5.3 Зв’язність графів

5.3.1 Зв’язність простих графів

Дві вершини *v* і *w* графа називаються **зв’язними**, якщо у графі існує маршрут із кінцями *v* та *w* (вершина *v* **досяжна** з вершини *w*).

За означенням кожна вершина зв’язна сама з собою маршрутом довжиною нуль.

Граф називається **зв’язним**, якщо будь-яка пара його вершин є зв’язною.

Граф називають **незв'язним**, якщо він не є зв'язним.

Незв'язний граф складається з двох або більше зв'язних підграфів (**компонент зв'язності** графа), кожна пара з яких не має спільних вершин.

Зв'язність — це бінарне відношення на множині вершин, яке є:

— рефлексивним;

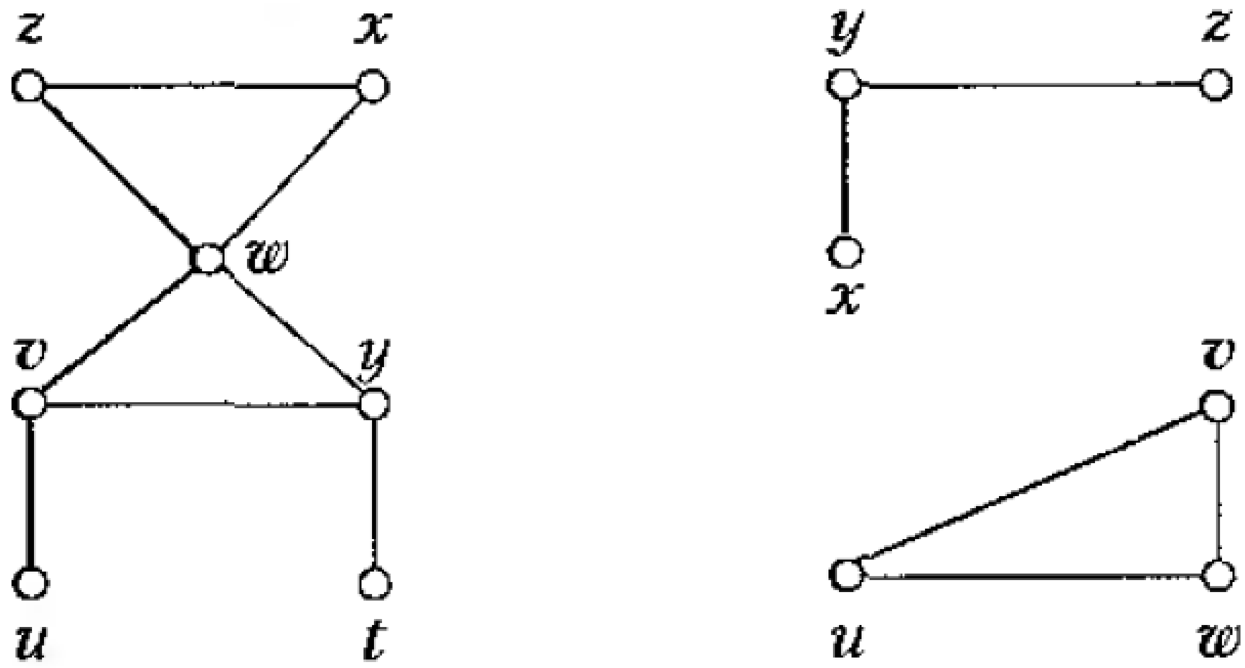
— симетричним;

— транзитивним.

$\Rightarrow$ відношення зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин графу G.

Підграф, утворений всіма вершинами одного класу, називається **компонентною зв'язності** графу G.

Приклад. Граф G — зв'язний; граф H — незв'язний.



