Ряди Фур'є

доц. І.В. Орловський

Означення 1

Функцію $y = f(x)$, $x \in D$, називають періодичною з періодом $T > 0$, якщо:

1. *для кожного $x \in D$ $x + T \in D$;*
2. *для кожного $x \in D$ виконано рівність*

$$f(x + T) = f(x).$$

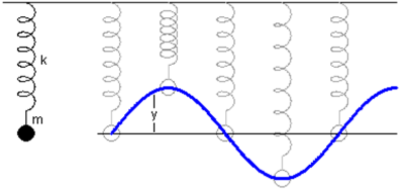

Рис.: Періодичний рух підчепленої кульки

Властивості періодичних функцій

I Сума, різниця, добуток і частка T-періодичних функцій є T-періодичною функцією;

II Якщо функція $f(x)$ є періодичною з періодом T, то функція $y = f(\omega x)$, $\omega > 0$, також є періодичною з періодом $\dfrac{T}{\omega}$;

III Якщо функція f є T-періодичною та інтегрованою по періоду, то $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^{T} f(x)dx = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx;$$

IV Якщо функція f є T-періодичною та інтегрованою на проміжку $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)dx.$$

Найпростішим коливанням з періодом $T = 2l$ є просте гармонічне коливання

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi_0)\,,\ \ x \geq 0, \qquad (1)$$

де A – амплітуда коливання; $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{l}$ – колова частота; φ_0 – початкова фаза. Функцію $f(x)$ та її графік називають простою гармонікою.

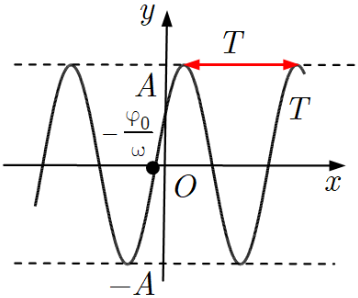

Рис.: Проста гармоніка

Проведемо перетворення функції (1)

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi_0) = A\sin\omega x\cos\varphi_0 + A\cos\omega x\sin\varphi_0 = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

де $a = A\sin\varphi_0$, $b = A\cos\varphi_0$. Таким чином, просте гармонічне коливання описується періодичними функціями $\cos\omega x$ та $\sin\omega x$.
Складне гармонічне коливання, яке виникає в результаті накладення скінченої або нескінченої кількості простих гармонік, також описується за допомогою функцій $\cos\omega x$ та $\sin\omega x$.

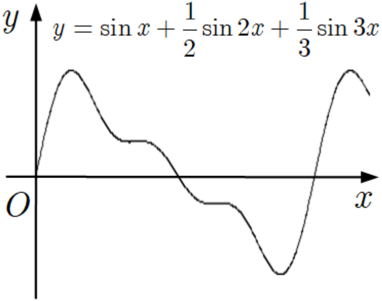

Рис.: Складна гармоніка

2. Тригонометричні ряди

Накладанням простих гармонік можна дістати різноманітні періодичні коливання, які зовсім не схожі на прості гармонічні коливання.

Означення 2

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

називають тригонометричним, сталі a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, — коефіцієнтами тригонометричного ряду, ω — основною частотою.

Означення 3

Систему функцій

$$\{1, \sin n\omega x, \cos n\omega x,\ \ n \in \mathbb{N}\},$$

називають тригонометричною.

Оскільки членами тригонометричного ряду є періодичні функції з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *то в разі збіжності ряду його сума* $S(x)$ *є також* T*-періодичною функцією.*

3. Ортогональність тригонометричної системи

Означення 4 (ортогональної системи)

Скінченну чи нескінченну систему функцій

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...,$$

де $\varphi_n(x) \neq 0, n \in \mathbb{N}$, *називають ортогональною на відрізку* $[a;b]$, *якщо для будь-яких* $n,\ m \in \mathbb{N}$*:*

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} \lambda_n \neq 0, & \text{якщо } m = n; \\ 0, & \text{якщо } m \neq n. \end{cases}$$

Доведемо, що тригонометрична система функцій

$$\{1, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x)\} = \left\{1, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}, n \in \mathbb{N},$$

