1.4 Відображення і функції

У попередніх лекціях були розглянуті бінарні відношення, які є підмножинами декартового добутку двох множин. Бінарні відношення, які визначені на декартовому квадраті множини, представляють найбільший інтерес через те, що вони володіють деякими важливими властивостями: симетричність, рефлективність, транзитивність тощо. Для відношень, що утворені різними множинами, коли $R \subseteq A \times B$, говорити про зазначені вище властивості немає сенсу, тому що перша та друга координати R мають різну природу. Наприклад, відношення "x народився в році y" є підмножиною декартового добутку множини людей та множини років і ставить у відповідність кожній людині рік її народження. Для аналізу подібних відношень вводяться поняття відображення та функції.

1.4.1 Функціональні відношення

Відношення R між множинами X і Y ($R \subseteq X \times Y$) є **функціональним**, якщо всі його елементи (упорядковані пари) різні за першим елементом: кожному $x \in X$ або відповідає тільки один елемент $y \in Y$, такий, що xRy, або такого елемента y взагалі не існує.

Матриця функціонального відношення, що задане на скінченних множинах X і Y, містить не більше однієї одиниці в кожному рядку.

Якщо функціональне відношення задано у вигляді графа, то з кожної вершини, що зображує першу координату, виходить не більше однієї дуги.

Приклади функціонального і нефункціонального відношень зображено на рисунку 1.

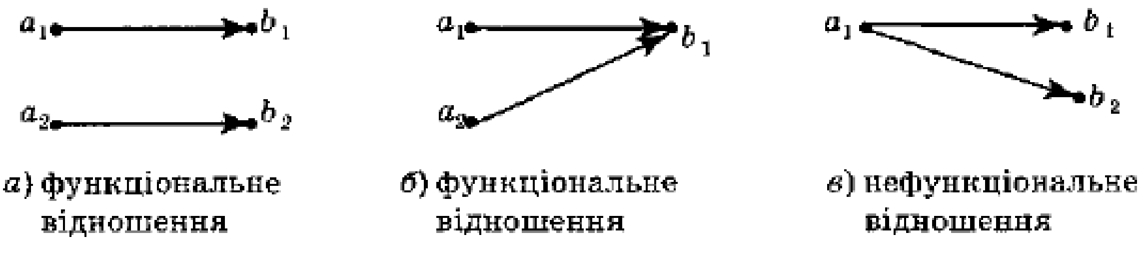


Рис. 1 — Приклади функціонального і нефункціонального відношень

Приклад. Нехай є множина A кроликів і множина B кліток. Нехай R — відношення розміщення кроликів по клітках — «Кролики — Клітки». Для будь-якого розміщення кроликів по клітках відношення R буде функціональним, оскільки кожному кролику може відповідати тільки одна клітка. Позначимо кроликів буквами, а клітки — номерами. Нехай $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. На рисунку 2 зображено функціональні відношення $R_1 = \{(a, 1), (b, 3)\}$ і $R_2 = \{(a, 1), (b, 1)\}$.

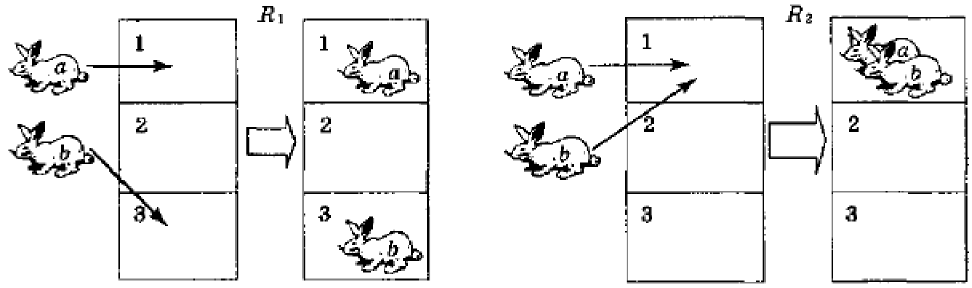


Рис. 2 — Приклади функціональних відношень «Кролики — Клітки»

Прикладом нефункціонального відношення є відношення $R_3 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}$. Воно може бути представлено в термінах розміщення кроликів по клітках, як показано на рисунку 3, де кролик *a* займає одночасно дві клітки 1, 2, завдяки зламаній перегородці.