G $\qquad$ H

Лема 1

Нехай $G = (V, E)$ — граф із p компонентами зв'язності $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_p = (V_p, E_p)$. Тоді

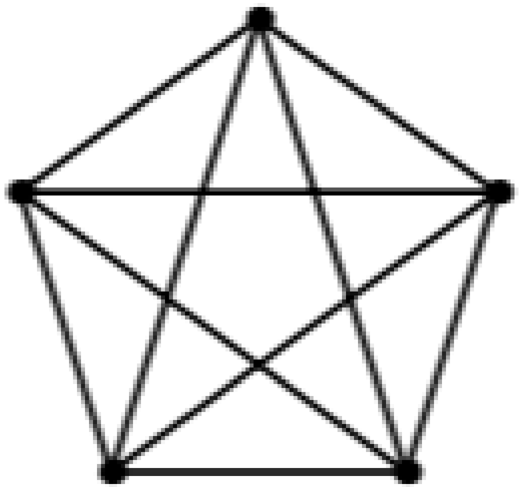
$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_p, \quad E = E_1 \cup \ldots \cup E_p;$$

$$V_i \cap V_j = \varnothing, \quad E_i \cap E_j = \varnothing \text{ при } i \neq j;$$

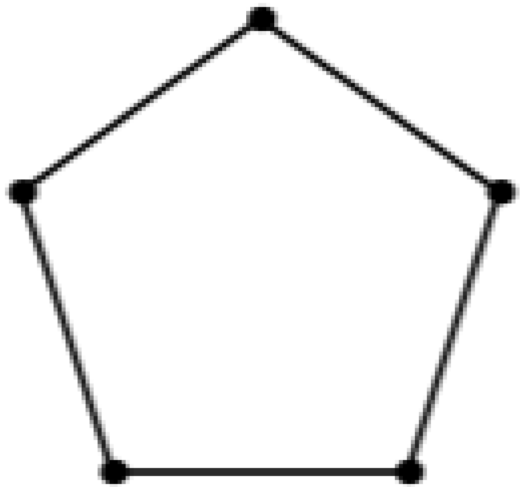
$$n(G_1) + \ldots + n(G_p) = n(G);$$

$$m(G_1) + \ldots + m(G_p) = m(G).$$

Приклад



Граф K_5



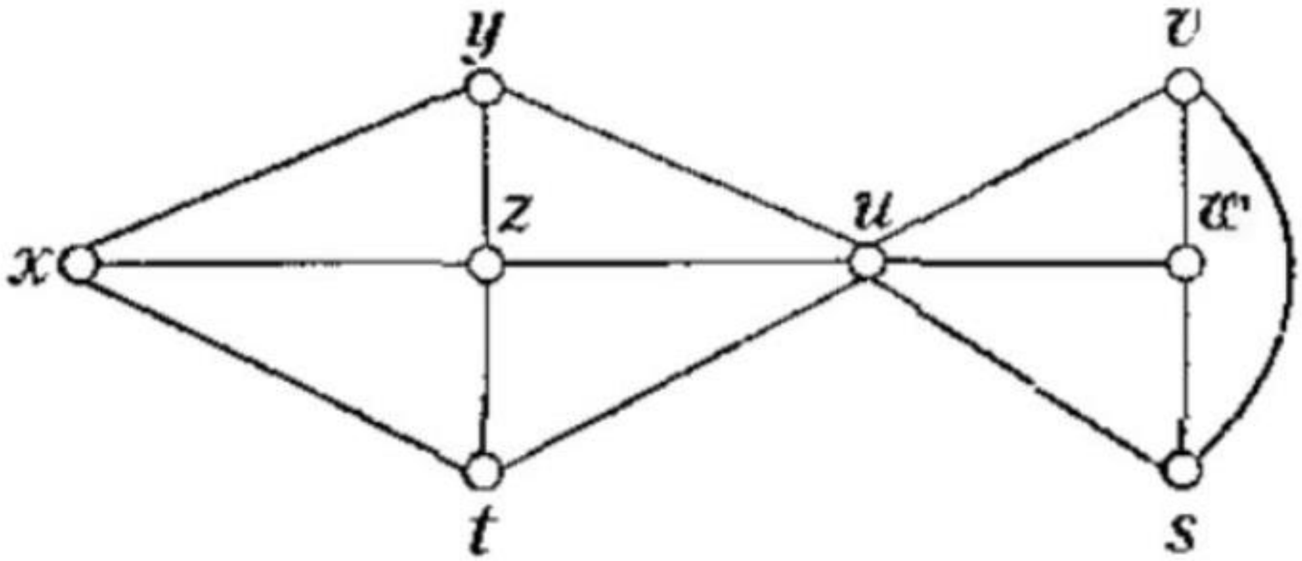
Граф C_5

Числом вершинної зв'язності $\kappa(G)$ простого графу G називають найменшу кількість вершин, вилучення яких утворює незв'язний або одновершинний граф.