є ортогональною на відрізку $[-l;\, l]$.
Дійсно,

$$\int_{-l}^{l} 1 \cdot 1\, dx = x\Big|_{-l}^{l} = 2l; \qquad (2)$$

$$\int_{-l}^{l} 1 \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} dx = \frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} = \frac{l}{\pi n}\Big(\sin \pi n - \sin(-\pi n)\Big) = 0,\ \ n \in \mathbb{N}; \qquad (3)$$

$$\int_{-l}^{l} 1 \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} dx = -\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{-l}^{l} = -\frac{l}{\pi n}\Big(\cos \pi n - \cos(-\pi n)\Big) = 0,\ \ n \in \mathbb{N}; \qquad (4)$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi m x}{l}\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{\pi(m+n)x}{l} + \cos\frac{\pi(m-n)x}{l}\right)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ l, & m = n; \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi m x}{l}\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{\pi(m+n)x}{l} + \sin\frac{\pi(m-n)x}{l}\right)dx = 0; \tag{6}$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi m x}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{\pi(m-n)x}{l} - \cos\frac{\pi(m+n)x}{l}\right)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ l, & m = n; \end{cases} . \tag{7}$$

4. Тригонометричні ряди Фур'є

Розвинути T-періодичну функцію $f(x)$ у тригонометричний ряд означає знайти тригонометричний ряд, який збігається до функції $f(x)$ (за винятком, можливо деяких точок).

Теорема 1 (єдиності тригонометричного ряду)

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-1;\ 1]$, розвивається у рівномірно збіжний тригонометричний ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

то це розвинення єдине.

Доведення

Інтегруючи почленно ряд на відрізку $[-1; 1]$, дістаємо

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi nx}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}dx\right).$$

Використовуючи (2)–(4),

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = a_0 l,$$

звідки знаходимо

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Помножимо тепер обидві частини розвинення на $\cos\dfrac{\pi kx}{l}$ та проінтегруємо одержаний ряд почленно на відрізку $[-l;\, l]$:

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{\pi kx}{l}dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi kx}{l}dx + b_n\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi kx}{l}dx\right).$$

Використовуючи (3), (5) та (6),

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx = a_n\int\limits_{-l}^{l}\cos^2\frac{\pi kx}{l}dx = a_k l;$$

звідки знаходимо $a_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\ \ k\in\mathbb{N}.$

Аналогічним чином, помноживши на $\sin\dfrac{\pi kx}{l}$ та проінтегруємо почленно на відрізку $[-l;\, l]$, знайдемо

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Нехай задано довільну періодичну функцію $f(x)$ з періодом T, інтегровну на відрізку $[-l;\ l]$. Чи можна її розвинути у тригонометричний ряд, заздалегідь невідомо.
За одержаними формулами можемо обчислити коефіцієнти $a_0, a_n, b_n,\ n \in \mathbb{N}$, і поставити у відповідність функції f, на відрізку $[-l;\ l]$, тригонометричний ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Означення 5

Тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}+b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

коефіцієнти якого визначаються через функцію $f(x)$ *за формулами*

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

називають тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x)$, *а коефіцієнти цього ряду називають коефіцієнтами Фур'є функції* $f(x)$.

Означення 6

Функцію f називають кусково-монотонною на відрізку $[a;b]$, якщо цей відрізок можна розбити скінченною кількістю точок

$$a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b$$

на інтервали $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, ..., $(x_n;b)$, на кожному з яких f є монотонною, тобто або не спадає, або не зростає.

Означення 7

Функцію f називають кусково-неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона є неперервною або має скінченну кількість точок розриву 1-го роду (усувні або скінченний стрибок).

Теорема 2 (Діріхле)

Якщо $2l$*-періодична функція* $f(x)$ *задовольняє умовам Діріхле на відрізку* $[-l; l]$, *тобто функція* $f(x)$ *є на цьому відрізку:*

1. *кусково-неперервною;*
2. *кусково-монотонною,*

то її ряд Фур'є є збіжним в кожній точці x *цього відрізку, причому для суми*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

цього ряду виконується наступне:

1. $S(x) = f(x)$, *якщо* x *є точкою неперервності функції* $f(x)$;
2. $S(x) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, *якщо* x_0 *є точкою розриву функції* $f(x)$;
3. $S(-l) = S(l) = \dfrac{f(-l + 0) + f(l - 0)}{2}$.

