4 РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

4.1 Розв'язання нелінійних рівнянь

4.1.1 Постановка задачі розв'язання нелінійних рівнянь

Задача розв'язання нелінійного алгебраїчного рівняння найчастіше зустрічається при вивченні загальнотехнічних і спеціальних дисциплін, в інженерній практиці. Знайти точне значення кореня рівняння можливо лише в деяких рідких окремих випадках, та навіть у цих випадках формули знаходження коренів настільки громіздкі, що ними важко користуватися. Крім того, часто константи, що входять у рівняння, мають наближені значення. Тому при розв'язанні рівнянь широко використовують методи, що дозволяють одержати наближений розв'язок з будь-якою заданою точністю.

Нехай задано рівняння

$$f(x)=0,$$

де функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку й має неперервні першу $f'(x)$ й другу $f''(x)$ похідні на цьому відрізку. Корені заданого рівняння є нулями функції $y=f(x)$ і геометрично представляють собою точки перетину її графіка з віссю Ox.

Розглянемо задачу знаходження наближених значень дійсного кореня заданого рівняння з будь-якою заданою точністю. Процес розв'язання задачі складається із двох етапів.

1. *Відокремлення кореня,* тобто знаходження відрізка $[a,b]$, що належить області визначення функції $y=f(x)$, на якому знаходиться один і тільки один корінь рівняння $f(x)=0$.
2. *Уточнення значення кореня* із заданою точністю.

4.1.2 Відокремлення коренів рівняння

4.1.2.1 Умови відокремлення коренів нелінійного рівняння

Перша умова заснована на поведінці функції в околі кореня та пов'язана з тим, що на кінцях відрізка $[a,b]$ функція має значення різних знаків, тобто

$$f(a)\cdot f(b)<0.$$

Відомо, що в цьому випадку в середині відрізка $[a,b]$ є, принаймні, один корінь рівняння $f(x)=0$. Геометрично це означає, що графік функції

$y = f\ (x)$ в точках a і b перебуває по різні сторони від осі Ox і, отже, в середині відрізка $[a;b]$ обов'язково повинен перетинати вісь Ox. Однак ця умова не гарантує існування єдиного кореня на цьому відрізку.

Так, наприклад, на рисунку 1 графік функції проходить таким чином, що $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) < 0$, тобто $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, а в середині відрізка $[\alpha, \beta]$ знаходяться два різні корені.

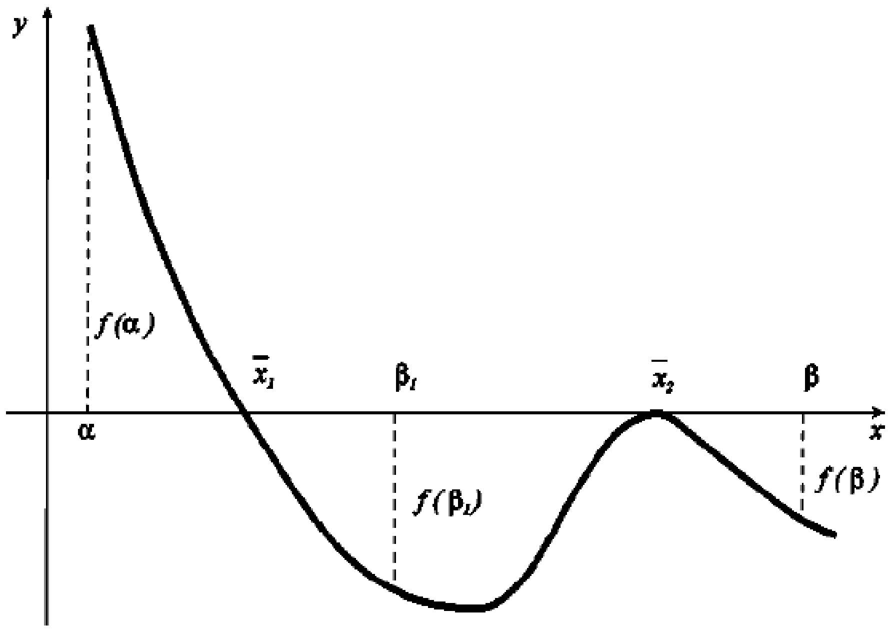

Рисунок 1 – Розміщення коренів рівняння $f(x) = 0$

Зауважимо, якщо на кінцях відрізка значення функції мають однаковий знак, то це зовсім не означає, що корінь відсутній. Наприклад, відрізок $[\beta_1; \beta]$ містить корінь, але $f(\beta_1) < 0$ і $f(\beta) < 0$, тому $f(\beta_1) \cdot f(\beta) > 0$. Точка $\bar{x}_2$ в цьому випадку є кратним коренем рівняння $f(x) = 0$. Надалі такий корінь розглядати не будемо.

Друга умова. Для існування єдиного кореня на відрізку $[a, b]$ повинна виконуватися ще одна умова. На відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ повинна бути монотонною, тобто її похідна $f'(x)$ не повинна змінювати знак на $[a; b]$.

Обидві умови є достатніми для існування єдиного кореня рівняння $f(x) = 0$. З рисунка 1 бачимо, що обом умовам задовольняє відрізок $[\alpha; \beta_1]$, а на відрізку $[\alpha; \beta]$ функція не є монотонною.

Задача відокремлення кореня рівняння $f(x)=0$ полягає в знаходженні відрізка $[a;b]$ з області визначення функції $y=f(x)$, на якому виконано наступні три умови:

1) $f(a)\cdot f(b)<0$;

2) $f'(x)$ не змінює знак для $x\in[a;b]$;

3) $f''(x)$ не змінює знак для $x\in[a;b]$.

Третя умова означає, що графік функції або тільки опуклий, або тільки увігнутий на відрізку $[a;b]$.

Відрізок $[a;\ b]$ при виконанні умов 1)–3) для функції $y=f(x)$ називають *відрізком, що відокремлює корінь даного рівняння*.

Розглянемо всі можливі варіанти (рис. 2) зображення графіка функції на відрізку $[a;b]$, якщо виконуються умови 1)–3).

При цьому для $x\in[a,b]$:

$f'(x)>0$ на рисунках *а*) і *г)*;

$f'(x)<0$ на рисунках *б)* і *в)*;

$f''(x)>0$ на рисунках *а*) і *б);*

$f''(x)<0$ на рисунках *в)* і *г)*.

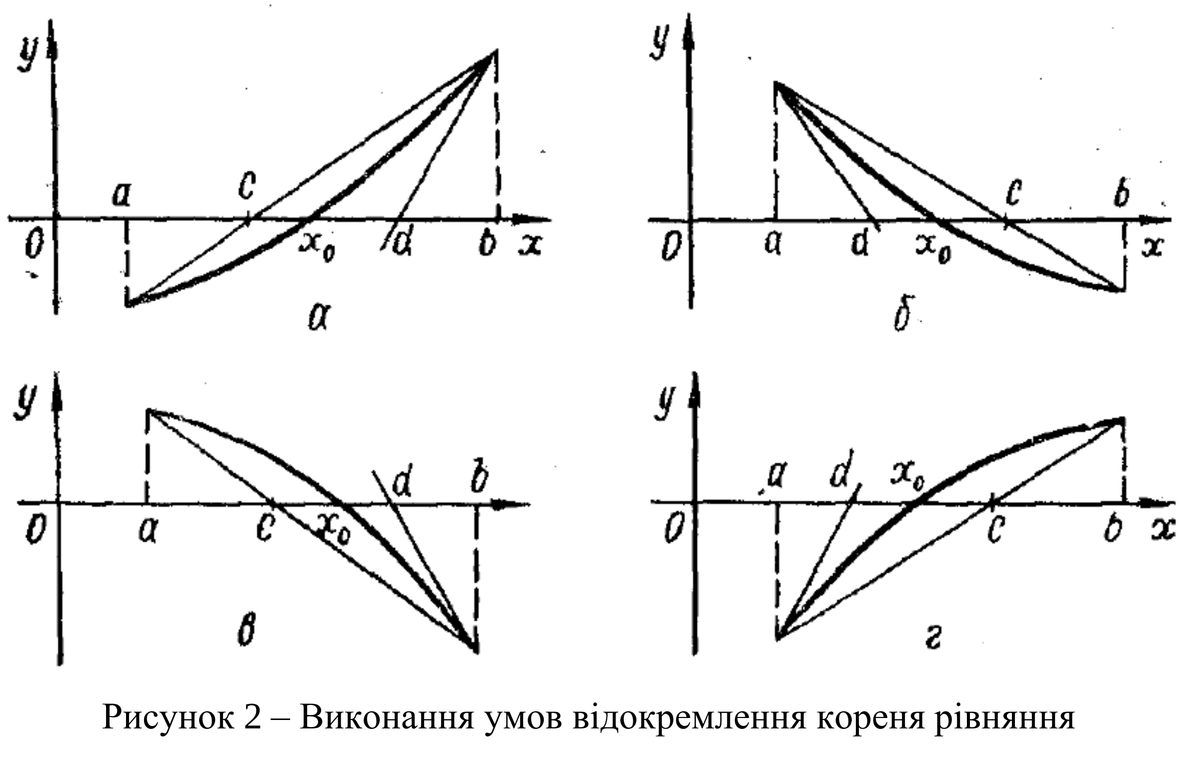

Рисунок 2 – Виконання умов відокремлення кореня рівняння

Відокремлення кореня можна робити як аналітично, так і графічно.

