ЛЕКЦІЯ 7

ОСНОВНІ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закон розподілу найбільш повно характеризує випадкову величину і дозволяє обчислювати ймовірності всіх подій, зв'язаних з випадковою величиною. Проте при розв'язанні багатьох практичних задач важливу роль відіграють числові значення, які дають деяку узагальнену, усереднену характеристику випадкової величини та її розподілу. Ці значення називаються *числовими характеристиками* випадкової величини. Основними з них є математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення та моменти різних порядків.

Для їх знаходження не треба знати точні закони розподілу випадкових величин, встановлення яких часто пов'язане з значними труднощами. В той же час числові характеристики в багатьох випадках вичерпують наші потреби в даних про випадкову величину.

7.1. Математичне сподівання випадкової величини та його властивості

Розглянемо спочатку дискретну випадкову величину X, задану рядом розподілу (табл. 7.1):

Таблиця 7.1. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини*

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n

В табл. 7.1 сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх її можливих значень на ймовірності, з якими випадкова величина приймає ці значення (7.1):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot p_i). \tag{7.1}$$

Із означення випливає, що математичне сподівання є величина невипадкова (стала). Вона має такий ймовірнісний зміст: математичне сподівання при великій кількості випробувань наближено дорівнює середньому арифметичному можливих значень випадкової величини, які вона приймала в цих випробуваннях. Тому математичне сподівання $M(X)$ називають ще *середнім значенням* випадкової величини.

Перейдемо до обчислення математичного сподівання неперервної випадкової величини X, заданої щільністю ймовірності $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$.

Розіб'ємо $(a; b]$, довільно на n частинних інтервалів з довжинами $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ і виберемо на кожному частинному інтервалі довільну точку $x_1, x_2, \dots, x_n$. Будемо вважати, що на i-му частинному інтервалі випадкова величина приймає стале можливе значення, що дорівнює x_i $(i = 1,2, \dots, n)$. Ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал Δx_i дорівнює $f(x_i) \cdot \Delta x_i$, тому по аналогії з математичним сподіванням дискретної випадкової величини (7.1) одержимо

$$M(X) \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x_i).$$

Наближена рівність виникає внаслідок припущення про сталість можливих значень випадкової величини на кожному частинному інтервалі. Для усунення цієї наближеності перейдемо до границі за умови, що довжина найбільшого частинного інтервалу прямує до нуля:

$$M(X) = \lim_{max\Delta x_i \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x_i)\right)$$

або за означенням визначеного інтегралу від функції $x \cdot f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то отримаємо рівність (7.2):

$$M(X) = \int_a^b (x \cdot f(x))dx. \qquad (7.2)$$

Якщо неперервна випадкова величина задана щільністю ймовірності $f(x)$ при $x \in (-\infty; +\infty)$, то то отримаємо рівність (7.3):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x \cdot f(x))dx. \qquad (7.3)$$

Ясно, що в цьому випадку для існування математичного сподівання випадкової величини невласний інтеграл повинен бути збіжним. Це ж зауваження стосується і дискретної випадкової величини, у якої множина можливих значень нескінченна, і для якої формула (7.1) приймає вигляд (7.4):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{+\infty}(x_i \cdot p_i). \qquad (7.4)$$

Математичне сподівання цієї випадкової величини існує при умові збіжності ряду в правій частині.

Приклад 7.1. *Випадкова величина X – число надійних приладів в системі має ряд розподілу* (*табл.* 7.2).

Таблиця 7.2. *Ряд розподілу випадкової величини X*

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Знайти $M(X)$.

Розв'язання. Математичне сподівання заданої дискретної величини обчислюється за формулою (7.1)

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4.$$

Відповідь. $M(X) = 2{,}4$.

Приклад 7.2. *Ймовірність події A дорівнює p. Знайти математичне сподівання кількості появ події A в одному випробуванні.*

Розв'язання. Випадкова величина X — кількість появ події A в одному випробуванні приймає два можливі значення: $x_1 = 1$ (подія A відбулась) з ймовірністю p і $x_2 = 0$ (подія A не відбулась) з ймовірністю $q = 1 - p$, тому

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Відповідь. Математичне сподівання кількості появ події A в одному випробуванні дорівнює ймовірності цієї події.

Приклад 7.3. *Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} ln(x), & \text{при } x \in (1; e]; \\ 0, & \text{при } x \notin (1; e]. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання $M(X)$.

Розв'язання. Для знаходження математичного сподівання і використання в подальших прикладах обчислимо частинами інтеграл

$\int_1^e (x^n \cdot ln\,(x))\,dx = \begin{vmatrix} u = ln(x)\,; dv = x^n dx \\ du = \frac{dx}{x}\,; v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{vmatrix} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot ln(x)\,\Big|_1^e - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\Big|_1^e = \frac{n \cdot e^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

Тоді за формулою (7.2)

$$M(X) = \int_1^e (x \cdot ln\,(x))\,dx = \frac{e^2+1}{4} \approx 2{,}1.$$

Відповідь. $M(X) \approx 2{,}1$.

Властивості математичного сподівання випадкової величини

1. *Якщо* C *– константа, то* $M(C) = C$.

Доведення. Константу C можна розглядати, як випадкову величину, що приймає значення C з ймовірністю 1 (*табл.* 7.3).

Таблиця 7.3. *Ряд розподілу випадкової величини* C

x_i	$\bar{C}$	C
p_i	0	1

Тому $M(C) = \bar{C} \cdot 0 + C \cdot 1 = C$.

Для розгляду наступної властивості математичного сподівання дамо означення суми (різниці) випадкових величин.

Сумою (*різницею*) *двох випадкових величин* X *та* Y називається така випадкова величина, що приймає значення $x_i \pm y_j$ $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$ з ймовірністю $p_{ij} = P\{(X = x_i)(Y = y_j)\}$.

2. *Математичне сподівання суми (різниці) двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:*

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

Доведення. Згідно означення суми (різниці) двох випадкових величин

$$M(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left((x_i \pm y_j) \cdot p_{ij}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i \cdot p_{ij}) \pm \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j \cdot p_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right) \pm \sum_{j=1}^{m}\left(y_j \cdot \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot p_i) \pm \sum_{j=1}^{m}(y_j \cdot p'_j) = M(X) \pm M(Y).$$

Для розгляду наступної властивості математичного сподівання дамо деякі означення.

Добутком двох випадкових величин X та Y називається така випадкова величина, що приймає значення $x_i \cdot y_j$ $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m})$ з ймовірністю $p_{ij} = P\{(X = x_i)(Y = y_j)\}$.

Дві випадкові величини X і Y називаються *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення приймає друга величина.

3. *Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин і Y дорівнює добутку їх математичних сподівань:*

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Доведення. Згідно означення добутку двох випадкових величин

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left((x_i \cdot y_j) \cdot p_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left((x_i \cdot y_j) \cdot (p_i \cdot p'_j) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i \cdot p_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_j \cdot p'_j) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot p_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} (y_j \cdot p'_j).$$

$$= M(X) \cdot M(Y).$$

Методом математичної індукції властивість 3 поширюється на довільну кількість n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n).$$

4. *Сталий множник C можна виносити за знак математичного сподівання:*

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

Доведення. Оскільки випадкова величина $C \cdot X$ приймає значення $C \cdot x_i$ $(i = \overline{1, n})$, то

$$M(C \cdot X) = \sum_{i=1}^{n} \left((C \cdot x_i) \cdot p_i \right) = C \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot p_i) = C \cdot M(X).$$

5. *Математичне сподівання відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ дорівнює нулю:*

$$M\left(X - M(X)\right) = 0.$$

Доведення. Нехай константа C є математичним сподіванням $C = M(X)$. Тоді, враховуючи властивість 2, отримуємо

$$M(X - C) = M(X) - C = C - C = 0.$$

7.2. Дисперсія випадкової величини та її властивості. Середнє квадратичне відхилення

Як уже відзначалося, математичне сподівання характеризує випадкову величину в середньому. Проте, випадкові величини, які мають одне і те ж математичне сподівання, можуть істотно відрізнятися законом розподілу. Отже, математичне сподівання недостатньо характеризує розподіл випадкової величини, так само, як, наприклад, однакова середня заробітна плата на двох підприємствах не дає уявлення про співвідношення низько і високооплачуваних категорій працівників цих підприємств.