Нехай G — простий граф з n>1 вершинами.

Числом реберної зв’язності $\lambda(G)$ графу G називають найменшу кількість ребер, вилучення яких дає незв’язаний граф.

Приклад



число вершинної зв’язності $\kappa(G) = 1$;

число реберної зв’язності $\lambda(G) = 3$.

Вершину u простого графу G називають **точкою з’єднання**, якщо граф G в разі її вилучення матиме більше компонент, ніж даний граф G.

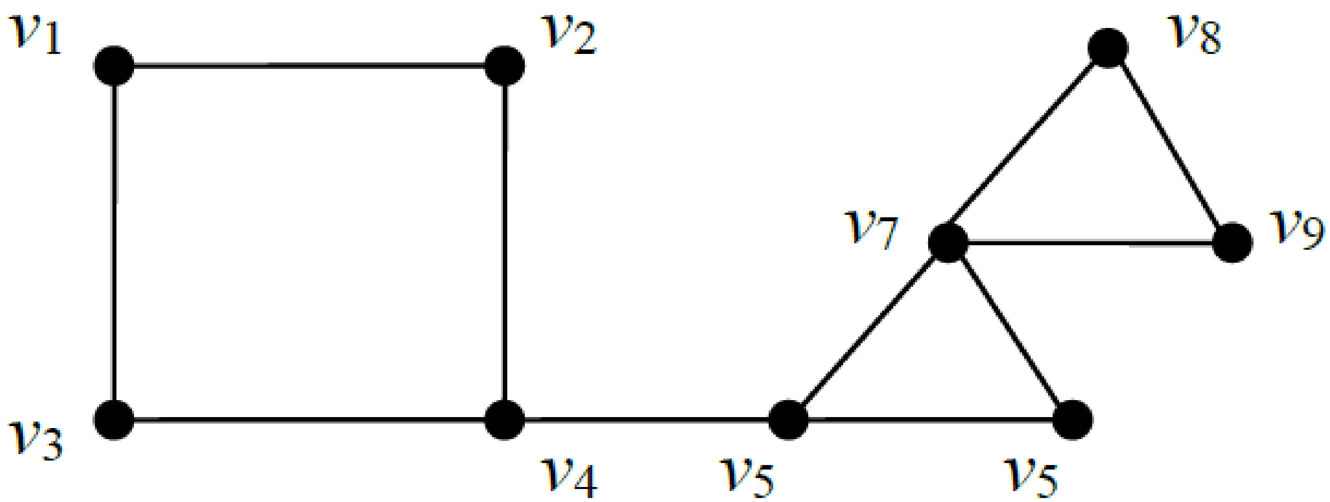
Множина ребер графу називається **розрізом**, якщо вилучення цих ребер з графу G приводить до збільшення кількості компонент зв’язності.

Якщо розріз містить одне ребро, то його називають **мостом**.

Граф називається **роздільним**, якщо він містить хоча б одну точку з’єднання, та **нероздільним** в іншому випадку.

Максимальні нероздільні підграфи графу називаються **блоками**.

Приклад



точки з’єднання: v_4, v_5 та v_7;

міст (v_4, v_5).

Простий граф називається ***t*-зв'язним**, якщо $\kappa(G) \geq t$, тобто, якщо вилучаючи будь-яку його $t-1$ вершину, не можна порушити його зв'язність, а при вилученні деяких t вершин зв'язність може порушитися.

Граф називається ***t*-ребернозв’язним**, якщо $\lambda(G) \geq t$, тобто якщо t — максимальне з таких p, що при вилученні будь-яких $p-1$ ребер зв’язність графу не порушується.

5.3.2 Зв’язність орієнтованих графів

Типи зв'язності орграфів:

— сильно-зв’язний;

— однобічно-зв’язний;

— слабко-зв’язний;

— незв’язний.