4.1.2.2 Графічний метод відокремлення коренів нелінійного рівняння

Графічно корені рівняння $f(x)=0$ можна відокремити, побудувавши графік функції $y = f(x)$ і приблизно визначивши точки його перетину з віссю Ox. Однак задача побудови графіка не завжди проста. Звичайне рівняння

$$f(x)=0$$

заміняють еквівалентним рівнянням

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=0,$$

де $f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, або $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$,

добираючи функції $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$ так, щоб будувати їх графіки було простіше, ніж графік функції $y = f(x)$. Абсциси точок перетину графіків $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$ є коренями заданого рівняння (рис. 3).

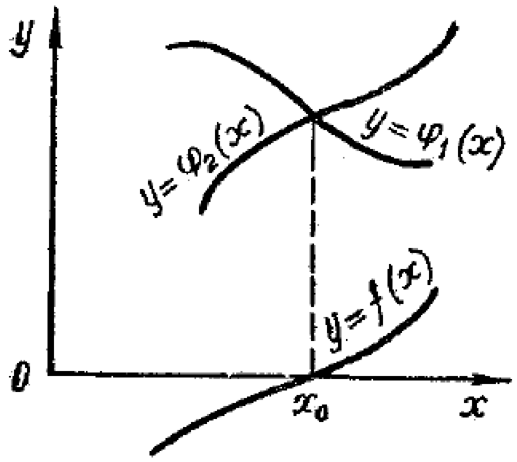

Рисунок 3 – Графічне відокремлення кореня

Приклад 1. Відокремити графічним методом корені рівняння

$$e^{-x}-2+x^2=0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$e^{-x}=2-x^2$$

і розглянемо дві функції $y=e^{-x}$ й $y=2-x^2$. Побудуємо графіки цих функцій і визначимо абсциси точок їх перетину (рис. 4).

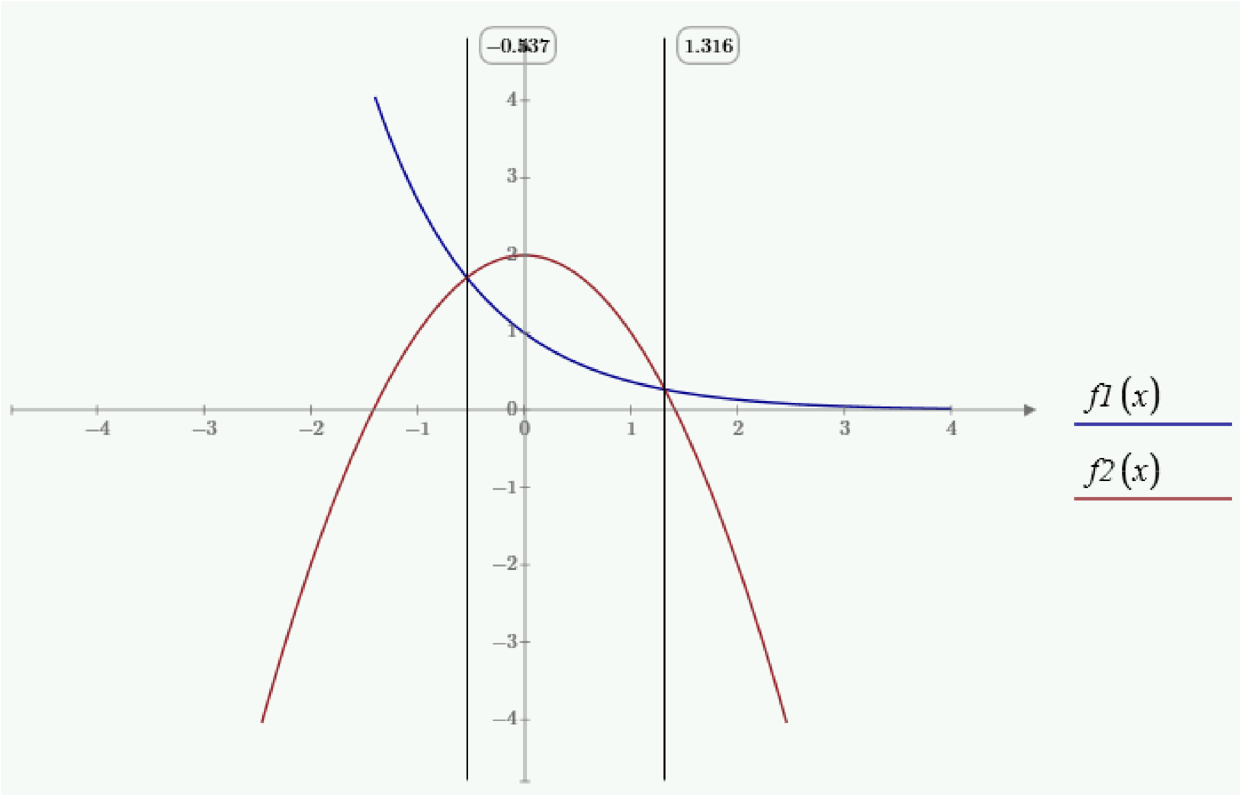

Рисунок 4 – Графічне відокремлення кореня рівняння $e^{-x} - 2 + x^2 = 0$

Як бачимо з рисунку 4, задане рівняння має два дійсних кореня (графіки перетинаються у двох точках), причому один з коренів від'ємний, а другий – додатний, а саме $-1 < x_1 < 0$ і $1 < x_2 < 2$.

4.1.2.3 Відокремлення коренів рівняння методом проб

Цей метод полягає в тому, що навмання обирають точку $x = a$ з області визначення функції (або з більш вузької області), знаходять знак $f(a)$, а потім добирають точку $x = b$ так, щоб значення функції $f(b)$ мало знак, протилежний знаку $f(a)$.

Далі визначають знак $f'(x)$ на відрізку $[a; b]$. Якщо $f'(x)$ не змінює знак на $[a;\ b]$, то корінь відокремлений, а якщо ні, то відрізок $[a;\ b]$ звужують, обравши точку $c = \dfrac{a+b}{2}$, що лежить посередині відрізка $[a; b]$. Визначають знак $f(c)$ і в якості нового відрізка розглядають або $[a, c]$ (якщо $f(a) \cdot f(c) < 0$), або $[c; b]$ (якщо $f(c) \cdot f(b) < 0$).

Позначивши новий відрізок через $[a_1; b_1]$, повторюють ті ж дії, що й на відрізку $[a; b]$, доки не буде знайдений відрізок $[a_n; b_n]$, що відокремлює корінь заданого рівняння.

Приклад 2. Методом проб відокремити додатний корінь рівняння

$$x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$ визначена на всій числовій прямій. Оскільки потрібно відокремити додатний корінь рівняння, розглянемо напівінтервал $[0; +\infty)$.

Знаходимо $f(0) = -20 < 0$. Потім обираємо будь-яку точку, наприклад $x = 1$, і обчислюємо $f(1) = -54 < 0$. Оскільки $f(0) \cdot f(1) > 0$, то нічого про відрізок $[0; 1]$ сказати не можна. Треба підібрати точку $x = b$ так, щоб було $f(b) > 0$, а для цього $x^4 + x^3$ повинне бути більше, ніж $36x + 20$. Оберемо, наприклад, $x = 4$, тоді $f(4) = 156 > 0$, а отже, на відрізку $[1; 4]$ є корінь, $f(1) \cdot f(4) < 0$.

Оскільки $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36 = 4(x^3 - 9) + 3x^2$, то перевіркою переконуємося, що на відрізку $[1; 4]$ похідна $f'(x)$ змінює знак, тому що

$$f'(1) = -29 < 0 \quad \text{і} \quad f'(4) = 268 > 0.$$

Звужуємо відрізок $[1; 4]$. Оберемо, наприклад, точку $x = 3$. Тоді

$$f(3) = -20 < 0 \quad \text{і} \quad f(3) \cdot f(4) < 0.$$

Отже, на відрізку $[3; 4]$ є корінь. Перевіряємо знак $f'(x)$. Маємо $f'(3) = 99 > 0$, а для $x > 3$ похідна зростає, тому залишається додатною. На відрізку $[3; 4]$ знаходиться додатний дійсний корінь рівняння. Зауважимо, що $f''(x) = 12x^2 + 6x > 0$ для всіх $x \in [3; 4]$.

Функція $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$ на проміжку $x \in [3; 4]$ задовольняє всім умовам відокремлення кореня.

Побудувавши графік функції $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$ можемо впевнитись, що дійсно на відрізку $[3; 4]$ знаходиться додатний дійсний корінь (рисунок 5).

