4.3 Логіка предикатів

4.3.1 Поняття предикату. Квантори

Приклад

“Всі люди смертні (A).

Сократ — людина (B).

Відповідно, Сократ смертний (C).”

Структура висловлювання:

–суб’єкт (підмет);

–предикат (властивість суб’єкта).

Одномісним предикатом $P(x)$, визначеним на множині M, називається вираз, який після підстановки в нього замість x об’єкта з області визначення M, перетворюється у висловлювання.

Область визначення предиката називається **предметною областю**.

Елементи з області визначення називаються **предметними константами**.

Змінна, від якої залежить предикат, називається **предметною змінною**.

Приклад. “x більше y”

$P(x, y)$ — двомісний предикат, $x, y \in R$

Приклад. “місто x є столицею країни y”

$Q(x, y)$

x — множина міст

y — множина країн

Приклад. “p народився у місті q у році r”

$R(x, y, z)$

p — множина людей

q — множина міст

r — множина років

N-**місним предикатом**, визначеним на множинах $M_1,\ldots,M_n$, називається вираз, який перетворюється у висловлювання після заміни кожної предметної змінної на елемент з її області визначення.

Предикат — функція, що відображає множину об’єктів на множину {T, F}.

Над предикатами визначено всі булеві операції, а також дві нові операції — квантори:

$\forall$ — **квантор загальності**

$\exists$ — **квантор існування**

Формула $\forall x P(x)$:

“для будь-якого предмету $m \in M$ виконується властивість $P(x)$” або

“всі x мають властивість $P(x)$”.

Формула $\exists x P(x)$:

“існує принаймні один предмет x, який має властивість P” або

“деякі x мають властивість P”.

Нехай $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — скінченна область визначення предикату $P(x)$.

Формули з кванторами можуть бути виражені через кон'юнкції та диз'юнкції:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Приклад. “Кожен студент групи вивчав дискретну математику”.

$\Rightarrow$ “Про кожного студента групи відомо, що цей студент вивчав дискретну математику”

“Про кожного студента x групи відомо, що x вивчав дискретну математику”

$C(x)$: “x вивчав дискретну математику”

$\forall x C(x)$

“Для кожної особи x, якщо ця особа x — студент групи, то x вивчав дискретну математику”.

$S(x)$: “особа x навчається в групі”

$\forall x(S(x) \to C(x))$

$Q(x,y)$: "Студент x вивчає дисципліну y"

$\Rightarrow C(x)$: $Q(x,$ '*Дискретна математика*'$)$

$\forall x Q(x,$ '*Дискретна математика*'$)$

$\forall x(S(x) \rightarrow Q(x,$ '*Дискретна математика*'$))$

Приклад. “Сума двох додатних чисел — додатне число”.

$\Rightarrow$ “Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число”.

“Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x+y$, яка є додатнім числом”

$\forall x \forall y\ (((x>0) \wedge (y>0)) \rightarrow (x+y > 0))$

4.3.2 Терми та формули

У мові логіки предикатів присутні наступні символи:

- пропозиційні зв’язки $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$;
- квантори загальності $\forall$ та існування $\exists$;
- допоміжні символи: кома “,”, та дужки “(“, “)”;
- предметні змінні $x_1, x_2, \ldots$;
- предметні константи $a_1, a_2, \ldots$;
- функціональні символи $f_1, f_2, \ldots$;
- предикатні символи $P_1, P_2, \ldots$

Означення

(1) Кожна предметна змінна є **термом**.

(2) Кожна предметна константа є термом.

(3) Якщо f — функціональний символ та $t_1,\ldots,t_n$ — терми, то $f\,(t_1,\ldots,t_n)$ є термом.

(4) Інших термів не існує.

Означення

(1) $P(t_1,\ldots,t_n)$, де P — предикатний символи, $t_1,\ldots,t_n$ — терми, є **атомарною формулою**.

(2) Якщо A та B — формули та x — предметна змінна, то формулами є: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$, $\forall xA$, $\exists xA$.

(3) Інших формул немає.

Формула, на яку розповсюджується дія квантора, називається **областю дії квантора**.

Змінна, за якою “навішується” квантор та яка попадає в його область дії, називається **зв’язаною змінною**.

Змінна, яка лежить за межами області дії квантора, називається **вільною змінною**.

Формула, що не містить вільних змінних, називається **замкненою**.

Приклад

$$\forall x(\ P(x) \rightarrow \exists y \ Q(x,y) \ )$$

Приклад. Нехай $Q(x,z)$: “x народився у році z”, де x належить множині людей, а z — множині років.

$\forall x \exists z\ Q(x,z)$: “Кожна людина народилася в якомусь році”

$\exists z \forall x\ Q(x,z)$: “Існує такий рік, в якому народились люди”

Терм y є **вільним для змінної** x в формулі $A(x)$, якщо жодне вільне входження x в $A(x)$ не знаходиться в області дії жодного квантора по z, де z — змінна, яка входить в терм y.

