ЛЕКЦІЯ 1

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ЇХ ЙМОВІРНОСТІ

Теорія ймовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ при їх масовому повторенні.

Серед явищ, що відбуваються навколо нас, важко назвати такі, які б не були в тій чи іншій мірі піддані впливу випадкових факторів. Проте дослідження великої кількості одноманітних явищ показує, що в них прояв того чи іншого випадкового фактору підлягає певній закономірності або стійкості. На встановлення цих закономірностей і спрямовані методи теорії ймовірностей.

Виникнення теорії ймовірностей відноситься до середини 17-го сторіччя і пов'язане з іменами видатних французьких математиків П. Ферма (1601-1665), Б. Паскаля (1623-1662) та видатного швейцарського математика Я. Бернуллі (1654-1705), в працях яких вже фігурують такі важливі поняття, як ймовірність випадкової події і математичне сподівання випадкової величини.

Проте низький рівень розвитку природознавства того часу, а також відсутність соціального замовлення на відповідні задачі стали причиною того, що основні поняття і методи теорії ймовірностей розвивалися головним чином на розв'язанні задач азартних ігор, демографії і страхової справи.

Лише кінець 18-го – початок 19-го сторіччя стали часом ґрунтовного застосування теорії ймовірностей до розв'язання актуальних проблем природознавства, виробничих і технологічних процесів, військової справи, економіки, статистики і інших галузей, що привело до необхідності створення розвинутого аналітичного апарата досліджень.

Велика роль в розробці аналітичних методів теорії ймовірностей належить англійському математику А. де Муавру (1667-1754), французьким математикам П. Лапласу (1749-1827) і С. Пуассону (1781-1840), німецькому математику К. Гаусу (1777-1855).

На сучасному етапі визначний внесок у розвиток теорії ймовірностей і математичної статистики, розробку нових напрямів і методів зробили відомі вчені – українські академіки Б.В. Гнєденко (1913-1996), Й.І. Гіхман (р.нар.1918), В.С. Королюк (р.нар.1925), А.В. Скороход (р.нар.1930), І.М. Коваленко (р.нар.1935).

1.1. Стохастичне випробування і події. Види подій

Поняття події відноситься до основних понять, на яких базується теорія ймовірностей. Під *подією* будемо розуміти всякий факт, який в результаті випробування (досліду, експерименту, спостереження) може відбутися або не відбутися. При цьому в поняття «випробування» входять не лише ті, які проводить людина, але й явища, що відбуваються в природі незалежно від людини.

В теорії ймовірностей розглядаються *стохастичні* (випадкові, ймовірнісні) *випробування*, тобто такі, які можна повторити будь-яку кількість разів, але результат яких при кожному повторенні наперед невідомий, тобто випадковий. Тому *теорія ймовірностей* визначається ще як математичний аналіз стохастичного випробування (рис. 1.1).

Випробування	*Події*
1. Кидання грального кубика	Випала парна кількість очок
2. Оцінювання якості виробу	Виріб виявився бракованим
3. Звернення до системи продажу авіаквитків	Одержано квиток
4. Випробування автоматичної системи на надійність протягом часу *t*	Система вийшла з ладу
5. Вимірювання фізичної величини приладом	Знайдено значення величини із заданою точністю

Рис. 1.1. Приклади випробувань та подій

Кожне стохастичне випробування має деяку множину $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ всіх можливих результатів або наслідків, які не розкладаються на простіші. Множина Ω утворює так звану *множину* (або *простір*) *елементарних наслідків* (подій) ω_i, якщо ці наслідки є взаємовиключаючими і результатом випробування завжди є один і тільки один наслідок. Множина Ω може бути скінченною $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ або нескінченною $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$.

В теорії ймовірностей довільні події позначаються літерами $A, B, C, \dots$ або літерами з індексами, наприклад, $A_1, A_2, , \dots, A_k, \dots$, інакше A_i $(i = 1,2, \dots, k)$. Зміст події, виражений словами або математичними залежностями, заключається в фігурні дужки. Наприклад, якщо з партії виробів навмання вибирається один для оцінки якості, то можлива подія – $A = \{$вибрано бракований виріб$\}$.

Всі події підрозділяються на три види: достовірні, неможливі і випадкові.

Достовірною називається подія, яка обов'язково відбудеться в даному випробуванні. Достовірну подію позначатимемо Ω.

Наприклад, якщо з партії, яка складається лише з стандартних виробів, навмання вибрано три вироби, то подія A ={всі вироби є стандартними} – достовірна.

Неможливою називається подія, яка напевно не відбудеться в даному випробуванні. Неможливу подію позначатимемо $\emptyset$.

Так, подія B ={серед вибраних виробів є нестандартні} – неможлива в умовах випробування з попереднього прикладу.

Випадковою називається подія, яка в даному випробуванні може відбутися або не відбутися в залежності від впливу різноманітних випадкових факторів.

Приклади випадкових подій: поява шести очок при підкиданні грального кубика, відмова блоку системи на протязі певного часу t при дослідженні надійності системи та ін.

В наведених прикладах, крім події, вказано також випробування, наслідком якого є ця подія.