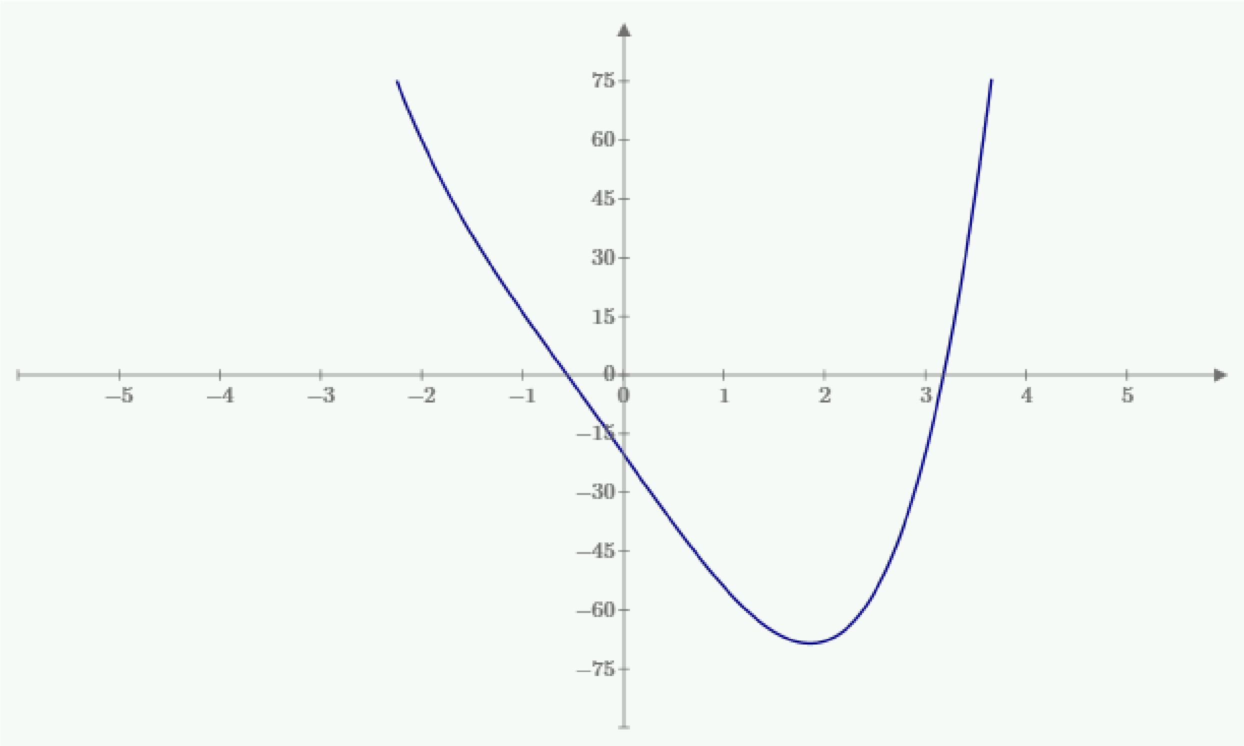

Рисунок 5 – Графічне відокремлення кореня рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$

4.1.2.4 Відокремлення коренів алгебраїчного рівняння аналітичним методом

Для того щоб знайти корені рівняння з достатньою точністю, варто знати, як ці корені розташовані на комплексній площині або на дійсній осі.

Задача для многочленів з комплексними коефіцієнтами досить складна і стосується теорії функції комплексної змінної. В межах нашого курсу вивчаємо цю проблему лише для многочленів з дійсними коефіцієнтами і для їх дійсних коренів.

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

для якого потрібно знайти його дійсні корені x^*. В рівнянні (1) $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n, \ldots, a_0$ — дійсні числа та $a_n > 0$.

Для відокремлення дійсних коренів корисно визначати заздалегідь число коренів, а також верхню і нижню межі їх розташування. Для цього використовують ряд теорем.

Теорема 1 (про число коренів алгебраїчного рівняння (1))

Алгебраїчне рівняння (1) n-го степеню має рівно n коренів, дійсних або комплексних, за умови, що кожен корінь рахується стільки разів, яка його кратність.

Теорема 2 (про властивість парної спряженості комплексних коренів рівняння (1))

Якщо $x_i^* = \alpha + \beta i$ — корінь алгебраїчного рівняння (1) кратності k, то число $\overline{x}_i^* = \alpha - \beta i$ також є коренем тієї ж кратності.

Наслідок. Алгебраїчне рівняння непарного степеню має хоча б один дійсний корінь.

Теорема 3 (про оцінку модулів коренів рівняння (1))

Нехай $A = \max\{|a_{n-1}|, ..., |a_0|\}$, $B = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, ..., |a_1|\}$, де a_k, $k = \overline{0,n}$ — коефіцієнти рівняння $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$.

Тоді модулі всіх коренів x_i^* $\left(i = 1, 2, ..., \mathrm{n}\right)$ рівняння задовольняють нерівність

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} < \left|x_i^*\right| \le 1 + \frac{A}{|a_n|}, \quad i = 1, 2, ..., \mathrm{n}, \tag{2}$$

тобто корені рівняння розташовані в кільці.

Наслідок. Числа $r = \dfrac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}}$ та $R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$ є відповідно нижньою і верхньою межами додатних коренів алгебраїчного рівняння $r < x_i^{*+} < R$. Аналогічно числа $-R$ та $-r$ є нижньою і верхньою межами від'ємних коренів рівняння $-R < x_i^{*-} < -r$.

Наведемо корисні теореми, які використовуються для більш точного встановлення меж дійсних коренів алгебраїчних рівнянь.

Теорема 4 (теорема Лагранжа про верхню межу додатних коренів рівняння (1))

Нехай $a_n > 0$ та a_i — перший від'ємний коефіцієнт в послідовності $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$; C — найбільше з абсолютних значень від'ємних коефіцієнтів. Тоді за верхню межу додатних коренів рівняння (1) може бути прийняте число

$$R = 1 + \sqrt[n-i]{\frac{C}{a_n}}. \tag{3}$$

Теорема 5 (про нижню і верхню межі додатних та від'ємних коренів алгебраїчного рівняння)

Нехай R — верхня межа додатних коренів рівняння $P_n(x) = 0$,

R_1 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^1(x) = x^n P_n(\frac{1}{x}) = 0$,

R_2 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^2(x) = P_n(-\text{x}) = 0$,

R_3 — верхня межа додатних коренів рівняння $P^3(x) = x^n P_n(-\frac{1}{x}) = 0$.

Тоді додатні корені x_i^{*+} та від'ємні корені x_i^{*-} рівняння (1) задовольняють нерівності

$$\frac{1}{R_1} \le x_i^{*+} \le R; \qquad -R_2 \le x_i^{*-} \le -\frac{1}{R_3}. \tag{4}$$

Теорема 6 (теорема Декарта про кількість дійсних коренів алгебраїчних рівнянь)

Число S_1 додатних коренів (з урахуванням їх кратності) алгебраїчного рівняння $P_n(x) = 0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності коефіцієнтів $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ (коефіцієнти, рівні нулю, не враховують) многочлена $P_n(x)$ або менше цього числа на парне число. Число S_2 від'ємних коренів (з урахуванням їх кратності) алгебраїчного рівняння $P_n(x) = 0$ дорівнює числу змін знаків у послідовності $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ многочлена $P_n(-\text{x})$ або менше цього числа на парне число.

Теорема 7 (теорема Гюа про необхідну умову дійсності всіх коренів алгебраїчного рівняння)

Якщо алгебраїчне рівняння (1) має дійсні коефіцієнти та всі його корені є дійсними, то квадрат кожного некрайнього коефіцієнта більше добутку двох його сусідніх коефіцієнтів, тобто виконуються нерівності

$$a_k^2 > a_{k-1} \cdot a_{k+1} \quad \left(k = 1, 2, ..., n-1\right).$$

Зауваження. Теорема Гюа є лише <u>необхідною</u> умовою дійсності всіх коренів алгебраїчного рівняння. Наприклад, поліном $P\left(x\right) = x^2 - 4x + 5$, де $4^2 > 1 \cdot 5$ має два комплексно-спряжених кореня $x_{1,2} = 2 \pm i$.

Наслідок (про наявність комплексних коренів). Якщо при якому-небудь k виконано нерівність

$$a_k^2 \le a_{k-1} \cdot a_{k+1},$$

то рівняння (1) має принаймні одну пару комплексних коренів.

Приклад. Визначити склад коренів рівняння

$$x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 104x - 20 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\left(-12\right)^2 < 8\cdot 104,$$

то дане рівняння має принаймні одну пару комплексних коренів та, відповідно, кількість дійсних коренів цього рівняння не більше двох.

Для відокремлення коренів застосовують наступну теорему.

Теорема 8. Якщо функція $f(x)$, яка визначає рівняння $f(x)=0$, на кінцях відрізку $\left[a_i, b_i\right]$ приймає значення різних знаків, тобто $f\left(a_i\right)\cdot f\left(b_i\right)<0,$ то на цьому відрізку міститься принаймні один корінь рівняння. Якщо ж $f(x)$ неперервна і диференційовна та її перша похідна зберігає знак всередині відрізка $\left[a_i, b_i\right]$ $\left(\underset{[a_i,\, b_i]}{\operatorname{sign}} f'\left(x\right)=\mathrm{const}\right)$, то на $\left[a_i, b_i\right]$ знаходиться тільки один корінь x_i^* рівняння.

Приклад 3. Визначити число додатних та від'ємних коренів, а також їх межі для рівняння

$$P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3 = 0.$$

Розв'язання. В даній задачі

$$n = 5,\ a_5 = 1,\ a_4 = 2,\ a_3 = -5,\ a_2 = 8,\ a_1 = -7,\ a_0 = -3.$$

Згідно з теоремою 1 рівняння має п'ять коренів. Оскільки $n=5$, то по наслідку з теореми 2 рівняння має принаймні один дійсний корінь.

