2.3 Ґратки

Досі розглядалися алгебри, тобто множини, на яких задано операції. Множини, де крім операцій задано відношення, називаються алгебраїчними системами. Таким чином, алгебри можна вважати окремим випадком алгебраїчних систем (в яких множина відношень – порожня). Іншим окремим випадком алгебраїчних систем є моделі множин, на яких задано тільки відношення.

Розглянемо ґратки, як приклад алгебраїчної системи, що найчастіше зустрічається в теоретичній алгебрі та її застосуваннях.

2.3.1 Основні означення

Ґратками називається частково впорядкована множина, в якій два елемента x та y мають точну нижню межу, яка називається **перетином** (позначається $x \wedge y$), та точну верхню межу, яка називається **об'єднанням** (позначається $x \vee y$). Ґратки називаються **повними**, якщо будь-яка їх підмножина має точні верхні та нижні межі.

Очевидно, що будь-які не порожні повні ґратки мають найменший елемент 0 та найбільший елемент 1. Дійсно, якщо два кожні елементи мають точну верхню межу, то в ґратках є тільки один максимальний елемент, який буде й універсальною верхньою межею, тобто одиницею впорядкованої множини. Аналогічно, існування точної нижньої межі для двох довільних елементів забезпечує існування універсальної нижньої межі – нуля впорядкованої множини.

Лема 1. Будь-який ланцюг є ґратками, в яких $x \wedge y$ співпадає з найменшим, а $x \vee y$ – з найбільшим із елементів x та y.

Це очевидно, тому що для будь-якого ланцюга або $x \le y$, або $y \le x$, тому або $x \wedge y = x$, або $x \wedge y = y$.

Наприклад, будь-яку абсолютно впорядковану множину (множину цілих чисел) можна перетворити на ґратки, означивши для будь-яких елементів x та y $x \wedge y = min(x, y)$, $x \vee y = max(x, y)$.

Система підмножин будь-якої множини A (булеан A) – частково впорядкована множина за включенням множин. Ця система є ґратками, елементами яких є множини, а операціями – звичайні теоретико-множинні операції об'єднання та перерізу.

Впорядкована множина раціональних чисел не є повними ґратками, тому що в ній немає універсальних меж 0 та 1. У впорядкованій множині дійсних чисел умова повноти буде виконуватись, якщо додати до неї в якості універсальних меж $-\infty$ та $+\infty$.

Підґратками ґраток L називається підмножина $X \subset L$ така, що якщо $a \in X$, $b \in X$, то $a \wedge b \in X$ та $a \vee b \in X$.

Порожня підмножина та будь-яка одноелементна підмножина є підґратками.

На рис. 1 підмножина $Y = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$ є підґратками. Дійсно, $\{b\} \in Y$, $\{c\} \in Y$, $\{b\} \wedge \{c\} = \varnothing \in Y$, $\{b\} \vee \{c\} = \{b,c\} \in Y$, $\{b\} \vee \{b,c\} = \{b,c\} \in Y$. Ця множина утворює замкнений інтервал $[\varnothing, \{b,c\}]$.

Підмножина $Z = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{c\}\}$ не є підґратками, тому що $\{a,b\} \vee \{a,c\} = \{a,b,c\} \notin Z$. Ця підмножина також не є інтервалом.

Підґратками будуть також підмножини: $\{\varnothing, \{a\}\}$, $\{\{c\}, \{a,c\}\}$, $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ і т.д., всі ланцюги, наприклад, $\{\varnothing, \{b\}\}$, $\{\varnothing, \{b\}, \{b,c\}\}$, а також всі елементи ґраток.

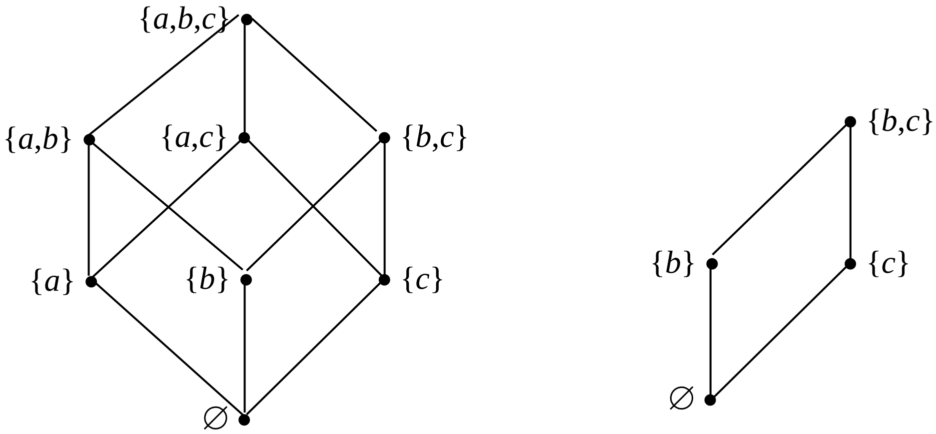

Рис. 1 – Ґратки та їх підґратки

2.3.2 Булеві ґратки

У повних ґратках елемент a' називається **доповненням** елемента a, якщо $a \wedge a' = 0$ та $a \vee a' = 1$.

Взагалі, доповнення не мусить існувати та не мусить бути єдиним. Якщо кожний елемент ґраток має доповнення, то ґратки називаються ґратками із доповненням. Дистрибутивні ґратки з доповненням називаються **булевими**.

<u>Теорема 1.</u> У булевих ґратках довільний елемент x має одне й тільки одне доповнення x'. При цьому виконується:

1) інволюція: $(x')' = x$;

2) межі доповнюють одна одну: $1' = 0$, $0' = 1$;

3) виконуються закони де Моргана: $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

Через те, що доповнення у булевих ґратках єдині, то їх можна розглядати як алгебру.

Булевою алгеброю $B = \langle L, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ називається алгебра з двома булевими операціями $\vee$ та $\wedge$, однією унарною операцією ’ та двома нульарними операціями (константами) 0 та 1, для яких виконуються:

1. $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$; самопоглинання

2. $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$	комутативність
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	асоціативність
4. $(a \wedge b) \vee a = a$, $(a \vee b) \wedge a = a$	поглинання
5. $a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	дистрибутивність
6. $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 0 = 0$ $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$	властивості 0 та 1
7. $(a')' = a$	властивості доповнення
8. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$	закони де Моргана
9. $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$	існування доповнення

Наприклад, $\langle P(M); \cup, \cap, ' \rangle$ – булева алгебра, причому M – верхня межа, $\varnothing$ – нижня межа, “$\subset$” – природній частковий порядок.

$\langle \{0, 1\}; \wedge, \vee, \neg \rangle$ – булева алгебра, причому 1 – верхня межа, 0 – нижня межа.

Будь-яке поле множин і, зокрема, множина всіх підмножин деякої множини є булевою алгеброю. Довільна підалгебра булевої алгебри сама також є булевою алгеброю. Прямий (декартовий) добуток булевих алгебр є булевою алгеброю.