Оскільки довільна подія A є наслідком деякого стохастичного випробування, а простір Ω — множина всіх можливих елементарних наслідків випробування, то подія A входить в простір Ω або, іншими словами, подія A є підмножиною множини Ω, що позначається $A \subset \Omega$. При цьому ті елементарні наслідки ω_i з простору Ω, при яких подія A відбувається, тобто наслідки, які входять до складу події A ($\omega_i \in A$), називаються *сприятливими* події A.

Приклад 1.1. *Із двозначних чисел, що не перевищують* 20*, навмання вибирається одне число. Описати простір елементарних наслідків* Ω *і події* $A =${вибране число ділиться на 5}; $B =${вибране число – просте}; $C =${вибране число – парне}.

Розв'язання. В результаті випробування може бути вибране будь-яке двозначне число, не більше 20, отже, простір елементарних наслідків $\Omega = \{10,11,12,\dots,20\}$. З усіх наслідків із простору Ω події A сприяють наслідки $10,15,20$, отже, $A = \{10,15,20\}$. Аналогічно $B = \{11,13,17,19\}$ і $C = \{10,11,12,14,16,18,20\}$.

Відповідь. $A = \{10,15,20\}, B = \{11,13,17,19\}, C = \{10,11,12,14,16,18,20\}$.

1.2. Операції над подіями

Об'єднання подій

Подія C є *об'єднанням A і B* ($C = A \cup B$), якщо подія C складається з усіх елементарних подій, що входять в подію A та з усіх елементарних подій, що входять в B. Причому, якщо елементарна подія входить як в A, так і в B, то вона входить в подію C один раз. Тому, що C є підмножиною Ω, то C складається з різних елементарних подій.

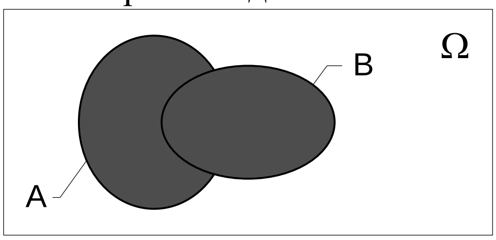

Рис. 1.2. $A \cup B$

Наслідок: Внаслідок випробування подія C настає тоді і тільки тоді, коли настала подія A або подія B, або та елементарна подія, що входить і в A і в B одночасно.

Вводиться операція об'єднання скінченної чи нескінченно-зліченої кількості подій.

Нехай I – скінченна чи нескінченно-злічена множина індексів, тоді

$$C = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

C складається з усіх елементарних подій, що входять в A_i, і якщо елементарна подія входить в різні A_i, більш ніж один раз то в C лише один раз. C настає тільки тоді, коли настала хоча б якась A_i.

Елементарні тотожності об'єднання подій

1. $A \cup A = A$;
2. $A \cup \Omega = \Omega$;
3. $A \cup V = A$.

Перетин подій

Подія C є *перетином A і B* ($C = A \cap B$ або $C = A \cdot B$), якщо подія C складається з усіх елементарних подій, що входять і в A, і в B одночасно.

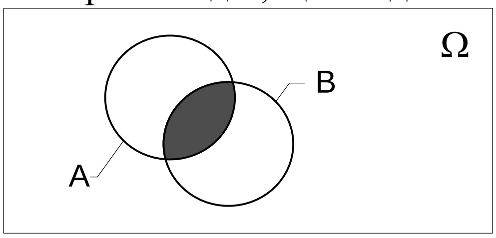

Рис. 1.3. $A \cap B$

Наслідок 1. Подія C настає тоді і тільки тоді, коли настали і A, і B.

Наслідок 2. Подія C настає тоді і тільки тоді, коли настали всі події A_i:

$$C = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Елементарні тотожності перетину подій

1. $A \cap A = A$;
2. $A \cap \Omega = A$;
3. $A \cap V = V$.

Закони об'єднання та перетину подій

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Різниця подій

Подія $C = \mathrm{A}/\mathrm{B}$ зветься *різницею подій A і B* якщо вона складається з усіх подій, що входять в A і не входить в B.

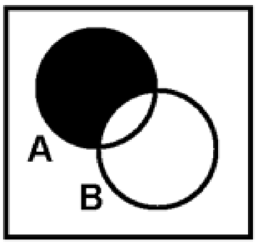

Рис. 1.4. A/B

Протилежна подія

Протилежна подія $\bar{A}$ – це така подія, яка відбувається тоді, коли не відбувається вказана подія A: $\bar{A} \cup A = \Omega$, $\bar{A} \cap A = \{\emptyset\}$.

A і B *несумісні*, якщо $A \cap B = \{\emptyset\}$

Наслідок: Якщо A і B несумісні, то вони ніколи не можу наставати як результат 1 випробування.

