3.3 МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Пошук найбільш простої логічної формули булевої функції має велике значення при формуванні запитів до баз даних, у логічному програмуванні, в інтелектуальних системах.

Задача мінімізації складається з пошуку найпростішої, згідно з обраним критерієм мінімізації, формули. Критерії можуть бути різними, наприклад: кількість змінних у формулі, кількість знаків кон'юнкції та диз'юнкції або комбінація подібних критеріїв.

3.3.1 Індекс простоти

Канонічною задачею мінімізації називається задача мінімізації на множині ДНФ і КНФ кількості символів змінних та операцій, що містяться у формулі. Мінімальні форми, що одержані в результаті її розв'язку, називаються мінімальними ДНФ і КНФ.

Найзрозумілішим є алгоритм, що ґрунтується на переборі, тобто перегляді всіх можливих ДНФ і КНФ функції. Проте, ним не можна скористатися практично вже при n=3, а при n=1 та n=2 проблема є тривіальною.

Спочатку знаходять конкретну функцію алгебри логіки, визначену для будь-яких наборів значень аргументів. Після цього функцію подають у будь-якій з двох досконалих форм. Потім здійснюють низку спрощень, що досягається за допомогою різних тотожних перетворень з метою здобуття формули, еквівалентної початковій, але яка реалізується простіше.

При оцінюванні складності приймають коефіцієнт простоти.

Розглянемо функцію

$$A = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3),$$

еквівалентну формулі

$$B = A = (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee x_1.$$

При цьому постає завдання вибору форми, найприйнятнішої для практичної реалізації. З цією метою вводиться індекс (коефіцієнт) простоти $L(A)$, що характеризує складність ДНФ (КНФ).

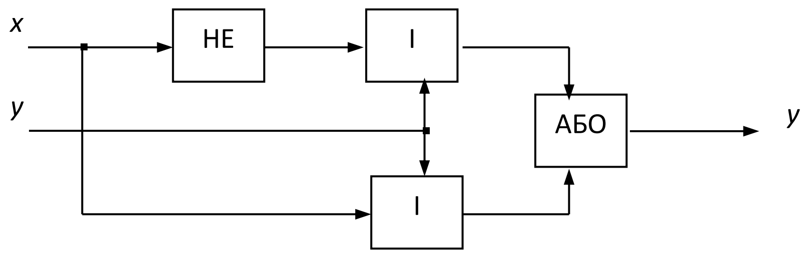
Найчастіше зустрічаються такі типи **коефіцієнтів простоти**:

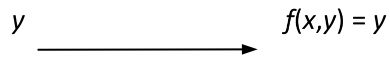
- $L_1(A)$ – число символів змінних, які зустрічаються в запису ДНФ. Якщо проаналізувати формули A та B, то можна встановити, що $L_1(A) = 15$, а $L_1(B) = 3$, тобто функція B є простішою;
- $L_2(A)$ – число елементарних кон'юнкцій, що входять у функцію A. Для ДНФ A та B очевидно, що $L_2(A) = 5$, а $L_2(B) = 2$, тобто функція B теж є простішою за цим критерієм;

- $L_3(A)$ – число символів інверсій, які зустрічаються в запису ДНФ. Для ДНФ A та B $L_3(A) = 7$, а $L_3(B) = 2$, тобто функція B за цим критерієм є також простішою.

Досконалі ДНФ та КНФ використовуються для первинного подання заданої булевої функції. Однак ці форми є незручними для опису і побудови логічних схем, тому що схеми, що реалізують їх, часто виявляються складними, тобто містять елементи, які можна виключити при синтезі схем.

Наприклад, функція "змінна y" $f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = y$, виходячи з ДДНФ, реалізується на чотирьох елементах, як показано на рис. 1,а. Ця функція записується як $f(x,y) = y$ і при побудові схеми за цією формою не потрібно жодного елемента, оскільки вона реалізується відрізком дроту (рис. 1,б).





а б

Рис. 1. Види схем для функції $f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = y$

Це свідчить про те, наскільки важливо мати ефективні методи пошуку найраціональніших щодо технічної реалізації форм подання булевих функцій. Тому розглянемо детальніше спрощення виразів булевих функцій. Цей етап називається їх мінімізацією. Уведемо деякі означення.

ДНФ (КНФ), що реалізує функцію $f(x_1,\ldots,x_n)$ і має мінімальний індекс L, називається мінімальною відносно L.

Деякі булеві функцію мають кілька мінімальних ДНФ (КНФ).