Тому для характеристики випадкової величини важливо оцінити принаймні в середньому міру її розкиду (розсіювання) навколо математичного сподівання. За таку міру природно було б прийняти математичне сподівання відхилення випадкової величини. Проте за властивістю 5 ця величина дорівнює нулю і, отже, не може бути характеристикою розсіювання. Тому за міру розсіювання прийнята інша величина, яка називається дисперсією і поряд з математичним сподіванням відноситься до основних характеристик випадкової величини.

Дисперсією (*розсіюванням*) $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата її відхилення (7.5):

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \qquad (7.5)$$

Виходячи з формул (7.1) і (7.2) для математичного сподівання, одержуємо формули для обчислення дисперсії:

- для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу (табл. 7.1) отримаємо рівність (7.6):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}((x_i - M(X))^2 \cdot p_i). \qquad (7.6)$$

- для неперервної випадкової величини, заданої щільністю ймовірності $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ отримаємо рівність (7.7):

$$D(X) = \int_a^b((x - M(X))^2 \cdot f(x))dx. \qquad (7.7)$$

Очевидними перетвореннями із застосуванням властивостей 1 і 2 математичного сподівання виразу для дисперсії (7.5) можна надати іншого вигляду:

$$D(X) = M\left(X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X) + \left(M(X)\right)^2\right) =$$

$$= M(X^2) - 2 \cdot M(X) \cdot M(X) + \left(M(X)\right)^2 = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2.$$

Отже, дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом її математичного сподівання (7.8):

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2. \qquad (7.8)$$

Квадрат випадкової величини X, заданої рядом розподілу (табл. 7.1), є випадкова величина X^2, яка приймає можливі значення x_i^2 з ймовірностями p_i $(i = \overline{1, n})$, оскільки, як тільки випадкова величина X приймає певне можливе значення, наприклад, x_1, величина X^2 приймає можливе значення x_1^2.

Тому для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини X, крім формули (7.6), можна застосувати формулу (7.9):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 \cdot p_i\right) - \left(M(X)\right)^2. \qquad (7.9)$$

і, відповідно, для неперервної на відрізку $(a; b]$ випадкової величини, крім формули (7.7), формулу (7.10):

$$D(X) = \int_a^b(x^2 \cdot f(x))dx - \left(M(X)\right)^2. \qquad (7.10)$$

Якщо неперервна випадкова величина задана щільністю ймовірності $f(x)$ при $x \in (-\infty; +\infty)$, то отримаємо рівність (7.11):

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2 \cdot f(x))dx - \left(M(X)\right)^2. \qquad (7.11)$$

Приклад 7.4. *Випадкова величина X має ряд розподілу* (*табл.* 7.4).

Таблиця 7.4. *Ряд розподілу випадкової величини X*

x_i	0	1	2	3
p_i	0,6	0,2	0,1	0,1

Знайти дисперсію $D(X)$.

Розв'язання. Математичне сподівання за формулою (7.1) дорівнює

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}7.$$

Знайдемо математичне сподівання квадрата цієї випадкової величини:

$$M(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}5.$$

За формулою (7.9)

$$D(X) = 1{,}5 - 0{,}49 = 1{,}01.$$

Відповідь. $D(X) = 1{,}01$.

Приклад 7.5. *Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} ln(x), \text{при } x \in (1; e]; \\ 0, \quad \text{при } x \notin (1; e]. \end{cases}$$

Знайти дисперсію $D(X)$.

Розв'язання. Дисперсію обчислимо за формулою (7.8). Математичне сподівання $M(X)$ знайдено в прикладі 7.3: $M(X) = \frac{e^2+1}{4} \approx 2{,}1$.

Використовуючи формулу (7.2), одержимо

$$M(X^2) = \int_1^e (x^2 \cdot ln\,(x))\,dx = \frac{2 \cdot e^3 + 1}{9} \approx 4{,}57.$$

Отже,

$$D(X) \approx 4{,}57 - 4{,}41 \approx 0{,}16.$$

Відповідь. $D(X) \approx 0{,}16$.

Властивості дисперсії випадкової величини

1. *Дисперсія сталої величини C дорівнює нулю:*

$$D(C) = 0.$$

Доведення. За означенням дисперсії (7.5)

$$D(C) = M\big(C - M(C)\big)^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

2. *Сталу величину C можна виносити за знак дисперсії, підносячи її до квадрату:*

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X).$$

Доведення. За означенням дисперсії (7.5)

$$D(C \cdot X) = M\big(C \cdot X - M(C \cdot X)\big)^2 = M(C \cdot X - C \cdot M(X))^2$$
$$= C^2 \cdot M\big(X - M(X)\big)^2 = C^2 \cdot D(X).$$

3. *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин:*

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Доведення. За формулою (7.8)

$$D(X \pm Y) = M(X \pm Y)^2 - \left(M(X \pm Y)\right)^2 =$$
$$= M(X^2 \pm 2 \cdot X \cdot Y + Y^2) - \left(M(X) \pm M(Y)\right)^2 =$$
$$= M(X^2) \pm M(2 \cdot X \cdot Y) + M(Y^2) - \left(M(X)\right)^2 \mp 2 \cdot M(X) \cdot M(Y) - \left(M(Y)\right)^2.$$

Враховуючи властивості 3 та 4 математичного сподівання, отримуємо

$$D(X \pm Y) = M(X^2) \pm 2 \cdot M(X) \cdot M(Y) - \left(M(Y)\right)^2 + M(Y^2) - \left(M(X)\right)^2 \mp 2 \cdot$$
$$\cdot M(X) \cdot M(Y) - \left(M(Y)\right)^2 =$$
$$= \left(M(X^2) - \left(M(X)\right)^2\right) + \left(M(Y^2) - \left(M(Y)\right)^2\right) =$$
$$= D(X) + D(Y).$$

4. *Дисперсія суми випадкової величини X і сталої величини C дорівнює дисперсії випадкової величини X:*

$$D(X + C) = D(X).$$

Доведення. За властивостями 1 та 3 дисперсії

$$D(X + C) = D(X) + D(C) = D(X) + 0 = D(X).$$

Ще однією характеристикою розсіювання випадкової величини є середнє квадратичне відхилення. Оскільки за означенням дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, то для характеристики розсіювання зручніше застосовувати арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії. Ця величина називається *середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини і позначається $\sigma(X)$ (7.12):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (7.12)$$

Приклад 7.6. *Випадкова величина X має ряд розподілу* (*табл.* 7.5).

Таблиця 7.5. *Ряд розподілу випадкової величини X*

x_i	$-0{,}1$	x_2	$0{,}2$	$0{,}4$
p_i	$0{,}3$	$0{,}1$	p_3	p_4

1. *Знайти x_2, p_3, p_4, якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 0{,}13$ та дисперсія $D(X) = 0{,}0341$.* **2.** *Скласти функцію розподілу випадкової величини X.* **3.** *Знайти ймовірність попадання цієї випадкової величини в інтервал* $(-0{,}05; 0{,}2]$.

Розв'язання. **1.** Складаємо систему рівнянь.

1-ше рівняння:

$$M(X) = -0{,}1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot p_3 + 0{,}4 \cdot p_4$$
$$= -0{,}03 + 0{,}1 \cdot x_2 + 0{,}2 \cdot p_3 + 0{,}4 \cdot p_4.$$

Отже, рівняння матиме вигляд:

$$-0{,}03 + 0{,}1 \cdot x_2 + 0{,}2 \cdot p_3 + 0{,}4 \cdot p_4 = 0{,}13;$$
$$0{,}1 \cdot x_2 + 0{,}2 \cdot p_3 + 0{,}4 \cdot p_4 = 0{,}16;$$
$$x_2 + 2 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = 1{,}6.$$

2-ге рівняння:

$$D(X) = (-0{,}1)^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}1 + (0{,}2)^2 \cdot p_3 + (0{,}4)^2 \cdot p_4 - (0{,}13)^2 =$$
$$= 0{,}003 + 0{,}1 \cdot x_2^2 + 0{,}04 \cdot p_3 + 0{,}16 \cdot p_4 - 0{,}0169$$
$$= 0{,}1 \cdot x_2^2 + 0{,}04 \cdot p_3 + 0{,}16 \cdot p_4 - 0{,}0139.$$

