4.2 Числення висловлювань (формальна теорія *L*)

4.2.1 Числення висловлювань

Числення висловлювань — це формальна теорія L, в якій:

1) Алфавіт включає пропозиційні літери: A, B, C,... з індексами або без; пропозиційні зв'язки: $\neg$ (заперечення) та $\rightarrow$ (імплікація); допоміжні символи: (та);

2) Визначення формули числення L:

- довільна пропозиційна літера є формулою;
- якщо A та B формули, то формулами також є $(\neg A)$ та $(A \rightarrow B)$;
- інших формул в численні L не існує.

3) У численні L визначена нескінченна множина аксіом, які будуються за допомогою трьох **схем аксіом**:

А1. $A \to (B \to A)$;

А2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

А3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$.

4) У численні L визначено єдине правило виведення МP: $A, A \to B \vdash B$.

Приклад. Зі схеми $A1$. $A \to (B \to A)$ матимемо:

- $A \to (A \to A)$;
- $(A \to B) \to (B \to (A \to B))$;
- $A \to (\neg A \to A)$.

Вирази для логічних зв'язок $\wedge$, $\vee$, ~ через імплікацію та заперечення:

- $A \wedge B = \neg(A \to \neg B)$;
- $A \vee B = \neg A \to B$;
- $A \sim B = \neg((A \to B) \to \neg(B \to A))$.

Теорема *L*1. $\vdash A \to A$

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ $A2$
2. $A \to ((A \to A) \to A)$ $A1$
3. $A \to (A \to A)$ $A1$
4. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ MP (1,2)
5. $A \to A$ MP (3,4)

Теорема *L*2. $A \vdash B \to A$

1. A гіпотеза

2. $A \to (B \to A)$ $A1$

3. $B \to A$ MP (1,2)

Теорема *L*3. $\vdash (\neg A \to A) \to A$

1. $(\neg A \to \neg A) \to ((\neg A \to A) \to A)$ $\quad$ $A3$

2. $\neg A \to \neg A$ $\quad$ $L1$

3. $(\neg A \to A) \to A$ $\quad$ MP (1,2)

4.2.2 Теорема дедукції

Теорема 1 (теорема дедукції Ербрана)

Нехай Γ — множина формул, A і B — формули й $\Gamma, A \vdash B$. Тоді $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Теорема 2 (зворотна теорема дедукції)

Якщо існує вивід $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, то формула B виводиться з Γ та A, тобто якщо $\Gamma \vdash A \rightarrow B$, то $\Gamma, A \vdash B$.

Наслідок 1 (правило силогізму)

$A \to B,\ B \to C \vdash A \to C.$

<u>Наслідок 2</u> (правило видалення середньої посилки)

$A \to (B \to C),\ B \vdash A \to C.$

4.2.3 Приклади виведень у теорії *L*

Теорема *L*4. $\vdash \neg\neg A \to A$

1.	$(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$	A3
2.	$\neg A \to \neg A$	$L1$
3.	$(\neg A \to \neg\neg A) \to A$	наслідок 2 до 1,2
4.	$\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$	A1
5.	$\neg\neg A \to A$	наслідок 1 до 3,4

Теорема $L5$. $\vdash A \to \neg\neg A$

1. $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$ A3
2. $\neg\neg\neg A \to \neg A$ $L4$
3. $(\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$ MP (2,3)
4. $A \to (\neg\neg\neg A \to A)$ A1
5. $A \to \neg\neg A$ наслідок 1 до 3,4

Теорема *L*6. $\vdash \neg A \to (A \to B) \Leftrightarrow \neg A, A \vdash B$

1. $\neg A$ гіпотеза 1
2. A гіпотеза 2
3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ A3
4. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ A1
5. $A \to (\neg B \to A)$ A1
6. $\neg B \to \neg A$ MP (1,4)
7. $\neg B \to A$ MP (2,5)
8. $(\neg B \to A) \to B$ MP (3,5)
9. B MP (7,9)