ДНФ (КНФ) функції називається ***мінімальною***, якщо кількість символів, які вона містить, буде не більшою, ніж у будь-якої іншої ДНФ (КНФ) тієї самої функції.

Мінімізацією називаються перетворення функції, яке веде до зменшення числа символів, а отже, числа змінних. Мінімізація веде до спрощення алгебраїчного виразу, тобто до спрощення автомату, що описується заданим виразом. Найпростішим є алгебраїчний метод мінімізації. Мінімальні форми також можуть бути знайдені аналітично або за допомогою мінімізаційних карт.

3.3.2 Скорочена форма

Імплікантою деякої функції f називається така функція g, що на всіх інтерпретаціях, на яких g дорівнює одиниці, f теж дорівнює одиниці.

Конституенти одиниці функції (мінтерми) є її імплікантами; елементарні кон'юнкції, що входять до складу ДНФ функції, також є її імплікантами.

Приклад. Таблиця істинності функції *f*(*x*, *y*, *z*) та її імпліканти *g*(*x*, *y*, *z*).

x	*y*	*z*	*g*(*x*, *y*, *z*)	*f*(*x*, *y*, *z*)
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Множина *S*, що складається з імплікант функції *f*, називається ***покриттям*** (або ***повною системою імплікант***) функції *f*, якщо кожне одиничне значення функції *f* покривається одиницею хоча б одної імпліканти з множини *S*.

Набір імплікант, складових ДНФ функції, є її покриттям. Набір всіх конституент одиниці функції, що входять до її ДДНФ, є покриттям даної функції.

Будь-яку елементарну кон'юнкцію *A*, що входить до складу елементарної кон'юнкції *B* і містить менше змінних, ніж кон'юнкція *B*, називають ***власною частиною кон'юнкції*** *B*.

Наприклад, добуток ($x\wedge y\wedge z$) має власні частини: $x\wedge y$, $x\wedge z$, $y\wedge z$, x, y, z.

Простими імплікантами булевої функції називаються елементарні кон’юнкції, що самі входять у задану функцію *f*, але ніяка власна частина їх у функцію *f* не входить.

Прості імпліканти є найкоротшими елементарними кон’юнкціями, що входять у задану булеву функцію.

Якщо яка-небудь елементарна кон’юнкція входить у задану функцію, то при додаванні до неї будь-яких співмножників нова кон’юнкція також входитиме в цю функцію, тому що вона стає нулем разом із початковою кон’юнкцією.

Наприклад, для функції

$$f(x,y,z)=(\bar{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y})$$

простими імплікантами будуть кон’юнкції $(\bar{x}\wedge y\wedge z)$ та $(x\wedge\bar{y})$, а $(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$ та $(x\wedge\bar{y}\wedge z)$ не є ними, оскільки їх власна частина $(x\wedge\bar{y})$ входить у задану функцію.

Теорема 1. Будь-яка булева функція дорівнює диз’юнкції всіх своїх простих імплікант.

Диз'юнкція всіх простих імплікант функції називається **скороченою ДНФ** булевої функції.

3.3.3 Метод Квайна утворення скороченої диз'юнктивної нормальної форми

При мінімізації за методом Квайна передбачається, що початкова функція задається в ДДНФ. Використовується перетворення ДДНФ за допомогою операцій неповного склеювання і поглинання.

В операції неповного склеювання

$$(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) = y \wedge (x \vee \overline{x}) = y,$$

$$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) = y \vee (x \wedge \overline{x}) = y$$

два члени $(x \wedge y)$ та $(\overline{x} \wedge y)$ склеюються за змінною x.

В операції поглинання

$$(x \wedge y) \vee y = y,$$

$$(x \vee y) \wedge y = y$$

член $(x \wedge y)$ поглинається членом y.

Теорема 2 (Квайна). Якщо в ДДНФ булевої функції виконати операції неповного склеювання, а потім усі операції поглинання, то дістанемо скорочену ДНФ, тобто диз'юнкцію всіх простих імплікант.

Приклад. Нехай задана булева функція:

$$f(x, y, z) = (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z).$$

Проведемо всі операції неповного склеювання:

$$(\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) = \overline{x} \wedge z,$$

$$(x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) = x \wedge \overline{y},$$

$$(x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) = \overline{y} \wedge z.$$

Виявилось, що всі мінтерми поглинаються отриманими імплікантами (імпліканти входять до всіх мінтермів ДДНФ функції). Таким чином скорочена ДНФ заданої функції набуває вигляду:

$$f(x, y, z) = (\overline{x} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{y} \wedge z).$$

3.3.4 Тупикові нормальні форми

Диз'юнктивним ядром булевої функції f називається така множина її простих імплікант, яка створює покриття *f*, але після видалення будь-якої імпліканти втрачає цю властивість, тобто перестає бути повною системою імплікант.

