

2.3 Ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Наближені методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь дозволяють обчислити значення розв'язків системи із заданою точністю у вигляді послідовності деяких векторів. Процес побудови такої послідовності називають *ітераційним процесом*. Ефективність використання наближених методів залежить від вдалого вибору початкового вектора та швидкості збіжності обраного процесу.

Існує декілька основних різновидів ітераційних методів. Це метод Якобі (або простої ітерації), метод Зейделя та метод послідовної верхньої релаксації (узагальнений метод Зейделя), в основі яких лежить систематичне уточнення значень змінних, заданих на початку розрахунку.

В методі Якобі початкові значення змінних використовуються для обчислення нових значень. Процес припиняється, коли всі нові значення виявляються достатньо близькими до початкових. В іншому випадку нові значення використовуються замість початкових. Ця процедура повторюється доти, доки не буде досягнута збіжність або стане ясно, що процес розбіжний. В цьому методі заміна значень всіх змінних проводиться одночасно (одночасне зміщення).

В методі Зейделя уточнене значення x_1 відразу ж використовується для обчислення x_2 . Потім за новими значеннями x_1 і x_2 визначаються x_3 і т.д. Це дозволяє істотно збільшити швидкість збіжності.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = f, \quad (1)$$

де $A = \|a_{ij}\|$ – квадратна матриця розмірності $m \times m$, $|A| \neq 0$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ – вектор-стовпець правих частин системи, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ – вектор-стовпець невідомих.

Ідея найпростіших ітераційних методів розв'язання системи (1) полягає у наступному. За допомогою еквівалентних перетворень система (1) зводиться до системи вигляду

$$x = \beta x + b, \quad (2)$$

де $\beta = \|\beta_{ij}\|$ – квадратна матриця $m \times m$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – відомий вектор.

Потім задається деяке початкове наближення $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})^T$ (наприклад, як $x^{(0)}$ береться вектор b , або деякий розв'язок системи (1),

який одержується іншим методом з деякою похибкою). Інші наближення послідовно знаходяться за рекурентною формулою

$$x^{(n+1)} = \beta x^{(n)} + b, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

доки на деякому кроці не буде досягнута задана точність ε обчислення значення невідомого вектора x .

Одним з головних питань щодо застосування ітераційних методів є збіжність, тобто за яких умов, що накладаються на матрицю β , послідовність $\{x^{(n)}\}$ збігається (у певному розумінні) до точного розв'язку x . Для оцінювання збіжності обчислюються норми матриці коефіцієнтів β системи (2). Найбільшого поширення набули наступні способи оцінювання норм:

$$1) \quad \alpha = \max_i \sum_{j=1}^m |\beta_{ij}| < 1, \quad (4)$$

$$2) \quad \alpha = \max_j \sum_{i=1}^m |\beta_{ij}| < 1, \quad (5)$$

$$3) \quad \alpha = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^2 < 1 \quad (\text{Евклідова норма}). \quad (6)$$

Існує декілька підходів до визначення збіжності за допомогою оцінки норм. В загальному випадку достатньо, щоб хоча б одна з норм матриці B була менша за одиницю.

Швидкість збіжності визначається нерівністю

$$\rho(x^{(n)}, x) \leq \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) \frac{\alpha^n}{1 - \alpha},$$

де $\rho(y, z)$ – відстань між векторами y та z , що може бути заданою:

$$\rho(y, z) = \max_i |z_i - y_i|, \quad \text{коли виконується умова (4);}$$

$$\rho(y, z) = \sum_{i=1}^m |z_i - y_i|, \quad \text{коли виконується умова (5);}$$

$$\rho(y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2}, \quad \text{коли виконується умова (6).}$$

Задаючи потрібну точність ε можна з рівності

$$\varepsilon = \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}$$

одержати необхідну кількість ітерацій n , щоб досягти задане ε .

Якщо позначити $\frac{f_i}{a_{ii}} = b_{ii}$, $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \beta_{ij}$, де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, то систему

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \dots + \beta_{1m}x_m \\ x_2 = b_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{23}x_3 + \dots + \beta_{2m}x_m \\ \vdots \\ x_m = b_m + \beta_{m1}x_1 + \beta_{m2}x_2 + \dots + \beta_{m,m-1}x_{m-1} \end{array} \right.$$

Отже, систему можна записати у матричній формі

де $\beta = \|\beta_{ij}\|$ – квадратна матриця $m \times m$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – відомий вектор.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \dots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_m^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2m} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \dots & \beta_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \dots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \dots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix},$$

4

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \dots \\ x_m^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2m} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \dots & \beta_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \dots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_m^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Взагалі, будь-яке $(k+1)$ -е наближення обчислюють за формулою

$$x^{(k+1)} = b + \beta \cdot x^{(k)}, \text{ де } k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Якщо послідовність $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ має границю $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, то ця границя є розв'язком системи, тому що за властивостями границі $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = b + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, тобто $x = b + \beta x$.

