3.2 Нормальні форми булевих функцій

3.2.1 Диз'юнктивні та кон'юнктивні розкладання булевих функцій

Серед множин еквівалентних формул, що зображують обрану булеву функцію f, виділяється одна формула, яка називається *досконалою нормальною формою* функції f. Вона має регламентовану логічну структуру і однозначно визначається за функцією f, а її побудова заснована на рекурентному застосуванні теорем про спеціальні розкладання булевої функції за змінними, які будуть розглянуті в даній темі.

Для спрощення математичних викладень введемо двійковий параметр σ і позначення x^σ наступним чином:

$$x,\ \sigma \in B=\{0,1\}, \qquad x^\sigma=\begin{cases}\overline{x}, & \text{якщо } \sigma=0\\ x, & \text{якщо } \sigma=1\end{cases}.$$

Можемо зробити висновок, що

$$x^\sigma=\begin{cases}1, & \text{якщо } x=\sigma\\ 0, & \text{якщо } x\neq\sigma\end{cases}.$$

Теорема 1 (про диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за k змінними). Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)=\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k)} x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge ...\wedge x_k^{\sigma_k}\wedge f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k, x_{k+1},...,x_n). \quad (1)$$

Запис $\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k)}$ означає багатократну диз'юнкцію, яка береться за всіма можливими наборами значень $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k)$ при будь-якому k $(1\le k\le n)$.

Приклад. Запишемо диз'юнктивне розкладання функції

$$f(x,y,z,t)=\left(\overline{x\wedge y\vee\overline{z}}\right)\wedge t \quad \text{за змінними } x, z.$$

<u>*Розв'язок*</u>. Скористаємося теоремою про розкладання:

$$f(x,y,z,t)=\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x^{\sigma_1}\wedge z^{\sigma_2}\wedge f(\sigma_1,y,\sigma_2,t)=$$

$$=x^0\wedge z^0\wedge f(0,y,0,t)\vee x^0\wedge z^1\wedge f(0,y,1,t)\vee$$

$$\vee x^1\wedge z^0\wedge f(1,y,0,t)\vee x^1\wedge z^1\wedge f(1,y,1,t)=$$

$$=\overline{x}\wedge\overline{z}\wedge f(0,y,0,t)\vee\overline{x}\wedge z\wedge f(0,y,1,t)\vee x\wedge\overline{z}\wedge f(1,y,0,t)\vee x\wedge z\wedge f(1,y,1,t).$$

Обчислимо:

$$f(0,y,0,t)=\left(\overline{0\wedge y\vee\overline{0}}\right)\wedge t=\left(\overline{0\vee 1}\right)\wedge t=\left(\overline{1}\right)\wedge t=0\wedge t=0,$$

$$f(0,y,1,t)=\left(\overline{0\wedge y\vee\overline{1}}\right)\wedge t=\left(\overline{0\vee 0}\right)\wedge t=1\wedge t=t,$$

$$f(1,y,0,t)=\left(\overline{1\wedge y\vee\overline{0}}\right)\wedge t=\left(\overline{y\vee 1}\right)\wedge t=\left(\overline{1}\right)\wedge t=0\wedge t=0,$$

$$f(1,y,1,t)=\left(\overline{1\wedge y\vee\overline{1}}\right)\wedge t=\left(\overline{y\vee 0}\right)\wedge t=\overline{y}\wedge t$$

Підставимо одержані значення $f(0,y,0,t)$, $f(0,y,1,t)$, $f(1,y,0,t)$, $f(1,y,1,t)$ у формулу диз'юнктивного розкладання за змінними *x*, *z*:

$$f(x,y,z,t)=\overline{x}\wedge\overline{z}\wedge 0\vee\overline{x}\wedge z\wedge t\vee x\wedge\overline{z}\wedge 0\vee x\wedge z\wedge\overline{y}\wedge t=$$
$$=\overline{x}\wedge z\wedge t\ \vee\ x\wedge z\wedge\overline{y}\wedge t.$$

Розглянемо наслідки з теореми 1.

