3.5 ПОВНІ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ

3.5.1 Функції, що зберігають нуль та одиницю

Булева функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається ***функцією, що зберігає 0***, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0: $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

Булева функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається ***функцією, що зберігає 1***, якщо на одиничному наборі вона дорівнює 1: $f(1,1, ... 1) = 1$.

Функції $x \wedge y$ і $x \vee y$ зберігають 0, оскільки $0 \wedge 0 = 0$ і $0 \vee 0 = 0$. Крім того, дані функції також зберігають 1, оскільки $1 \wedge 1 = 1$ і $1 \vee 1 = 1$. Функція $\overline{x}$ не зберігає 0 і не зберігає 1, оскільки $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$.

Приклад. Визначте, чи зберігає 0 та 1 функція $f(x, y, z) = x \vee \overline{y}\ \overline{z}$.

<u>*Розв'язок*</u>. Перевіримо значення даної функції на нульовому та одиничному наборах.

$$f(0, 0, 0) = 0 \vee \overline{0} \wedge \overline{0} = 0 \vee 1 \wedge 1 = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(1, 1, 1)=1 \vee \overline{1} \wedge \overline{1} = 1 \vee 0 \wedge 0 = 1 \vee 0 = 1.$$

Отже, дана функція зберігає 1 і не зберігає 0.

3.5.2 Монотонні функції

Розглянемо важливий клас булевих функцій – монотонні булеві функції. Для цього введемо відношення домінування (різновид порядку), яке будемо позначати символом $\leq$.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ – будь-які набори. Для двох наборів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ виконується ***відношення передування*** $\alpha \leq \beta$, якщо $\alpha_1 \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \beta_2, ..., \alpha_n \leq \beta_n$.

Приклад. Набори $\alpha = (0, 1, 0, 1)$ та $\beta = (1, 1, 0, 1)$ знаходяться у відношенні передування, тобто значення набору не зменшується $\alpha \leq \beta$, оскільки $0 \leq 1$, $1 \leq 1$, $0 \leq 0$, $1 \leq 1$.

Якщо хоча б для однієї пари $\left(\alpha_i, \beta_i\right)$ відношення $\alpha_i \leq \beta_i$ не виконується, то відповідні їм набори α та β у відношенні порядку не беруть участі, тобто є непорівнянними, наприклад, (0, 1) і (1, 0).

Булева функція f називається ***монотонною***, якщо для будь-яких пар наборів значень змінних $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, для яких виконується відношення $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \leq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, правильна і нерівність $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.

Приклад. Дослідити на монотонність функції $f(x, y) = x \wedge y$, $g(x, y) = x \oplus y$.

Розв'язок. Для функції $f(x, y)$ запишемо всі набори значень змінних, для яких виконується відношення порядку, визначимо значення функції на даних наборах і порівняємо їх:

$(0, 0) \le (0, 1)$, $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$, $f(0, 0) \le f(0, 1)$.
$(0, 0) \le (1, 0)$, $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 0$, $f(0, 0) \le f(1, 0)$.
$(0, 0) \le (1, 1)$, $f(0, 0) = 0$, $f(1, 1) = 1$, $f(0, 0) \le f(1, 1)$.
$(0, 1) \le (1, 1)$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 1) = 1$, $f(0, 1) \le f(1, 1)$.
$(1, 0) \le (1, 1)$, $f(1, 0) = 0$, $f(1, 1) = 1$, $f(1, 0) \le f(1, 1)$.

Отже, функція $f(x, y) = x \wedge y$ є монотонною. Аналогічно проведемо дослідження функції $g(x, y)$.

