Тема 1.2 Відношення

Застосування відношень:

- при побудові комп'ютерних баз даних;
- в програмуванні.

1.2.1 Декартів добуток

Нехай дані множини A і B.

Множина

$$C = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

називається **декартовим добутком множин** A і B.

Якщо множина A складається з m і множина B складається з n елементів, то множина C складається з $m \cdot n$ елементів.

Приклад

Нехай $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$.

Тоді $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$.

Елементами декартового добутку є **упорядковані пари**, де перший елемент пари належить першій множині, а другий – другій.

Приклад

$B = \{2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$.

Тоді $B \times A = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$.

$A \times B \neq B \times A$ — декартів добуток не має властивості комутативності

Множина

$$C = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

всіх впорядкованих пар елементів із множини A називається **декартовим квадратом множини** A і позначається A^2.

Упорядковані трійки елементів (a_1, a_2, a_3); упорядковані четвірки (a_1, a_2, a_3, a_4) і т.д.

Упорядкована n-ка елементів із множини A — це n не обов'язково різних між собою елементів із A, заданих в певній послідовності.

Декартовим добутком $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається сукупність послідовностей виду $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $a_i \in A_i$, $i = 1, .., n$.

Елементи декартового добутку називають також **кортежами** або **векторами** довжиною n.

Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то декартів добуток $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ називається **декартовим добутком *n*-го степеню множини *A*** (A^n).

Для декартового добутку має місце властивість дистрибутивності відносно об'єднання, перетину і різниці:

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$$

$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$$

$$(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$$

Приклад

Нехай R — множина дійсних чисел, декартів добуток $R \times R$ — множина всіх точок площини.

1.2.2 Відношення

Довільна підмножина множини $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається **відношенням**, заданим або визначеним на множинах A_1, A_2 ,..., A_n.

Коли $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R$, то елементи a_i $(i = 1,..,n)$ *знаходяться* між собою *у відношенні* R або *відношення* R *істинне* для $a_1, a_2, ..., a_n$.

Якщо $(a_1, a_2, ..., a_n) \notin R$, то вважають, що R *хибне* для $a_1, a_2, ..., a_n$.

Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то відношення R, яке задано на множинах $A_1 = A_2 = ... = A_n$, називається ***n*-арним відношенням на множині *A***.

При n=1 відношення називається **унарним**, при n=2 – **бінарним**, при n=3 – **тернарним**.

Приклади бінарних відношень:

відношення включення множин, рівності дійсних чисел, нерівності, бути братом, ділитися на яке-небудь натуральне число, входити до складу якого-небудь колективу.

Бінарні відношення записуються у вигляді співвідношень aRb, де R — відношення, яке встановлює зв’язок між елементами $a \in A$ та $b \in B$.

Приклади бінарних відношень:

1. Якщо A – множина дійсних чисел, то $\{(x,y) \mid x \in A, y \in A, x^2+y^2=4\}$ – бінарне відношення на A.
2. Нехай A – множина товарів в магазині, а B – множина дійсних чисел. Тоді $\{(x,y) \mid x \in A, y \in B, y$ – ціна $x\}$ – відношення на множинах A та B.

Приклади бінарних відношень:

3. Якщо A – множина людей, то

$\{(x,y) \mid x \in A,\ y \in A,\ y$ є рідним $x\}$ – бінарне відношення на A.

Область визначення відношення R на A та B є множина всіх $a \in A$ таких, що для деяких $b \in B$ маємо $(a, b) \in R$.

Множина значень відношення R на A та B є множина всіх $b \in B$ таких, що $(a, b) \in R$ для деяких $a \in A$.

Повне (універсальне) відношення $U = A\times A$ — відношення, яке справджується для будь-якої пари (a_1, a_2) елементів з A.

Приклад. Нехай A – множина студентів групи ІС-21, U — відношення “навчатися в одній групі” у множині A.

Тотожне (діагональне) відношення I — відношення, що виконується тільки між елементом і ним самим.

Наприклад, рівність на множині дійсних чисел.

Порожнє відношення — відношення, яке не задовольняє жодна пара елементів з A.

Приклад. Нехай A — множина жінок, R — відношення “бути братом” у множині A.