Наслідок 1 (диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ за однією змінною).

Будь-яку булеву функцію $f(x_1,x_2,...,x_n)$ можна зобразити у такій формі:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{\sigma_i}x_i^{\sigma_i}\wedge f(x_1,x_2,...,x_{i-1},\sigma_i,x_{i+1},...,x_n). \qquad (2)$$

Запис означає, що диз’юнкція береться за всіма значеннями σ_i, тобто 0 або 1. Запис $f(x_1,x_2,...,x_{i-1},\sigma_i,x_{i+1},...,x_n)$ позначає значення функції на наборі $x_1,x_2,...,x_n$, де замість значення змінної x_i підставлено σ_i.

Приклад. Розглянемо функцію $f(x,y,z,t)=\left(\overline{xy\vee\overline{z}}\right)t$. Отримати диз'юнктивне розкладання цієї функції за змінною *x*.

<u>*Розв'язок*</u>. Скористаємося наслідком теореми про розкладання:

$$f(x,y,z,t)=\overline{x}\wedge f(0,y,z,t)\ \vee\ x\wedge f(1,y,z,t).$$

Обчислимо значення функції $f(x,y,z,t)$ при $x=0$ і $x=1$:

$$f(0,y,z,t)=\left(\overline{0\wedge y\vee\overline{z}}\right)t=\left(\overline{0\vee\overline{z}}\right)t=\left(\overline{\overline{z}}\right)t=zt,$$

$$f(1,y,z,t)=\left(\overline{1\wedge y\vee\overline{z}}\right)t=\left(\overline{y\vee\overline{z}}\right)t=\overline{y}\,zt.$$

Підставимо одержані значення $f(0,y,z,t)$ і $f(1,y,z,t)$ у формулу диз’юнктивного розкладання, отримаємо

$$f(x,y,z,t)=\overline{x}\wedge f(0,y,z,t)\ \vee\ x\wedge f(1,y,z,t)=\overline{x}\,zt\ \vee\ x\overline{y}\,zt.$$

Наслідок 2 (диз'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ за всіма n змінними).

Будь-яку булеву функцію $f(x_1,x_2,...,x_n)\neq 0$ можна зобразити у такій формі:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}. \qquad (3)$$

Запис $\bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1}}$ означає, що диз'юнкція береться за всіма наборами значень $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ на яких $f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) = 1$.

Дійсно, запишемо співвідношення (1) для випадку $k = n$:

$$f\left(x_1, ..., x_n\right) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right).$$

Зауважимо таке:

Якщо $f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) = 0$, то

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) = 0;$$

якщо $f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) = 1$, то

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) = x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Тому диз'юнктивне розкладання за всіма змінними містить тільки кон'юнкції, що відповідають наборам $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, для яких $f\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right) = 1$.

Приклад. Розглянемо функцію $f\left(x, y, z\right) = xy \vee \overline{z}$. Отримати диз'юнктивне розкладання цієї функції за всіма змінними.

<u>*Розв'язок*</u>. Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$f\left(0, 0, 0\right) = 0 \wedge 0 \vee \overline{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f\left(0, 0, 1\right) = 0 \wedge 0 \vee \overline{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f\left(0, 1, 0\right) = 0 \wedge 1 \vee \overline{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f\left(0, 1, 1\right) = 0 \wedge 1 \vee \overline{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f\left(1, 0, 0\right) = 1 \wedge 0 \vee \overline{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f\left(1, 0, 1\right) = 1 \wedge 0 \vee \overline{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$f\left(1, 1, 0\right) = 1 \wedge 1 \vee \overline{0} = 1 \vee 1 = 1,$$

$$f\left(1, 1, 1\right) = 1 \wedge 1 \vee \overline{1} = 1 \vee 0 = 1.$$

Використовуючи формулу (3), одержимо:

$$f\left(x, y, z\right) = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^1 y^0 z^0 \vee x^1 y^1 z^0 \vee x^1 y^1 z^1 =$$
$$= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z.$$

<u>Означення</u>. ***Елементарною кон'юнкцією*** називається кон'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною кон'юнкцією, що містить нуль змінних, будемо вважати константу 1.