Оцінимо модулі коренів за теоремою 3. Оскільки A = max{|2|, |-5|, |8|, |-7|, |-3|} = 8, B = max{|1|, |2|, |-5|, |8|, |-7|} = 8, то

$$\frac{1}{1+\dfrac{8}{|-3|}} < \left|x_i^*\right| < 1+\frac{8}{|1|} \quad \text{або} \quad \frac{3}{11} < \left|x_i^*\right| < 9,$$

тобто всі корені лежать всередині цього кільця. За наслідком з теореми 3 це означає, що додатні корені задовольняють нерівності $\dfrac{3}{11} < x_i^{*+} < 9$,

а від'ємні — нерівності $-9 < x_i^{*-} < -\dfrac{3}{11}$.

Застосуємо теореми 4 та 5 для уточнення наведених результатів. Знайдемо верхню межу додатних коренів. Оскільки $a_3=-5$ — перший від'ємний коефіцієнт послідовності 1, 2, -5, 8, -7, -3, то i = 3, а C = max{|-5|, |-7|, |-3|} =7 — найбільша з абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів. Отже,

$$R = 1 + \sqrt[(5-3)]{\frac{7}{1}} = 1 + \sqrt{7} \cong 3{,}646.$$

Знайдемо нижню межу додатних коренів. Складемо рівняння:

$$P^1(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^5 P_5\left(\frac{1}{x}\right) = x^5\left(\frac{1}{x^5} + 2\frac{1}{x^4} - 5\frac{1}{x^3} + 8\frac{1}{x^2} - 7\frac{1}{x} - 3\right) =$$
$$= -3x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$$

або

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$$

(старший коефіцієнт повинен бути додатнім). Для цього рівняння i =3, C = max{|-8|, |-2|, |-1|} = 8, тому

$$R_1 = 1 + \sqrt[(5-3)]{\frac{8}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \cong 2{,}632.$$

Звідси

$$\frac{1}{R_1} = 0{,}38 \le x_{*_i}^{+} \le R = 3{,}646.$$

Уточнимо межі від'ємних коренів. Складемо рівняння:

$$P^2(x) = P_5(-x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x - 3 = 0$$

або

$$x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Для цього рівняння i = 4, C = max{|-2|, |-5|, |-6|, |-7|} = 8, тому

$$R_2 = 1 + \sqrt[(5-4)]{\frac{8}{1}} = 9.$$

Складемо рівняння

$$P^3(x) = x^n P_n\left(-\frac{1}{x}\right) = x^5 P_5\left(-\frac{1}{x}\right) = x^5\left(-\frac{1}{x^5} + 2\frac{1}{x^4} + 5\frac{1}{x^3} + 8\frac{1}{x^2} + 7\frac{1}{x} - 3\right) =$$
$$= -3x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x - 1 = 0$$

або

$$3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Для цього рівняння i = 4, C = max{|-7|, |-8|, |-5|, |-2|} = 8, тому

$$R_3 = 1 + \sqrt[(5-4)]{\frac{8}{3}} = 1 + \frac{8}{3} \cong 3{,}666.$$

Звідси знаходимо:

$$-R_2 = -9 \le x_{*_i}^{-} \le -\frac{1}{R_3} = -0{,}272.$$

Зауважимо, що цей результат співпадає з отриманим раніше.

Дослідимо структуру коренів рівняння. Оскільки квадрат кожного некрайнього коефіцієнта більше добутку двох його сусідніх коефіцієнтів, то за теоремою 7 необхідна умова дійсності всіх коренів рівняння виконується.

За теоремою 6 визначимо число додатних і від'ємних коренів. Виписуємо коефіцієнти многочлена $P_n(x) = P_5(x)$: 1, 2, -5, 8, -7, -3. Оскільки число змін знака $S_1 = 3$, то число додатних коренів дорівнює трьом або менше на парне число, тобто дорівнює 1. Далі виписуємо коефіцієнти многочлена $P_5(-x)$: -1, 2, 5, 8, 7, -3. Оскільки число змін знаків $S_2 = 2$, то число від'ємних коренів дорівнює двом або менше на парне число, тобто їх взагалі немає.

Теорема Штурма

Знання кількості та розташування дійсних коренів многочлена є важливою передумовою застосування багатьох методів чисельного розв'язання рівнянь (методи спроб, хорд (або січних), дотичних і т. д.).

В окремих випадках деякі відомості про кількість дійсних коренів можна отримати за допомогою досить поверхневого аналізу. Але для повної відповіді на питання про кількість дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами (або про кількість коренів на деякому відрізку $\left[a;b\right]$) потрібне більш глибоке дослідження, яке ми проведемо в цій темі.

Існує багато методів для знаходження точної кількості коренів на відрізку $\left[a;b\right]$, проте всі вони досить громіздкі і складні. Найзручніший – метод Штурма.

Перш ніж формулювати твердження, зробимо деякі зауваження.

1. Будемо розглядати кількість змін знаків (кількість знакозмін) в заданій впорядкованій скінченній послідовності дійсних чисел

$$C_1, C_2, ..., C_m, ...$$

розуміючи під цим кількість пар сусідніх чисел цієї послідовності, які мають протилежні знаки.

Наприклад: $-1,-2,5,12,-4,3,2 \to 3$ знакозміни.

$-5;-4;-2;-6;-0.5 \to 0$ знакозмін.

Зауваження 1. Якщо хоч одне (чи кілька) з чисел $C_1, C_2, ..., C_m, ...$ рівні нулю, то при підрахунку кількості знакозмін їх до уваги не беруть.

2. Будемо вважати, що многочлен $f\left(x\right)$ не має кратних коренів.

Зауваження 2. Якщо $f\left(x\right)$ має кратні корені, то всі обчислення можна проводити для многочленів

$$\tilde{f}\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)}{НСД\left(f\left(x\right), f'\left(x\right)\right)},$$

корені якого - ті ж, що й у $f(x)$, але вже всі прості.

3. *Зауваження 3.* Коли наперед відомо, що всі корені заданого многочлена $f(x)$ дійсні, то теорема Декарта дає точну відповідь про кількість дійсних коренів.

На жаль, у більшості випадків наперед не відомо, чи всі корені многочлена $f(x)$ дійсні. У зв’язку з цим теорема Декарта, хоч і зручна з точки зору простоти застосування, але не дає повної відповіді на питання про кількість дійсних коренів рівняння з дійсними коефіцієнтами та їх розподіл між додатною та від’ємною півосями.

Відокремлення коренів методом Штурма

Постановка задачі. З’ясувати, скільки дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами знаходиться в довільному наперед заданому інтервалі $(a;b)$, $a,b \in R$, $a<b$.

Багато зусиль доклали математики 17-19 ст., щоб розв’язати питання про розміщення (дійсних) коренів многочлена. Лише у 1829 р. французький математик Ж.Ш. Штурм (1803-1855) до кінця розв’язав проблему відокремлення коренів, довівши свою відому теорему. Результат Штурма, опублікований у 1835 р., одразу отримав загальне визнання та схвалення.

Нехай задано многочлен $f(x)$, який не має кратних коренів.

Побудуємо для $f(x)$ деяку послідовність многочленів, які пов’язані з множником $f(x)$ — так звану ***систему многочленів Штурма*** або ***ряд Штурма***, який відіграє основну роль в методі Штурма.

Правило побудови системи многочленів Штурма:

1) $f_0(x)=f(x)$
2) $f_1(x)=f'(x)$
3) Якщо відомі $f_{k-1}(x)$ та $f_k(x)$, то $f_{k+1}(x)$ буде дорівнювати залишку від ділення $f_{k-1}(x)$ на $f_k(x)$, взятому з протилежним знаком.

Означення 1. Послідовність многочленів

$$f(x),\ f'(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_{m-1}(x),\ f_m \tag{5}$$

називають ***системою многочленів Штурма*** (або ***рядом Штурма***).

Зауваження 4. Оскільки в методі Штурма важливим є не самі функції ряду Штурма чи їх значення, а лише знаки числових значень цих функцій, то функції ряду (5) можна будувати з точністю до сталого додатного множника, тобто виконуючи ділення з остачею, залишок можна домножувати на сталі додатні множники.

Означення 2. Покладемо в ряді функцій $x=a$, де $a\in R$ — деяке число. Тоді скінченна послідовність многочленів (5) перетворюється на послідовність чисел

$$f(a),\ f'(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ldots,\ f_{m-1}(a),\ f_m$$

Кількість знакозмін у цій послідовності чисел називають ***кількістю знакозмін у ряді Штурма*** (5) в точці a і позначають $w(a)$.

Розглянемо основні властивості системи многочленів Штурма (5).

Лема 1. Жодні два сусідні многочлени ряду Штурма (5) не мають спільних коренів.

Лема 2. Якщо α є коренем однієї з проміжних функцій ряду Штурма (5), то значення сусідніх з нею функцій ряду Штурма мають у цій точці протилежні знаки.

Зауваження 5. Оскільки кожна функція в ряді Штурма (5) — це многочлен, а тому неперервна на всій дійсній осі, отже вона може змінити знак лише при проходженні аргумента x через її корінь. Таким чином, якщо x, зростаючи, не проходить через корінь жодної з функцій ряду Штурма (5), то знаки всіх многочленів цього ряду, а тому й кількість знакозмін у ньому залишається незмінними.

