$$= 0 \oplus 0 \oplus a_{01} \oplus 1 = a_{01} \oplus 1 \quad \Rightarrow \quad a_{01} = 0;$$

$$f(1, 0) = 1 \to 0 = 0,$$

$$0 = a_{11} \wedge 1 \wedge 0 \oplus a_{10} \wedge 1 \oplus 0 \wedge 0 \oplus 1 = 0 \oplus a_{10} \oplus 0 \oplus 1 =$$

$$= a_{10} \oplus 1 \quad \Rightarrow \quad a_{10} = 1;$$

$$f(1,\,1) = 1 \to 1 = 1,$$

$$1 = a_{11} \wedge 1 \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus 0 \wedge 1 \oplus 1 = a_{11} \oplus 1 \oplus 1 = a_{11}$$

$$\Rightarrow \quad a_{11} = 1.$$

Поліном Жегалкіна:

$$f\left(x,\, y\right) = x \to y =$$

$$= a_{11}xy \oplus a_{10}x \oplus a_{01}y \oplus a_{00} =$$

$$= 1 \wedge xy \oplus 1 \wedge x \oplus 0 \wedge y \oplus 1 =$$

$$= xy \oplus x \oplus 1.$$

3.4.2.3 Побудова поліному Жегалкіна за ДДНФ

1. замінити операції $\vee$ на $\oplus$;
2. замінити $\overline{x} = x \oplus 1$;
3. розкрити дужки і звести подібні.

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна

$$f(x, y, z) = \bar{x}\, y\, z \vee x\, \bar{y}\, z \vee x\, y\, \bar{z} \vee x\, y\, z =$$

$$= \bar{x}\, y\, z \oplus x\, \bar{y}\, z \oplus x\, y\, \bar{z} \oplus x\, y\, z =$$

$$= (x \oplus 1)\, y\, z \oplus x(y \oplus 1)\, z \oplus x\, y\, (z \oplus 1) \oplus x\, y\, z =$$

$$= x\, y\, z \oplus y\, z \oplus x\, y\, z \oplus x\, z \oplus x\, y\, z \oplus x\, y \oplus x\, y\, z =$$

$$= y\, z \oplus x\, z \oplus x\, y.$$

3.4.2.4 Побудова поліному Жегалкіна методом трикутника

- будується таблиця істинності, в якій рядки йдуть в порядку зростання двійкових кодів від 000 ... 00 до 111 ... 11;
- будується допоміжна трикутна таблиця, в якій перший стовпець збігається зі стовпцем значень функції в таблиці істинності;
- комірка в кожному наступному стовпці виходить шляхом сумування за модулем два двох комірок попереднього стовпчика, що стоять в тому ж рядку і рядком нижче;

- стовпці допоміжної таблиці нумеруються двійковими кодами в тому ж порядку, що і рядки таблиці істинності;
- кожному двійковому коду ставиться у відповідність один з членів полінома Жегалкіна в залежності від позицій коду, в яких стоять одиниці.

Якщо у верхньому рядку будь-якого стовпчика стоїть одиниця ($c_i = 1$), то відповідний член присутній в поліномі Жегалкіна:

$$f\left(x, y, z\right) = c_0 \oplus c_1 z \oplus c_2 y \oplus c_3 yz \oplus c_4 x \oplus$$

$$\oplus c_5 xz \oplus c_6 xy \oplus c_7 xyz.$$

Приклад. Побудувати поліном Жегалкіна для функції $f(x, y, z)$:

	x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

<u>Розв'язок</u>. Будуємо допоміжну трикутну таблицю:

				1	z	y	yz	x	xz	xy	xyz
	x	y	z	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	
2	0	1	0	1	1	0	1	0	0		
3	0	1	1	0	1	1	1	0			
4	1	0	0	1	0	0	1				
5	1	0	1	1	0	1					
6	1	1	0	1	1						
7	1	1	1	0							

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \; c_2 = 1, \; c_3 = 0, \; c_4 = 1, \; c_5 = 1, \; c_6 = 1, \; c_7 = 1.$$

Поліном Жегалкіна:

$$f(x, y, z) = c_0 \oplus c_1 z \oplus c_2 y \oplus c_3 yz \oplus c_4 x \oplus$$

$$\oplus c_5 xz \oplus c_6 xy \oplus c_7 xyz =$$

$$= z \oplus y \oplus x \oplus xz \oplus xy \oplus xyz.$$