Отже, рівняння матиме вигляд:

$$0{,}1\cdot x_2^2+0{,}04\cdot p_3+0{,}16\cdot p_4-0{,}0139=0{,}0341;$$
$$0{,}1\cdot x_2^2+0{,}04\cdot p_3+0{,}16\cdot p_4=0{,}048;$$
$$x_2^2+0{,}4\cdot p_3+1{,}6\cdot p_4=0{,}48.$$

<u>3-тє рівняння:</u>

$$0{,}3+0{,}1+p_3+p_4=1.$$

Отже, рівняння матиме вигляд:

$$p_3+p_4=0{,}6.$$

Отримуємо наступну систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_2+2\cdot p_3+4\cdot p_4=1{,}6;\\ x_2^2+0{,}4\cdot p_3+1{,}6\cdot p_4=0{,}48;\\ p_3+p_4=0{,}6, \end{cases} \begin{cases} x_2-2\cdot p_3=-0{,}8;\\ x_2^2-1{,}2\cdot p_3=-0{,}48;\\ p_4=0{,}6-p_3. \end{cases}$$

Якщо помножити перше рівняння системи на $-0{,}6$ та додати до другого, отримаємо:

$$x_2^2-0{,}6\cdot x_2=0.$$
$$x_2=0 \text{ або } x_2=0{,}6.$$

Дана система має єдиний розв'язок: $x_2=0$; $p_3=0{,}4$; $p_4=0{,}2$, оскільки при $x_2=0{,}6$ значення ймовірностей p_3, p_4 не задовольняють третьому рівнянню системи.

Тоді остаточний ряд розподілу випадкової величини X матиме вигляд (табл. 7.6)

Таблиця 7.6. *Ряд розподілу випадкової величини X*

x_i	$-0{,}1$	0	0,2	0,4
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

2. Функція розподілу матиме вигляд (формула (6.3) минулої лекції):

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le -0{,}1;\\ 0{,}3, \text{ при } -0{,}1<x\le 0;\\ 0{,}4, \text{ при } 0<x\le 0{,}2;\\ 0{,}8, \text{ при } 0{,}2<x\le 0{,}4;\\ 1, \text{ при } x>0{,}4. \end{cases}$$

3. Обчислимо $P\{-0{,}05<X\le 0{,}2\}$ двома способами.

<u>1 спосіб</u>

За рядом розподілу випадкової величини X (табл. 7.6) обираємо значення x_i, які потрапляють в потрібний інтервал та додаємо їх ймовірності згідно теореми додавання ймовірностей несумісних подій. В результаті отримуємо:

$$P\{-0{,}05<X\le 0{,}2\}=P\{X=0\}+P\{X=0{,}2\}=0{,}1+0{,}4=0{,}5.$$

<u>2 спосіб</u>

За формулою (6.6) минулої лекції

$$P\{-0{,}05<X\le 0{,}2\}=P\{-0{,}05\le X<0{,}2\}-P\{X=-0{,}05\}+P\{X=0{,}2\}$$
$$= F(0{,}2)-F(-0{,}05)-F(-0{,}05+0)+F(-0{,}05)+F(0{,}2+0)-F(0{,}2)=F(0{,}2+0)-F(-0{,}05+0)=0{,}8-0{,}3=0{,}5.$$

Відповідь. 1. $x_2 = 0;\ p_3 = 0{,}4;\ p_4 = 0{,}2;$ 2. $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le -0{,}1; \\ 0{,}3, & \text{при } -0{,}1 < x \le 0; \\ 0{,}4, & \text{при } 0 < x \le 0{,}2; \\ 0{,}8, & \text{при } 0{,}2 < x \le 0{,}4; \\ 1, & \text{при } x > 0{,}4; \end{cases}$ 3. $P\{-0{,}05 < X \le 0{,}2\} = 0{,}5.$

Приклад 7.7. *Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу*:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 1; \\ A \cdot \sqrt[3]{x-1}, \text{при } 1 < x \le 9; \\ 1, \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Знайти: **а)** *параметр A*; **б)** *щільність ймовірності $f(x)$*; **в)** *числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$*; **г)** *ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде можливого значення з інтервалу* $(1; 3)$.

Розв'язання. а) За властивістю 4 функції розподілу $F(9) = 2 \cdot A = 1$, звідки $A = \frac{1}{2}$.

б) Щільність ймовірності:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 1; \\ \dfrac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}, \text{при } 1 < x \le 9; \\ 1, \text{при } x > 9. \end{cases}$$

в) Математичне сподівання обчислюємо за формулою (7.2):

$$M(X) = \int_1^9 (x \cdot f(x))dx = \int_1^9 \left(x \cdot \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)dx = \left| \begin{matrix} t^3 = x - 1 \\ dx = 3 \cdot t^2 dt \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 (t^3 + 1)dt = 3.$$

Дисперсію обчислюємо за формулою (7.10), знову застосовуючи при інтегруванні заміну змінної $t^3 = x - 1$:

$$D(X) = \int_1^9 (x^2 \cdot f(x))dx - 3^2$$

$$= \int_1^9 \left(x^2 \cdot \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)dx - 9 = \left| \begin{matrix} t^3 = x - 1 \\ dx = 3 \cdot t^2 dt \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 (t^3 + 1)^2 dt - 9 \approx 5{,}143.$$

$$\sigma(X) \approx 2{,}268.$$

г) Ймовірність того, що в результаті випробування X набуде можливого значення з інтервалу $(0; 1)$, знайдемо за формулою (6.6) минулої лекції:

$$P\{1 < X < 3\} = F(3) - F(1) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \approx 0{,}63.$$

Відповідь. 1. $A = \frac{1}{2}$; 2. $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 1; \\ \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}, \text{при } 1 < x \le 9; \\ 1, \text{при } x > 9; \end{cases}$ 3. $M(X) = 3;\ D(X) \approx 5{,}143;\ \sigma(X) \approx 2{,}268;$ 4. $P\{1 < X < 3\} \approx 0{,}63.$

7.3. Центральний та початковий моменти

Початковим моментом порядку k випадкової величини X (k – натуральне число) називається математичне сподівання величини X^k (7.13):

$$v_k(X) = M(X^k). \qquad (7.13)$$

Для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу (табл. 7.1), початковий момент k-го порядку згідно з означенням математичного сподівання обчислюється за формулою (7.14):

$$v_k(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^k \cdot p_i\right). \qquad (7.14)$$

Для неперервної випадкової величини X, що має щільність розподілу $f(x)$ при $x \in (-\infty; \infty)$, початковий момент k-го порядку виражається інтегралом (7.15):

$$v_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^k \cdot f(x))dx. \qquad (7.15)$$

Розглянемо вирази для початкових моментів першого і другого порядків, що дасть змогу пов’язати початкові моменти з основними числовими характеристиками випадкової величини — математичним сподіванням і дисперсією (7.16):

$$v_1(X) = M(X), v_2(X) = M(X^2). \qquad (7.16)$$

Тоді формулу (7.12) для обчислення дисперсії можна записати у вигляді (7.17):

$$D(X) = v_2(X) - v_1^2(X). \qquad (7.17)$$

Центральним моментом порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання величини $\left(X - M(X)\right)^k$ (7.18):

$$\mu_k(X) = M\left(X - M(X)\right)^k. \qquad (7.18)$$

Для дискретної випадкової величини з рядом розподілу (табл. 7.1) маємо рівність (7.19):

$$\mu_k(X) = \sum_{i=1}^{n}((x_i - M(X))^k \cdot p_i). \qquad (7.19)$$

Для неперервної випадкової величини зі щільністю розподілу $f(x)$ при $x \in (-\infty; +\infty)$ маємо рівність (7.20):

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}((x - M(X))^k \cdot f(x))dx, \qquad (7.20)$$

Зауважимо, що відхилення $X - M(X)$ — також випадкова величина, але приведена до центру (середнього значення) можливих значень випадкової величини X. Тому величину $\dot{X} = X - M(X)$ називають ще центрованою випадковою величиною, звідки походить назва центральних моментів.

Розглянемо центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го і 4-го порядків, найчастіше застосовувані на практиці, і встановимо їхній зв’язок із початковими моментами.