Розглянемо тепер як впливатиме на кількість знакозмін в ряді Штурма проходження через корінь однієї з функцій цього ряду.

Лема 3. Якщо x, зростаючи, проходить через корінь будь-якої проміжної функції ряду Штурма, але не проходить через корінь многочлена $f(x)$, то число знакозмін у ряді Штурма при цьому не змінюється.

Лема 4. Якщо x, зростаючи, проходить через корінь многочлена $f(x)$, то кількість знакозмін в ряді Штурма зменшується на одиницю.

Леми 3 і 4 показують, що на кількість знакозмін у ряді Штурма впливає лише проходження x через корені многочлена $f(x)$. Отже, зміна цього числа на певному проміжку може характеризувати кількість дійсних коренів многочлена $f(x)$ на цьому проміжку.

Теорема 9 (теорема Штурма). Якщо a *і* b $(a<b)$ — довільні дійсні числа, які не є коренями многочлена $f(x)$, то кількість ρ дійсних коренів многочлена $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ дорівнює

$$\rho=w(a)-w(b), \tag{6}$$

де $w(a)\ i\ w(b)$ — кількість знакозмін у ряді Штурма в точках $a\ i\ b$ відповідно.

Зауваження 6. В теоремі 9 зазначено, що a і b не є коренями многочлена $f(x)$. Якщо ж a (або b) є коренем $f(x)$, то питання про розміщення цього кореня розв'язалося автоматично, а для визначення положення інших коренів слід змінити межі вибраного інтервалу, або розглядати многочлен, який отримаємо діленням $f(x)$ на $(x-a)$.

Приклад 4. Відокремити корені многочлена $f(x)=x^4-5x^2-2x+2$ методом Штурма.

Розв'язання. Побудуємо ряд Штурма:

1) $f_0(x)=f(x)=x^4-5x^2-2x+2$

2) $f_1(x)=f'(x)=\left(x^4-5x^2-2x+2\right)'=4x^3-10x-2$

3)

$x^4 - 5x^2 - 2x + 2$	$4x^3 - 10x - 2$
$x^4 - {}^5/_2x^2 - {}^1/_2x$	${}^1/_4x$
$- {}^5/_2x^2 - {}^3/_2x + 2$	

Домножаємо залишок на 2 і беремо його з протилежним знаком, отримаємо $f_2(x)=5x^2+3x-4$

4)

$4x^3 - 10x - 2$	$5x^2 + 3x - 4$
$4x^3 + {}^{12}/_5x^2 - {}^{16}/_5x$	${}^4/_5x - {}^{12}/_{25}$
$- {}^{12}/_5x^2 - {}^{34}/_5x - 2$	
$- {}^{12}/_5x^2 - {}^{36}/_{25}x + {}^{48}/_{25}$	
$- {}^{134}/_{25}x - {}^{98}/_{25}$	

Домножаємо залишок на 25 і беремо його з протилежним знаком, отримаємо $f_3(x)=134x+98$

5)

$5x^2 + 3x - 4$	$134x + 98$
$5x^2 + {}^{245}/_{67}x$	${}^{5}/_{134}x - {}^{22}/_{4489}$
$-{}^{44}/_{67}x - 4$	
$-{}^{44}/_{67}x - {}^{2156}/_{4489}$	
$-{}^{15800}/_{4489}$	

Домножаємо залишок на обернену величину та поміняємо знак, отримаємо $f_4(x)=1$

Отримали наступну систему многочленів Штурма:

$$f_0(x)=f(x)=x^4-5x^2-2x+2$$

$$f_1(x)=4x^3-10x-2$$

$$f_2(x)=5x^2+3x-4$$

$$f_3(x)=134x+98$$

$$f_4(x)=1$$

Визначимо знаки цих многочленів при $x=-\infty$ та при $x=\infty$. При цьому достатньо подивитись тільки на коефіцієнти при найстарших степенях і чи є ці степені парними чи непарними. Наприклад:

$$f(x)=x^4-5x^2-2x+2 \Rightarrow (-\infty)^4=+\infty$$

$$f_1(x)=4x^3-10x-2 \quad \Rightarrow \quad 4(-\infty)^3=-\infty$$

і т.д. Занесемо результати в таблицю

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаків
$-\infty$	+	-	+	-	+	4
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

Висновок: многочлен має рівно $4-0=4$ дійсних корені.

Локалізуємо корені. Для цього продовжимо таблицю, обираючи довільним чином точки для перевірки знаків многочленів системи. Першу точку необхідно взяти такою, щоб набір плюсів та мінусів був однаковим з $+\infty$. Наступні точки доцільно обирати такими, щоб кількість змін знаків змінювалась, причому таких змін має бути рівно стільки, скільки коренів має многочлен.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаків
$x=-2$	+	-	+	-	+	4
$x=-1$	0	+	-	-	+	2

Зауваження. В даному випадку пощастило, оскільки при $x=-1$ отримуємо $f(-1)=0$, тобто $x=-1$ є коренем многочлена. Корінь не лише локалізовано, а і визначено його точне значення. Зауважимо, що кількість змін знаків зменшується на 2, тобто на цьому інтервалі є один корінь, він дає одну зміну, та корінь в цій точці дає ще одну зміну. Продовжимо локалізувати корені.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	Кількість змін знаків
$x=0$	+	-	-	-	+	2
$x=1$	-	-	+	+	+	1
$x=2$	-	+	+	+	+	1
$x=3$	+	+	+	+	+	0

Висновок. Корені відокремлено: $-2<x_1<-1$, $x_2=-1$, $0<x_3<1$, $2<x_4<3$.

Можна побудувати графік даної функції $f(x)=x^4-5x^2-2x+2$ та впевнитись, що отримані результати є вірними (рис.8).

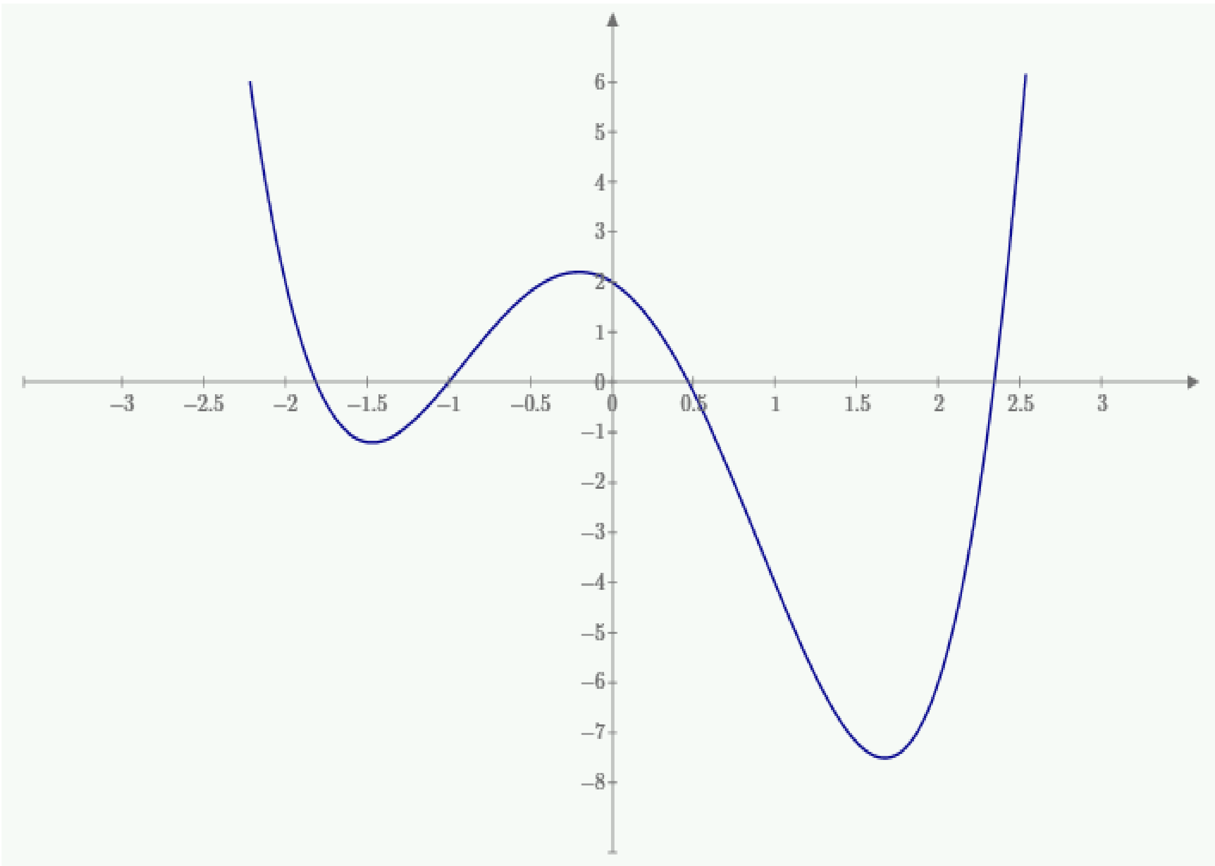

Рисунок 8 – Графік функції $f(x)=x^4-5x^2-2x+2$

4.1.3 Методи послідовного наближення до кореня рівняння

Існують різні методи послідовних наближень при знаходженні дійсного кореня рівняння на проміжку, на якому виконані умови відокремлення кореня.