Зауваження

- Клас кусково-неперервних та кусково-монотонних функцій є широким, але він не вичерпує всі функції, для яких ряд Фур'є збігається.
- Існують функції, які не задовольняють умовам Діріхле (наприклад, існують необмежені функції), які розвиваються у ряд Фур'є.
- Існують збіжні тригонометричні ряди, які не є рядами Фур'є.

Нехай потрібно розвинути у тригонометричний ряд неперіодичну функцію $f(x)$ визначену лише на відрізку $[-l; l]$.
Продовжимо функцію $f(x)$ періодично, з періодом $T = 2l$, на всю вісь Ox. Тоді дістаємо $2l$-періодичну функцію $F(x)$, що збігається з функцією $f(x)$ в інтервалі $[-l; l]$:

$$F(x) = f(x), \; x \in (-l; l).$$

При цьому функція $F(x)$ може бути невизначеною в точках $l + 2kl, \; k \in \mathbb{Z}$. Функцію $F(x)$ називають періодичним продовженням функції $f(x)$.
Якщо $f(x)$ задовольняє умовам Діріхлє, то, оскільки у формулах для коефіцієнтів Фур'є інтеграли обчислюють за відрізком $[-l; l]$, функцію $F(x)$ можна розвинути в тригонометричний ряд Фур'є, який на проміжку $[-l; l]$ буде співпадати з початковою функцією $f(x)$.

Ряд Фур'є для функції, що задана на довільному відрізку

Якщо функцію f задано на відрізку $[a;\, b]$, і на цьому відрізку вона справджує умови теореми Діріхле, то її можна періодично продовжити на всю числові вісь з періодом $T = 2l = b - a$ і тоді її можна розвинути в ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{b-a},$$

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2\pi n x}{b-a}dx, \;\; n \in \mathbb{N};$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2\pi n x}{b-a}dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Розвинення в ряд Фур'є парних функцій

Нагадаємо, що функцію $f(x)$, $x \in D$, називають парною, якщо:

1. область визначення функції D є симетричною відносно початку координат O: з того, що $x \in D$ випливає, що $-x \in D$;
2. для кожного $x \in D$ виконано рівність $f(-x) = f(x)$.

Нехай функція f, яка задовольняє умови Діріхле, є парною на відрізку $[-l; l]$. Тоді

$$f(-x)\cos\left(-\frac{\pi n x}{l}\right) = f(x)\cos\frac{\pi n x}{l},$$
$$f(-x)\sin\left(-\frac{\pi n x}{l}\right) = -f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}, \quad x \in [-l; l],$$

тобто $f(x)\cos\dfrac{\pi n x}{l}$ – парна функція, а $f(x)\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ – непарна функція.

Тому коефіцієнти Фур'є парної функції $f(x)$ обчислюють за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

Отже, ряд Фур'є парної функції має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}.$$

Розвинення в ряд Фур'є непарних функцій

Нагадаємо, що функцію $f(x)$, $x \in D$, називають парною, якщо:

1. область визначення функції D є симетричною відносно початку координат O: з того, що $x \in D$ випливає, що $-x \in D$;
2. для кожного $x \in D$ виконано рівність $f(-x) = -f(x)$.

Нехай функція $f(x)$, яка задовольняє умови Діріхле, є непарною на відрізку $[-l;\, l]$. Тоді

$$f(-x)\cos\left(-\frac{\pi n x}{l}\right) = -f(x)\cos\frac{\pi n x}{l},$$
$$f(-x)\sin\left(-\frac{\pi n x}{l}\right) = f(x)\sin\frac{\pi n x}{l},\ \ x \in [-l;\, l],$$

тобто $f(x)\cos\dfrac{\pi n x}{l}$ – непарна функція, а $f(x)\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ – парна функція.