Для відношень визначені операції об'єднання, перетину, різниці і доповнення:

- $(a, b) \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_1$ або $(a, b) \in R_2$;
- $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_1$ і $(a, b) \in R_2$;
- $(a, b) \in R_1 \backslash R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_1$ і $(a, b) \notin R_2$;
- $(a, b) \in R' \Leftrightarrow (a, b) \notin R$ (заперечення).

Для відношень мають місце дві нові операції:

- *обернення (симетризація) відношення;*
- *композиція відношень*.

Нехай $R \subseteq A \times B$ є відношення на $A \times B$.

Оберненим (симетричним) відношенням до даного відношення R є відношення R^{-1} на $B \times A$, що визначається наступним чином

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Приклад

Нехай R — “x дільник y”, обернене до нього R^{-1} — “x кратне y”.

Нехай $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$, тоді обернене відношення $R^{-1}=\{(2,1), (4,3), (6,5)\}$.

Нехай

$R \subseteq A \times B$ — відношення на $A \times B$,

$S \subseteq B \times C$ — відношення на $B \times C$.

Композицією відношень R та S є відношення $T \subseteq A \times C$, що визначається наступним чином:

$$T = R \circ S = \{(a, c) \mid a \in A,\ c \in C \text{ та } \exists b \in B,$$

$$(a, b) \in R \text{ та } (b, c) \in S\}.$$

Приклад. Нехай

$R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$,

$S = \{(2,3), (2,7), (4,1), (6,9)\}$, тоді

$$T_1 = R \circ S = \{(1,3), (1,7), (3,1), (5,9)\};$$

$$T_2 = S \circ R = \{(2,4), (4,2)\}.$$

Приклад.

$R = \{(x, x^2) \mid x \in N\}$,

$S = \{(x, x+2) \mid x \in N\}$, тоді

$$T_1 = R \circ S = \{(x, x^2+2) \mid x \in N\},$$

$$T_2 = S \circ R = \{(x, (x+2)^2) \mid x \in N\}.$$

Операція композиції відношень може бути і невизначеною, якщо в множині B для заданих елементів a із A та c із C не існує відповідного елемента b.

Якщо $A = B = C$, то ця операція завжди визначена.

Нехай R — відношення на множині A.

Степенем відношення R на множині A є його композиція із самим собою. Позначається:

$$R^n = R \circ \ldots (n \text{ разів}) \ldots \circ R.$$

$R^0 = I,$

$R^1 = R,$

$R^2 = R \circ R,$

…

$R^n = R^{n-1} \circ R.$

Теорема 2.1. Якщо R, R_1, R_2 – бінарні відношення, задані на множині A, то:

а) $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$;

$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$.

б) $(R^{-1})^{-1} = R$; $R \subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$.

в) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2^{-1}) \circ (R_1^{-1})$.

г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1}) \cap (R_2^{-1})$.

д) $(R \circ R_1) \circ R_2 = R \circ (R_1 \circ R_2)$.

1.2.3 Способи задання відношень

Розглянемо відношення $R \subseteq A \times B$.

Нехай елемент $a_i \in A$.

Перерізом відношення $\boldsymbol{R}$ за елементом $\boldsymbol{a_i}$ називається множина елементів b з B, для яких пара $(a_i, b) \in R$:

$$R(a_i) = \{b \in B \mid (a_i, b) \in R\}.$$

Множину всіх перерізів відношення R називають **фактор-множиною** множини B за відношенням R і позначають B/R.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $R \subseteq A \times B$, $R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)\}$.

$$R(1) = \{2, 4\}, R(2) = \{3\}, R(3) = \{3, 6\}.$$

Множина $B/R = \{R(1), R(2), R(3)\}$ є фактор-множиною множини B за відношенням R.

Матричний спосіб задання відношення:
подання відношення $R \subseteq A \times B$ відповідною йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць,
де на перетині i-го рядка і j-го стовпця буде 1, якщо виконується співвідношення $a_i R b_j$,
або 0 – якщо воно не виконується.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

$R \subseteq A \times B$, $R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)\}$.

Матриця відношення R:

	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	1

Матриця повного (універсального) відношення — це квадратна матриця, що складається лише з одиниць.