4.1.3.1 Метод бісекції (або поділу відрізка навпіл, або діхотомії)

Метод поділу відрізка навпіл є досить простим методом, оскільки не вимагає виконання обмежуючих умов для першої і другої похідних, але його реалізація пов'язана із тривалими обчисленнями (більшим числом ітерацій).

Нехай відомо, що на відрізку $\left[a;b\right]$ знаходиться один дійсний корінь рівняння $f\left(x\right)=0$, тому $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$. Треба визначити цей корінь із заданою точністю ε.

Суть методу полягає в тому, що відрізок $\left[a;b\right]$ ділимо навпіл точкою $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ (перше наближення) і розглядаємо той з відрізків $\left[a;x_1\right]$ або $\left[x_1;b\right]$, який містить потрібний корінь. Для цього перевіряємо умову $f\left(a\right)\cdot f\left(x_1\right)<0$, якщо умова виконується, то обираємо відрізок $\left[a;x_1\right]$, якщо ні – $\left[x_1;b\right]$.

Позначивши цей відрізок через $\left[a_1;b_1\right]$, де $\left|b_1-a_1\right|=\dfrac{1}{2}\left|b-a\right|$, визначаємо точку $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ (друге наближення) і розглядаємо один з відрізків $\left[a_1;x_2\right]$ або $\left[x_2;b_1\right]$, що містить потрібний корінь, тобто $\left[a_2;b_2\right]$, де $\left|b_2-a_2\right|=\dfrac{1}{2^2}\left|b-a\right|$, і т.д. поки не одержимо відрізок $\left[a_n;b_n\right]$, що містить потрібний корінь x^*, для якого

$$\left|b_n-a_n\right|=\frac{1}{2^n}\left|b-a\right|<\varepsilon .$$

Точку $x_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}=\overline{x}$ беремо за наближення значення кореня x^*, при цьому виконується нерівність $\left|x^*-\overline{x}\right|<\varepsilon$.

Графічна ілюстрація методу бісекції наведена на рисунку 9.

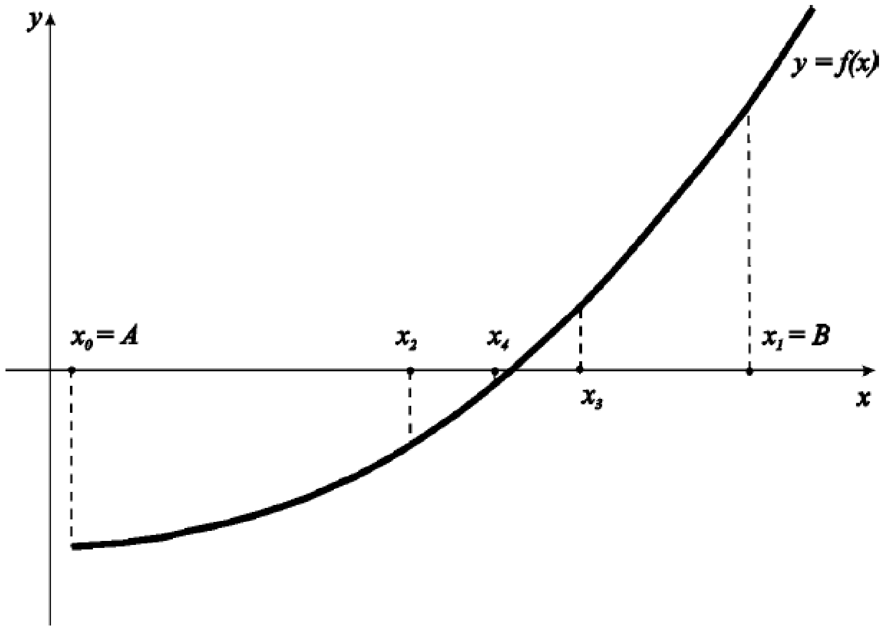

Рисунок 9 – Графічна ілюстрація методу бісекції

Алгоритм. Нехай відомий відрізок $[a;b]$, для якого $f(a)\cdot f(b)<0$, та рівняння $f(x)=0$ має на цьому відрізку єдиний корінь (виконання умов 2 та 3 відокремлення кореня для цього методу не обов'язкове), задана точність наближення до кореня $\varepsilon>0$.

1) Позначимо $a_0=a$, $b_0=b$, $k=0$.
2) Нехай визначений відрізок $[a_k;b_k]$. Знаходимо $x_{k+1}=\dfrac{a_k+b_k}{2}$. Обчислюємо $f(x_{k+1})$.
3) Якщо $f(x_{k+1})=0$, то $\bar{x}=x_{k+1}$ – корінь заданого рівняння. А якщо ні, то визначаємо знак добутку $f(a_k)\cdot f(x_{k+1})$.
4) Якщо $f(a_k)\cdot f(x_{k+1})<0$, то позначаємо $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=x_{k+1}$ і переходимо до дії 6.
5) Якщо $f(a_k)\cdot f(x_{k+1})>0$, то позначаємо $a_{k+1}=x_{k+1}$, $b_{k+1}=b_k$ і переходимо до дії 6.
6) Якщо $|b_{k+1}-a_{k+1}|<\varepsilon$, то $\bar{x}=\dfrac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$ – наближений корінь заданого рівняння, а якщо ні – то вважаємо $k=k+1$ і переходимо до дії 2.

4.1.3.2 Метод хорд (або метод січних)

Розглянемо рівняння $f\left(x\right)=0$.

Нехай відомо, що на відрізку $\left[a;b\right]$ знаходиться єдиний корінь x^{*} даного рівняння, тобто $f\left(x^{*}\right)=0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлення кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε.

Ідея методу полягає в тому, що на відрізку $\left[a;b\right]$ будується хорда *AB*, що стягує кінці дуги графіка функції $y=f\left(x\right)$, і в якості наближеного значення кореня x^{*} обирається число x , що є абсцисою точки перетину цієї хорди з віссю *Ox* (рисунок 10).

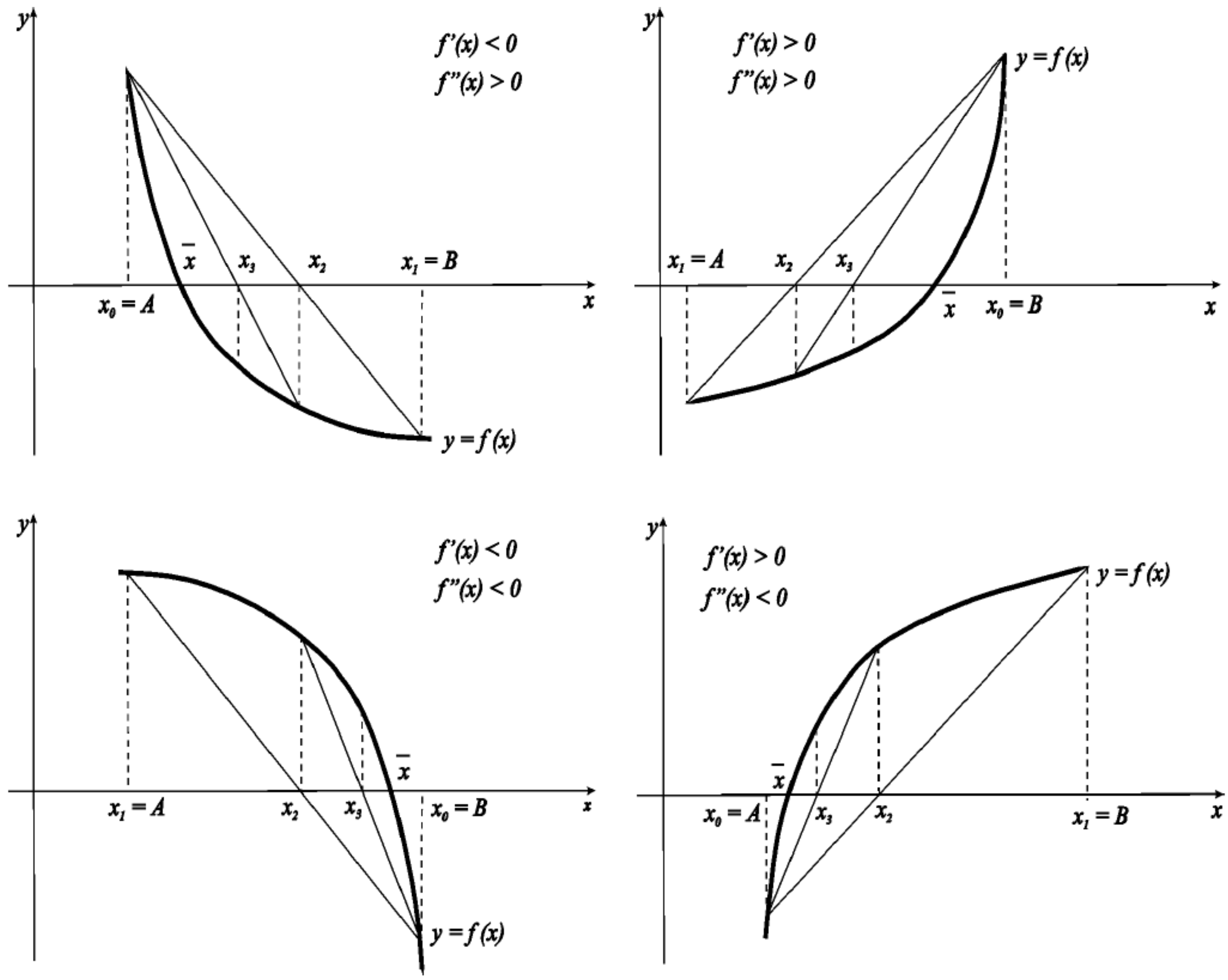

Рисунок 10 – Графічна ілюстрація методу хорд

Проаналізуємо різні варіанти поведінки функції на проміжку $\left[a;b\right]$ залежно від знаків похідних $f'\left(x\right)$ та $f''\left(x\right)$.