Теорема *L*7. $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \iff \neg A \to \neg B \vdash B \to A$

1. $\neg A \to \neg B$ — гіпотеза
2. $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ — А3
3. $(\neg A \to B) \to A$ — МР (1,2)
4. $B \to (\neg A \to B)$ — А1
5. $B \to A$ — наслідок 1 до 3,4

Теорема ***L*8.** $\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B) \Leftrightarrow B \to A \vdash \neg A \to \neg B$

1.	$B \to A$	гіпотеза
2.	$\neg\neg B \to B$	$L4$
3.	$A \to \neg\neg A$	$L5$
4.	$\neg\neg B \to A$	наслідок 1 з 1,2
5.	$\neg\neg B \to \neg\neg A$	наслідок 1 з 3,4
6.	$(\neg\neg B \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg B)$	$L7$
7.	$\neg A \to \neg B$	MP (5,6)

Теорема *L*9. $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B)) \Leftrightarrow A \vdash \neg B \to \neg(A \to B)$

1. A гіпотеза
2. $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ $L8$
3. $A, A \to B \vdash B$ правило MP
4. $A \vdash (A \to B) \to B$ теорема дедукції до 3
5. $(A \to B) \to B$ MP (1,4)
6. $\neg B \to \neg(A \to B)$ MP (2,5)

Теорема *L*10. $\vdash (A\to B) \to ((\neg A\to B) \to B) \Leftrightarrow A\to B, \neg A\to B \vdash B$

1.	$A\to B$	гіпотеза 1
2.	$\neg A\to B$	гіпотеза 2
3.	$(A\to B) \to (\neg B\to \neg A)$	$L8$
4.	$(\neg A\to B) \to (\neg B\to \neg\neg A)$	$L8$
5.	$\neg B\to \neg A$	MP (1,3)
6.	$\neg B\to \neg\neg A$	MP (2,4)
7.	$(\neg B\to \neg\neg A) \to ((\neg B\to \neg A) \to B)$	A3
8.	$(\neg B\to \neg A) \to B$	MP (6,7)
9.	B	MP (5,8)

4.2.4 Методи перевірки тотожної істинності формул логіки висловлювань

1) побудова таблиці істинності;
2) зведення довільної формули логіки висловлювань до ДНФ або КНФ;
3) побудова для обраної формули виводу у формальній теорії L;
4) метод Квайна;
5) метод редукції.

Метод Квайна

Нехай $\{A_1, A_2,\ldots, A_n\}$ — упорядкована множина пропозиційних літер, що зустрічаються у формулі $P(A_1, A_2,\ldots, A_n)$.

Візьмемо першу з літер — A_1 і припишемо їй, наприклад, значення T (F). Підставимо це значення у формулу P і виконаємо обчислення, які можуть виникнути в результаті такої підстановки.

Після виконання обчислень одержимо деяку формулу $P'(A_2,\ldots, A_n)$, до якої знову застосовується описана процедура, тобто вибираємо літера A_2, приписується їй значення T (F), виконується обчислення і т.д.

Приклад 1. $P = (((A \wedge B) \to C) \wedge (A \to B)) \to (A \to C)$.

1) $A = \mathrm{T}$:

$$P = (((\mathrm{T} \wedge B) \to C) \wedge (\mathrm{T} \to B)) \to (\mathrm{T} \to C) =$$

$$= ((B \to C) \wedge B) \to C = P'.$$

1.1) $B = \mathrm{T}$:

$P' = ((\mathrm{T} \to C) \wedge \mathrm{T}) \to C = (C \wedge \mathrm{T}) \to C = C \to C$ — тавтологія.

1.2) $B = \mathrm{F}$:

$P' = ((\mathrm{F} \to C) \wedge \mathrm{F}) \to C = (\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}) \to C = \mathrm{F} \to C = \mathrm{T}$.