Матриця тотожного (діагонального) відношення — це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі.

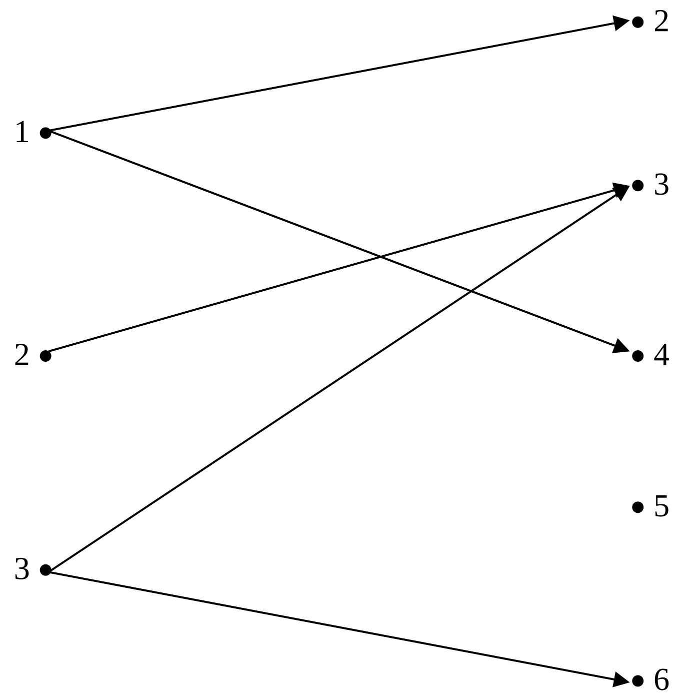
Матриця порожнього відношення — це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

Відношення $R \subseteq A \times B$ можна також зображати за допомогою **орієнтованого графа**.

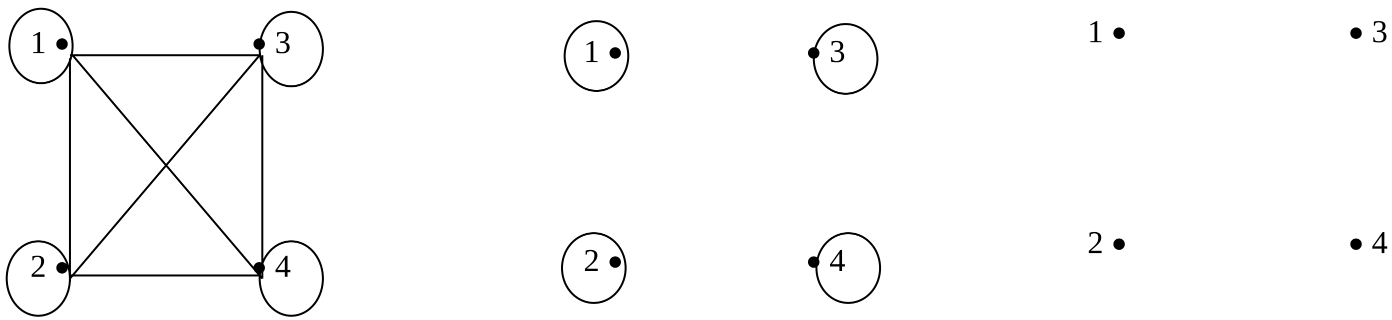
Елементи множин A та B зображуються точками на площині (вершини), а впорядковані пари — лінією зі стрілкою (дуги), яка направлена від a до b, якщо aRb.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $R \subseteq A \times B$, $R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)\}$.

Граф відношення R:



Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$.



а б в

Графи універсального (а), тотожного (б) та порожнього (в) відношень

Матриця оберненого відношення R^{-1} для відношення R — це транспонована матриця відношення R.

Граф оберненого відношення R^{-1} утворюється із графа відношення R заміною всіх дуг на протилежні.

Матриця композиції відношень $T = R \circ S$ утворюється як добуток матриць відношень R та S з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

Приклад. Нехай

$R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)\}$;

$S = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,2)\ (4,3)\}$.

Матриця відношення $T = R \circ S$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Щоб побудувати граф $T = R \circ S$, потрібно до графа відношення R добудувати граф відношення S.