Закони де Моргана

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$
$$\overline{\cup_{\iota \epsilon I} A_\iota} = \cap_{i \epsilon I} \overline{A_\iota} \quad \overline{\cap_{\iota \epsilon I} A_\iota} = \cup_{i \epsilon I} \overline{A_\iota}.$$

Складна подія зветься *достовірною* і позначається як $\mathcal{U}$, якщо вона обов'язково настає внаслідок випробування. Протилежною подією до достовірної є неможлива.

$$\mathcal{U} = \Omega;\ V = \bar{\mathcal{U}} = \{\emptyset\}.$$

1.3. Поняття ймовірності події. Класична ймовірнісна схема і класичне означення ймовірності подій

Розв'язання прикладу 1.1 свідчить про те, що різні події характеризуються певною мірою можливості їх появи в результаті випробуванні. Так, зокрема, в прикладі 1.1 можливість появи події C більша, ніж події A або події B. Такою мірою можливості появи події є її ймовірність. Це поняття також відноситься до основних базових понять теорії ймовірностей.

Ймовірність події A позначається $P(A)$ (від *probabilitas* (лат.) – ймовірність). За одиницю її виміру природно прийняти ймовірність достовірної події Ω, тобто $P(\Omega) = 1$. Тоді всяка інша подія A — можлива, але не достовірна, буде характеризуватись ймовірністю, меншою за одиницю. Зрозуміло, що ймовірність неможливої події, яка в даному випробуванні не відбувається ні за яких умов, дорівнює нулю.

Отже,

$$P(\Omega) = 1; P(\emptyset) = 0; P(A) \in (0; 1). \tag{1.1}$$

Класична ймовірнісна схема стосується подій найпростішого виду, які називають *випадками* або *шансами*. Це події, які утворюють повну групу, несумісні і рівноможливі.

Відповідно n подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються *попарно несумісними* (або просто несумісними), якщо поява однієї з них в даному випробуванні виключає появу всіх інших, тобто добуток двох будь-яких з цих подій в одному випробування є неможливою подією :

$$A_i \cdot A_j = \emptyset, (i, j = 1,2, \dots, n; i \neq j).$$

Наприклад, при випробуванні надійності двох приладів на протязі часу t події $A =$\{один прилад виявився надійним\}; $B =$\{обидва прилади виявилися надійними\} – несумісні.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ вважаються *рівноможливими* в даному випробуванні, якщо за умовами випробування немає підстав вважати появу однієї з них більш можливою, ніж поява кожної з решти цих подій.

Наприклад, при передачі в однакових умовах по каналу зв'язку трьох сигналів однакової довжини події $A_1 =${перший сигнал передано правильно}, $A_2 =${другий сигнал передано правильно} і $A_3 =${третій сигнал передано правильно} є рівноможливими.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо принаймні одна з них неодмінно відбудеться в даному випробуванні, тобто їх сума є достовірною подією:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Зокрема, попарно несумісні події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють *повну групу несумісних подій*, якщо в даному випробуванні неодмінно відбудеться одна і тільки одна з них, тобто їх сума є достовірною подією, а добуток будь-яких двох з цих подій є подія неможлива:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega; \; A_i \cdot A_j = \emptyset, \; (i, j = 1,2, \dots, n; i \neq j).$$

Наприклад, при випробуванні надійності двох приладів на протязі часу t події $A_1 =${обидва прилади виявились надійними}, $A_2 =${перший прилад виявився надійним, другий – ні}, $A_3 =${другий прилад виявився надійним, перший – ні}, $A_4 =${жоден прилад не пройшов випробування} складають повну групу несумісних подій.

Дві події, які утворюють повну групу несумісних подій, називають *протилежними* подіями, і позначають A і $\bar{A}$.

Наприклад, при подачі запиту до системи продажу авіаційних білетів на придбання білета на даний рейс події $A =${одержано білет} і $\bar{A} =${одержано відмову} є протилежними.

Ймовірністю $P(A)$ події A називають відношення числа m сприятливих цій події наслідків до загального числа n всіх рівноможливих наслідків випробування, що утворюють повну групу несумісних подій :

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.2}$$

Приклад 1.2. *З партії виробів, яка містить* 20 *стандартних і* 6 *нестандартних виробів, навмання вибирається* 1 *виріб. Знайти ймовірність того, що він нестандартний.*

Розв'язання. Оскільки в партії всього 26 виробів, і будь-який з них може бути вибраний, то випробування має 26 рівноможливих наслідків, отже, $n = 26$. Сприятливими для події $A =${вибрано нестандартний виріб} є 6 наслідків, що відповідають вибору одного з нестандартних виробів, отже, $m = 6$. За формулою (1.2)

$$P(A) = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{3}{13}$

Тут і в подальшому вибір навмання у випробуванні будемо розуміти як рівноможливість наслідків цього випробування.

1.4. Застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірностей в класичній схемі

В багатьох випробуваннях класичної схеми обчислення загальної кількості елементарних наслідків і кількості сприятливих наслідків для подій, що відбуваються в цих випробуваннях, зв'язане з різними схемами вибору певного числа k елементів з n різних елементів деякої вихідної множини $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. В цих випадках для обчислення ймовірності події застосовуються формули комбінаторики. Наведемо основні принципи та формули комбінаторики.

Комбінації з n елементів по k

Комбінаціями (сполученнями) з n елементів $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ по k називаються всі підмножини множини M, що містять k елементів ($k = 0,1, \dots, n$) і відрізняються між собою принаймні одним елементом.