Тупиковою ДНФ називається ДНФ даної булевої функції, що складається тільки з простих імплікант.

Кожна булева функція має єдину скорочену ДНФ і може мати декілька тупикових ДНФ. Тупикові форми, що містять найменшу кількість символів, будуть мінімальними. У кожну з тупикових ДНФ входять всі імпліканти диз'юнктивного ядра даної функції.

Можна сформулювати один з алгоритмів утворення тупикових ДНФ (алгоритм спрощення, тобто алгоритм найшвидшого спуску):

1. Функцію подають у ДДНФ.
2. Упорядковують ДДНФ (записують співмножники так, щоб було зручно здійснювати перетворення).
3. До ДДНФ застосовують операцію вилучення елементарних кон'юнкцій, а потім операцію вилучення співмножників.

Теорема 3. ДНФ, утворена після застосування алгоритму найшвидшого спуску, є тупиковою.

Результат використання алгоритму спрощення залежить від вибору впорядкування початкової ДДНФ і може мати різну складність та різний коефіцієнт простоти отриманої тупикової форми.

Черговий етап спрощення булевої функції полягає в пошуку тупикових, а потім мінімальних форм.

Для утворення мінімальної ДНФ досить знайти всі тупикові форми заданої функції і вибрати з них мінімальні. Існує кілька методів пошуку тупикових форм.

Розглянемо ***метод імплікативних матриць*** для функції

$$f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z).$$

з попереднього прикладу, де отримали її скорочену ДНФ:

$$f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y})\vee(\overline{y}\wedge z)$$

Для знаходження мінімальної ДНФ побудуємо імплікативну матрицю, в якій у рядках записані імпліканти, а в стовпцях – мінтерми.

		$\overline{x}\wedge y\wedge z$	$x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}$	$x\wedge\overline{y}\wedge z$	$\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z$
*	$\overline{x}\wedge z$	$\times$			$\times$
*	$x\wedge\overline{y}$		$\times$	$\times$	
	$\overline{y}\wedge z$			$\times$	$\times$
		*	*	+	+

У комірках таблиці хрестиками відмічаємо імпліканти, які покривають відповідні одиниці заданої функції.

Знизу таблиці символом (*) помічаємо всі ті стовпці, в яких стоїть тільки один хрестик. Відповідні їм імпліканти також відмічаємо символом (*) – вони є обов'язковими.

Відмічаємо також символом “+” ті стовпці, які покриваються обов’язковими імплікантами.

Якщо всі стовпці відмічені, то отриманий набір обов’язкових імплікант утворює мінімальну ДНФ.

Якщо частина стовпців лишається непокритою, то з решти імплікант обирається найменше число найбільш коротких імплікант так, щоб всі стовпці були покриті. В нашому прикладі мінімальна ДНФ набуває вигляду:

$$f(x, y, z) = (\overline{x} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y}).$$

Аналогічно знаходяться мінімальні кон’юнктивні нормальні форми.

Для аналізу різних зображень булевої функції через КНФ і одержання мінімальних КНФ легко трансформувати викладені вище поняття за принципом двоїстості: ***імпліцента, проста імпліцента, повна система імпліцент, скорочена КНФ, тупикова КНФ, мінімальна КНФ***.

3.3.5 Метод мінімізаційних карт (діаграм Карно-Вейча, карт Карно)

Діаграми Карно-Вейча – це спеціальні таблиці, що використовуються для задання булевих функцій і дають змогу спростити процес пошуку мінімальних форм.

Передбачається, що функція подана у ДДНФ. Процес пошуку реалізується таким чином, що визначають елементарні кон’юнкції, що входять у ДДНФ, відмінні тільки одним символом, який в одну із кон’юнкцій входить із запереченням, а в інший – без, і далі виконують спрощення згідно з тотожністю неповного склеювання:

$$(x \wedge A) \vee (\overline{x} \wedge A) = A \wedge (x \vee \overline{x}) = A.$$

3.3.5.1 Мінімальні ДНФ (МДНФ)

Метою мінімізації є знаходження мінімальної з тупикових ДНФ (КНФ), тобто знаходження мінімального покриття даної функції.

Для цього необхідно побудувати всі можливі тупикові ДНФ (КНФ), використовуючи операції склеювання та поглинання для даної функції. Методика Карно і Вейча дозволяє виконати ці операції графічно.