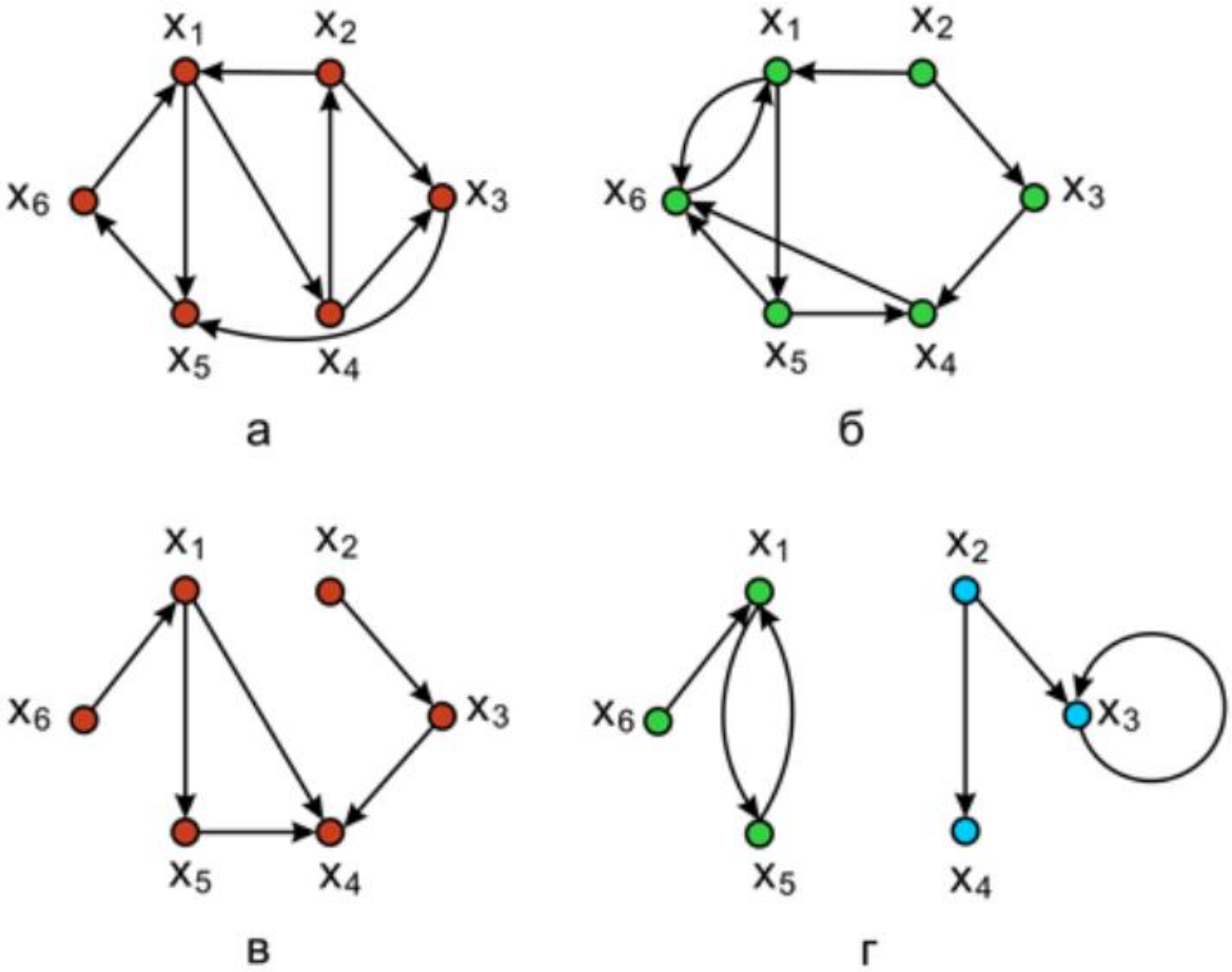
Орієнтований граф називається **сильно-зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин v та w існує шлях в обох напрямках.

Орієнтований граф називається **однобічно-зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин v та w існує шлях хоча б в одному напрямку.

Орієнтований граф називається **слабко-зв'язним**, якщо зв'язним є неорієнтований граф, отриманий з нього заміною орієнтованих ребер на неорієнтовані.

Якщо орієнтований граф не є зв’язним, то він називається **незв’язним**.

Приклад


x_1
x_2
x_6
x_3
x_5
x_4
а
x_1
x_2
x_6
x_3
x_5
x_4
б
x_1
x_2
x_6
x_3
x_5
x_4
в
x_1
x_2
x_6
x_3
x_5
x_4
г

Теорема 1

Орграф є сильно-зв’язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний цикл, тобто цикл, який проходить через всі вершини.