Наприклад, з множини 3-х чисел $M = \{1,2,3\}$ можна утворити такі комбінації по 2 елемента: $\{1,2\}$; $\{1,3\}$; $\{2,3\}$.

Число всіх комбінацій з n елементів по k позначається C_n^k і обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \qquad (1.3)$$

де $n!$ — добуток n перших натуральних чисел $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, зокрема, за означенням прийнято $0! = 1$.

Розміщення з n елементів по k

Розміщеннями з n елементів по k називаються всі підмножини множини M, що містять k елементів ($k = 0,1, \dots, n$) і відрізняються між собою принаймні одним елементом або порядком їх розташування.

Наприклад, з множини 3-х чисел $M = \{1,2,3\}$ можна утворити такі розміщення по 2 елемента: $\{1,2\}$; $\{2,1\}$; $\{1,3\}$; $\{3,1\}$; $\{2,3\}$; $\{3,2\}$.

Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1.4)$$

Перестановки з n елементів.

Перестановками з n елементів $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ називаються всі множини, що утворюються з множини M перестановкою будь-яких її елементів, тобто відрізняються між собою лише порядком розташування елементів.

Наприклад, з множини 3-х чисел $M = \{1,2,3\}$ можна утворити такі перестановки: $\{1,2,3\}$; $\{1,3,2\}$; $\{2,1,3\}$; $\{2,3,1\}$; $\{3,1,2\}$; $\{3,2,1\}$.

Число перестановок з n елементів позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = n!. \qquad (1.5)$$

Перестановка з повтореннями з n елементів

Перестановки з повтореннями з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу,…, k_m елементів m-го типу, обчислюються за формулою:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}. \tag{1.6}$$

Розміщення з повтореннями з n елементів m

Розміщення з повтореннями з n елементів k по називається довільна впорядкована підмножина з k елементів з множини M (елементи не обов'язково різні). Число розміщень з n елементів по k знаходиться за формулою:

$$\overline{A_n^k} = n^k. \tag{1.7}$$

Комбінація з повтореннями з n елементів m

Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називається довільна впорядкована підмножина з k елементів з множини М (елементи не обов'язково різні). Число комбінацій з n елементів по k знаходиться за формулою:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}. \tag{1.8}$$

Принцип добутку

Якщо послідовно виконується k дій, причому першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і, нарешті, k-у дію n_k способами, то всі k дій разом можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Принцип суми

Якщо множини $M_1, M_2, \dots, M_k$ містять відповідно $n_1, n_2, \dots, n_k$ елементів, причому добуток цих множин є пуста множина:

$$M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k = \emptyset,$$

то їх сума містить $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ елементів.

1.5. Приклади застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірностей в класичній схемі

Приклад 1.3. *Комплект з* 30*-ти однотипних радіодеталей містить* 20% *нестандартних. Для включення в схему навмання вибирається* 4 *деталі. Знайти ймовірність того, що будуть відібрані лише стандартні деталі.*

Розв'язання. За умовою задачі комплект містить 24 стандартні і 6 нестандартних деталей. Випробування полягає в виборі 4-х деталей із 30, причому кожна вибірка визначається складом деталей і не залежить від порядку їх розташування у вибірці. Тому загальна кількість n наслідків випробування обчислюється за формулою (1.3):

$$n = C_{30}^4 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4!} = 27405.$$

Позначимо подію: $A =$ {всі вибрані деталі стандартні}. Сприятливими цій події будуть лише ті наслідки, в яких вибір 4-х деталей проводиться з 24-х стандартних, тобто

$$m = C_{24}^4 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 10626.$$

Ймовірність події A обчислюється за формулою (1.2):

$$P(A) = \frac{10626}{27405} = 0{,}39.$$

Відповідь. $P(A) = 0{,}39$

Приклад 1.4. *Авіазавод одержав* 16 *однотипних агрегатів,* 9 *з яких виготовлені заводом* N_1*, а інші – заводом* N_2*. Для ремонту літака навмання відібрано* 7 *агрегатів. Знайти ймовірність того, що* 5 *з них виготовлені заводом* N_1.

Розв'язання. За умовою задачі випробування полягає в виборі семи агрегатів із 16-ти. Загальна кількість n наслідків обчислюється за формулою (1.3):

$$n = C_{16}^7 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{7!} = 11440.$$

Позначимо через A подію {вибрано 5 агрегатів заводу N_1 і 2 – заводу N_2}.

Кількість варіантів, якими 5 агрегатів можуть бути вибрані з 9-ти, виготовлених заводом N_1, обчислюється за формулою

$$m_1 = C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}.$$

Кількість варіантів, якими 2 агрегати можуть бути вибрані з 7-ми, виготовлених заводом N_2, обчислюється за формулою

$$m_2 = C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21.$$

На основі принципу добутку кількість m наслідків, сприятливих події B, дорівнює

$$m = m_1 \cdot m_2 = 2646,$$

а ймовірність події B

$$P(A) = \frac{2646}{11440} \approx 0{,}23.$$

Відповідь. $P(A) \approx 0{,}23$.