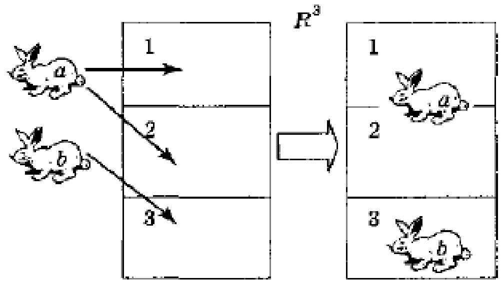


Рис. 3 — Приклад відношення «Кролики — Клітки», що не є функцією

Розглянемо інший приклад — українсько-англійський словник. Він встановлює відповідність між множиною українських та англійських слів. Ця відповідність не є функціональною (оскільки одному українському слову, як правило, ставляться у відповідність декілька англійських слів); крім того, вона практично ніколи не є повністю визначеною: завжди можна знайти українське слово, що не міститься в цьому словнику.

Нехай *R* — деяке відношення, $R \subseteq X \times Y$.

Областю визначення відношення *R* називається множина *Dom R* (D_R), що складається з усіх елементів множини *X*, які зв'язані відношенням *R* з елементами множини *Y*:

$$Dom\,R \subseteq X, \quad Dom\,R = \{x\colon \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

Якщо $Dom\,R = X$, то функціональне відношення *R* називається **всюди визначеним**.

Областю значень відношення *R* називається множина *Im R*, що складається з усіх елементів множини *Y*, які зв'язані відношенням *R* з елементами множини *X*:

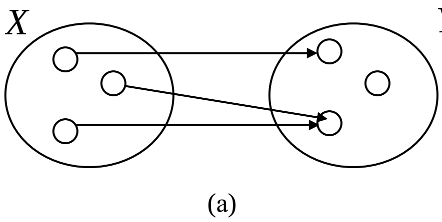
$$Im\,R \subseteq Y, \quad Im\,R = \{y\colon \exists x \in X, (x, y) \in R\}.$$

Відображенням f множини X в Y (або **функцією f**) (записують $f: X \to Y$) називається всюди визначене функціональне відношення.

Іноді функцію f також позначають наступним чином: $y = f(x)$, де $x \in X$, $y \in Y$.

При цьому перша координата x впорядкованої пари $(x, y) \in f$ є **прообразом** (аргументом, змінною), а друга y — **образом** (значенням).

При відображенні X в Y кожен елемент x з X має один і тільки один образ. Однак зовсім не обов'язково, щоб кожний елемент Y був образом деякого елемента з X. Графічно ця ситуацію показана на рис. 4а. Для порівняння на рис. 4б наведено приклад функціонального відношення, яке не є відображенням.



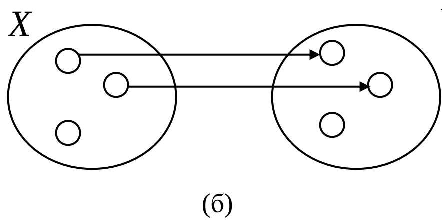


Рис. 4 — Приклади відображення (а) та функціонального відношення (б)

1.4.2 Типи відображень

Якщо для відображення $f: X \to Y$ будь-який елемент y з Y є образом принаймні одного елементу x з X, тобто: $\forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X: \quad y = f(x)$, то відображення називається **сюр'єктивним відображенням** (в цьому випадку кажуть, що множина X накриває множину Y) (рис. 5).

Або, інакше кажучи, відображення $f: X \to Y$ називається **сюр'єктивним відображенням**, якщо $Im\, f = Y$.