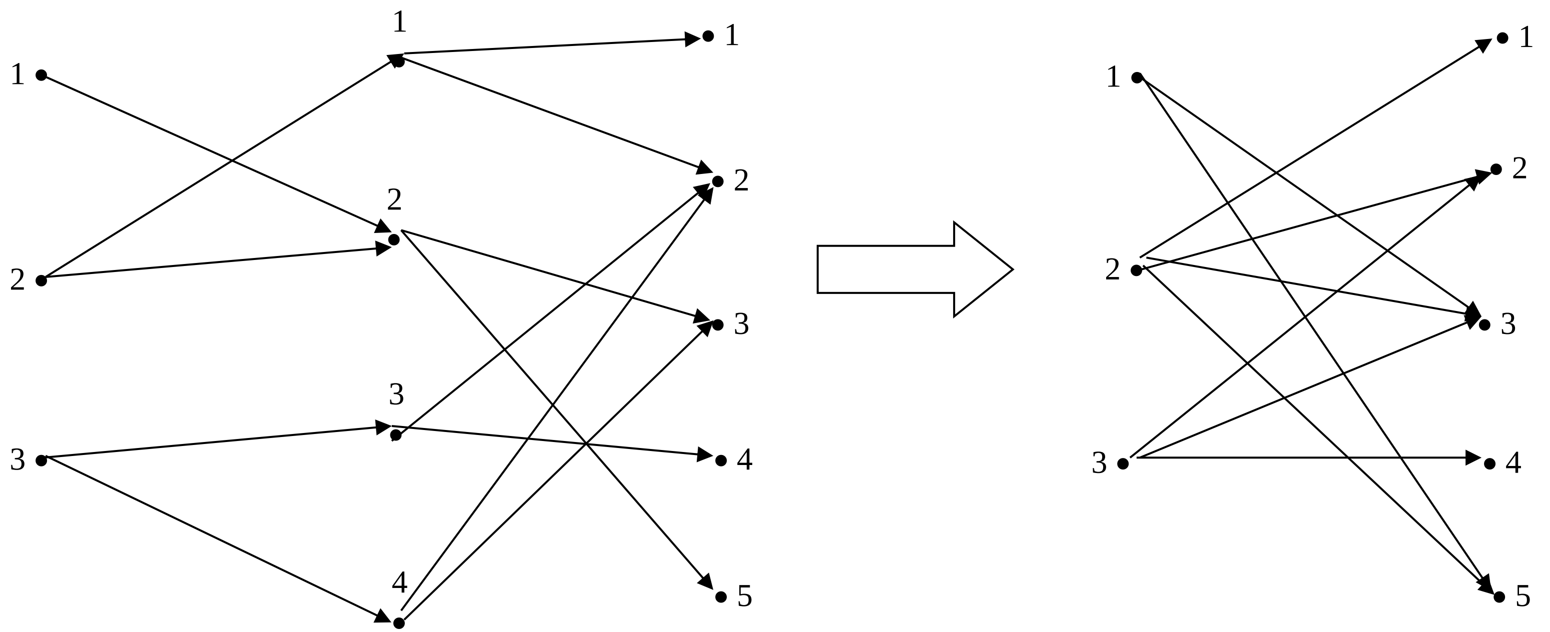
Граф композиції відношень дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини B.

Приклад. Нехай

$R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)\}$;

$S = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,2)\ (4,3)\}$.

Граф композиції відношень:



Якщо відношення R і S задані у вигляді матриць, то для отримання матриці відношення-результату потрібно:

- $R \cup S$ – виконати поелементну диз'юнкцію матриць – одиниці поставити в тих позиціях, де є одиниця або в матриці відношення R, або в матриці відношення S.

- $R \cap S$ – виконати поелементну кон’юнкцію матриць – одиниці поставити в тих позиціях, де є одиниця і в матриці відношення R, і в матриці відношення S.
- $R \setminus S$ – одиниці поставити в тих позиціях, де є одиниця в матриці відношення R, але немає в матриці відношення S.