Приклад 1.5. *В аеропорту здійснили посадку* 5 *літаків, серед яких два Ту-154. Літаки випадковим чином розподіляються по стоянках, розташованих в одному ряду. Знайти ймовірність того, що обидва Ту-154 розташуються поряд, якщо*: *а*) *кількість стоянок* – 8*; б*) *кількість стоянок* – 5.

Розв'язання. а) За умовою задачі випробування полягає в розміщенні п'яти літаків на восьми стоянках. Загальне число n варіантів такого розміщення обчислюється за формулою (1.4), оскільки ці варіанти відрізняються порядком розташування літаків на стоянках. Тому

$$n = A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720.$$

Позначимо через A подію {літаки Ту-154 будуть розташовані поруч}.

Кількість варіантів m_1 розташування двох літаків поряд у випадку восьми стоянок знаходиться безпосереднім підрахунком і дорівнює

$$m_1 = 7 \cdot 2 = 14.$$

При цьому 3 інші літаки розташовуються в довільному порядку на 6-ти стоянках, що залишились вільними. Кількість варіантів m_2 такого розташування також обчислюється за формулою (1.4):

$$m_2 = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Кількість m наслідків, сприятливих події C, згідно з принципом добутку дорівнює:

$$m = m_1 \cdot m_2 = 1680,$$

а ймовірність події A обчислюється за формулою (1.2):

$$P(A) = \frac{1680}{6720} = 0{,}25.$$

б) Загальна кількість n варіантів розташування п'яти літаків на п'яти стоянках обчислюється за формулою (1.8):

$$n = 5! = 120.$$

Кількість варіантів m_1 розташування двох літаків поряд на п'яти стоянках дорівнює

$$m_1 = 4 \cdot 2 = 8,$$

а кількість варіантів m_2 розташування інших 3-х літаків на трьох вільних стоянках також обчислюється за формулою (1.5):

$$m_2 = P_3 = 3! = 6.$$

Згідно з принципом добутку кількість наслідків m, сприятливих події A, дорівнює

$$m = m_1 \cdot m_2 = 48,$$

а ймовірність події A

$$P(A) = \frac{48}{120} = 0{,}4.$$

Відповідь. а) $P(A) = 0{,}25$; б) $P(A) = 0{,}4$.

Із означення та всіх розглянутих прикладів випливає, що ймовірність події – це цілком визначене число, причому зовсім не випадкове. Це – невипадкова (детермінована) характеристика випадкової події.

Приклад 1.6. *Задано двозначне число, цифри якого різні. Дехто навмання назвав двозначне число. Знайти ймовірність, що це число і є задуманим.*

Розв'язання. Введемо подію: $A =${Назване число і є задуманим}.

Кількість сприятливих подій (тих, що ми виберемо два однакових числа з різними цифрами) – $m = 81$. Ми маємо обрати з одного набору і другого. Тому кількість загальних подій (і сприятливих, і несприятливих) –

$$n = 81 \cdot 90 = 7290.$$

За формулою (1.2):

$$P(A) = \frac{81}{7290} = \frac{1}{90}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{1}{90}$.

1.6. Частість наставання подій

Нехай простів елементарних подій складається з обмеженої кількості елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_S\}$.

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{S} \{\omega_i\}$$

F – позначення множини всіх подій що є всіма можливими різними підмножинами Ω, включаючи неможливу подію $V = \{\emptyset\}$.

Кількість елементів – $|F| = 2^S$.

Беремо довільну подію A, $A \in F$, n разів повторили випробування, для якого побудований простір Ω. n_A – кількість випробувань, в кожному з яких настала подія A.

Частістю настававання події A в n довільних випробувань є $W_n = \frac{n_A}{n}$ (випробування зветься довільним, якщо на нього не накладаються умови).

Частість ще називають *відносною частотою*.

Властивості частості

1. *Частість належить сегменту від* 0 *до* 1

$$0 \le W_n(A) \le 1.$$

2. *Частість достовірної події дорівнює одиниці*

$$W_n(\mathcal{U}) = 1.$$

3. *Якщо* $A = \bigcup_{i=1}^{K} A_i$, $\forall\, i \ne j$, $A_i \cap A_j = \{\emptyset\}$ (*попарно несумісні*), *то*

$$W_n(A) = \sum_{i=1}^{K} W_n(A_i).$$

Доведення. Нехай провели випробування внаслідок якого настала подія A. За означенням об’єднання це означає, що в цьому випробувані настала якась подія A_i $(i \in \overline{1;K})$. Кількість випробувань в яких вона настала – n_{A_i}. Оскільки A_i – попарно несумісні, то в цьому випробовувані не настала жодна інша подія A_j $(j \ne i)$. Звідси $n_A = \sum_{i=1}^{K} n_{A_i} \Rightarrow \frac{n_A}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{K} n_{A_i}}{n}$.

Теоретична ймовірність як формальна наука побудована для випадків, що описують такі випробування, для яких повинно виконуватись:

$$\exists \lim_{n\to\infty} W_n(A) = \frac{n_A}{n} = P(A). \tag{1.9}$$

І ця границя однакова для будь-якої серії випробувань і називається *ймовірністю настання події A*.