Для зручності програмування методу ітерацій із заданою точністю розглянемо систему з іншого боку.

Прийmemo за нульове наближення стовпець вільних членів і обчислимо значення коренів на першому кроці, підставивши $x_i^{(0)}$ в усі рівняння.

Перевіримо умову досягнення точності за всіма змінними

$$|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| \leq \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Якщо для будь-якого кореня не виконується умова, наближення обчислюються знову, підставляючи до формул $x_i^{(1)}$.

Загальною формулою обчислення будь-якого розв'язку **за методом Якобі (простій ітерації)** буде вираз, який задається рекурентним співвідношенням:

$$x_i^{(n+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

З виразу (9) бачимо, що для виконання обчислень необхідно мати два масиви для збереження попередніх і наступних значень розв'язків системи. Окрім того, необхідно ввести ознаку досягнення точності.

На практиці умову збіжності методу простих ітерацій доцільно перевіряти наступним чином. Нехай дана система приведена до нормального виду $x = b + \beta x$.

Ітераційний процес і його збіжність залежить від величини елементів матриці β таким чином: якщо сума модулів елементів рядків або сума модулів елементів стовпців менше одиниці, то метод простих ітерацій для даної системи збігається до єдиного розв'язку незалежно від вибору початкового вектора.

Умову збіжності можна записати так

$$\sum_{j=1}^m |\beta_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (10)$$

або

$$\sum_{i=1}^m |\beta_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m). \quad (11)$$

Приклад 1. Дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}.$$

Розв'язання. Перетворимо дану систему до вигляду (2). Виразимо x_1 через перше рівняння системи, x_2 – через друге та x_3 – через третє. В результаті ми отримаємо систему, еквівалентну заданій

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(26 - x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(7 - x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(7 - x_1 + x_2) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3 \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3 \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2 \end{cases}.$$

Отже, матриця β має вигляд

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ітераційний процес є збіжним, оскільки виконується умова збіжності:

$$\sum_{j=1}^3 |\beta_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

– сума модулів елементів рядків менше одиниці, тобто

$$|0| + |-0,125| + |-0,125| = 0,25 < 1,$$

$$|-0,2| + |0| + |0,2| = 0,4 < 1,$$

$$|-0,2| + |0,2| + |0| = 0,4 < 1.$$

Розглянемо приклад застосування методу простої ітерації.

Приклад 2. Знайти розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 200 \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 = 600 \\ x_1 - 2x_2 + 100x_3 = 500 \end{cases}$$

методом Якобі (простої ітерації) з похибкою 0,001.

Розв'язання. Перетворимо дану систему рівнянь до вигляду (2). Для цього поділимо перше рівняння на коефіцієнт при x_1 (100), друге – на коефіцієнт при x_2 (200), третє – на коефіцієнт при x_3 (100). В результаті матимемо

$$\begin{cases} x_1 + 0,06x_2 - 0,02x_3 = 2 \\ 0,03x_1 + x_2 - 0,05x_3 = 3 \\ 0,01x_1 - 0,02x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Перетворимо дану систему до вигляду (3). Виразимо з першого рівняння системи невідому x_1 , з другого – x_2 та з третього – x_3 . В результаті ми отримаємо систему, еквівалентну заданій

$$\begin{cases} x_1 = -0,06x_2 + 0,02x_3 + 2 \\ x_2 = -0,03x_1 + 0,05x_3 + 3 \\ x_3 = -0,01x_1 + 0,02x_2 + 5 \end{cases}$$

Отже матриця коефіцієнтів β та вектор-стовпець b рівні відповідно:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

За вектор початкових значень оберемо вектор b

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

підставимо його значення в систему (*) та обчислимо перше наближення розв'язку системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 4,92 \end{pmatrix}.$$

Здобуті значення першого наближення розв'язку підставимо знову у систему (*) та обчислимо друге наближення розв'язку системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,92 \\ 3,19 \\ 4,92 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,907 \\ 3,1884 \\ 4,917 \end{pmatrix}.$$

Продовживши ітераційний процес, матимемо вектор третього наближення розв'язку системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,907 \\ 3,1884 \\ 4,917 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,907036 \\ 3,18864 \\ 4,917162 \end{pmatrix}.$$

Вектор наближення $x^{(3)} = (1,907036; 3,18864; 4,917162)$ є розв'язком даної системи рівнянь, оскільки $|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3$.