За властивістю 5 математичного сподівання отримуємо рівність (7.21):

$$\mu_1(X) = M\left(X - M(X)\right) = 0, \qquad (7.21)$$

а за означенням дисперсії — рівність (7.22):

$$\mu_2(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = D(X). \qquad (7.22)$$

Прирівнюючи (7.17) і (7.22), одержимо рівність (7.23):

$$\mu_2(X) = v_2(X) - v_1^2(X). \qquad (7.23)$$

Розкриваючи степінь $(X - M(X))^3$, дістаємо вираз центрального момента 3-го порядку через початкові моменти (7.24):

$$\mu_3(X) = M\big(X - M(X)\big)^3 = v_3(X) - 3 \cdot v_2(X) \cdot v_1(X) + 2 \cdot v_1^3(X), \quad (7.24)$$

Аналогічно, розкривши степінь $(X - M(X))^4$, дістанемо вираз центрального момента 4-го порядку через початкові моменти (7.25):

$$\mu_4(X) = v_4(X) - 4 \cdot v_3(X) \cdot v_1(X) + 6 \cdot v_2(X) \cdot v_1^2(X) - 3 \cdot v_1^4(X). \quad (7.25)$$

В загальному випадку маємо формулу (7.26):

$$\mu_k = \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \cdot C_k^s \cdot v_{k-s}(X) \cdot v_1^s(X). \qquad (7.26)$$

Приклад 7.8. *Знайти початкові і центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го і 4-го порядків дискретної випадкової величини X — кількості надійних приладів у системі, ряд розподілу якої наведено в табл. 7.7.*

Таблиця 7.7. Ряд розподілу випадкової величини X

x_i	0	1	2	3
p_i	0,6	0,2	0,1	0,1

Розв'язання. Математичні сподівання випадкової величини X та її квадрата обчислено у прикладі 7.4:

$$M(X) = 0{,}7;\ M(X^2) = 1{,}5.$$

Отже, за формулами (7.16)

$$v_1(X) = 0{,}7;\ v_2(X) = 1{,}5;$$

$$v_3(X) = 0^3 \cdot 0{,}6 + 1^3 \cdot 0{,}2 + 2^3 \cdot 0{,}1 + 3^3 \cdot 0{,}1 = 3{,}7;$$

$$v_4(X) = 0^4 \cdot 0{,}6 + 1^4 \cdot 0{,}2 + 2^4 \cdot 0{,}1 + 3^4 \cdot 0{,}1 = 9{,}9.$$

Обчислимо центральні моменти, використовуючи формули (7.21)-(7.25).

Дисперсію знайдено в прикладі 7.4: $D(X) = 1{,}01$, тому:

$$\mu_1(X) = 0;\ \mu_2(X) = 1{,}01;$$

$$\mu_3(X) = 3{,}7 - 3 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}7 + 2 \cdot (0{,}7)^3 = 4{,}386 - 3{,}15 = 1{,}236;$$

$$\mu_4(X) = 9{,}9 - 4 \cdot 3{,}7 \cdot 0{,}7 + 6 \cdot 1{,}5 \cdot (0{,}7)^2 - 3 \cdot (0{,}7)^4 = 14{,}31 - 11{,}0803 = 3{,}2297.$$

Відповідь. $v_1(X) = 0{,}7$; $v_2(X) = 1{,}5$; $v_3(X) = 3{,}7$; $v_4(X) = 9{,}9$; $\mu_1(X) = 0$; $\mu_2(X) = 1{,}01$; $\mu_3(X) = 1{,}236$; $\mu_4(X) = 3{,}2297$.

Приклад 7.9. *Задано функцію щільності ймовірностей*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} \quad x \le -3; \\ \dfrac{3 \cdot (x+3) \cdot (1-x)}{32}, \text{при} -3 < x \le 1; \\ 0, \quad \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Обчислити початкові та центральні моменти 2-го та 3-го порядків.

Розв'язання. За формулою (7.15) обчислюємо початкові моменти 2-го та 3-го порядків.

$$v_2(X) = \int_{-3}^{1} \big(x^2 \cdot f(x)\big) dx = \int_{-3}^{1} \left(x^2 \cdot \frac{3 \cdot (x+3) \cdot (1-x)}{32}\right) dx = \frac{3}{32} \cdot \int_{-3}^{1} (3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 - x^4)\, dx = \frac{9}{5};$$

$$v_3(X) = \int_{-3}^{1} \big(x^3 \cdot f(x)\big) dx = \int_{-3}^{1} \left(x^3 \cdot \frac{3 \cdot (x+3) \cdot (1-x)}{32}\right) dx = \frac{3}{32} \cdot \int_{-3}^{1} (3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^4 - x^5)\, dx = -\frac{17}{5}.$$

За формулою (7.20) обчислюємо початкові моменти 2-го та 3-го порядків.

$$M(X)=\int_{-3}^{1}\left(x\cdot f(x)\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(x\cdot\frac{3\cdot(x+3)\cdot(1-x)}{32}\right)dx=\frac{3}{32}\cdot$$
$$\cdot\int_{-3}^{1}(3\cdot x-2\cdot x^2-x^3)\,dx=-1;$$
$$\mu_2(X)=\int_{-3}^{1}\left((x+1)^2\cdot f(x)\right)dx=\int_{-3}^{1}\left((x+1)^2\cdot\frac{3\cdot(x+3)\cdot(1-x)}{32}\right)dx$$
$$=\frac{3}{32}\cdot\int_{-3}^{1}(3+4\cdot x-2\cdot x^2-4\cdot x^3-x^4)\,dx=\frac{4}{5};$$
$$\mu_3(X)=\int_{-3}^{1}\left((x+1)^3\cdot f(x)\right)dx=\int_{-3}^{1}\left((x+1)^3\cdot\frac{3\cdot(x+3)\cdot(1-x)}{32}\right)dx$$
$$=\frac{3}{32}\cdot\int_{-3}^{1}(3+7\cdot x+2\cdot x^2-6\cdot x^3-5\cdot x^4-x^5)\,dx=0.$$

Відповідь. $v_2(X)=1{,}8$; $v_3(X)=-3{,}4$; $\mu_2(X)=0{,}8$; $\mu_3(X)=0$.

Приклад 7.10. *Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу*

$$f(x)=\begin{cases}ln(x), & \text{при } x\in(1;e];\\ 0, & \text{при } x\notin(1;e].\end{cases}$$

Обчислити початкові та центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків.

Розв'язання. Для обчислення інтегралів використаємо наступну формулу:

$$\int_1^e(x^n\cdot ln\,(x))\,dx=\frac{n\cdot e^{n+1}+1}{(n+1)^2}.$$

Тоді початкові моменти дорівнюватимуть:

$$v_1(X)=\frac{e^2+1}{4}\approx 2{,}1;\; v_2(X)=\frac{2\cdot e^3+1}{9}\approx 4{,}57;$$
$$v_3(X)=\frac{3\cdot e^4+1}{16}\approx 10{,}3;\; v_4(X)=\frac{4\cdot e^5+1}{25}\approx 23{,}79.$$

Центральні моменти обчислюються за формулами (7.21)-(7.25). Дисперсію даної випадкової величини знайдено у прикладі 7.5.

$$\mu_1(X)=0;\; \mu_2(X)\approx 0{,}16;$$
$$\mu_3(X)=10{,}3-3\cdot 4{,}57+2\cdot(2{,}1)^3\approx 0{,}031;$$
$$\mu_4(X)=23{,}79-4\cdot 10{,}3+6\cdot 4{,}57\cdot(2{,}1)^2-3\cdot(2{,}1)^4\approx -0{,}152.$$

Відповідь. $v_1(X)\approx 2{,}1$; $v_2(X)\approx 4{,}57$; $v_3(X)\approx 10{,}3$; $v_4(X)\approx 23{,}79$; $\mu_1(X)=0$; $\mu_2(X)\approx 0{,}16$; $\mu_3(X)\approx 0{,}031$; $\mu_4(X)\approx -0{,}152$.

7.4. Коефіцієнти асиметрії та ексцесу

Коефіцієнт асиметрії (*Skewness*) — числова характеристика розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини. Коефіцієнт асиметрії характеризує асиметрію розподілу випадкової величини відносно її середнього значення (рис. 7.2).