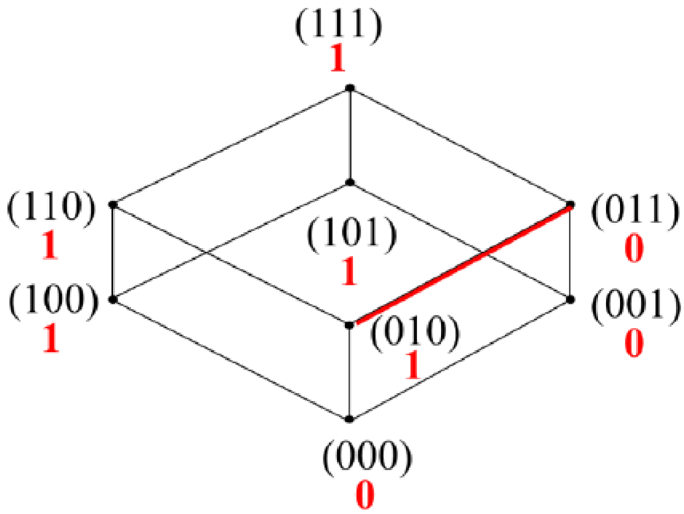
$(0, 0) \le (0, 1)$, $g(0, 0) = 0$, $g(0, 1) = 1$, $g(0, 0) \le g(0, 1)$.
$(0, 0) \le (1, 0)$, $g(0, 0) = 0$, $g(l, 0) = 1$, $g(0, 0) \le g(l, 0)$.
$(0, 0) \le (1, 1)$, $g(0, 0) = 0$, $g(l, 1) = 0$, $g(0, 0) \le g(l, 1)$.
$(0, 1) \le (1, 1)$, $g(0, 1) = 1$, $g(l, 1) = 0$, $g(0, 1) \ge g(l, 1)$.

Функція $g(x, y) = x \oplus y$ не є монотонною.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію

$$h(x, y, z) = x \vee y\,\bar{z}.$$

Розв'язок. Побудуємо діаграму Хассе для інтерпретацій:



При переході від інтерпретації (010) до (011) функція зменшує значення, отже функція не є монотонною.

Теорема. Булева функція, відмінна від констант 0 і 1, є монотонною, якщо і тільки якщо вона припускає зображення формулою булевої алгебри без заперечень.

Приклад. Визначити, чи є функція

$$f(x, y, z, t) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow (z \vee t)$$

монотонною.

Розв'язок. Виразимо $f(x, y, z, t)$ через елементарні функції булевої алгебри:

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \to (z \vee t) = xy \vee z \vee t.$$

Одержана формула булевої алгебри не містить заперечень, отже функція $f(x,y,z,t)$ є монотонною.

3.5.3 Повнота та замкненість

Будь-яка логічна функція може бути зображена за допомогою операцій булевої алгебри або алгебри Жегалкіна. А чи існують інші множини операцій, за допомогою яких можна визначити будь-яку булеву функцію? Які властивості вони мають?

Замиканням множини Σ булевих функцій називається множина [Σ], що складається з функцій, які можна одержати суперпозицією функцій з Σ.

Якщо Σ = [Σ] , то множина булевих функцій Σ називається ***замкненим класом.***

Система булевих функцій $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ називається ***функціонально повною***, якщо її замикання є множиною всіх можливих булевих функцій, що залежать від будь-якого числа змінних.

Для перевірки повноти системи функцій застосовують теорему Поста.

Теорема Поста (критерій повноти Поста). Для того, щоб система булевих функцій $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила:

1) хоча б одну функцію, що не зберігає нуль;
2) хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю;
3) хоча б одну несамодвоїсту функцію;
4) хоча б одну немонотонну функцію;
5) хоча б одну нелінійну функцію.

Інакше кажучи, для повноти системи функцій необхідно і достатньо, щоб для кожного з п’яти замкнених класів T_0, T_1, S, M, L вона містила функцію, яка цьому класу не належить.

Класи функцій. Існують п’ять класів булевих функцій: T_0, T_1, S, M, L, які називають класами Поста:

T_0 — клас функцій, що зберігають нуль;

T_1 — клас функцій, що зберігають одиницю;

S — клас самодвоїстих функцій;

M — клас монотонних функцій;

L — клас лінійних функцій.

Кожний із класів Поста замкнений.

Жоден із класів Поста не вкладається в інший.

Одна і та ж функція може мати кілька властивостей.

Наслідок 1. Доповнення будь-якого з класів Поста функцією, що не входить в цей клас, перетворить таку систему булевих функцій на функціонально повну. Інших класів з такою властивістю не існує.

Повна система булевих функцій називається ***нескоротною,*** якщо з неї не можна виключити жодної функції без втрати властивості повноти.