1.7. Геометрична ймовірність

Основні поняття

Класичне означення ймовірності передбачає, що кількість елементарних наслідків скінченна. Якщо множина всіх елементарних наслідків нескінченна, застосовують геометричне означення ймовірності.

Геометрична ймовірність є розділом теорії ймовірностей, який стосується обчислення ймовірностей подій, пов'язаних із геометричними об'єктами, такими як точки, відрізки, площі та об'єми. Вона використовується в задачах, де ймовірність визначається через вимірювання довжин, площ або об'ємів.

Нехай простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу на прямій, площині або в просторі, а множину елементарних подій для події A – як частину цього геометричного образу (відрізок, площа, об'єм та ін.), то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \qquad (1.10)$$

Дана ймовірність називається *геометричною ймовірністю*.

Ймовірність на відрізку: Якщо на відрізку $\Omega = [a, b]$ випадковим чином вибирається точка, ймовірність того, що ця точка потрапить на певний підвідрізок $A = [c, d]$, обчислюється за формулою (рис. 1.5):

$$P(A) = P(\text{точка потрапить на } [c, d]) = \frac{L_A}{L_\Omega} = \frac{d-c}{b-a}, \qquad (1.11)$$

де L_A, L_Ω – довжини відповідних відрізків.

Рис. 1.5. Схема «Ймовірність на відрізку»

Ймовірність на площині: Якщо в прямокутнику Ω площі S_Ω випадковим чином вибирається точка, ймовірність того, що ця точка потрапить в певну область A з площею S_A, визначається як (рис. 1.6):

$$P(A) = P(\text{точка потрапить в область } A) = \frac{S_A}{S_\Omega}. \qquad (1.12)$$

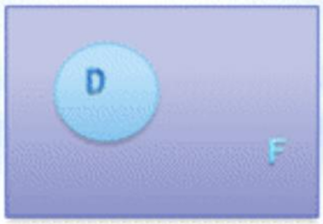

Рис. 1.6. Схема «Ймовірність на площині»

Ймовірність в об'ємі: Якщо в просторі Ω об'ємом V_Ω випадковим чином вибирається точка, ймовірність того, що ця точка потрапить в певну область A об'єму V_A, обчислюється за формулою (рис. 1.7):

$$P(A) = P(\text{точка потрапить в область } A) = \frac{V_A}{V_\Omega}. \qquad (1.13)$$

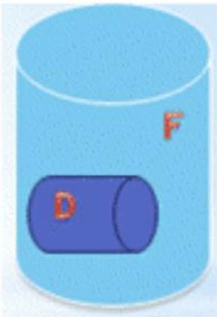

Рис. 1.7. Схема «Ймовірність в об'ємі»

Приклади застосування та обчислення

Задача Бюффона. *Розглянемо площину, на якій проведені паралельні лінії, що розташовані на відстані d одна від одної. Кидаємо голку довжини l ($l \leq d$) на цю площину випадковим чином. Необхідно знайти ймовірність того, що голка перетне одну з ліній.*

Розв'язання.

Геометричне моделювання

Позначимо кут між голкою і лініями як θ, де θ змінюється від 0 до π.

Позначимо відстань від центра голки до найближчої лінії як x, де $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$.

Ймовірність перетину

Голка перетне лінію, якщо $x \leq \frac{l}{2} \cdot sin\theta$.

Обчислення ймовірності

Ймовірність $P(A)$ перетину лінії можна знайти, взявши подвійний інтеграл відносно x і θ:

$$P(A) = \frac{2}{\pi \cdot d} \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{l}{2} \cdot sin\theta} dx\, d\theta = \frac{2}{\pi \cdot d} \cdot \int_0^{\pi} \left(\frac{l}{2} \cdot sin\theta\right) d\theta = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}.$$

Приклад

Розглянемо випадок, коли $l = d$. У цьому випадку ймовірність того, що голка перетне лінію, дорівнює:

$$P(A) = \frac{2 \cdot d}{\pi \cdot d} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366.$$

Задача Буффона є цікавим прикладом задачі з геометричної ймовірності і демонструє, як геометричні міркування можуть бути використані для обчислення ймовірностей у випадкових експериментах.

Ймовірність попадання в мішень. *Якщо є кругова мішень радіусом R і внутрішнє коло радіусом r, ймовірність того, що випадково кинута точка потрапить у внутрішнє коло, обчислюється як:*

$$P(A) = \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Приклад 1.7. *На відрізку довжини 20 см навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує 10 см?*

Розв'язання. Простір елементарних подій $\Omega = \{0 \le l \le 20 \text{ см}\}$, тоді $A = \{0 \le l \le 10 \text{ см}\}$ $(A \subset \Omega)$. Згідно з (2.2) маємо:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_\Omega} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{1}{2}$.

Приклад 1.8. *Дві подруги Олена і Тетяна домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від* 16 *до* 17 *годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом* 15 *хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.*

Розв'язання. Подія A ={зустріч відбудеться}. Позначимо довжину часового проміжку $T = 1$ година, а моменти приходу кожної особи – x, y. Тоді подія A відбудеться за умови $|x - y| \le \frac{1}{4}$, (різниця між моментами приходу Олени і Тетяни не перевищує 15 хв.), де $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Зобразимо ці умови на площині в системі координат XOY (рис. 2.1).