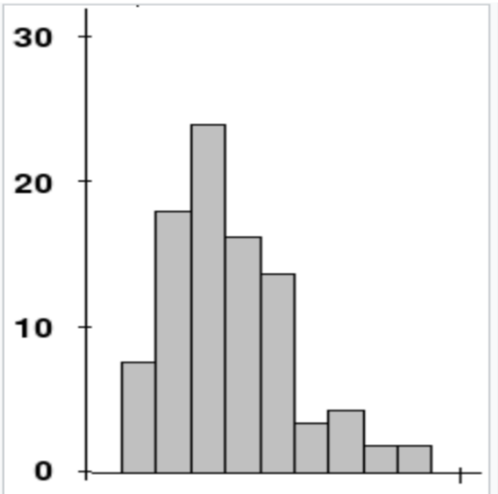

Рис. 7.2. Приклад експериментальних даних з ненульовою асиметрією

Асиметрією $As(X)$ (коефіцієнт асиметрії Фішера) теоретичного розподілу ймовірностей випадкової величини називають відношення центрального моменту третього порядку $\mu_3(X)$ до куба середнього квадратичного відхилення $\sigma^3(X)$ (7.27):

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}. \qquad (7.27)$$

Властивості

1. *Для еталонного (нормального) розподілу* $\frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = 0$; *із чого випливає, що коефіцієнт асиметрії нормального розподілу дорівнює* 0 (*рис.* 7.3).
2. *Асиметрія додатна, якщо «довша частина» розподілу знаходиться праворуч від математичного сподівання; асиметрія від'ємна, якщо «довша частина» кривої знаходиться ліворуч від математичного сподівання.*
3. *На практиці, знак асиметрії визначають за положенням кривої відносно моди: якщо «довша» частина кривої знаходиться правіше моди, то асиметрія додатня, якщо лівіше — від'ємна* (*рис.* 7.4).

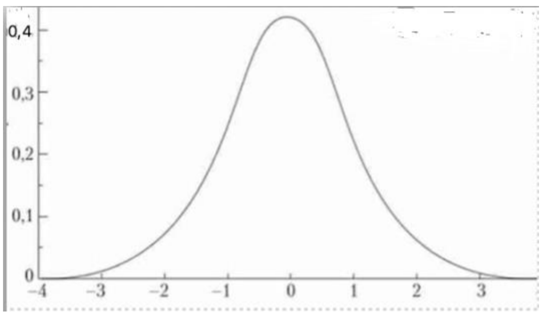

Рис. 7.3. Графік еталонного (нормального) розподілу

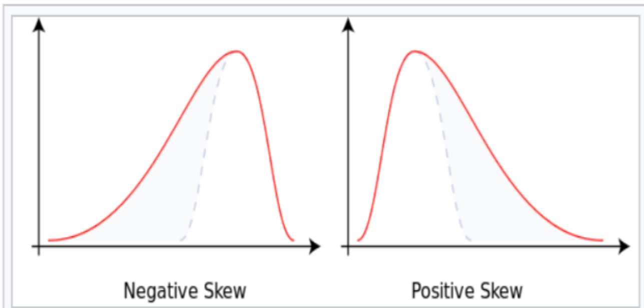

Рис. 7.4. Крива ліворуч має від'ємну асиметрію, крива праворуч – додатну

Приклад 7.11. *Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} ln(x), & \text{при } x \in (1; e]; \\ 0, & \text{при } x \notin (1; e]. \end{cases}$$

Обчислити коефіцієнт асиметрії для даної випадкової величини.

Розв'язання. В прикладі 7.10 обчислено $\mu_2(X) \approx 0{,}16$; $\mu_3(X) \approx 0{,}031$.
Обчислимо середньоквадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{\mu_2(X)} \approx 0{,}4$.

Отже за формулою (7.27)

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} \approx \frac{0{,}031}{(0{,}4)^3} \approx 0{,}484.$$

Тобто «довша» частина кривої знаходиться правіше моди або математичного сподівання.

Відповідь. $As(X) \approx 0{,}484$.

Приклад 7.12. *Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} & x \le -3; \\ \dfrac{3\cdot(x+3)\cdot(1-x)}{32}, \text{при} -3 < x \le 1; \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Обчислити коефіцієнт асиметрії для даної випадкової величини.

Розв'язання. В прикладі 7.9 обчислено $\mu_2(X) \approx 0{,}8$; $\mu_3(X) = 0$.

Обчислимо середньоквадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{\mu_2(X)} \approx 0{,}89$.

Отже за формулою (7.27)

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = 0.$$

Тобто крива є симетричною.

Правильність отриманих результатів можна побачити на графіку функції щільності (рис. 7.1).

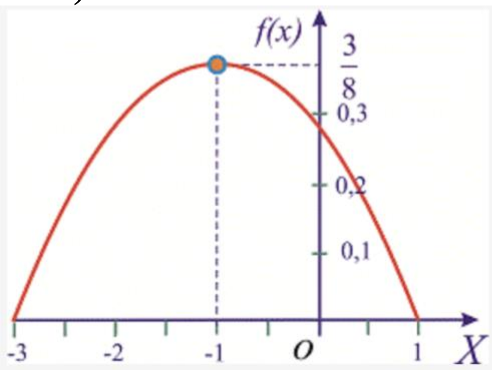

Рис. 7.1. Графік функції щільності $f(x)$

Відповідь. $As(X) = 0$

Коефіцієнт ексцесу (*Kurtosis*) — числова характеристика розподілу ймовірностей дійсної випадкової величини. Коефіцієнт ексцесу характеризує «крутість», тобто, стрімкість підвищення кривої розподілу у порівнянні з нормальною кривою.

Ексцесом $Es(X)$ теоретичного розподілу називають характеристику, що обчислюється за такою формулою (7.28):

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3, \qquad (7.28)$$

$\mu_4(X)$ – центральний момент 4-го порядку, $\sigma^4(X)$ – квадрат дисперсії.

Властивості

1. *Для еталонного (нормального) розподілу* $\frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} = 3$; *із чого випливає, що ексцес нормального розподілу дорівнює* 0.

2. *Якщо ексцес деякого розподілу відмінний від нуля, то крива щільності цього розподілу відрізняється від кривої щільності нормального розподілу: якщо ексцес додатній, то крива теоретичного має вищу та «гострішу» вершину ніж крива нормального; якщо ексцес від'ємний, то крива* *теоретичного має нижчу та «плоскішу» вершину ніж крива нормального. При цьому вважається, що нормальний і теоретичний розподіли мають однакові математичні сподівання та дисперсії.*

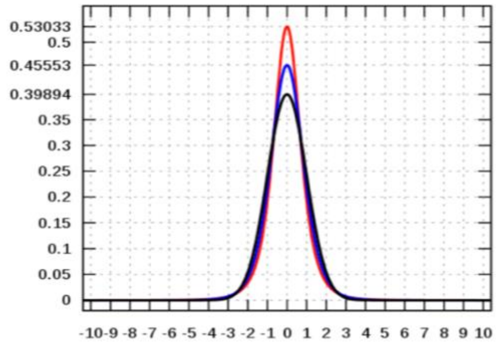

Рис. 7.5. Графік щільності розподілу для $Es(X) = +\infty$ (червона), $Es(X) = 2$ (синя) та $Es(X) = 0$ (чорна) криві

Приклад 7.13. *Неперервна випадкова величина X має щільність розподілу*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} \quad x \le -3; \\ \dfrac{3 \cdot (x+3) \cdot (1-x)}{32}, \text{при} -3 < x \le 1; \\ 0, \quad \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Обчислити ексцес для даної випадкової величини.

Розв'язання: В прикладі 7.9 обчислено $\mu_2(X) \approx 0{,}8$, тобто $\sigma^2(X) = \mu_2(X) \approx 0{,}64$.

За формулою (7.20)

$$\mu_4(X) = \int_{-3}^{1} \left((x+1)^4 \cdot f(x)\right) dx = \int_{-3}^{1} \left((x+1)^4 \cdot \frac{3 \cdot (x+3) \cdot (1-x)}{32}\right) dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x+1; dx = dt \\ x = -3 \Rightarrow t = -2 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{matrix} \right| = \frac{3}{32} \cdot \int_{-2}^{2} (t^6 - 4 \cdot t^4)\, dt = \frac{48}{35} \approx 1{,}37.$$

Отже за формулою (7.28) ,

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 \approx \frac{1{,}37}{0{,}4096} - 3 \approx 0{,}345.$$

Тобто крива теоретичного має вищу та «гострішу» вершину ніж крива нормального розподілу. Правильність отриманих результатів можна побачити на графіку функції щільності (рис. 7.1).