Тому коефіцієнти Фур'є непарної функції f обчислюють за формулами:

$$a_n = 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, n \in \mathbb{N}.$$

Отже, ряд Фур'є непарної функції має вигляд

$$f(x) \ \sim \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Розвинення в ряд Фур'є функцій, графік яких симетричний відносно точки на осі ординат

Графік функції $f(x) = g(x) + c$, де функція $g(x)$ є непарною, симетричний відносно точки $A(0;\, c)$.

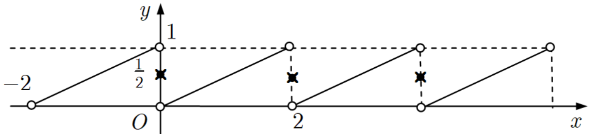

Рис.: Графік, симетричний відносно точки $A\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$

Коефіцієнти Фур'є для такої функції обчислюють за формулами:

$$a_0 = 2c, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (f(x) - c)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \;\; n = \mathbb{N}.$$

Ряд Фур'є для функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) \;\sim\; c + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

8. Розвинення функції в ряд за косинусами чи за синусами

Нехай функцію $f(x)$, яка задовольняє умови Діріхле, задано в інтервалі $(0;\, l)$. Значення цієї функції на відрізок $(-l; 0)$ можна довизначити різним чином. Зокрема,

1. можна функцію не довизначати, а розглядати її розвинення в ряд Фур'є на проміжку $(0;\, l)$. Тоді її періодичне продовження буде мати період $T = l$, а для знаходження коефіцієнтів слід використовувати формули пункту 6.
2. можна довизначити функцію f на $(-l; 0)$ парним чином, тобто

$$f(x) = f(-x), \;\; x \in (-l; 0).$$

   Тоді її періодичне продовження буде мати період $T = 2l$, а її ряд Фур'є міститиме лише косинуси.
3. можна довизначити функцію f на $(-l; 0)$ непарним чином, тобто

$$f(x) = -f(-x), \;\; x \in (-l; 0).$$

   Тоді її періодичне продовження буде мати період $T = 2l$, а її ряд Фур'є міститиме лише синуси.

9. Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай функція f задовольняє умовам Діріхле на відрізку $[-l;\, l]$. Тоді на відрізку $[-l;\, l]$ її можна зобразити рядом Фур'є вигляду

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Використовуючи формули Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ та рівність $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, яка з неї випливає, можна показати, що

$$\cos\frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi n x}{l}} + e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right), \quad \sin\frac{\pi n x}{l} = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{i\pi n x}{l}} - e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{\frac{i\pi n x}{l}} - e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right),$$

маємо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{\frac{i\pi n x}{l}} + e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right) - \frac{ib_n}{2}\left(e^{\frac{i\pi n x}{l}} - e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{i\pi n x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\right).$$

Або, ввівши позначення

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

отримаємо ряд вигляду

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nx}{l}} + c_{-n} e^{-\frac{i\pi nx}{l}}. \tag{9}$$

Знайдемо вирази для коефіцієнтів отриманого ряду, використовуючи вирази для a_0, a_n та b_n (формули (8)) та формулу Ейлера:

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2l}\left(\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx - i\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\right) = \\ = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{\pi nx}{l} - i\sin\frac{\pi nx}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{i\pi nx}{l}}dx, \ n \in \mathbb{N}; \end{aligned} \tag{10}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x)dx; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{2l} \left(\int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx + i \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \left(\cos \frac{\pi n x}{l} + i \sin \frac{\pi n x}{l} \right) dx = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{\frac{i\pi n x}{l}} dx, \;\; n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким чином, формулу (9), можна записати у вигляді

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}}, \tag{13}$$

коефіцієнти якого, згідно з (10)–(12), можна записати у вигляді

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{l}} dx, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Формула (13) називають комплексною формою ряду Фур'є, а коефіцієнти c_n, які знаходяться за формулою (14), – комплексними коефіцієнтами ряду Фур'є.

10. Амплітудний та фазовий спектри ряду Фур'є

ДЗ. Самостійно записати

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.