Скориставшись геометричним означенням ймовірності, дістанемо:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{7}{16}.$$

де S_A – площа шестикутника (заштрихована область на рис.1), а S_Ω - площа квадрата, яка відповідає часу $T = 1$ годині.

$$S_1 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \text{ (кв. од.)}, S_2 = 1 \text{ (кв. од)}.$$

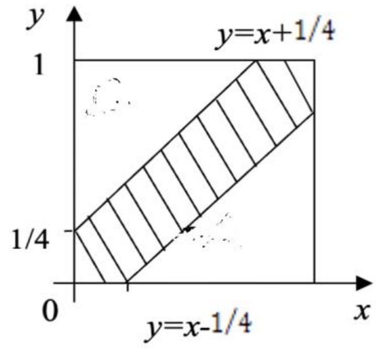

Рис. 1.8. Графік до задачі про зустріч (приклад 1.8)

Відповідь. $P(A) = \frac{7}{16}$.

Приклад 1.9. *Задана множина* $\Omega = (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$. *Яка ймовірність того, що навмання взяті два числа* (x, y) *утворять координати точки, яка влучить в область* A= $(0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2)$?

Розв'язання.

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1}{3},$$

де S_A - площа криволінійної трапеції (заштрихована область на рис. 1.9), яка обчислюється за формулою: $S_A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$(кв. од.), а S_Ω - площа квадрата, яка дорівнює $S_\Omega = 1 \cdot 1 = 1$ (кв. од.).

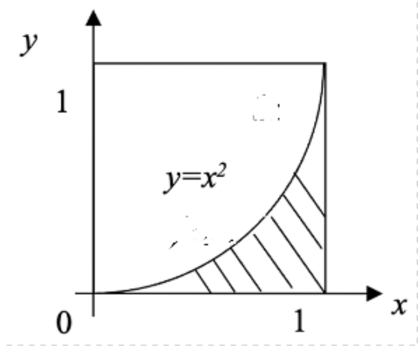

Рис. 1.9. Графік до прикладу 1.9

Відповідь. $P(A) = \frac{1}{3}$.

Приклад 1.10. *В прямокутник зі сторонами a та b випадково кидають точку. Потрібно знайти ймовірність того, що ця точка потрапить в коло радіусом r, вписане в цей прямокутник.*

Розв'язання.

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b}$.

Приклад 1.11. *В куб зі стороною a випадково кидають точку. Потрібно знайти ймовірність того, що ця точка потрапить у вписану кулю радіусом $r = \frac{a}{2}$.*

Розв'язання.

$$P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot a^3}{a^3} = \frac{\pi}{6}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{\pi}{6}$.

Приклад 1.12. *В круг вписано квадрат. У круг навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині квадрата.*

Розв'язання. Для кращого уявлення виконаємо графічний рисунок до задачі

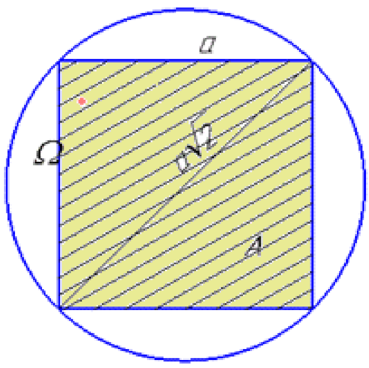

Рис. 1.10. Рисунок до прикладу 1.12

Нехай сторона квадрата A дорівнює a, тоді його площа – $S_A = a^2$. Діаметр круга Ω, що описаний навколо квадрата дорівнює діагоналі квадрата рівний $d = a \cdot \sqrt{2}$, тоді площа цього круга:

$$S_\Omega = \frac{\pi \cdot a^2}{2}.$$

Оскільки квадрат знаходиться всередины круга $A \subset \Omega$, то ймовірність того, що навмання кинута точка в круг виявиться всередині квадрата обчислюється за формулою:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64.$$

Відповідь. $P(A) \approx 0{,}64$.

Приклад 1.13. *Два судна повинні підійти до одного причалу. Поява суден – незалежні події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна –* 1 *год, а другого –* 2 *год.*

Розв'язання. Нехай перше судно прийшло до причалу в u год і стоїть 1 годину, а друге судно прийшло до того ж причалу в v год і стоїть 2 години. За простір елементарних подій виберемо

$$\Omega = \{(u, v): 0 \leq u \leq 24; 0 \leq v \leq 24\}.$$

Звідси $S_A = 24^2 = 576$ (площа). Тоді подія A ={судно чекає звільнення причалу} відповідає множині (заштрихована фігура на рис. 1.11)