Відповідь. $Es(X) \approx 0{,}345$.

7.5. Квантиль

Квантиль — одна з числових характеристик випадкових величин, що здебільшого застосовується в математичній статистиці. Квантилі відсікають в межах ряду певну частину його членів.

Визначення

Нехай маємо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, і P^X — ймовірнісна міра, що задає розподіл деякої випадкової величини X. Нехай зафіксовано $\alpha \in [0,1]$. Тоді α-квантилем (або квантилем рівня α) розподілу P^X називається число $x_\alpha \in R$, таке, що справедлива рівність (7.29):

$$P^X\{X \in (-\infty, x_\alpha]\} \equiv P(X \le x_\alpha) = \alpha. \tag{7.29}$$

Зауваження

- Якщо розподіл неперервний, то α-квантиль однозначно задається рівнянням (7.30)

$$F(x_\alpha) = \alpha, \tag{7.30}$$

де $F(x)$ — функція розподілу P^X.

- Очевидно що для неперервних розподілів справедлива рівність (7.31):

$$P\left(x_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq X \leq x_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) = \alpha, \tag{7.31}$$

що широко використовується при побудові довірчих інтервалів

Види квантилів

Квантиль порядку $\alpha = 0{,}25$ називається *першим* (*або нижнім*) *квартилем*;

Кантиль порядку $\alpha = 0{,}5$ називається *медіаною* (*або другим*) *квартилем*;

Кантиль порядку $\alpha = 0{,}75$ називається *третім* (*або верхнім*) *квартилем*.

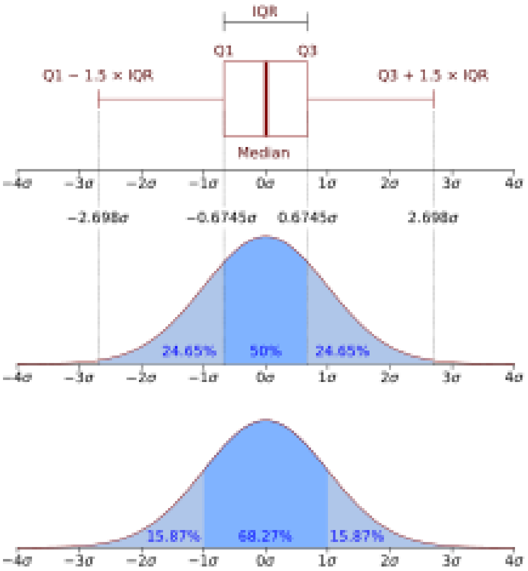

Рис. 7.6. Квартилі нормального розподілу

Інтерквартильним або *міжквартильним розмахом* (Interquartile range) називається різниця між третім і першим квартилем, тобто $x_{0,75} - x_{0,25}$. Інтерквартильний розмах є характеристикою розкиду розподілу величини. Разом медіана і інтерквартильний розмах можуть бути використані замість математичного сподівання і дисперсії у разі розподілів з великими викидами, або при неможливості обчислення останніх.

Дециль характеризує розподіл величин сукупності, при якій дев'ять значень дециля ділять її на десять рівних частин. Будь-яка з цих десяти частин становить 0,1 всієї сукупності. Так, перший дециль відокремлює 10% найменших величин, лежачих нижче дециля від 90% найбільших величин, лежачих вище дециля.

p-им перцентилем називають квантиль рівня $\alpha = \frac{p}{100}$. При цьому зазвичай розглядають перцентилі для цілих p, хоча дана вимога не обов'язкова. Відповідно, медіана є 50-м перцентилем, а перший і третій квартиль — 25-м і 75-м перцентилем. У цілому, поняття квантиль і перцентиль взаємозамінні, також, як і шкали числення ймовірності — абсолютна і процентна. Перцентилі також називаються процентилями або центилями.

Квантилі основних типів розподілів

Як зазначалося вище, квантилі як дискретних так і неперервних випадкових величин обчислюються з рівняння (7.30). Для цього необхідно знати функцію розподілу випадкової величини. Для неперервних величин, які мають досить складні функції розподілу, наперед розраховані значення квантилів. Деякі представлені на рис.7.7-7.9.

Ймовірність,%	99,99	99,90	99,00	97,72	97,50	95,00	90,00	84,13	50,00
Квантиль	3,715	3,090	2,326	2,000	1,960	1,645	1,282	1,000	0,000

Рис. 7.7. Квантилі стандартного нормального розподілу

	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,0642	0,1485	0,2750	0,4549	0,7083	1,0742	1,6424	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,4463	0,7133	1,0217	1,3863	1,8326	2,4079	3,2189	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,0052	1,4237	1,8692	2,3660	2,9462	3,6649	4,6416	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	1,6488	2,1947	2,7528	3,3567	4,0446	4,8784	5,9886	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	2,3425	2,9999	3,6555	4,3515	5,1319	6,0644	7,2893	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	3,0701	3,8276	4,5702	5,3481	6,2108	7,2311	8,5581	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	3,8223	4,6713	5,4932	6,3458	7,2832	8,3834	9,8032	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	4,5936	5,5274	6,4226	7,3441	8,3505	9,5245	11,0301	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	5,3801	6,3933	7,3570	8,3428	9,4136	10,6564	12,2421	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	6,1791	7,2672	8,2955	9,3418	10,4732	11,7807	13,4420	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	6,9887	8,1479	9,2373	10,3410	11,5298	12,8987	14,6314	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	7,8073	9,0343	10,1820	11,3403	12,5838	14,0111	15,8120	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	8,6339	9,9257	11,1291	12,3398	13,6356	15,1187	16,9848	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	9,4673	10,8215	12,0785	13,3393	14,6853	16,2221	18,1508	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	10,3070	11,7212	13,0297	14,3389	15,7332	17,3217	19,3107	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	11,1521	12,6243	13,9827	15,3385	16,7795	18,4179	20,4651	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	12,0023	13,5307	14,9373	16,3382	17,8244	19,5110	21,6146	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	12,8570	14,4399	15,8932	17,3379	18,8679	20,6014	22,7595	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	13,7158	15,3517	16,8504	18,3377	19,9102	21,6891	23,9004	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	14,5784	16,2659	17,8088	19,3374	20,9514	22,7745	25,0375	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	15,4446	17,1823	18,7683	20,3372	21,9915	23,8578	26,1711	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	16,3140	18,1007	19,7288	21,3370	23,0307	24,9390	27,3015	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	17,1865	19,0211	20,6902	22,3369	24,0689	26,0184	28,4288	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	18,0618	19,9432	21,6525	23,3367	25,1063	27,0960	29,5533	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	18,9398	20,8670	22,6156	24,3366	26,1430	28,1719	30,6752	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141
26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	19,8202	21,7924	23,5794	25,3365	27,1789	29,2463	31,7946	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	20,7030	22,7192	24,5440	26,3363	28,2141	30,3193	32,9117	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	21,5880	23,6475	25,5093	27,3362	29,2486	31,3909	34,0266	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	22,4751	24,5770	26,4751	28,3361	30,2825	32,4612	35,1394	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	23,3641	25,5078	27,4416	29,3360	31,3159	33,5302	36,2502	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922
31	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336	24,2551	26,4397	28,4087	30,3359	32,3486	34,5981	37,3591	41,4217	44,9853	48,2319	52,1914
32	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706	25,1478	27,3728	29,3763	31,3359	33,3809	35,6649	38,4663	42,5847	46,1943	49,4804	53,4858
33	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102	26,0422	28,3069	30,3444	32,3358	34,4126	36,7307	39,5718	43,7452	47,3999	50,7251	54,7755
34	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523	26,9383	29,2421	31,3130	33,3357	35,4438	37,7954	40,6756	44,9032	48,6024	51,9660	56,0609
35	18,5089	20,5694	22,4650	24,7967	27,8359	30,1782	32,2821	34,3356	36,4746	38,8591	41,7780	46,0588	49,8018	53,2033	57,3421
36	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433	28,7350	31,1152	33,2517	35,3356	37,5049	39,9220	42,8788	47,2122	50,9985	54,4373	58,6192
37	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921	29,6355	32,0532	34,2216	36,3355	38,5348	40,9839	43,9782	48,3634	52,1923	55,6680	59,8925
38	20,6914	22,8785	24,8839	27,3430	30,5373	32,9919	35,1920	37,3355	39,5643	42,0451	45,0763	49,5126	53,3835	56,8955	61,1621
39	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958	31,4405	33,9315	36,1628	38,3354	40,5935	43,1053	46,1730	50,6598	54,5722	58,1201	62,4281
40	22,1643	24,4330	26,5093	29,0505	32,3450	34,8719	37,1340	39,3353	41,6222	44,1649	47,2685	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907
41	22,9056	25,2145	27,3256	29,9071	33,2506	35,8131	38,1055	40,3353	42,6506	45,2236	48,3628	52,9485	56,9424	60,5606	64,9501
42	23,6501	25,9987	28,1440	30,7654	34,1574	36,7550	39,0774	41,3352	43,6786	46,2817	49,4560	54,0902	58,1240	61,7768	66,2062
43	24,3976	26,7854	28,9647	31,6255	35,0653	37,6975	40,0496	42,3352	44,7063	47,3390	50,5480	55,2302	59,3035	62,9904	67,4593
44	25,1480	27,5746	29,7875	32,4871	35,9743	38,6408	41,0222	43,3352	45,7336	48,3957	51,6389	56,3685	60,4809	64,2015	68,7095
45	25,9013	28,3662	30,6123	33,3504	36,8844	39,5847	41,9950	44,3351	46,7607	49,4517	52,7288	57,5053	61,6562	65,4102	69,9568
46	26,6572	29,1601	31,4390	34,2152	37,7955	40,5292	42,9682	45,3351	47,7874	50,5071	53,8177	58,6405	62,8296	66,6165	71,2014
47	27,4158	29,9562	32,2676	35,0814	38,7075	41,4744	43,9417	46,3350	48,8139	51,5619	54,9056	59,7743	64,0011	67,8206	72,4433
48	28,1770	30,7545	33,0981	35,9491	39,6205	42,4201	44,9154	47,3350	49,8401	52,6161	55,9926	60,9066	65,1708	69,0226	73,6826
49	28,9406	31,5549	33,9303	36,8182	40,5344	43,3664	45,8895	48,3350	50,8660	53,6697	57,0786	62,0375	66,3386	70,2224	74,9195
50	29,7067	32,3574	34,7643	37,6886	41,4492	44,3133	46,8638	49,3349	51,8916	54,7228	58,1638	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539

