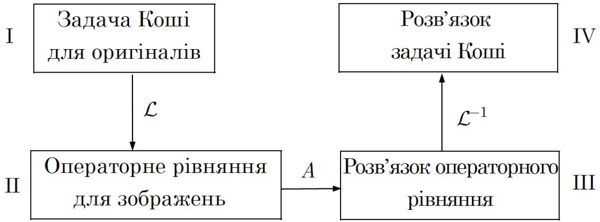
Застосування перетворення Лапласа

доц. І.В. Орловський

В операційному численні реалізують наступну схему розв'язання задачі:

1. за допомогою прямого перетворення від шуканих функцій-оригіналів переходять до їх зображень;
2. над зображеннями проводять дії, які відповідають заданим діям над шуканими функціями;
3. одержавши деякий результат після дій над зображеннями, за допомогою оберненого перетворення переходять від зображення до його оригіналу.

Подамо загальну схему розв'язання задачі Коші:



1. Розв'язання задачі Коші для лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами зі знаходженням зображення правої частини рівняння

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння 2-го порядку (в загальному випадку отримується аналогічно):

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0',$$

де $a_0, \; a_1, \; a_2$ – сталі, $a_0 \neq 0$.

Припустимо, що $x(t)$ та $f(t)$ є оригіналами та

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad f(t) \doteqdot F(p).$$

Застосовуючи перетворення Лапласа до обох частин ДР і враховуючи початкові умови, дістаємо операторне рівняння

$$(a_0p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0) = F(p).$$

З операторного рівняння дістаємо операторний розв'язок

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_0' + a_1x_0}{a_0p^2 + a_1p + a_2}.$$

За знайденим зображенням $X(p)$ знаходимо оригінал $x(t)$, який буде розв'язком задачі Коші.

2. Розв'язання задачі Коші без знаходження зображення правої частини рівняння

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння 2-го порядку з нульовими початковими умовами:

$$a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

де $a_0, \ a_1, \ a_2$ — сталі, $a_0 \neq 0$.
Припустимо, що $x(t)$ та $f(t)$ є оригіналами,

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad f(t) \doteqdot F(p),$$

і явний вигляд $F(p)$ не знаходимо.
Маємо операторне рівняння:

$$X(p)(a_0p^2 + a_1p + a_2) = F(p).$$

Тоді,

$$X(p) = \frac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}F(p) = K(p)F(p),$$

де $K(p) = \dfrac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_2}$.

Розв'язок $x(t)$ шукаємо як згортку:

$$x(t) = k(t) * f(t) = \int\limits_0^t k(\tau)f(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

де $k(t) \doteqdot K(p)$.

3. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь

Розглянемо задачу Коші для системи лінійних неоднорідних ДР 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), \end{cases} \quad x(0) = x_0, \; y(0) = y_0.$$

Припустімо, що $x(t)$, $y(t)$ та $f_1(t)$, $f_2(t)$ є оригіналами і позначимо:

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad y(t) \doteqdot Y(p),$$
$$f_1(t) \doteqdot F_1(p), \quad f_2(t) \doteqdot F_2(p).$$

Заданій системі з початковими умовами відповідає система операторних рівнянь:

$$\begin{cases} (p - a_{11})X(p) & -a_{12}Y(p) & = F_1(p) + x_0, \\ -a_{21}X(p) & +(p - a_{22})Y(p) & = F_2(p) + y_0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, приміром, методом Крамера, знаходимо зображення $X(p)$ та $Y(p)$, за якими відновлюємо оригінали $x(t)$ та $y(t)$ розв'язків задачі Коші.

4. Розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри

Нехай маємо інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду типу згортки

$$\varphi(t) = f(t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Нехай

$$\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad k(t) \risingdotseq K(p).$$

Застосовуючи до обох частин інтегрального рівняння перетворення Лапласа і користуючись теоремою множення, маємо

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p),$$

звідки

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)}, \quad K(p) \neq 1.$$

Для зображення $\Phi(p)$ знаходимо оригінал $\varphi(t)$ – розв'язок інтегрального рівняння.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.