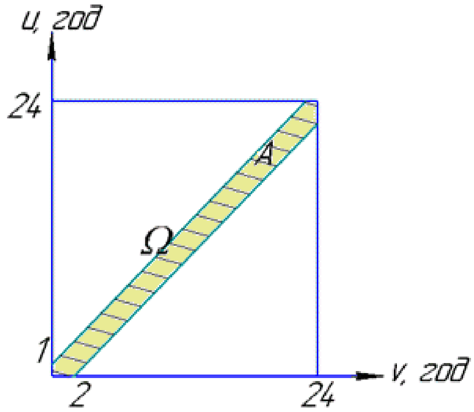

Рис. 1.11. Рисунок до прикладу 1.13

$$A = \{(u, v): 1 \leq u - v \leq 2; 0 \leq u \leq 24; 0 \leq v \leq 24\},$$

звідси її площа:

$$S_A = 24^2 - (0{,}5 \cdot 23^2 + 0{,}5 \cdot 22^2) = 69{,}5.$$

Оскільки $A \subset \Omega$, то ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу знайдемо за формулою:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{69{,}5}{576} \approx 0{,}12.$$

Відповідь. $P(A) \approx 0{,}12$.

Приклад 1.14. *На площину, на якій зображені паралельні прямі, що розташовані одна від одної на відстані* 6 *см, навмання кинули круг радіусом* 1 *см. Знайти ймовірність того, що круг не перетне жодної прямої. По замовчуванню розуміється, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізку і не залежить від його розташування.*

Розв'язання: Нехай $D = 6$ см – відстань між паралельними прямими; $d = 2 \cdot r = 2$ см – діаметр круга, який кинули на площину. Схематично це можна візуалізувати наступним чином:

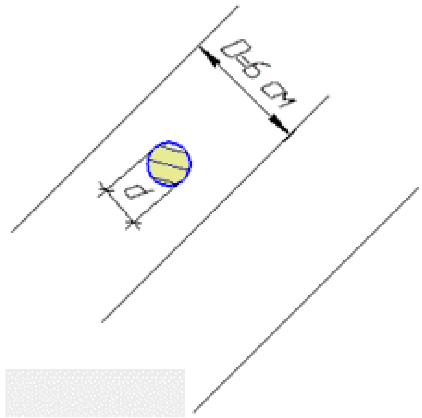

Рис. 1.12. Рисунок до прикладу 1.14

Ймовірність того, що круг не перетне жодної прямої знаходимо наступним чином:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_\Omega} = \frac{D-d}{D} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67,$$

де $D - d = 4$ см – найкоротша відстань від кола (яким обмежений круг) до паралельних прямих. Як бачимо така ймовірність є протилежною до того, що навмання кинутий круг перетне хоча б одну пряму:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{1}{3}$.

Приклад 1.15. *Навмання взято два додатних числа* x *і* y, *кожне з яких не перевищує одиниці. Знайти ймовірність того, що сума* $x + y$ *не перевищує одиниці, а добуток* $x \cdot y$ *не менше* 0,09.

Розв'язання: За умовою задачі маємо

$$\begin{cases} x + y \le 1, \\ x \cdot y \ge 0{,}09, \end{cases}$$

а також обмеження на змінні

$$0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1.$$

Розв'язавши систему нерівностей отримаємо:

$$0{,}1 \le x \le 0{,}9; 0{,}1 \le y \le 0{,}9.$$

За простір елементарних подій виберемо

$$\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}.$$

Звідси $S_\Omega = 1$ (площа).

Тоді подія

$$A = \begin{cases} 0 \le x + y \le 1, \\ 0{,}09 \le x \cdot y \le 1 \end{cases}$$

відповідає множині (заштрихована фігура на рис. 1.15)

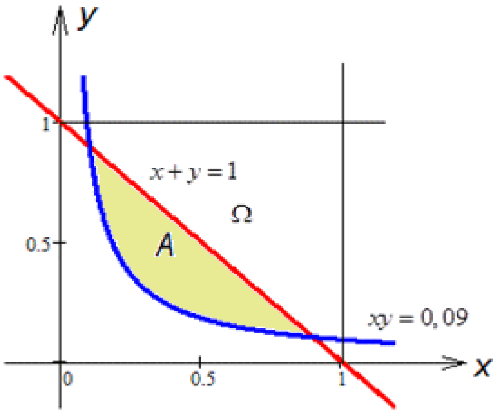

Рис. 1.13. Рисунок до прикладу 1.15

Побудова рисунків до задач на геометричну ймовірність дає повніше розуміння, що потрібно знайти. Якість рисунку ролі не грає, головне зміст, тому всюди де потрібно будуйте графічні схемки до умов задач.

$A = \{(x, y){:}\, 0 \le x + y \le 1; 0{,}09 \le x \cdot y \le 1; 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$

з відповідними межами області A:

$$0{,}1 \le x \le 0{,}9;$$

$$\frac{0{,}09}{x} \le y \le 1 - x.$$

На основі меж змінних можемо знайти площу між кривими через визначений інтеграл:

$$S_A = \int_{0{,}1}^{0{,}9} \left(1 - x - \frac{0{,}09}{x}\right) dx \approx 0{,}2023.$$

Оскільки $A \subset \Omega$, то ймовірність шуканої події знайдемо за формулою частки:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = 0{,}2023.$$

Відповідь. $P(A) = 0{,}2023$.