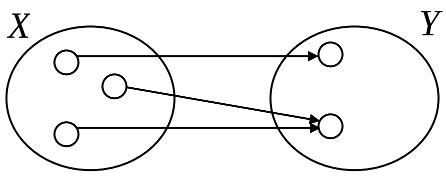


Рис. 5 — Приклад сюр'єктивного відображення

На графі, що зображує сюр'єктивне відображення $X \to Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y, заходить не менше однієї дуги. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику — не менше однієї одиниці.

Якщо для відображення $f: X \to Y$ для будь-яких двох різних елементів x_1 та x_2 з X їх образи y_1 та y_2 також різні, то відображення f називається **ін'єктивним відображенням** (рис. 6). Іншим чином це можна записати як:

$$y = f(x_1) \text{ та } y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

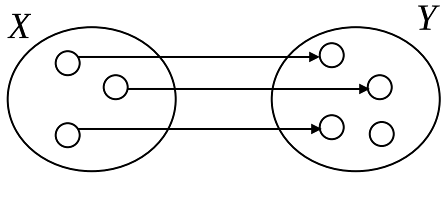


Рис. 6 — Приклад ін’єктивного відображення

На графі, що зображує ін'єктивне відображення $X \to Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y, заходить не більше однієї дуги. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику — не більше однієї одиниці.

Відображення, яке одночасно є сюр’єктивним та ін’єктивним називається **бієктивним** (накладанням). У цьому випадку кажуть, що між елементами X та Y існує взаємно однозначна відповідність (рис. 7).

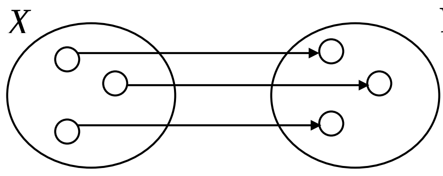


Рис 7 — Приклад бієктивного відображення

На графі, що зображує бієктивне відображення $X \to Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y, заходить точно одна дуга. В матриці відображення у кожному рядку точно одна одиниця, а в кожному стовпчику — теж точно одна одиниця.

Якщо f — взаємно однозначне відображення, а $X = Y$, то $f : X \to X$ називається відображенням множини A на себе. Елементи $(x, x) \in X \times X$ утворюють **тотожне відображення** E, причому $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E$.

Відображення множини в її фактор-множину називається **канонічною сюр’єкцією.**

Приклад. Нехай X та Y — множини дійсних чисел і $f : X \to Y$ визначено таким чином: $f(x) = 3x + 5$. Функція f ін’єктивна, тому що якщо $f(x_1) = f(x_2)$, тоді $3x_1+5 = 3x_2+5$ і відповідно $x_1 = x_2$. Функція f є також сюр’єкцією. Для будь-якого дійсного числа y треба знайти таке x, що $f(x) = y = 3x + 5$. Розв’язуючи це рівняння відносно x, знаходимо, що якщо $x = (1/3)(y - 5)$, тоді $f(x) = y$. Тому функція f представляє собою бієкцію або взаємно однозначну відповідність.

Приклад. Нехай знову X та Y — множини дійсних чисел, а функція $f : X \to Y$ визначена як $f(x) = x^2$. Функція f не є ін’єктивною, тому що $f(2) = f(-2)$, але $2 \neq -2$. Функція f не є також сюр’єкцією, тому що не існує такого дійсного числа x, для якого $f(x) = -1$. Зазначимо, що якщо X та Y — множини невід'ємних дійсних чисел, то тоді f буде і сюр'єктивним, і ін'єктивним. У випадку коли X та Y будуть множинами натуральних чисел, то f збереже ін'єктивність, але втратить сюр'єктивність.