Карта Карно для ДНФ (діаграма Вейча — для КНФ) є аналогом таблиці істинності, зображеній у спеціальній формі. Значення змінних розташовані у заголовках рядків і стовпців карти. Кожній конституенті одиниці функції відповідає одна клітка (комірка) таблиці. Нуль або одиниця в клітці визначає значення функції на даній інтерпретації. Значення змінних розташовані так, щоб сусідні (що мають спільну межу) рядки і стовпці таблиці відрізнялись значенням тільки однієї змінної: (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0). У цій послідовності перша та остання інтерпретації також відрізняються значенням тільки однієї змінної, тому перший і останній рядки (стовпці) таблиці вважаються сусідніми (протилежні границі таблиці вважаються співпадаючими). При такому розташуванні конституенти одиниці, до яких застосовна операція склеювання, розташовуються у сусідніх клітках карти, і склеювання проводиться графічно за допомогою об'єднання кліток у групи.

Структура карти Карно для функції двох змінних:

$y \backslash x$	0	1
0	$\bar{x}\,\bar{y}$	$x\,\bar{y}$
1	$\bar{x}\,y$	$x\,y$

Структура карти Карно для функції трьох змінних:

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	$x\,y\,\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$
1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}\,y\,z$	$x\,y\,z$	$x\,\bar{y}\,z$

Для конкретної булевої функції карта Карно заповнюється наступним чином. У клітках, що відповідні інтерпретаціям, на яких функція дорівнює одиниці, записують одиниці. Ці клітки відповідають конституентам одиниці, що присутні у ДДНФ функції. В інші клітки записують нулі.

Приклад. Побудувати карту Карно для функції

$$f(x, y, z) = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}.$$

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

До конституент одиниці, що відповідають будь-яким двом сусіднім кліткам, можна застосувати операцію склеювання, оскільки вони відрізняються тільки однією змінною.

На карті Карно для функції трьох змінних кожна клітка має три сусідні клітки, на карті Карно для функції чотирьох змінних – чотири, для функції п'яти змінних – п'ять тощо. Наприклад, на наступному рисунку позначено клітки, сусідні з клітками A і B.

Правило склеювання кліток і запису мінімальної ДНФ

1. Будується карта Карно, що відповідає даній функції.
2. Клітки об'єднуються у групи, що позначають операції склеювання. В об'єднанні беруть участь тільки сусідні клітки, в яких знаходяться одиниці.
3. В групу можна об'єднати тільки кількість кліток, що дорівнює
$$2^n,\ n = 1, 2, 3, \dots$$
4. При цьому група може мати тільки прямокутну або квадратну форму.
5. Задача склеювання полягає у знаходженні набору максимальних груп кліток. Максимальна група – це група, яка не входить цілком у жодну іншу групу і відповідає простій імпліканті функції.
   Кількість груп у такому наборі повинна бути мінімальною, оскільки така група відповідає мінімальній тупиковій ДНФ.
   Кожна одиниця карти Карно повинна входити хоча б до однієї групи, що забезпечує покриття функції одержаним набором імплікант.
6. Кожна група кліток, що одержана після склеювання, відповідає тій імпліканті функції, реальні змінні якої мають однакове значення для всіх кліток групи. Змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідають одиничні значення, і із запереченням – в іншому випадку.
7. Диз'юнкція всіх одержаних простих імплікант зображує результат мінімізації формули і є мінімально ДНФ.

Оскільки при мінімізації на множині ДНФ у склеюванні беруть участь тільки клітки, що містять одиниці, нулі в картах Карно, як правило, не вказують і мають на увазі, що порожні клітки містять нулі.

Приклад. Знайти мінімальну ДНФ функції
$$f(x, y, z) = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}.$$

Карта Карно має наступний вигляд

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Графічно склеювання позначається об'єднанням сусідніх одиниць таблиці у групи, результатом чого є дві імпліканти A і B.

z \ xy	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

A B

Імпліканта $A = \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} = \bar{x}\,\bar{y}\,(z \vee \bar{z}) = \bar{x}\,\bar{y}$.

Імпліканта $B = x\,y\,z \vee \bar{x}\,y\,z = (x \vee \bar{x})\,y\,z = y\,z$.

Таким чином, одержимо мінімальну ДНФ: $f(x, y, z) = A \vee B = \bar{x}\,\bar{y} \vee y\,z$.