Приклад. $x \wedge y \wedge z$ та $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$ є елементарними кон'юнкціями, а $x \wedge \overline{y \wedge z}$ — ні.

Означення. ***Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)*** називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.

Означення. Елементарна кон'юнкція $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$ ***називається конституентою одиниці (мінтермом)*** функції $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$, тобто інтерпретація, яка обертає в одиницю дану елементарну кон'юнкцію, обертає в одиницю і функцію f.

Конституента одиниці має такі властивості:

1. Конституента одиниці дорівнює одиниці тільки на відповідній їй інтерпретації.
2. Значення конституенти одиниці однозначно визначається номером відповідної інтерпретації.
3. Кон'юнкція будь-якого числа різних конституент одиниці функції дорівнює нулю.

Приклад. Елементарна кон'юнкція $x \wedge \overline{y}$ є конституентою одиниці функції двох змінних $f(x, y)$ на інтерпретації (1, 0), оскільки $x \wedge \overline{y} = x^1 \wedge y^0$ і $x \wedge \overline{y} = 1$. Елементарна кон'юнкція $x \wedge y \wedge z$ є конституентою одиниці функції трьох змінних $f(x, y, z)$ на інтерпретації (1, 1, 1), оскільки $x \wedge y \wedge z = x^1 \wedge y^1 \wedge z^1$ і $x \wedge y \wedge z = 1$.

Приклад. Серед булевих функцій двох аргументів функції кон'юнкція, інверсія імплікації, інверсія оберненої імплікації та стрілка Пірса-Вебба є конституентами одиниці.

Означення. ***Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*** булевої функції називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції конституент одиниці даної функції.

Будь-яка булева функція має одну ДДНФ (кількість її членів дорівнює кількості одиничних значень функції) і кілька ДНФ. Будь-яка ДНФ утворюється внаслідок більшого або меншого скорочення ДДНФ, причому від будь-якої ДНФ можна перейти до ДДНФ. Такий перехід називається розгортанням.

Можна навести такі властивості ДДНФ, що виділяють її з усіх ДНФ:

- в ДДНФ немає однакових доданків;
- жоден із доданків не містить двох однакових співмножників;
- жоден із доданків не містить змінну разом із її запереченням;
- в кожному окремому доданку є як співмножник або змінна x_i, або її заперечення для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, n$.

ДДНФ функції є результатом диз'юнктивного розкладання функції за всіма змінними і відповідає формулі (3). Як видно з визначення, ДДНФ функції містить тільки $\wedge, \vee, \neg,$ отже, застосувавши до ДДНФ принцип двоїстості, можна одержати двоїсте зображення, яке називається ***кон'юнктивним розкладанням***.

Теорема 2 (про кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за k змінними). Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити у такій формі:

$$f(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k, x_{k+1}, ..., x_n). \quad (4)$$

Запис $\bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)}$ означає, що кон'юнкція береться за всіма можливими наборами $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)$.

Приклад. Розглянемо кон'юнктивне розкладання функції $f(x, y, z, t) = (xy \vee \bar{z})t$ за змінними x, t.