- $\overline{R}$ – замінити одиниці нулями, а нулі одиницями у матриці відношення R.
- R^{-1} – транспонувати матрицю відношення R.
- $R \circ S$ – матриця композиції відношень утворюється як добуток матриць відношень R і S з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

1.2.4 Властивості бінарних відношень

Нехай R — бінарне відношення на множині A ($R \subseteq A \times A$).

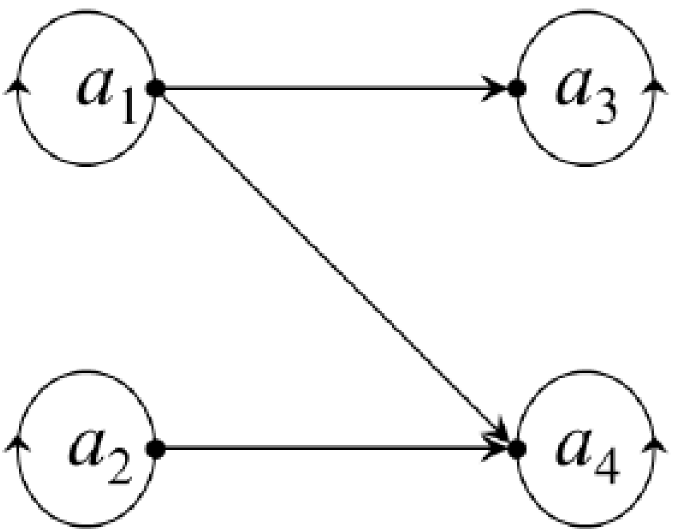
Відношення R на множині A називають **рефлексивним**, якщо $I \subseteq R$, тобто, іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall a \in A$: aRa).

Приклад. Відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці.

Граф рефлексивного відношення – тим, що петлі є у всіх вершинах.

Приклад графа і матриці рефлексивного відношення



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	1	0
a_4	0	0	0	1

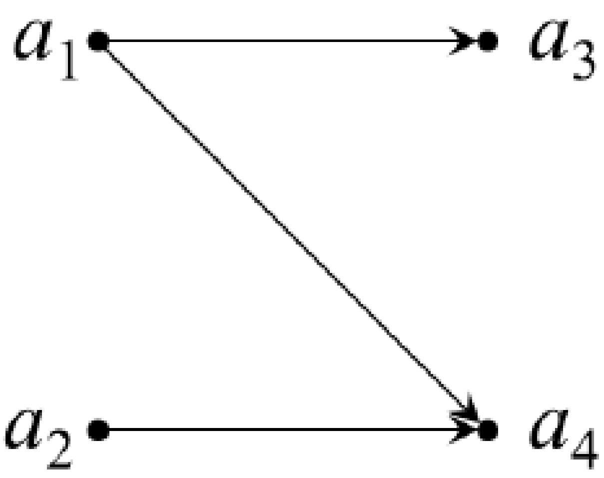
Відношення R на множині A називають **антирефлексивним (іррефлексивним)**, якщо $R \cap I = \varnothing$, тобто якщо співвідношення $a_i R a_j$ виконується, то $a_i \neq a_j$.

Приклад. Відношення строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел; відношення “бути старшим” у множині людей.

Матриця антирефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі.

Граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

Приклад графа і матриці антирефлексивного відношення



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

Приклад. Відношення $\le$ на множині дійсних чисел рефлексивне, відношення $<$ на множині дійсних чисел — антирефлексивне.

Відношення «мати спільний дільник» на множині цілих чисел рефлексивне, відношення «бути сином» на множині людей — антирефлексивне.

Приклад. Відношення «бути симетричним відносно вісі X на множині точок координатної площини» не є ані рефлексивним, ані антирефлексивним.