Метод Зейделя

Метод Зейделя є модифікацією методу простих ітерацій. В цьому методі при обчисленні $(k+1)$ -го наближення невідомого x_i враховуються вже знайдені раніше $(k+1)$ -і наближення невідомих x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Нехай дана лінійна система у нормальній формі

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \dots + \beta_{1m}x_m \\ x_2 = b_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{23}x_3 + \dots + \beta_{2m}x_m \\ \vdots \\ x_m = b_m + \beta_{m1}x_1 + \beta_{m2}x_2 + \dots + \beta_{m,m-1}x_{m-1} \end{cases}$$

Обираємо довільно початкове наближення коренів $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}$ та підставляємо в перше рівняння системи.

$$x_1^{(1)} = b_1 + \beta_{12}x_2^{(0)} + \beta_{13}x_3^{(0)} + \dots + \beta_{1m}x_m^{(0)};$$

Отримане перше наближення $x_1^{(1)}$ підставимо в друге рівняння системи:

$$x_2^{(1)} = b_2 + \beta_{21}x_1^{(1)} + \beta_{23}x_3^{(0)} + \dots + \beta_{2m}x_m^{(0)};$$

Отримані перші наближення $x_1^{(1)}$ та $x_2^{(1)}$ підставимо в третє рівняння системи:

$$x_3^{(1)} = b_3 + \beta_{31}x_1^{(1)} + \beta_{32}x_2^{(1)} + \dots + \beta_{3m}x_m^{(0)};$$

і т.д. Нарешті

$$x_m^{(1)} = b_m + \beta_{m1}x_1^{(1)} + \beta_{m2}x_2^{(1)} + \dots + \beta_{m,m-1}x_{m-1}^{(1)}.$$

Аналогічно будують другі, треті та наступні ітерації.

Загальною формулою обчислення будь-якого розв'язку **за методом Зейделя** буде вираз, який задається рекурентним співвідношенням:

$$x_i^{(n+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (12)$$

де вже знайдені компоненти беруться у правій частині співвідношення з $(n+1)$ -го наближення, а інші – з n -го наближення.

Процес Зейделя для лінійної системи $x = b + \beta x$, як і процес послідовних наближень методу простих ітерацій, збігається до єдиного розв'язку для будь-якого початкового наближення, якщо будь-яка з норм 4), 5), 6) матриці β менше одиниці.

Зауваження. На практиці збіжність ітераційного процесу можна перевіряти за умовою (10) або (11).

Використовуючи сформульовані раніше достатні умови збіжності $x^n \rightarrow x$, можна переконатись, що для збіжності методів Якобі і Зейделя достатньо, щоб матриця A мала **домінуючу головну діагональ**:

$$|a_{ii}| > \sum_{k=1, k \neq i}^m |a_{ik}|; \quad i = \overline{1, m} \quad \text{або} \quad |a_{jj}| > \sum_{k=1, k \neq j}^m |a_{kj}|; \quad j = \overline{1, m},$$

тобто якщо кожний діагональний елемент цієї матриці за модулем більший ніж сума модулів інших елементів цього ж рядка або стовпця.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Зейделя.

Нехай маємо систему з наступними даними:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Виразимо з кожного рядка невідому x_i , де i дорівнює індексу рядка, отримаємо:

$$x_1 = (1 + 1 \times x_2 + 1 \times x_3 - 0 \times x_4) / 4$$

$$x_2 = (2 + 1 \times x_1 - 0 \times x_3 + 1 \times x_4)/4$$

$$x_3 = (0 + 1 \times x_1 - 0 \times x_2 + 1 \times x_4)/4$$

$$x_4 = (1 - 0 \times x_1 + 1 \times x_2 + 1 \times x_3)/4$$

Отримали ітераційні формули, тепер підставимо в них значення x_i .

За початкове наближення приймемо нульовий вектор

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо перше наближення розв'язку системи рівнянь.