<u>*Розв'язок*</u>. За формулою (4) маємо:

$$f(x, y, z, t) = \left(x^{\bar{0}} \vee t^{\bar{0}} \vee f(0, y, z, 0)\right) \wedge \left(x^{\bar{0}} \vee t^{\bar{1}} \vee f(0, y, z, 1)\right) \wedge$$
$$\wedge \left(x^{\bar{1}} \vee t^{\bar{0}} \vee f(1, y, z, 0)\right) \wedge \left(x^{\bar{1}} \vee t^{\bar{1}} \vee f(1, y, z, 1)\right) =$$
$$= \left(x \vee t \vee f(0, y, z, 0)\right)\left(x \vee \bar{t} \vee f(0, y, z, 1)\right)\left(\bar{x} \vee t \vee f(1, y, z, 0)\right)\left(\bar{x} \vee \bar{t} \vee f(1, y, z, 1)\right).$$

Використовуючи формули

$$f(0, y, z, 0) = (0 \wedge y \vee \bar{z}) \wedge 0 = (0 \vee \bar{z}) \wedge 0 = (\bar{z}) \wedge 0 = 0,$$
$$f(0, y, z, 1) = (0 \wedge y \vee \bar{z}) \wedge 1 = (0 \vee \bar{z}) \wedge 1 = (\bar{z}) \wedge 1 = \bar{z},$$
$$f(1, y, z, 0) = (1 \wedge y \vee \bar{z}) \wedge 0 = (y \vee \bar{z}) \wedge 0 = 0,$$
$$f(1, y, z, 1) = (1 \wedge y \vee \bar{z}) \wedge 1 = (y \vee \bar{z}) \wedge 1 = y \vee \bar{z}.$$

які індукує функція f при спеціальних значеннях змінних x, t, одержимо шукане кон'юнктивне розкладання:

$$f(x, y, z, t) = (x \vee t \vee 0)(x \vee \bar{t} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee t \vee 0)\left(\bar{x} \vee \bar{t} \vee (y \vee \bar{z})\right) =$$
$$= (x \vee t)(x \vee \bar{t} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee t)(\bar{x} \vee \bar{t} \vee y \vee \bar{z}).$$

Наслідок 3 (кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за однією змінною). Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна зобразити у такій формі:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{\sigma_i} x_i^{\bar{\sigma}_i} \vee f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, ..., x_n). \quad (5)$$

Запис $\bigwedge\limits_{\sigma_i}$ означає, що кон'юнкція береться за двома можливими значеннями σ_i, тобто 0 і 1. Індекс i є фіксованим.

Приклад. Одержати кон'юнктивне розкладання функції $f(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$ за змінною x.

Розв'язок. Скористаємося попереднім наслідком:

$$f(x, y, z) = \left(x^{\bar{0}} \vee f(0, y, z)\right) \wedge \left(x^{\bar{1}} \vee f(1, y, z)\right) = \left(x \vee f(0, y, z)\right) \wedge \left(\bar{x} \vee f(1, y, z)\right) =$$
$$= \left(x \vee (0 \wedge y \vee \bar{z})\right) \wedge \left(\bar{x} \vee (1 \wedge y \vee \bar{z})\right) = (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Наслідок 4 (кон'юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за всіма змінними). Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 1$ можна зобразити у такій формі:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k) = 0}} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \qquad (6)$$

У правій частині кон'юнкція береться за всіма наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k) = 0$.

Розглянемо, яким чином формула (6) одержана з формули (4). При $k = n$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n).$$

Якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$, то

$$x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n};$$

якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$, то

$$x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1.$$

Тому кон’юктивне розкладання за всіма змінними містить тільки диз’юнкції, що відповідають наборам $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$.

Приклад. Одержати кон'юнктивне розкладання функції $f(x, y, z) = xy \vee \bar{z}$ за всіма змінними.

<u>Розв'язок</u>. Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$f(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$
$$f(0, 0, 1) = 0 \wedge 0 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$
$$f(0, 1, 0) = 0 \wedge 1 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$
$$f(0, 1, 1) = 0 \wedge 1 \vee \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$
$$f(1, 0, 0) = 1 \wedge 0 \vee \bar{0} = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(1,0,1) = 1 \wedge 0 \vee \overline{1} = 0 \vee 0 = 0,$$
$$f(1,1,0) = 1 \wedge 1 \vee \overline{0} = 1 \vee 1 = 1,$$
$$f(1,1,1) = 1 \wedge 1 \vee \overline{1} = 1 \vee 0 = 1.$$

За формулою (6) одержуємо

$$f(x, y, z) = \left(x^1 \vee y^1 \vee z^0\right) \wedge \left(x^1 \vee y^0 \vee z^0\right) \wedge \left(x^0 \vee y^1 \vee z^0\right) =$$
$$= \left(x \vee y \vee \overline{z}\right) \wedge \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right) \wedge \left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right).$$

Означення. ***Елементарною диз'юнкцією*** називається диз'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною диз'юнкцією, що містить нуль змінних, будемо вважати константу 0.

Приклад. $x \vee y$ та $x \vee \overline{y} \vee z$ є елементарними диз’юнкціями, а $x \vee \overline{y \vee z}$ — ні.

Означення. ***Кон'юнктивною нормальною формою (КНФ)*** називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій.

Означення. Елементарна диз'юнкція $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$ називається ***конституентою нуля (макстермом)*** функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$, тобто інтерпретація, яка обертає в нуль дану елементарну диз'юнкцію, обертає в нуль і функцію *f*.

Конституента нуля має такі властивості:

1. Конституента нуля дорівнює нулю тільки на відповідній їй інтерпретації.
2. Конституента нуля однозначно визначається номером відповідної їй інтерпретації.
3. Диз’юнкція будь-якого числа різних конституент нуля функції дорівнює одиниці.

Приклад. Елементарна диз'юнкція $x \vee \overline{y}$ є конституентою нуля функції двох змінних *f*(*x*, *y*) на інтерпретації (0, 1), оскільки $x \vee \overline{y} = x^1 \vee y^0 = x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{1}}$, отже, на інтерпретації (*x*, *y*) = (0, 1) виконано рівність $x \vee \overline{y}$ = 0.

Елементарна диз'юнкція $x \vee y \vee z$ є конституентою нуля функції трьох змінних *f*(*x*, *y*, *z*) на інтерпретації (0, 0, 0).

Дійсно, $x \vee y \vee z = x^1 \vee y^1 \vee z^1 = x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}}$, отже, диз'юнкція $x \vee y \vee z$ дорівнює нулю на інтерпретації (0, 0, 0) = (*x*, *y*, *z*).

Означення. ***Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ)*** функції називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції конституент нуля даної функції.

ДКНФ функції є результатом кон'юнктивного розкладання функції за всіма змінними.

Також по аналогії з ДДНФ, будь-яка булева функція має одну ДКНФ (кількість її членів дорівнює кількості нульових значень функції) і декілька КНФ.

Можна навести такі властивості ДКНФ, що виділяють її з усіх КНФ:

- в ній немає однакових співмножників;
- жоден із співмножників не містить двох однакових доданків;
- жоден із співмножників не містить якої-небудь змінної разом з її запереченням;
- в кожному окремому співмножнику є як складова або змінна x_i, або її заперечення для будь-якого i=1,2,…,n.

З аналізу формул (3) та (6), відповідних ДДНФ і ДКНФ функції, можна зробити такі висновки:

1. Для кожної булевої функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, що не є константою нуль, існує зображення у вигляді ДДНФ.
2. Для кожної булевої функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, що не є константою одиниця, існує зображення у вигляді ДКНФ.
3. Дві різні булеві функції не можуть мати однакові ДДНФ або ДКНФ.
4. Для кожної булевої функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ існує зображення у вигляді формули булевої алгебри, що містить тільки операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

3.2.2 Нормальні форми зображення булевих функцій

Для кожної інтерпретації функції існують єдині відповідні їй конституента одиниці та конституента нуля. Тому різних конституент одиниці та нуля для функції n змінних $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ існує стільки ж, скільки й інтерпретацій цієї функції — 2^n. Полічимо, скільки існує різних ДДНФ і ДКНФ для булевих функцій n змінних.

ДДНФ функції n змінних можна зобразити у вигляді:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f_0 \wedge M_0 \vee f_1 \wedge M_1 \vee ... \vee f_{2^n-1} \wedge M_{2^n-1},$$

де f_i — значення функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ на i-й інтерпретації;

M_i — конституента одиниці, що відповідає i-й інтерпретації.

Оскільки $M_0, M_1, ..., M_{2^n-1}$ однакові для всіх функцій n змінних, то вигляд ДДНФ залежить від набору 2^n булевих констант $f_0, f_1, ..., f_{2^n-1}$. З цього маємо, що кількість різних ДДНФ дорівнює кількості упорядкованих наборів 2^n булевих констант і дорівнює 2^{2^n}. Кількість різних булевих функцій від n змінних також становить 2^{2^n}. Отже, для кожної булевої функції існує єдина ДДНФ. Аналогічно доводиться, що різних ДКНФ функції від n змінних існує 2^{2^n} і, отже, кожній булевій функції відповідає єдина ДКНФ.

Приклад. Запишемо конституенти одиниці та нуля, що відповідають інтерпретаціям функцій трьох змінних:

Номер інтерпретації	Інтерпретація			Конституента одиниці	Конституента нуля
	x_1	x_2	x_3		
0	0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$x \vee y \vee z$
1	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}z$	$x \vee y \vee \bar{z}$
3	0	1	1	$\bar{x}yz$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
4	1	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x} \vee y \vee z$
5	1	0	1	$x\bar{y}z$	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
6	1	1	0	$xy\bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
7	1	1	1	xyz	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ

1. Виділити всі інтерпретації $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, на яких значення функції дорівнює одиниці.
2. Записати конституенти одиниці виду $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$, що відповідають відзначеним інтерпретаціям.
3. Одержати ДДНФ функції за допомогою з'єднання операцією диз'юнкції записаних конституент одиниці.

Приклад. Одержати ДДНФ для функції $f_8(x, y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

<u>*Розв'язок*</u>. На першому кроці побудуємо таблицю істинності

x	y	$f_8(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Дана функція дорівнює одиниці тільки на одній інтерпретації, яка відповідає конституенті одиниці, отже: $f_8\left(x, y\right)=x^0 y^0=\bar{x}\,\bar{y}$.

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДКНФ

1. Виділити всі інтерпретації $\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\right)$, на яких значення функції дорівнює нулю.

2. Записати конституенти нуля виду $x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}$, що відповідають виділеним інтерпретаціям.

3. Записавши кон'юнкцію конституент нуля, одержати ДКНФ функції.

Приклад. Одержати ДКНФ для функції $f_8\left(x, y\right)$.

Розв'язок. Для одержання ДКНФ функції $f_8\left(x, y\right)$ випишемо всі три конституенти нуля, з'єднавши їх знаком кон'юнкції:

$$f_8\left(x, y\right)=\left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}}\right)\left(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}}\right)\left(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}}\right)=\left(x \vee \bar{y}\right)\left(\bar{x} \vee y\right)\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right).$$

Кількість інтерпретацій, на яких функція дорівнює одиниці, дорівнює кількості конституент одиниці у ДДНФ цієї функції. Аналогічно кількість інтерпретацій, на яких функція дорівнює нулю, дорівнює кількості конституент нуля у ДКНФ цієї функції. Тому, для функцій, що дорівнюють нулю на більш ніж половині інтерпретацій, вигідніше будувати ДДНФ, ніж ДКНФ. Дійсно, в даному випадку ДДНФ буде містити менше символів змінних і знаків операцій, ніж ДКНФ. І навпаки, для функцій, що дорівнюють одиниці на більшості інтерпретацій, вигідніше будувати ДКНФ.

Одержання таблиці істинності функції, що задана ДДНФ або ДКНФ, зображує процедуру, обернену розглянутій вище.

Приклад. Для функції $f\left(x, y, z\right)=x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, що задана ДДНФ, побудувати її таблицю істинності.

Розв'язок. Дана функція містить три конституенти одиниці – $x\,y\,\bar{z}$, $\bar{x}\,y\,z$, $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, яким відповідають інтерпретації (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 0). На даних інтерпретаціях функція дорівнює одиниці, на решті — нулю. Запишемо вказані значення функції у стовпчик $f(x, y, z)$. Стовпці $x, y, z, f(x, y, z)$ утворюють таблицю істинності функції f.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Приклад. Для функції $g(x, y, z) = (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$, що задана ДКНФ, побудувати її таблицю істинності.

<u>*Розв'язок*</u>. Скористаємося вищеописаним алгоритмом. Конституентам нуля $x \vee y \vee \overline{z}$, $\overline{x} \vee y \vee z$, $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$ даної функції відповідають інтерпретації (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1). В наведених інтерпретаціях функція дорівнює нулю, в решті – одиниці. Записуємо дані значення функції у стовпчик $g(x, y, z)$. Стовпці x, y, z, $g(x, y, z)$ утворюють таблицю істинності функції g.

x	y	z	$g(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДДНФ

1. Виключити константи, використовуючи закони дій з константами.
2. Опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні, використовуючи закони де Моргана.
3. Використовуючи дистрибутивний закон, розкрити дужки. До одержаних елементарних кон'юнкцій застосувати закони ідемпотентності й протиріччя, спростити їх і звести подібні. Результатом виконання вказаних дій є одержання ДНФ булевої функції.
4. Побудувати конституенти одиниці функції введенням у кожну елементарну кон'юнкцію відсутніх змінних, використовуючи закон виключеного третього.

5. За допомогою дистрибутивного закону розкрити дужки і звести подібні, використовуючи закон ідемпотентності. Одержана формула відповідає ДДНФ функції.

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДКНФ

1. Виключити константи, використовуючи закони дій з константами.
2. Опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні, використовуючи закони де Моргана.
3. За допомогою використання дистрибутивного закону, звести функцію до виду кон'юнкції елементарних диз'юнкцій. До одержаних елементарних диз'юнкцій застосувати закони ідемпотентності й виключеного третього, спростити їх і звести подібні. Результатом виконання вказаних дій є одержання КНФ булевої функції.
4. Побудувати конституенти нуля функції введенням у кожну елементарну диз'юнкцію відсутніх змінних, використовуючи закон протиріччя.
5. За допомогою дистрибутивного закону звести функцію до виду кон'юнкції конституент нуля і спростити формулу, використовуючи закон ідемпотентності. Одержана формула є ДКНФ функції.

Приклад. Задану булеву функцію звести до ДДНФ та ДКНФ шляхом алгебраїчних перетворень

$$f(x, y, z) = xy \vee \overline{\left(x\left(\overline{y} \vee z\right) \vee yz\right)}.$$

Розв'язок. Використаємо передостанній алгоритм. Опускаємо заперечення на змінні, застосовуючи закони де Моргана:

$$f(x, y, z) = xy \vee \overline{\left(x\left(\overline{y} \vee z\right) \vee yz\right)} = xy \vee \left(\left(\overline{x} \vee \overline{\left(\overline{y} \vee z\right)}\right) \wedge \overline{\left(yz\right)}\right) =$$

$$= xy \vee \left(\left(\overline{x} \vee y\overline{z}\right) \wedge \left(\overline{y} \vee \overline{z}\right)\right) = xy \vee \left(\overline{x} \vee y\overline{z}\right)\left(\overline{y} \vee \overline{z}\right).$$

Побудуємо ДНФ, використовуючи дистрибутивний закон, закони ідемпотентності і протиріччя:

$$f(x, y, z) = xy \vee \left(\overline{x} \vee y\overline{z}\right)\left(\overline{y} \vee \overline{z}\right) = xy \vee \left(\overline{x}\ \overline{y} \vee \overline{x}\ \overline{z} \vee y\ \overline{z}\ \overline{y} \vee y\overline{z}\ \overline{z}\right) =$$

$$= \left[x \wedge \overline{x} = 0,\ \ x \wedge x = x\right] = xy \vee \overline{x}\ \overline{y} \vee \overline{x}\ \overline{z} \vee y\overline{z}\ .$$