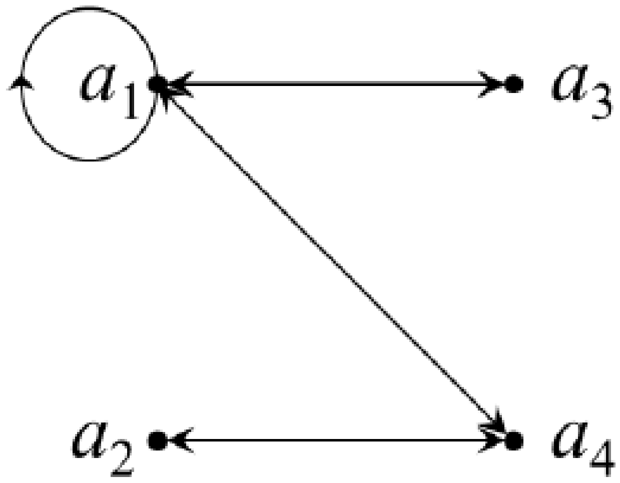
Відношення R на множині A називають **симетричним**, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення $a_i R a_j$ виконується співвідношення $a_j R a_i$.

Приклад. Відстань між двома точками на площині; відношення “бути рідним” на множині людей.

Симетричність відношення спричиняє також симетричність матриці.

Для симетричного відношення вершини графа можуть бути пов’язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (тобто ребрами).

Приклад графа і матриці симетричного відношення



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	1	0	0	0
a_4	1	1	0	0

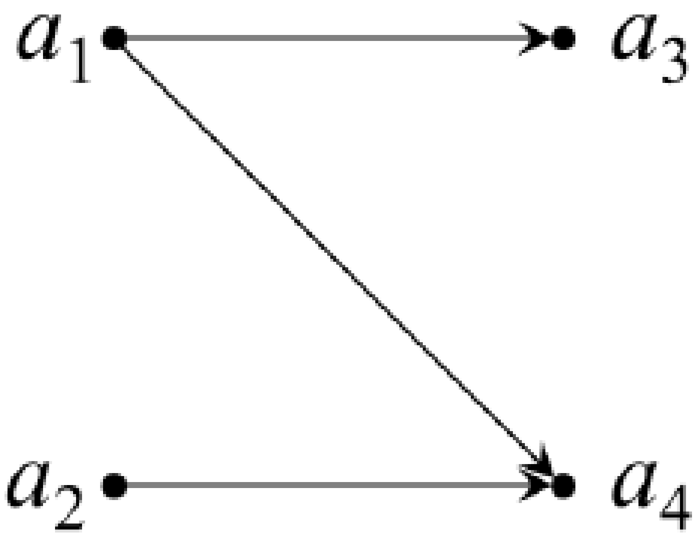
Відношення R на множині A називають **асиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ щонайменше одне не виконується.

Приклад. Відношення “бути батьком” у множині людей; відношення строгого включення в множині всіх підмножин деякого універсуму.

Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі.

У графа такого відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов’язані тільки однією спрямованою дугою.

Приклад графа і матриці асиметричного відношення



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

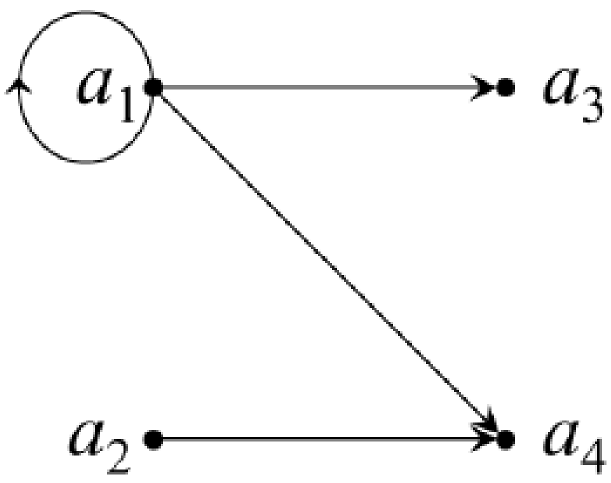
Відношення R на множині A називають **антисиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a_j = a_i$.

Приклад. Нестрога нерівність.

Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі.

У графі такого відношення можуть бути петлі, але зв’язок між вершинами, якщо він є, також відбувається тільки однією спрямованою дугою.