Приклади

Терм y є вільним для змінної x в формулі $P(x)$, але той самий терм y не є вільним для змінної x в формулі $\forall y P(x)$.

4.3.3 Інтерпретації формул логіки предикатів

Інтерпретацією називається система I, яка складається з непорожньої множини D, яка називається **областю інтерпретації**, а також відповідності, яка ставить кожному n-місному предикату P_i деяке відношення на області D^n, кожній предметній константі a_i — деякий елемент з області D, кожній функціональній літері f_i — деяку n-місну операцію з області D (тобто функцію $D^n \rightarrow D$).

Коли задана область інтерпретації всі предметні змінні пробігають всі значення з області D, а логічні зв’язки мають звичайний логічний зміст.

Приклад. Нехай $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$.

Приклади інтерпретацій:

Область інтерпретації D	Інтерпретація	Висловлювання $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$
Множина живих істот	$P(x)$: x — риба, $Q(x)$: x мешкає у воді	Усі риби мешкають у воді
Множина живих істот	$P(x)$: x — людина, $Q(x)$: x смертний	Усі люди смертні
Множина цілих чисел	$P(x)$: x ділиться на 6, $Q(x)$: x ділиться на 3	Всі числа, які діляться на 6, діляться на 3

Приклад. $\exists x \exists y P(f(x,y), t)$.

Предикат $P(v, u)$ — двомісний, змінні x, y — зв'язані, t — вільна змінна.

Інтерпретація:

область інтерпретації D — множина дійсних чисел R, $t = 1$, $f(x,y)= = x^2 + y^2$, предикат $P(u, t)$: $u = t$.

$\Rightarrow \exists x \exists y (x^2 + y^2 = 1)$.

Якщо $f(x,y) = x^2 + y^2$, $t = r^2$, то $\exists x \exists y (x^2 + y^2 = r^2)$.

Інтерпретація називається **моделлю** для даної множини формул Г, якщо кожна формула з Г істинна в даній інтерпретації.

Формула називається **виконуваною**, якщо існує хоча б одна інтерпретація, на якій формула істинна.

Формула називається **загальнозначущою**, якщо вона істинна на будь-якій інтерпретації для будь-яких значень змінних.

Формула, яка є хибною на будь-якій інтерпретації при будь-яких значеннях змінних, називається **протиріччям**.

Загальнозначущі формули позначаються як і тавтології, тобто $\vdash A$.

Приклад. Область інтерпретації: $D = \{a, b\}$.

Побудуємо таблицю істинності формул:

$$E_1 = \exists x P(x)\ , \quad E_2 = \forall x P(x).$$

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

$P(\cdot)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$
P_1	F	F
P_2	T	F
P_3	T	F
P_4	T	T

Побудуємо таблиці істинності на області інтерпретації з двох елементів $D = \{a, \ b\}$ для наступних формул:

$$E_1 = \forall y P(y) \to \exists x Q(x),$$

$$E_2 = \forall y (P(y) \to \exists x Q(x)),$$

$$E_3 = \forall y \exists x (P(y) \to Q(x)).$$

Обчислення формул на інтерпретації P_2, Q_1:

$$E_1 = \forall y P_2(y) \rightarrow \exists x Q_1(x) = \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} = \mathrm{T};$$

$$E_2 = \forall y (P_2(y) \rightarrow \exists x Q_1(x)) = \forall \begin{pmatrix} P_2(a) \rightarrow \mathrm{F} \\ P_2(b) \rightarrow \mathrm{F} \end{pmatrix} =$$

$$= \forall \begin{pmatrix} \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} \ = \ \mathrm{T} \\ \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F} \ = \ \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F};$$

$$E_3 = \forall y \exists x (P_2(y) \to Q_1(x)) = \forall y \begin{pmatrix} \exists x (P_2(a) \to Q_1(x)) \\ \exists x (P_2(b) \to Q_1(x)) \end{pmatrix} =$$

$$= \forall \begin{pmatrix} \exists x \begin{pmatrix} P_2(a) \to Q_1(a) \\ P_2(a) \to Q_1(b) \end{pmatrix} \\ \exists x \begin{pmatrix} P_2(b) \to Q_1(a) \\ P_2(b) \to Q_1(b) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \forall y \begin{pmatrix} \exists x \begin{pmatrix} \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T} \\ \mathrm{F} \to \mathrm{F} = \mathrm{T} \end{pmatrix} = \mathrm{T} \\ \exists x \begin{pmatrix} \mathrm{T} \to \mathrm{F} = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} \to \mathrm{F} = \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F} \end{pmatrix} = \mathrm{F}.$$

Аналогічно можна знайти значення для цих формул для решти 15 інтерпретацій та дізнатись, які з формул є виконуваними.