Теорема 2

Орграф є однобічно-зв’язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний шлях.

Півшлях в орієнтованому графі — це послідовність дуг, така, що будь-які дві сусідні дуги різні й мають спільну інцидентну їм вершину.

Півшлях — це шлях без урахування орієнтації дуг.

Теорема 3

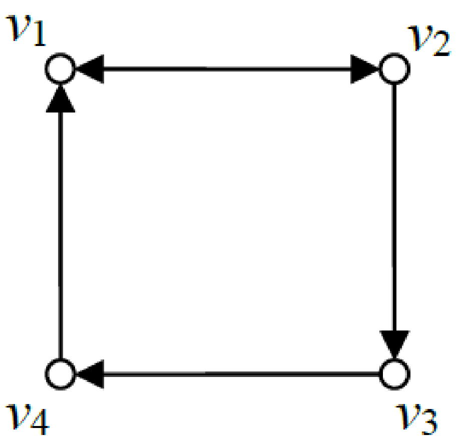
Орграф є слабко-зв’язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є повний півшлях.

5.3.3 Властивості матриць графів

Теорема 4

Нехай G — граф, $\Delta(G)$ — матриця суміжності графу G, яка відповідає заданій нумерації вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тоді кількість різних шляхів довжиною k $(k \in \mathbb{N})$ з вершини v_i у вершину v_j дорівнює $(i,\ j)$-му елементу матриці Δ^k.

Приклад



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta^2 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta^3 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta^4 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матриця відстаней $D = \|d_{ij}\|$,

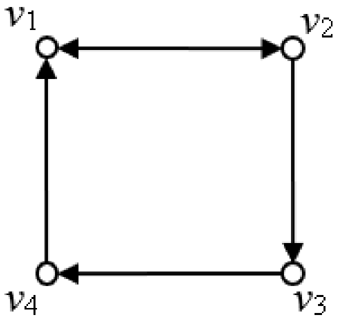
де $d_{ij} = d(i, j)$ — відстань від v_i до v_j, яка визначається як довжина найкоротшого маршруту з v_i у v_j.

Величина d_{ij} не визначена, якщо маршрут з v_i у v_j не існує.

Теорема 5

Нехай граф G має матрицю суміжності Δ та матрицю відстаней D. Тоді, якщо величина d_{ij}, $i \neq j$, визначена, то вона дорівнює найменшому k, для якого елемент (i, j) в Δ^k, тобто $\delta_{ij}^{(k)}$, не дорівнює 0.

Приклад



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta^2 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta^3 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \Delta^4 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$1)\ D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 1 \\ 1 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad 2)\ D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & \infty & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad 3)\ D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 6

Для того, щоб n-вершиний граф з матрицею суміжності Δ мав хоча б один цикл, необхідно й достатньо, щоб матриця $K = \Delta^2+\ldots+\Delta^k$ мала хоча б один ненульовий діагональний елемент.

Матриця досяжності $R(G) = \|r_{ij}\|$:

$r_{ij} = 1$, якщо v_j є досяжною з v_i;

$r_{ij} = 0$ в протилежному випадку.

Довільна вершина досяжна сама із себе, тому $r_{ii} = 1$ для всіх i.

Теорема 7

Нехай Δ — матриця суміжності, R — матриці досяжності графу G з n вершинами. Тоді

$$R = B(I + \Delta + \Delta^2 + \ldots + \Delta^{n-1}) = B[(I + \Delta)^{n-1}],$$

де B — булеве перетворення (B: $N \to \{0, 1\}$;

$$B(x) = 0,\ \text{якщо}\ x = 0;$$

$$B(x) = 1,\ \text{якщо}\ x > 0),$$

I — одинична матриця.

Теорема 8

Нехай R — матриця досяжності орграфу G, Δ — матриця суміжності. Тоді:

1) G сильно-зв'язний тоді й тільки тоді, коли $R = J$, де J — матриця, елементами якої є тільки 1.

2) G однобічно-зв'язний тоді й тільки тоді, коли $B(R + R^{\mathrm{T}}) = J$, де R^{T} — транспонована матриця R;

3) G слабко-зв'язний тоді й тільки тоді, коли $B[(I + \Delta + \Delta^{\mathrm{T}})^{n-1}] = J$, де Δ^{T} — транспонована матриця Δ.