Приклад графа і матриці антисиметричного відношення



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0
a_4	0	0	0	0

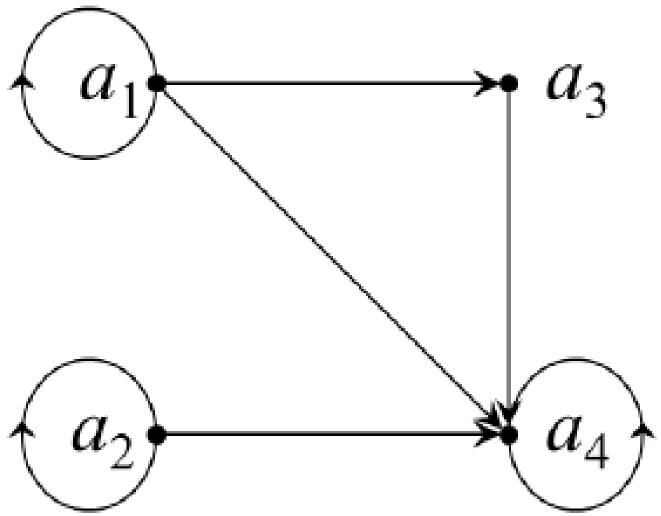
Відношення R на множині A називають **транзитивним**, якщо $R \circ R \subseteq R$, тобто з виконання співвідношень $a_i R a_j$ та $a_j R a_k$ випливає виконання співвідношення $a_i R a_k$.

Приклад. Відношення "бути дільником" на множині цілих чисел; "бути старшим" на множині людей.

Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли R_{ij}=1 й R_{jk}=1, то R_{ik}=1, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивність матриці.

Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з’єднують будь-яку пару вершин з цієї сукупності в напрямку шляху.

Приклад графа і матриці транзитивного відношення



	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	0	1	1
a_2	0	1	0	1
a_3	0	0	0	1
a_4	0	0	0	1

1.2.5 Замикання

Нехай R — бінарне відношення на множині A.

Замиканням відношення R за властивістю називається таке мінімальне відношення, що включає в себе вихідне відношення та має задану властивість.

Рефлексивним замиканням R_I відношення R називається відношення $R_I = R \cup I$, де I – тотожне (або діагональне) відношення.

Приклад. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,

$R = \{(a_1, a_3),(a_3, a_4),(a_4, a_2),(a_3, a_3)\}$.

$R_I=\{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_4, a_4)\}$.

Симетричним замиканням R_S відношення R називається відношення $R_S = R \cup R^{-1}$, тобто якщо $(x_1, x_2) \in R$, то $(x_1, x_2) \in R_S$ та $(x_2, x_1) \in R_S$.

Приклад. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,

$R = \{(a_1, a_3),(a_3, a_4),(a_4, a_2),(a_3, a_3)\}$.

$R_S=\{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), (a_3, a_1), (a_4, a_3), (a_2, a_4)\}$.

Транзитивним замиканням R_T відношення R називається відношення $R_T = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$, де n – кількість елементів множини A.

Приклад. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,

$R = \{(a_1, a_3),(a_3, a_4),(a_4, a_2),(a_3, a_3)\}$.

$R_T = \{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_2), (a_3, a_2)\}$.

1.2.6 Алгоритм Уоршелла побудови транзитивного замикання відношення R

Нехай $R \subseteq A \times A$, $|A| = n$.

Вхід алгоритму: матриця відношення R;

вихід: матриця транзитивного замикання R_T.

Алгоритм Уоршелла

Крок 1. Виконати: $W = R, k = 0$.

Крок 2. Виконати $k = k + 1$.

Крок 3. Для всіх $i \neq k$ таких, що $w_{ik} = 1$, і для всіх j виконати операцію

$$w_{ij} = w_{ij} \vee w_{kj}.$$

Крок 4. Якщо $k = n$, то отримано розв'язок; якщо $k < n$, то перейти до кроку 2.

Примітка. Операція диз'юнкція (логічне «або») (позначення $x \vee y$):

$$0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 0 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1.$$

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq A \times A$,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$W^{(0)} = R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $k = 1$ перший рядок залишаємо без змін $(i = k)$, другий і третій рядки замінюємо на диз'юнкцію кожного з них з першим:

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $k=2$ отримаємо, що $W^{(2)}=W^{(1)}$, оскільки всі елементи другого стовпця матриці $W^{(1)}$ нульові.

Для $k=3$ одержимо

$$W^{(3)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $k = 4$ матимемо остаточний результат — матрицю транзитивного замикання

$$R_T = W^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$