Різні види кодування (подання чисел у різних системах числення, секретні шифри тощо) є відповідністю між об'єктами, що кодуються, і кодами, що присвоюються їм. Ця відповідність, як правило, має всі властивості взаємно однозначної відповідності, крім, може бути, однієї — сюр'єктивності. Єдність образу та прообразу в кодуванні гарантує однозначність шифрування і дешифрування. Відсутність сюр'єктивності означає, що не кожний код має значення, тобто відповідає якому-небудь об'єкту. Наприклад, кодування телефонів міста Києва семизначними номерами не є сюр'єктивним, оскільки деякі семизначні номери не відповідають жодним телефонам. У випадку коли мова йде про шифрування слів і не виконується умова ін'єкції, то це означає, що неможливо однозначно встановити початкове слово за його шифром або кодом.

1.4.3 Властивості відображень

Загалом при відображенні $f: X \to Y$ елемент із Y може бути образом не одного, а кількох елементів із X.

Сукупність усіх елементів, образом яких є заданий елемент y, називається **повним прообразом** елемента y і позначається $f^{-1}(y)$.

Сукупність елементів $f(x)$, які є образами всіх елементів множини $C \subset X$, називається **образом множини** C та позначається $f(C)$.

Сукупність усіх елементів із X, образи яких належать якійсь множині $D \subset Y$, називається **повним прообразом множини** D і позначається $f^{-1}(D)$.

Приклад. Нехай $X = \{1, 2, 3, 4\}$ та $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, а $f = \{(1,5), (2,6), (2,7), (3,8), (3,5)\}$.

Тоді повним прообразом елемента "5" з множини Y буде $f^{-1}(5) = \{1, 3\}$.

Нехай також $C = \{1, 2\}$. Тоді образ множини C буде $f(C) = \{5, 6, 7\}$.

Нехай $D = \{6, 7\}$. Тоді $f^{-1}(D) = \{2\}$.

Теорема 4.1. Нехай f є відображення $f: X \to Y$. Тоді справедливі наступні властивості відображень:

а) Якщо $X \subset Y$, то $f(X) \subset f(Y)$, $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$,

б) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$,

в) $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$, $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$,

г) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$,

д) $f^{-1}(X') = (f^{-1})'(X)$.

1.4.4 Композиція відображень

Якщо $f : A \to B$, $g : B \to C$, то їх **композиція** $(g \circ f) : A \to C$, причому $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Іншими словами, якщо існує множина пар $(a, b) \in f$ та $(b, c) \in g$, то множина пар $(a, c) \in f \circ g$ утворює композицію $(g \circ f)$. Запис $(g \circ f)$ проводиться в порядку, який є зворотнім до того, в якому виконуються операції $f : A \to B$, $g : B \to C$. Таким чином, в математиці прийнято правило, згідно з яким композицію відображень $(g \circ f)$ треба починати з виконання операції f, яка розташована справа.

Приклад. Якщо $f : R \to R$, $f(x) = \sin x$, $g : R \to R$, $g(x) = \ln x$, то

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \ln(\sin x),$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = \sin(\ln x),$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sin x) = \sin(\sin x),$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\ln x) = \ln(\ln x).$$

Легко показати, що композиція відображень асоціативна, тобто $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ і записується у вигляді $h \circ g \circ f$. Так само легко з'ясувати, що композиція відображень не комутативна (це випливає з означення композиції відображень).

Теорема 4.2. Функція f є взаємно однозначним функціональним відношенням тоді і тільки тоді, коли f^{-1} – взаємно однозначне відношення.

Теорема 4.3. Композиція двох функціональних відношень є функціональним відношенням.

Теорема 4.4. Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тоді

а) якщо f і g – сюр'єкції A на B та B на C відповідно, то $g \circ f$ є сюр'єкцією A на C. Іншими словами, композиція двох сюр'єкцій – сюр'єкція.

б) якщо f і g – ін'єкції, то $g \circ f$ є ін'єкцією. Іншими словами, композиція двох ін'єкцій – ін'єкція.

в) якщо f і g – бієкції, то $g \circ f$ є бієкцією. Іншими словами, композиція двох бієкцій – бієкція.