Рис. 7.8. Квантилі розподілу χ^2

двобічний критерій	1-0.9/2	1-0.8/2	1-0.7/2	1-0.6/2	1-0.5/2	1-0.4/2	1-0.3/2	1-0.2/2	1-0.1/2	1-0.05/2	1-0.02/2
однобічний критерій	1-0.9	1-0.8	1-0.7	1-0.6	1-0.5	1-0.4	1-0.3	1-0.2	1-0.1	1-0.05	1-0.02
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965
9	0.1293	0.2610	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181
12	0.1283	0.2590	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810
13	0.1281	0.2586	0.3940	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503
14	0.1280	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.5350	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999
24	0.1270	0.2562	0.3900	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851
26	0.1269	0.2560	0.3896	0.5309	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620
30	0.1267	0.2556	0.3890	0.5300	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573
31	0.1267	0.2555	0.3889	0.5298	0.6825	0.8534	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528
32	0.1267	0.2555	0.3888	0.5297	0.6822	0.8530	1.0535	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487
33	0.1266	0.2554	0.3887	0.5295	0.6820	0.8526	1.0530	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448
34	0.1266	0.2553	0.3886	0.5294	0.6818	0.8523	1.0525	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411
35	0.1266	0.2553	0.3885	0.5292	0.6816	0.8520	1.0520	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377
36	0.1266	0.2552	0.3884	0.5291	0.6814	0.8517	1.0516	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345
37	0.1265	0.2552	0.3883	0.5289	0.6812	0.8514	1.0512	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314
38	0.1265	0.2551	0.3882	0.5288	0.6810	0.8512	1.0508	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286
39	0.1265	0.2551	0.3882	0.5287	0.6808	0.8509	1.0504	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258
40	0.1265	0.2550	0.3881	0.5286	0.6807	0.8507	1.0500	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233
41	0.1264	0.2550	0.3880	0.5285	0.6805	0.8505	1.0497	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208
42	0.1264	0.2550	0.3880	0.5284	0.6804	0.8503	1.0494	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185
43	0.1264	0.2549	0.3879	0.5283	0.6802	0.8501	1.0491	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163
44	0.1264	0.2549	0.3878	0.5282	0.6801	0.8499	1.0488	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141
45	0.1264	0.2549	0.3878	0.5281	0.6800	0.8497	1.0485	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121
46	0.1264	0.2548	0.3877	0.5281	0.6799	0.8495	1.0483	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102
47	0.1263	0.2548	0.3877	0.5280	0.6797	0.8493	1.0480	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083
48	0.1263	0.2548	0.3876	0.5279	0.6796	0.8492	1.0478	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066
49	0.1263	0.2547	0.3876	0.5278	0.6795	0.8490	1.0475	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	[illegible]	[illegible]	1.6759	2.0086	2.4033
100	0.1260	0.2540	0.3864	0.5261	0.6770	0.8452	[illegible]	[illegible]	1.6602	1.9840	2.3642
1000	0.1257	0.2534	0.3854	0.5246	0.6747	0.8420	1.0370	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301

Рис. 7.9. Квантилі розподілу Стьюдента

Приклад 7.14. *Знайти квантиль порядку* 0,5 *дискретної випадкової величини* X (*табл.* 7.8).

Таблиця 7.8. *Ряд розподілу випадкової величини* X

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Розв'язання. Складемо функцію розподілу випадкової величини X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1; \\ 0{,}1, & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0{,}5, & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 0{,}8, & \text{при } 3 < x \le 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Тоді, з рівняння (7.30), $x_{0,5} = Me(X) = 2{,}5$.

Відповідь. $x_{0,5} = 2{,}5$.

Приклад 7.15. *Знайти квантиль порядку* 0,9 *дискретної випадкової величини* X (*табл.* 7.9).

Таблиця 7.9. *Ряд розподілу випадкової величини* X

x_i	1	2	3	5	6
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Розв'язання. Складемо функцію розподілу випадкової величини X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1; \\ 0{,}1, & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & \text{при } 3 < x \le 3; \\ 0{,}6, & \text{при } 3 < x \le 5; \\ 0{,}9, & \text{при } 5 < x \le 6; \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Тоді, з рівняння (7.30), $x_{0,9} = 5{,}5$.

Відповідь. $x_{0,9} = 5{,}5$.

Приклад 7.16. *Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1; \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x-1}, & \text{при } 1 < x \le 9; \\ 1, & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Знайти квантиль порядку 0,75.

Розв'язання. З рівняння (7.30)

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x_{0,75} - 1} = 0{,}75;$$

$$\sqrt[3]{x_{0,75} - 1} = 1{,}5;$$

$$x_{0,75} - 1 = 3{,}375;$$

$$x_{0,75} = 4{,}375.$$

Відповідь. $x_{0,9} = 4{,}375$.

7.6. Твірна функція та її застосування для знаходження числових характеристик дискретної випадкової величини

Твірна функція випадкової величини (*generating function*) — це аналітичний інструмент, який використовується для вивчення властивостей дискретної випадкової величини. Вона зберігає інформацію про всі моменти випадкової величини і може використовуватись для отримання різних характеристик розподілу цієї величини.

Побудова твірної функції для цілочислові випадкові величини (відомий ряд розподілу)

Відомо, що серед дискретних випадкових величин важливе значення в теорії ймовірностей займають такі, що набувають лише цілих невід'ємних значень $X = 0,1,2,3,\dots$ з ймовірностями p_i $(i = 0,1,\dots,n\dots)$, інакше кажучи – *цілочислові випадкові величини*. Для дослідження законів розподілу цілочислових випадкових величин використовують ймовірнісну твірну функцію.

Ймовірнісною твірною функцією $\varphi(z)$ для цілочислові випадкової величини X наступний збіжний степеневий ряд (7.32):

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{+\infty}(p_i \cdot z^i), \tag{7.32}$$

де z — довільний параметр $(0 < z < 1)$.