2) A = F:

$$P = (((\mathrm{F}\wedge B)\to C) \wedge (\mathrm{F}\to B)) \to (\mathrm{F}\to C) =$$

$$= ((\mathrm{F}\to C) \wedge \mathrm{T}) \to \mathrm{T} = (\mathrm{T}\wedge\mathrm{T}) \to \mathrm{T} = \mathrm{T}\to\mathrm{T} = \mathrm{T}.$$

Дана формула є тавтологією.

Метод редукції

Нехай формула P має вигляд імплікації: $P = A \to B$.

Припустимо, що для деякої інтерпретації I формула P приймає значення F. Тоді A = T та B = F.

Таким чином, перевірка формули P зводиться до перевірки формул A та B.

Після цього даний процес застосовується до формул A та B і т.д.

Приклад 2. $P = ((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$.

Нехай для деякої інтерпретації I маємо P = F.

Тоді $(A \wedge B) \to C$ = T, а $A \to (B \to C)$ = F.

Застосуємо цю процедуру до другої з формул.

Отримуємо A = T та $B \to C$ = F.

Звідси знаходимо, що A = T, B = T, C = F.

Але при отриманих значеннях $(A \wedge B) \to C$ = F, що суперечить припущенню.

Отже, формула P тотожньо істинна.

Приклад 3. Перевірити, чи є дана формула тавтологією

$$A \to \big((A \to B) \to B\big).$$

1 спосіб. За допомогою таблиці істинності:

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$A \to \big((A \to B) \to B\big)$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

Приклад 3. $A \to \big((A \to B) \to B\big)$.

2 спосіб. Метод редукції

Припустимо що, $A \to \big((A \to B) \to B\big) = F$.

Тоді $(A \to B) \to B = F$ та $A = T$.

З першого виразу: $A \to B = T$ та $B = F \;\Rightarrow\; A = F$.

Раніше ми отримали, що $A = T$.

Отже, ми прийшли до суперечності. Таким чином, наше припущення було невірне, тобто формула є тавтологією.

Приклад 3. $A \to \big((A \to B) \to B\big)$.

3 спосіб. Метод Квайна

Нехай $A = T$, тоді $T \to ((T \to B) \to B)$.

Якщо $B = T$, то $T \to ((T \to T) \to T) = T$.

Якщо $B = F$, то $T \to ((T \to F) \to F) = T$.

Нехай $A = F$, тоді $F \to ((F \to B) \to B)$.

Якщо $B = T$, то $F \to \big((F \to T) \to T\big) = T$.

Якщо $B = F$, то $F \to ((F \to F) \to F) = T$.

Таким чином, формула є тавтологією.

Приклад 4. Довести теорему в рамках логіки L:

1) $A \to \big((A \to B) \to B\big)$.

$A \vdash \big((A \to B) \to B\big)$

$A, (A \to B) \vdash B$

1. A Г1
2. $A \to B$ Г2
3. B MP(1,2)

Приклад 4. Довести теорему в рамках логіки L:

2) $\neg A \to (A \to B)$.

$\neg A, \quad A \vdash B$

1.	$\neg A$	Г1
2.	A	Г2
3.	$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$	А3
4.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	А1
5.	$A \to (\neg B \to A)$	А1
6.	$\neg B \to \neg A$	MP(1,4)
7.	$\neg B \to A$	MP(2,5)
8.	$(\neg B \to A) \to B$	MP(3,6)
9.	B	MP(7,8)

Приклад 4. Довести теорему в рамках логіки L:

3) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$.

$(A \to \neg B) \vdash (B \to \neg A)$

1.	$A \to \neg B$	Г1
2.	$(A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg A)$	L8
3.	$\neg\neg B \to \neg A$	MP(1,2)
4.	$B \to \neg\neg B$	L5
5.	$B \to \neg A$.	Правило силогізму (3,4)

Приклад 4. Довести теорему в рамках логіки L:

4) $A \to B, A \to (B \to C) \vdash A \to C$.

1.	$A \to B$	Г1
2.	$A \to (B \to C)$	Г2
3.	A	ЗТД(1)
4.	B	МР(1,3)
5.	$A \to C$	Правило видалення середньої посилки (2,4)