4.3.4 Властивості формул логіки предикатів

Теорема 1. В логіці предикатів справедливі наступні рівносильності, які містять квантори:

1. $\overline{\forall x\, P(x)} \sim \exists x\, \overline{P(x)}$
2. $\overline{\exists x\, P(x)} \sim \forall x\, \overline{P(x)}$
3. $\forall x\, P(x) \sim \overline{\exists x\, \overline{P(x)}}$;
4. $\exists x\, P(x) \sim \overline{\forall x\, \overline{P(x)}}$;

5. $\forall x\,(P(x) \wedge S) \sim \forall x\,P(x) \wedge S$;

6. $\forall x\,(S \wedge P(x)) \sim S \wedge \forall x\,P(x)$;

7. $\forall x\,(P(x) \vee S) \sim \forall x\,P(x) \vee S$;

8. $\forall x\,(S \vee P(x)) \sim S \vee \forall x\,P(x)$;

9. $\exists\,x\,(P(x) \wedge S) \sim \exists\,x\,P(x) \wedge S$;

10. $\exists\,x\,(S \wedge P(x)) \sim S \wedge \exists\,x\,P(x)$;

11. $\exists\,x\,(P(x) \vee S) \sim \exists\,x\,P(x) \vee S$;

12. $\exists\,x\,(S \vee P(x)) \sim S \vee \exists\,x\,P(x)$;

13. $\forall x\,(P(x) \to S) \sim \exists x\, P(x) \to S$;

14. $\forall x\,(S \to P(x)) \sim S \to \forall x\, P(x)$;

15. $\exists x\,(P(x) \to S) \sim \forall x\, P(x) \to S$;

16. $\exists x\,(S \to P(x)) \sim S \to \exists x\, P(x)$;

17. $\forall x\, S \sim S$;

18. $\exists x\, S \sim S$;

19. $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x)) \sim \forall x\,P(x)\wedge \forall x\,Q(x)$

20. $\exists\,x\,(P(x)\vee Q(x)) \sim \exists\,x\,P(x)\vee \exists\,x\,Q(x)$

21. $\exists\,x\,(P(x)\wedge Q(x)) \rightarrow (\exists\,x\,P(x)\wedge \exists\,x\,Q(x))$

22. $(\forall x\,P(x)\vee \forall x\,Q(x)) \rightarrow \forall x\,(P(x)\vee Q(x))$

23. $\forall x\,P(x) \sim \forall y\,P(y);$

24. $\exists\,x\,P(x) \sim \exists\,y\,P(y);$

25. $\forall x\,\forall y\,R(x,y) \sim \forall y\,\forall x\,R(x,y)$

26. $\exists\,x\,\exists\,y\,R(x,y) \sim \exists\,y\,\exists\,x\,R(x,y)$

27. $\exists\,y\,\forall x\,R(x,y) \rightarrow \forall x\,\exists\,y\,R(x,y)$

Теорема 2. Якщо замінити зв’язану змінну довільної формули A іншою змінною, що не входить у цю формулу, у кванторі й усюди в області його дії, дістанемо формулу, рівносильну A.

Приклад 1. На області інтерпретацій $D\{a,b\}$ побудувати таблицю істинності для предиката:

$$E = \exists x \forall y \big(P(x) \wedge Q(y)\big) \rightarrow R.$$

Розв'язання. Таблиці істинності для предикатів на області інтерпретацій $D\{a,b\}$:

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

$P(\cdot)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$
P_1	F	F
P_2	T	F
P_3	T	F
P_4	T	T

Спрощуємо предикат і заповнюємо таблиці:

(R=T)

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
R	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

(R=F)

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
R	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

$$E = \exists x \forall y \big(P(x) \wedge Q(y)\big) \rightarrow R = \big(\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y)\big) \rightarrow R$$

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*

Приклад 2. На області інтерпретацій $D\{a,b\}$ побудувати таблицю істинності для предиката:

$$E = \forall x \exists y \big(P(x) \vee Q(y)\big) \wedge R.$$

Розв’язання.

$$E = \forall x \exists y \big(P(x) \vee Q(y)\big) \wedge R = (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge R$$

$$E = (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge R$$

Таблиці істинності:

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*

Приклад 3. На області інтерпретацій $D\{a,b\}$ побудувати таблицю істинності для предиката:

$$E = \forall x \exists y (P(x) \to Q(y)) \vee R.$$

Розв’язання. Теорема 1:

13. $\forall x\,(P(x) \to S) \sim \exists x\,P(x) \to S$

16. $\exists x\,(S \to P(x)) \sim S \to \exists x\,P(x)$

$$E = \forall x \exists y \big(P(x) \to Q(y)\big) \vee R = (\exists x P(x) \to \exists y Q(y)) \vee R$$

$$E = (\exists x P(x) \to \exists y Q(y)) \vee R$$

Таблиці істинності:

P	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
Q	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T
R	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
E	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

P	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
Q	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T
R	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
E	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T