На рисунку бачимо, що для побудови послідовності точок перетину хорд із віссю абсцис, що прямує до розв’язку рівняння, треба, щоб одна із точок заданого проміжку залишалася нерухливою. У випадку, коли $f'(x)$ та $f''(x)$ мають протилежні знаки (тобто $f'(x)\cdot f''(x)<0$), нерухливою буде точка *A*, зафіксуємо її абсцису як початкову $x_0=a$, тоді абсцису другої точки *B* позначимо як $x_1=b$. Якщо ж $f'(x)$ та $f''(x)$ мають однакові знаки (тобто $f'(x)\cdot f''(x)>0$), то нерухливою залишається точка *B*, зафіксуємо її абсцису як початкову $x_0=b$, тоді $x_1=a$.

Отримані дві точки з координатами $\left(x_0,\, f\left(x_0\right)\right)$ та $\left(x_1,\, f\left(x_1\right)\right)$ з'єднаємо хордою й знайдемо точку перетину хорди з віссю *Ox*. Для цього складемо рівняння прямої, що проходить через ці дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{y-f\left(x_1\right)}{f\left(x_0\right)-f\left(x_1\right)}.$$

Поклавши $y=0$, $x=x_2$, одержимо абсцису точки перетину першої хорди з віссю *Ox*

$$x_2=x_1-\frac{f\left(x_1\right)}{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}\cdot\left(x_1-x_0\right).$$

Далі через точки з координатами $\left(x_0,\, f\left(x_0\right)\right)$ та $\left(x_2,\, f\left(x_2\right)\right)$ знову проводимо хорду і знаходимо точку її перетину з віссю абсцис і т.д.

У результаті одержимо ітераційну формулу для побудови послідовності x_n, що прямує до розв'язку рівняння

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)}\cdot\left(x_n-x_0\right).$$

Процес припиняють тоді, коли оцінка отриманого наближення задовольняє заданій точності, тобто коли абсолютна величина різниці між двома послідовними наближеннями задовольняє нерівності:

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|<\varepsilon.$$

Значення x_{n+1} вважають за наближене значення кореня, тобто $x^*=x_{n+1}$.

Переконаємося, що побудована послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ прямує до розв'язку заданого рівняння. Дійсно, послідовність є монотонною й обмеженою, оскільки при $f'(x)\cdot f''(x)<0$ маємо $x_1>x_2>...>x_n>...>x^*$, а при $f'(x)\cdot f''(x)>0$ маємо $x_1<x_2<...<x_n<...<x^*$,отже, послідовність прямує до деякого граничного значення

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c.$$

Визначимо числове значення границі послідовності, для цього визначимо граничні значення в ітераційній формулі:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0), \qquad n \to \infty,$$

$$c = c - \frac{f(c)}{f(c) - f(x_0)} \cdot (c - x_0),$$

$$\frac{f(c)}{f(c) - f(x_0)} \cdot (c - x_0) = 0,$$

звідки випливає, що $f(c) = 0$, тому що $c \neq x_0$, $f(c) \neq f(x_0)$, а це означає, що c – корінь рівняння.

Довели, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*,$$

а це означає, що за скінченне число ітерацій буде отримано x_n, що представляє наближене значення кореня із заданою точністю ε

$$\left| x_n - x^* \right| < \varepsilon.$$

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a;b]$ відділений корінь рівняння $f(x) = 0$ та задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

1. Визначаємо знак добутку $f'(x) \cdot f''(x)$ для деякого $x \in [a;b]$. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то позначаємо $x_0 = a$, $x_1 = b$. А якщо ні, то при $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, позначаємо $x_0 = b$, $x_1 = a$. Знаходимо $f(x_0)$, а x_1 будемо вважати першим наближенням до розв'язку.
2. Нехай визначене x_n, тобто n-е наближення до розв'язку. Обчислюємо $f(x_n)$, а потім $(n+1)$-е наближення за формулою
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0).$$
3. Обчислюємо $|x_{n+1} - x_n|$. Якщо $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, то процес припиняємо й вважаємо $x^* = x_{n+1}$. А якщо ні, то, при $|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$, повторюємо дії 2, 3, замінивши x_{n+1} на x_n.

Приклад 3. Використовуючи метод хорд, уточнити корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$, який відокремлено на відрізку [3; 4].

Розв'язування. Згідно з умовою, маємо $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36$, $f''(x) = 12x^2 + 6x$.

Уточнення кореня будемо проводити за описаним алгоритмом.

1. Для $x \in [3, 4]$ маємо $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, тому $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, отже, позначаємо $x_0 = 4$, $x_1 = 3$.

   Знаходимо $f(x_0) = f(4) = 4^4 + 4^3 - 36 \cdot 4 - 20 = 156$, а $x_1 = 3$ вважаємо першим наближенням до розв'язку.

2. Скористаємося формулою $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0)$ для знаходження наступних наближень.

2а. Знайдемо друге наближення x_2 до розв'язку при $n = 1$. Обчислимо $f(x_1) = 3^4 + 3^3 - 36 \cdot 3 - 20 = -20$, а потім

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot (x_1 - x_0) = 3 - \frac{-20}{-20 - 156} \cdot (3 - 4) = 3{,}1136.$$

2б. Знайдемо третє наближення x_3 до розв'язку при $n = 2$.

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_0)} \cdot (x_2 - x_0) = 3{,}1564.$$

2в. Знайдемо четверте наближення x_4 до розв'язку при $n = 3$.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3) - f(x_0)} \cdot (x_3 - x_0) = 3{,}1719.$$

Отже, корінь знаходиться на відрізку [3,1719; 4].

4.1.3.3 Метод Ньютона (або метод дотичних)

Розглянемо рівняння $f(x) = 0$.

Нехай відомо, що на відрізку $[a; b]$ знаходиться єдиний корінь x^* даного рівняння, тобто $f(x^*) = 0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлення кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε.

Ідея методу полягає в тому, що в одному з кінців дуги *AB* графіка функції $y = f(x)$ проводиться дотична до цієї дуги і у якості наближеного значення кореня x^* обирається число x, що є абсцисою точки перетину цієї дотичної з віссю *Ox* (рисунок 11).