Наслідок 2. Максимальна кількість булевих функцій у нескоротній функціонально повній системі дорівнює чотирьом, мінімальна – одній.

Приклад. Перевірити, чи є задані функції лінійними, монотонними, самодвоїстими, чи зберігають 0 та/або 1. Зробити висновок щодо функціональної повноти заданого набору функцій

$$xy \vee xz \vee yz, \quad x \oplus y \oplus z, \quad 1.$$

Розв’язання. Для перевірки повноти даної системи функцій складемо таблицю Поста. Для цього необхідно з’ясувати, чи належать функції $\varphi_1 = xy \vee xz \vee yz$, $\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$, $\varphi_3 = 1$ до кожного з класів Поста.

1) Дослідимо функцію φ_1.

Складемо таблицю істинності функції $\varphi_1(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$.

x	y	z	xy	xz	yz	φ_1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

1.1) Булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***функцією, що зберігає 0***, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0: $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

Функція зберігає нуль, оскільки $\varphi_1(0, 0, 0) = 0$.

1.2) Булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***функцією, що зберігає 1***, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 1: $f(1, 1, ..., 1) = 1$.

Функція зберігає одиницю, оскільки $\varphi_1(1,1,1) = 1$.

1.3) ***Самодвоїстість***. Функцію $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають **двоїстою** до функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$.

Функцію, що двоїста сама собі, тобто $f = f^*$, називають **самодвоїстою**.

Щоб побудувати таблицю істинності функції, що двоїста даній, необхідно побудувати таблицю істинності заданої функції, кожне значення булевої функції замінити на протилежне і записати одержаний стовпчик у зворотній послідовності.

Для стовпця значень функції $\varphi_1 = (0001\,0111)$ генеруємо набір протилежних (інверсійних) значень $(1110\,1000)$. Записавши його у зворотній послідовності, одержимо стовпчик значень двоїстої функції

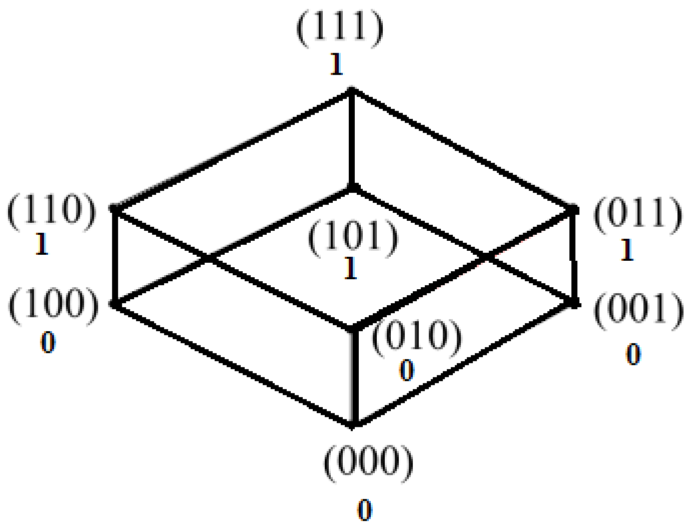
x	y	z	φ_1	φ_1^*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$\varphi_1 = \varphi_1^*$, отже, φ_1 є самодвоїстою функцією.

1.4) **Монотонність**. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ – будь-які набори. Для двох наборів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ виконується ***відношення передування***, якщо $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, ..., \alpha_n \le \beta_n$. Наприклад, набори $\alpha = (0, 1, 0, 1)$ й $\beta = (1, 1, 0, 1)$ знаходяться у відношенні передування, тобто значення набору не зменшується. Набори $(0,1)$ та $(1,0)$ не знаходяться у відношенні передування.

Функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***монотонною***, якщо для будь-яких двох наборів α і β, що знаходяться у відношенні передування (тобто значення набору не зменшується), справджується нерівність $f(\alpha) \le f(\beta)$.

Для перевірки монотонності функції φ_1 побудуємо діаграму Хассе (гіперкуб):



Таким чином, функція є монотонною, оскільки для всіх порівнюваних наборів $(a_1, a_2, a_3) \le (b_1, b_2, b_3)$ виконується нерівність $f(a_1, a_2, a_3) \le f(b_1, b_2, b_3)$ (інакше кажучи, на всіх зростаючих наборах функція не є спадаючою).