Дана функція залежить від трьох змінних, тому до елементарних кон'юнкцій необхідно ввести відсутні змінні, використовуючи закон виключеного третього $x \vee \overline{x} = 1$:

$$f(x, y, z) = xy\left(z \vee \overline{z}\right) \vee \overline{x}\ \overline{y}\left(z \vee \overline{z}\right) \vee \overline{x}\left(y \vee \overline{y}\right)\overline{z} \vee \left(x \vee \overline{x}\right)y\overline{z}\ .$$

Використовуючи дистрибутивний закон, розкриємо дужки і зведемо подібні для одержання ДДНФ:

$$f\left(x, y, z\right) = xyz \vee \underline{xy\overline{z}} \vee \overline{x}\ \overline{y}\, z \vee \underline{\underline{\overline{x}\ \overline{y}\,\overline{z}}} \vee \underleftrightarrow{\overline{x}\, y\, \overline{z}} \vee \underline{\underline{\overline{x}\,\overline{y}\ \overline{z}}} \vee \underline{xy\overline{z}} \vee \underleftrightarrow{\overline{x}\, y\overline{z}} =$$

$$= xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\ \overline{y}\, z \vee \overline{x}\ \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\, y\ \overline{z}\ .$$

Одержана ДДНФ заданої функції:

$$f\left(x, y, z\right) = xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\ \overline{y}\, z \vee \overline{x}\ \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\, y\ \overline{z}\ .$$

Побудуємо ДКНФ даної функції.

Скористаємося останнім алгоритмом. Як у попередньому прикладі, опустимо заперечення безпосередньо на змінні і, використовуючи закони де Моргана, одержимо:

$$f\left(x, y, z\right) = xy \vee \left(\overline{x} \vee y\overline{z}\right)\left(\overline{y} \vee \overline{z}\right).$$

Побудуємо КНФ, використовуючи дистрибутивний закон, закони ідемпотентності й виключеного третього:

$$f\left(x, y, z\right) = xy \vee \left(\overline{x} \vee \left(y \wedge \overline{z}\right)\right)\left(\overline{y} \vee \overline{z}\right) = \left[x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\right] =$$

$$= xy \vee \left(\overline{x} \vee y\right)\left(\overline{x} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{y} \vee \overline{z}\right) =$$

$$= \left(x \vee \left(\overline{x} \vee y\right)\left(\overline{x} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{y} \vee \overline{z}\right)\right)\ \left(y \vee \left(\overline{x} \vee y\right)\left(\overline{x} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{y} \vee \overline{z}\right)\right) =$$

$$= \left(\underline{x \vee \overline{x}} \vee y\right)\left(\underline{x \vee \overline{x}} \vee \overline{z}\right)\left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\ \left(y \vee \overline{x} \vee y\right)\left(y \vee \overline{x} \vee \overline{z}\right)\left(\underline{y \vee \overline{y}} \vee \overline{z}\right) =$$

$$= \left[x \vee \overline{x} = 1,\ \ x \vee 1 = 1\right] =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y\right)\left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right) \cdot 1 = \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y\right)\left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right).$$

Дана функція залежить від трьох змінних, отже до елементарної диз'юнкції $\left(y \vee \overline{x}\right)$ необхідно ввести відсутню змінну *z*, використовуючи закон протиріччя. Після чого, використовуючи дистрибутивний закон, слід звести функцію до виду кон'юнкції конституент нуля:

$$f\left(x, y, z\right) = \left[x \wedge \overline{x} = 0\right] = \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y \vee z\overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right) =$$

$$= \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y \vee z\ \right)\left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right).$$

Після зведення подібних за допомогою закону ідемпотентності одержуємо ДКНФ:

$$f\left(x, y, z\right) = \left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y \vee z\ \right)\left(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}\right).$$