Приклад. Знайти мінімальну ДНФ функції

$$f(x, y, z) = \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,z.$$

Записуємо вихідну карту Карно:

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

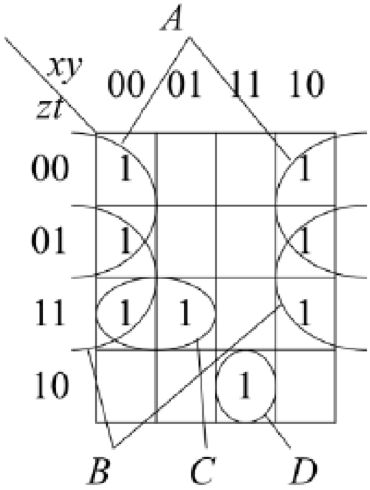
A B C

МДНФ: $f(x, y, z) = A \vee B \vee C = \bar{x}\,\bar{y}\,z \vee y\,\bar{z} \vee x\,y$.

Розглянемо застосування карт Карно для мінімізації функцій, що залежать від чотирьох змінних. Відмінність полягає в тому, що сусідніми необхідно вважати не тільки крайній правий та крайній лівий стовпці, але також крайній верхній і крайній нижній рядки.

Приклад. Побудувати МДНФ для функції

$$f(x, y, z, t) = x\,y\,z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z\,t \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z\,t \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}.$$



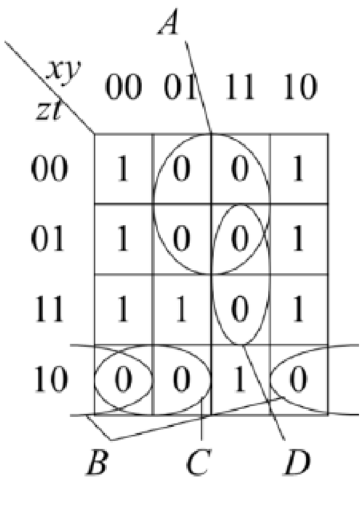
МДНФ: $f(x, y, z, t) = A \vee B \vee C \vee D = \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,t \vee \overline{x}\,z\,t \vee x\,y\,z\,\overline{t}.$

3.3.5.2 Мінімальні КНФ (МКНФ)

Для мінімізації булевої функції на множині КНФ використовуються діаграми Вейча. Їх побудова аналогічна картам Карно. На карті позначаються клітки, що відповідають інтерпретаціям, на яких функція дорівнює нулю. Після цього проводиться склеювання кліток, що містять нулі і формування мінімальної КНФ. Склеювання кліток здійснюється за тими ж правилами, що й при диз'юнктивній мінімізації. Кожна група кліток, що одержана в результаті склеювання, відповідає диз'юнкції тільки тих змінних, які мають однакове значення для всіх кліток групи. Змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідає нульове значення, і із запереченням – в іншому випадку. Кон'юнкція одержаних елементарних диз'юнкцій є результатом мінімізації формули.

Приклад. Одержати мінімальну КНФ для функції

$f(x, y, z, t) = x\,y\,z\,\overline{t} \vee x\,\overline{y}\,z\,t \vee \overline{x}\,y\,z\,t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z\,t \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\,t \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}.$



МКНФ:

$$f(x, y, z, t) = A \wedge B \wedge C \wedge D = (\overline{y} \vee z) \wedge (y \vee \overline{z} \vee t) \wedge (x \vee \overline{z} \vee t) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{t}).$$

Приклад. Функція $f(x, y, z, w)$ задана за допомогою конституент одиниці, що закодовані десятковими еквівалентами $0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10$. Знайти мінімальні ДНФ та КНФ за допомогою діаграм Карно-Вейча.

Розв'язання. Таблиця істинності даної функції має вигляд

	x	y	z	w	$f(x, y, z, w)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Побудуємо діаграму Карно-Вейча для функції $f(x, y, z, w)$.

При знаходженні мінімальної ДНФ функції $f(x, y, z, w)$ заповнюємо діаграму Карно-Вейча і покриваємо одиниці як зображено на рисунку:

zw / xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Отримаємо мінімальну ДНФ: $f(x, y, z, w) = \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}w \vee \bar{y}\,\bar{w}$.

Знайдемо мінімальну КНФ функції $f(x, y, z, w)$:

zw / xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Мінімальна КНФ буде мати наступний вигляд:

$$f\left(x, y, z, w\right) = \left(\overline{x} \vee \overline{y}\right) \wedge \left(\overline{x} \vee \overline{w}\right) \vee \left(\overline{y} \vee \overline{z} \vee w\right).$$