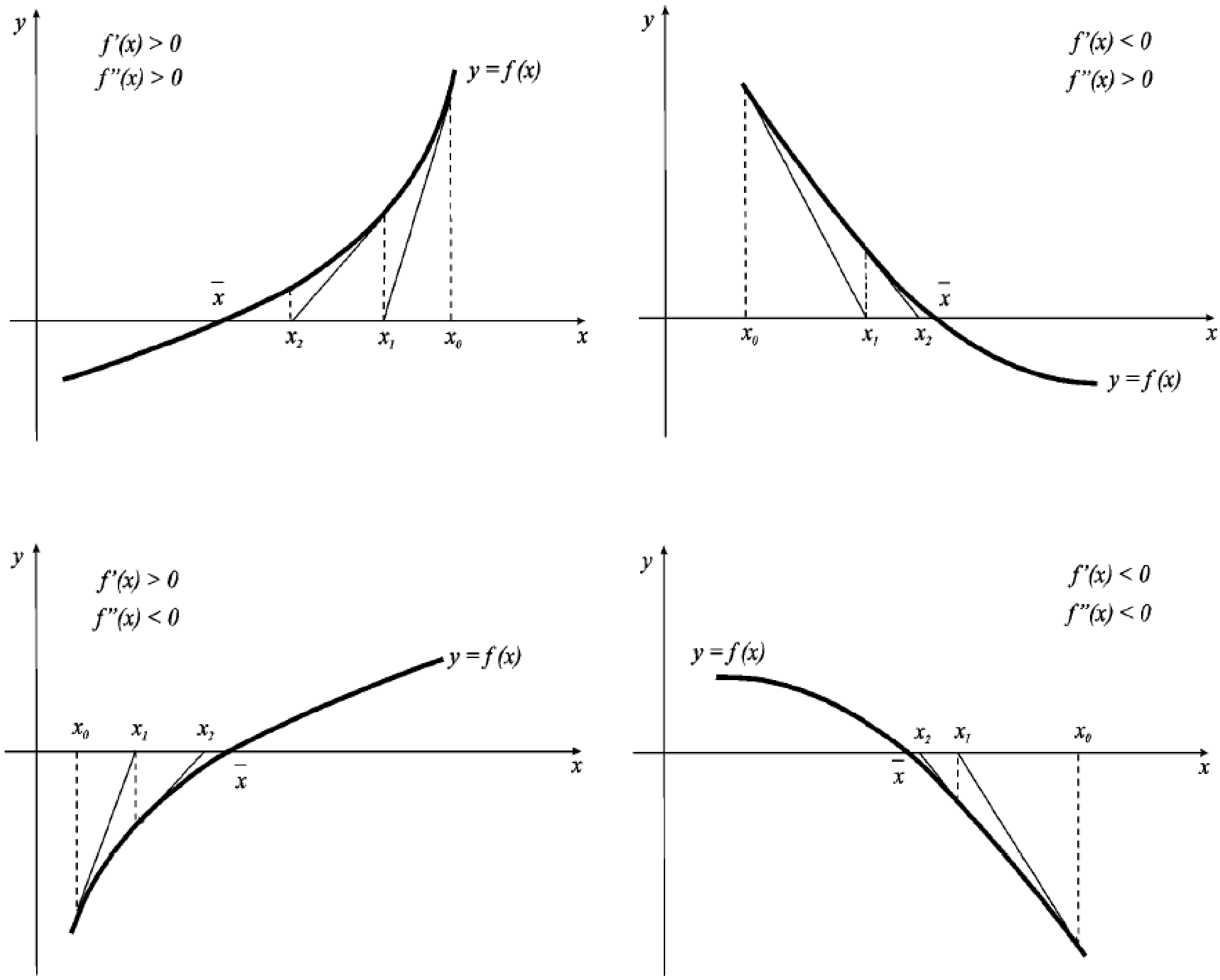

Рисунок 11 – Графічна ілюстрація методу Ньютона

Проаналізуємо різні варіанти поведінки функції на проміжку $[a;b]$ залежно від знаків похідних $f'(x)$ і $f''(x)$ на цьому проміжку, і визначимо, яку із граничних точок проміжку $[a;b]$ треба обрати в якості початкової для побудови дотичної до графіка функції. Початкова точка обирається так, щоб абсциса точки перетину дотичної з віссю Ox належала проміжку $[a;b]$.

З рисунку бачимо, що для отримання послідовності точок перетину дотичних з віссю абсцис, що прямує до розв'язку рівняння, треба в якості початкової точки обрати точку $x_0 = a$, якщо $f'(x)$ й $f''(x)$ мають протилежні знаки (тобто $f'(x) \cdot f''(x) < 0$), або точку $x_0 = b$, якщо $f'(x)$ й $f''(x)$ мають однакові знаки (тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$).

У точці $(x_0,\ f(x_0))$ записуємо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Поклавши $y = 0$, $x = x_1$, визначаємо абсцису точки перетину дотичної з віссю *Ox:*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Бачимо, що точка $(x_1, 0)$ знаходитися з боку опуклості кривої. Далі через точку $(x_1,\ f(x_1))$ проводимо наступну дотичну й знаходимо точку її перетину з віссю абсцис і т.д.

У результаті одержимо ітераційну формулу для побудови послідовності x_n, що наближається до розв'язку рівняння

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Процес припиняємо тоді, коли оцінка отриманого наближення задовольняє заданої точності. Для спрощення обчислень звичайно задають деяке досить мале число $\varepsilon > 0$. Процес припиняють тоді, коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями задовольняє нерівності:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Знайдене значення x_{n+1} вважають за наближене значення кореня, тобто

$$x^* = x_{n+1}.$$

Покажемо, що послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ збіжна й має своєю границею значення кореня x^*. Відзначимо, що при $f'(x)\cdot f''(x) < 0$ маємо послідовність $x_0 < x_1 < ... < x_n < ... < x^*$, а при $f'(x)\cdot f''(x) > 0$ маємо $x_0 > x_1 > ... > x_n > ... > x^*$. При цьому послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ монотонна та обмежена. Отже, існує

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Перейдемо до границі в ітераційній формулі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n \to \infty,$$

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)}, \qquad \text{тобто} \qquad \frac{f(c)}{f'(c)} = 0,$$

звідки випливає, що $f(c) = 0$, а це означає, що c – корінь рівняння. Отримали

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*,$$

а це означає, що за скінченне число ітерацій буде отримано x_n, що представляє наближене значення кореня із заданою точністю ε

$$|\, x_n - x^* \,| < \varepsilon.$$

Алгоритм. Нехай відомо відрізок $[a;b]$, що відокремлює корінь рівняння $f(x)=0$, і задана точність обчислень $\varepsilon>0$.

1. Визначаємо знак добутку $f'(x)\cdot f''(x)$ для деякого $x\in[a;b]$. Якщо $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то визначаємо $x_0=a$, якщо ж $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то визначаємо $x_0=b$. Значення x_0 будемо вважати нульовим наближенням до розв'язку.

2. Нехай визначене x_n, тобто n-е наближення. Обчислюємо $f(x_n)$ й $f'(x_n)$, а потім $(n+1)$-ше наближення за формулою

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3. Обчислюємо $|x_{n+1}-x_n|$. Якщо $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, то процес припиняємо й вважаємо $x^*=x_{n+1}$. А якщо ні, то, при $|x_{n+1}-x_n|\geq\varepsilon$, повторюємо дії 2, 3, замінивши x_{n+1} на x_n.

Приклад 4. Користуючись методом дотичних, уточнити корінь рівняння $x^4+x^3-36x-20=0$, який відокремлено на відрізку [3; 4].

Розв'язування. Згідно з умовою, маємо $f(x)=x^4+x^3-36x-20$, $f'(x)=4x^3+3x^2-36$, $f''(x)=12x^2+6x$. Уточнення кореня будемо проводити за описаним алгоритмом.

1. Для $x\in[3,4]$ буде $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, тому $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то вважаємо $x_0=b=4$.

2. Скористаємося формулою

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

для знаходження наступних наближень.

2а. Маємо нульове наближення x_0. Обчислюємо послідовно $f(x_0)=4^4+4^3-36\cdot 4-20=156$, $\quad f'(x_0)=4\cdot 4^3+3\cdot 4^2-36=268$.

Визначаємо перше наближення за формулою

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=4-\frac{156}{268}=3{,}4179.$$

2б. Визначаємо друге наближення за формулою

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=3{,}2078.$$

2в. Аналогічно знаходимо третє наближення

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=3{,}1809$$

3. Обчислюємо $|x_3-x_2|=|3{,}1809-3{,}2078|=0{,}0269\approx 0{,}03.$ Третє наближення $x_3=3{,}1809$ є наближеним значенням кореня з точністю $\varepsilon\approx 0{,}03$.

4.1.3.4 Комбінований метод

Ідея методу полягає в об'єднанні методу хорд і методу дотичних. З описів цих методів і відповідних рисунків бачимо, що наближення $\hat{x}_n$, що обчислюються за методом хорд, прямує до кореня x^* з боку вогнутості кривої, а наближення $\bar{x}_n$, що обчислюються за методом дотичних, – з боку опуклості кривої. При цьому для будь-якого наближення маємо

$$\hat{x}_n < x^* < \bar{x}_n \text{ при } f'(x)\cdot f''(x) > 0,$$

$$\bar{x}_n < x^* < \hat{x}_n \text{ при } f'(x)\cdot f''(x) < 0.$$

Отже, комбінуючи ці два методи і визначаючи числа $\hat{x}_n$ й $\bar{x}_n$, послідовно на кожному кроці звужуємо із двох сторін відрізок, усередині якого знаходиться корінь x^*. Процес припиняємо тоді, коли $|\hat{x}_n - \bar{x}_n| < \varepsilon$, де ε – задана точність наближення.

За наближене значення кореня беремо точку, що належить середині відрізка, тобто

$$\tilde{x} = \frac{\hat{x}_n + \bar{x}_n}{2},$$

так що $|x^* - \tilde{x}| \le |\hat{x}_n - \bar{x}_n| < \varepsilon$.

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a;b]$ відокремлено корінь рівняння $f(x)=0$ і задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

Визначаємо знак добутку $f'(x)\cdot f''(x)$ для деякого $x\in[a;b]$. Якщо $f'(x)\cdot f''(x) < 0$, то позначаємо $\hat{x}_0 = b$, $\bar{x}_0 = a$. А при $f'(x)\cdot f''(x) > 0$, позначаємо $\hat{x}_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$.

Нехай відомими є $\hat{x}_n$ й $\bar{x}_n$, що визначають n-е наближення до розв'язку і задають кінці відрізка, що відокремлює корінь рівняння. Визначимо $(n+1)$-ий відрізок за формулами

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n - \frac{f(\hat{x}_n)}{f(\hat{x}_n) - f(\bar{x}_m)}\cdot(\hat{x}_n - \bar{x}_m), \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}.$$

Оцінюємо різницю $|\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1}|$. Якщо $|\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1}| < \varepsilon$, то процес припиняємо і знаходимо $\tilde{x} = \dfrac{\hat{x}_{n+1} + \bar{x}_{n+1}}{2}$; якщо ж $|\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1}| \ge \varepsilon$, то повторюємо дії 2, 3, вважаючи значення $\hat{x}_{n+1}$ й $\bar{x}_{n+1}$ відомими кінцями наступного відрізка, що відокремлює корінь рівняння.

Зауваження. Виконуючи обчислення з наближеними числами, можна пропустити корінь через округлення наближень. Тому ліві кінці відрізків слід округляти з недоліком, а праві – з надлишком. Контролем на кожному кроці обчислень може служити те, що знаки $f(\hat{x}_0)$ й $f(\bar{x}_0)$ повинні бути відповідними до знаків $f(\hat{x}_{n+1})$ й $f(\bar{x}_{n+1})$.