Якщо випадкова величина має скінченну множину можливих значень n, то твірна функція приймає вигляд (7.33):

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{n}(p_i \cdot z^i). \tag{7.33}$$

Властивості ймовірнісної твірної функції

1. *Твірна функція* $\varphi(z)$ *визначена в кожній точці інтервалу* $[-1;1]$.
2. *При* $z = 1$ *виконується співвідношення* $\varphi(1) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$. *Дане співвідношення є умовою нормування для дискретної випадкової величини.*
3. *Із залежності для твірної функції* $\varphi(z)$ *визначають ймовірність* $P(X = i) = P(i)$ *з рівності* (7.34):

$$P(i) = \frac{1}{i!} \cdot \varphi^{(i)}(0), \tag{7.34}$$

де $\varphi^{(i)}(0)$ — *i-та похідна від твірної фнкції* $\varphi(z)$ *при* $z = 0$. *Отже, знаючи аналітичний вираз для* $\varphi(z)$, *завжди можна визначити ймовірність будь-якого можливого значення* $X = i$.
4. *Математичне сподівання дискретної випадкової величини дорівнює* (7.35):

$$M(X) = \varphi'(1). \tag{7.35}$$

Доведення. Похідна від твірної функції визначається співвідношенням

$$\varphi'(z) = \sum_{i=0}^{+\infty}(i \cdot p_i \cdot z^{i-1}).$$

При $z = 1$ похідна рівна математичному сподіванню

$$\varphi'(1) = \sum_{i=0}^{+\infty}(i \cdot p_i) = M(X) = v_1(x).$$

Звідси отримаємо $M(X) = \varphi'(1)$.

5. *Дисперсія дискретної випадкової величини дорівнює* (7.36):

$$D(X) = \varphi''(1)+\varphi'(1)-(\varphi'(1))^2. \tag{7.36}$$

Доведення. Друга похідна твірної функції

$$\varphi''(z) = \sum_{i=0}^{+\infty}(i \cdot (i-1) \cdot p_i \cdot z^{i-2})$$

при $z = 1$ приймає значення

$$\varphi''(1) = \sum_{m=0}^{+\infty}(i \cdot (i-1) \cdot p_i) = \varphi''(z) = \sum_{i=0}^{+\infty}(i^2 \cdot p_i) - \sum_{i=0}^{+\infty}(i \cdot p_i) =$$
$$= v_2(x) - v_1(x).$$

На основі цього виразу, дисперсія випадкової величини через значення похідних твірної функції при $z = 1$ подається таким чином:

$$D(X) = v_2(x) - v_1^2(x) = v_2(x) - v_1(x) + v_1(x) - v_1^2(x) =$$
$$= \varphi''(1) + \varphi'(1) - \left(\varphi'(1)\right)^2.$$

Формули (7.35) і (7.36) застосовуються для <u>знаходження основних числових характеристик дискретних випадкових величин</u>, які мають найбільш поширені закони розподілу.

6. *Якщо випадкова величина набуває лише цілих невід'ємних значень* $X = C, C+1, C+2, C+3, \ldots$ *з ймовірностями* p_i $(i = 0,1, \ldots, n \ldots)$, *варто розглянути допоміжну випадкову величину* Y, *таку, що* $X = Y + C$ *і досліджувати її твірну функцію. Це необхідно для отримання числових характеристик дискретних випадкових величин різних типів за допомогою їх твірних функцій.*

Приклад 7.19. *Для дискретної випадкової величини* X (*табл.* 7.10)

Таблиця 7.10. *Ряд розподілу випадкової величини* X

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

1. *Побудувати твірну функцію*; **2.** *Обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини* X.

Розв'язання. 1. За формулою (7.33)

$$\varphi(z) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot z + 0{,}25 \cdot z^2 + 0{,}3 \cdot z^3 + 0{,}15 \cdot z^4;$$
$$\varphi'(z) = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot z + 0{,}9 \cdot z^2 + 0{,}6 \cdot z^3;$$

2. $M(X) = \varphi'(1) = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}9 + 0{,}6 = 2{,}2;$

$$\varphi''(z) = 0{,}5 + 1{,}8 \cdot z + 1{,}8 \cdot z^2;$$
$$\varphi''(1) = 0{,}5 + 1{,}8 + 1{,}8 = 4{,}1;$$
$$D(X) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - \left(\varphi'(1)\right)^2 = 4{,}1 + 2{,}2 - 4{,}84 = 1{,}46.$$

Перевірка: $M(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}15 = 2{,}2;$

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}15 - 4{,}84 = 1{,}46.$$

Відповідь. 1. $\varphi(z) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot z + 0{,}25 \cdot z^2 + 0{,}3 \cdot z^3 + 0{,}15 \cdot z^4$; 2. $M(X) = 2{,}2$; $D(X) = 1{,}46$.

Приклад 7.20. *Для дискретної випадкової величини* X (*табл.* 7.11)

Таблиця 7.11. *Ряд розподілу випадкової величини* X

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

Обчислити математичне сподівання.

Розв'язання. За властивістю 6 твірної функції очевидно, що $X = Y + 1$ (табл. 7.12).

Таблиця 7.12. *Ряд розподілу випадкової величини* Y

y_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,15

Тоді для величини Y формулою (7.33) будуємо твірну функцію

$$\varphi(z) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot z + 0{,}25 \cdot z^2 + 0{,}3 \cdot z^3 + 0{,}15 \cdot z^4,$$

з якої знаходимо математичне сподівання:

$$\varphi'(z) = 0{,}2 + 0{,}5 \cdot z + 0{,}9 \cdot z^2 + 0{,}6 \cdot z^3;$$

$$M(Y) = \varphi'(1) = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}9 + 0{,}6 = 2{,}2.$$

Таким чином, за властивостями 1 та 2 математичного сподівання

$$M(X) = M(Y) + 1 = 3{,}2.$$

Перевірка: $M(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}15 = 3{,}2.$

Відповідь. $M(X) = 3{,}2.$

Побудова твірної функції для множини несумісних подій з відомими ймовірностями їх настання в серії незалежних випробувань (невідомий ряд розподілу)

Розглянемо варіант, коли маємо множину несумісних подій, які виконуються при незалежних випробуваннях з ймовірностями p_i $(i = 1,2,\ldots,n\ldots)$. Тоді твірна функція визначається із співвідношення (7.37):

$$\varphi(z) = \prod_{i=1}^{+\infty}(q_i + p_i \cdot z), \qquad (7.37)$$

де $q_i = 1 - p_i$.

Формула (7.37) застосовується для <u>швидшого знаходження ймовірності $P(k)$</u> (властивість 3 твірної функції) без необхідності побудови ряду розподілу випадкової величини.

Приклад 7.21. *Два стрілки роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірності попадання* 1-*го і* 2-*го стрілків відповідно дорівнюють:* $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$. *Побудувати твірну функцію для випадкової величини X – кількість попадань по мішені.*

Розв'язання. Складемо ряд розподілу для випадкової величини X.

$$P(0) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06;$$

$$P(1) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38;$$

$$P(2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Ряд розподілу випадкової величини X матиме вигляд (табл. 7.13):

Таблиця 7.13. *Ряд розподілу випадкової величини X*

x_i	0	1	2
p_i	0,06	0,38	0,56

Твірну функцію побудуємо двома способами.

<u>1 спосіб</u>

Оскільки випадкова величина цілочислова, то формулою (7.32)

$$\varphi(z) = 0{,}06 + 0{,}38 \cdot z + 0{,}56 \cdot z^2.$$

<u>2 спосіб</u>

Оскільки маємо множину з трьох несумісних подій: $A_1 =$\{жодного попадання\}, $A_2 =$\{рівно одне попадання\}, $A_3 =$\{рівно два попадання\}, які можуть настати в серії з двох експериментів: \{1-й стрілок зробив постріл\}, \{2-й стрілок зробив постріл\}. Ймовірності влучання стрілків $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}8$, а невлучання $q_1 = 0{,}3$; $q_2 = 0{,}2$. Тоді за формулою (7.37)

$$\varphi(z) = (0{,}3 + 0{,}7 \cdot z) \cdot (0{,}2 + 0{,}8 \cdot z) = 0{,}06 + 0{,}38 \cdot z + 0{,}56 \cdot z^2.$$

Відповідь. $\varphi(z) = 0{,}06 + 0{,}38 \cdot z + 0{,}56 \cdot z^2$.