Для x_1 отримаємо

$$x_1 = (1 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 0 \times 0)/4 = 1/4 = 0.25.$$

Для розрахунку x_2 маємо оновлений вектор невідомих

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримаємо

$$x_2 = (2 + 1 \times 1/4 - 0 \times 0 + 1 \times 0)/4 = 9/16 = 0.5625.$$

Для x_3 маємо

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 9/16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ отримаємо}$$

$$x_3 = (0 + 1 \times 1/4 - 0 \times 9/16 + 1 \times 0)/4 = 1/16 = 0.0625.$$

Для x_4 маємо

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 9/16 \\ 1/16 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ отримаємо}$$

$$x_4 = (1 - 0 \times 1/4 + 1 \times 9/16 + 1 \times 1/16)/4 = 13/32 = 0.4062.$$

Першу ітерацію виконано,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 9/16 \\ 1/16 \\ 13/32 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходяться значення вектору невідомих на другій та наступних ітераціях.

Критерієм закінчення ітераційного процесу може бути близькість значень вектора x на сусідніх ітераціях.

Перед початком виконання ітераційного процесу необхідно пересвідчитися в тому, що ітераційна послідовність буде збігатися до розв'язку. Для цього добре підходить умова *діагональної домінантності* матриці A : якщо елементи головної діагоналі за модулем більші за суму модулів решти елементів рядків, в яких вони знаходяться, то ітераційний процес буде збігатись до розв'язку. У нашому прикладі на діагоналі знаходяться значення, які більші за решту значень в рядках: $|4| > |1| + |1|$.

Матрична форма методів Якобі і Зейделя

Нехай матрицю A наведено у вигляді:

$$A = A_1 + D + A_2,$$

де A_1 – нижня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю; D – діагональна матриця з a_{ii} на головній діагоналі; A_2 – верхня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю.

За припущенням $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, m}$, існує D^{-1} .

Тоді зображенню у формі (8) відповідає

$$x = -D^{-1}A_1x - D^{-1}A_2x + D^{-1}f,$$

або

$$x = -D^{-1}(A_1 + A_2)x + D^{-1}f.$$

Отже, методу Якобі відповідає ітераційна процедура

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}(A_1 + A_2)x^{(n)} + D^{-1}f.$$

Методу Зейделя відповідає

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}A_1x^{(n+1)} - D^{-1}A_2x^{(n)} + D^{-1}f.$$

Покажемо, що до форми (2), що задовольняє умови збіжності, може бути зведена довільна система (1) з $|A| \neq 0$.

Дійсно, візьмемо матрицю $C = A^{-1} - \varepsilon$, де $\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}\|_m^m$ – матриця з достатньо малими за модулем елементами. Домножаючи (1) зліва на C маємо

$$(A^{-1} - \varepsilon)Ax = (A^{-1} - \varepsilon)f,$$

$$x = \varepsilon Ax + (A^{-1} - \varepsilon)f,$$

тобто, одержали форму (2) з $\beta = \varepsilon A$, $b = (A^{-1} - \varepsilon)f$.

За рахунок вибору достатньо малих $|\varepsilon_{ij}|$ можна задовольнити умови збіжності.

Процес ітерації, що збігається, має властивість стійкості, тобто окрема похибка у обчисленнях не позначається на кінцевому результаті, тому що хибне наближення можна розглядати як новий початковий вектор.

Порівняння прямих та ітераційних методів

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна розв'язувати як за допомогою прямих, так і ітераційних методів. Для систем рівнянь середньої розмірності частіше використовують прямі методи. Зазвичай метод Зейделя має кращу збіжність, ніж метод простих ітерацій, але призводить до значно громіздкіших обчислень.

Ітераційні методи застосовують переважно для розв'язування задач великої розмірності, коли використовувати прямі методи неможливо через обмеження в доступній оперативній пам'яті ЕОМ або через потребу виконання надто великої кількості арифметичних операцій. Більш потужні системи рівнянь переважно є розрідженими. Методи Гауса для систем з розрідженими матрицями є незручні, наприклад тим, що за їх використання велика кількість нульових елементів перетворюється на ненульові й матриця втрачає властивість розрідженості. На противагу їм, при застосовуванні ітераційних методів упродовж процесу матриця не змінюється і залишається розрідженою. Більша ефективність ітераційних методів порівняно з прямими тісно пов'язана з можливістю суттєвого використання розрідженості матриць.