1.5) **Лінійність**. Булеву функцію називають ***лінійною***, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних.

Щоб перевірити, чи є функція φ_1 лінійною, побудуємо поліном Жегалкіна методом трикутника.

x	y	z	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	0	0	1	1		
0	1	1	1	1	0	1	0			
1	0	0	0	1	1	1				
1	0	1	1	0	0					
1	1	0	1	0						
1	1	1	1							

Таким чином, $\varphi_1(x, y, z) = yz \oplus xz \oplus xy$. Оскільки поліном Жегалкіна містить кон'юнкції змінних, то функція не є лінійною.

2) Складемо таблицю істинності функції $\varphi_2(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.

x	y	z	$x \oplus y$	φ_2	φ_2^*
0	0	0	0	**0**	0
0	0	1	0	**1**	1
0	1	0	1	**1**	1
0	1	1	1	**0**	0
1	0	0	1	**1**	1
1	0	1	1	**0**	0
1	1	0	0	**0**	0
1	1	1	0	**1**	1

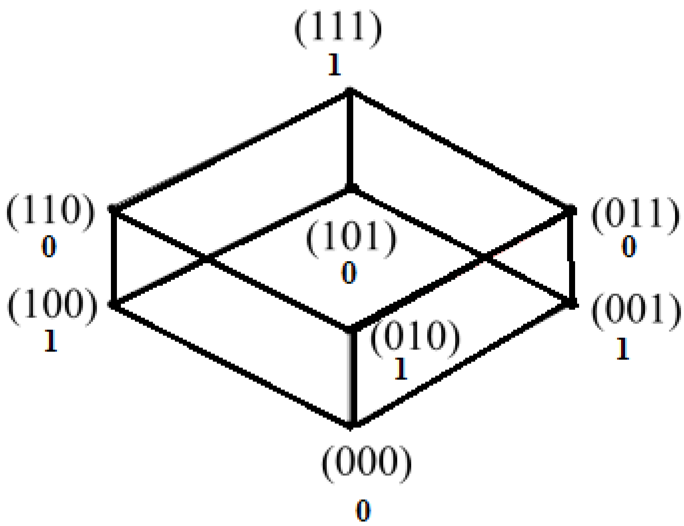
2.1) Функція зберігає нуль, оскільки $\varphi_2(0,0,0)=0$.

2.2) Функція зберігає одиницю, оскільки $\varphi_2(1,1,1)=1$.

2.3) Самодвоїстість. $\varphi_2=\varphi_2^*$, отже, φ_2 є самодвоїстою функцією.

2.4) Монотонність.

Побудуємо діаграму Хассе (гіперкуб):



Таким чином, наприклад $(0,0,1)\le(0,1,1)$, а $g_2(0,0,1)\ge g_2(0,1,1)$, тобто функція g_2 не є монотонною.

2.5) Функція $\varphi_2(x,y,z)=x\oplus y\oplus z$ є лінійною, оскільки задається поліномом Жегалкіна, що не містить кон'юнкцій змінних.

3) Функція $\varphi_3=1$ не зберігає константу 0, є несамодвоїстою, монотонною й лінійною.

Щоб перевірити, чи виконуються для скінченної системи функцій $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ умови теореми Поста, складають ***таблицю Поста***. Її рядки позначають функціями системи, а стовпці – назвами п'яти основних замкнених класів. У клітках таблиці Поста ставлять знак “+” або “–” залежно від того, чи належить функція відповідному замкненому класу.

За результатами досліджень складемо таблицю Поста:

	T_0	T_1	S	M	L
$\varphi_1 = xy \vee xz \vee yz$	+	+	+	+	–
$\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$	+	+	+	–	+
$\varphi_3 = 1$	–	+	–	+	+

За теоремою Поста для повноти системи функцій необхідно і достатньо, щоб у кожному стовпці таблиці Поста стояв хоча б один знак “–”.

Таким чином, заданий набір функцій не є функціонально повним, оскільки не містить хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю.