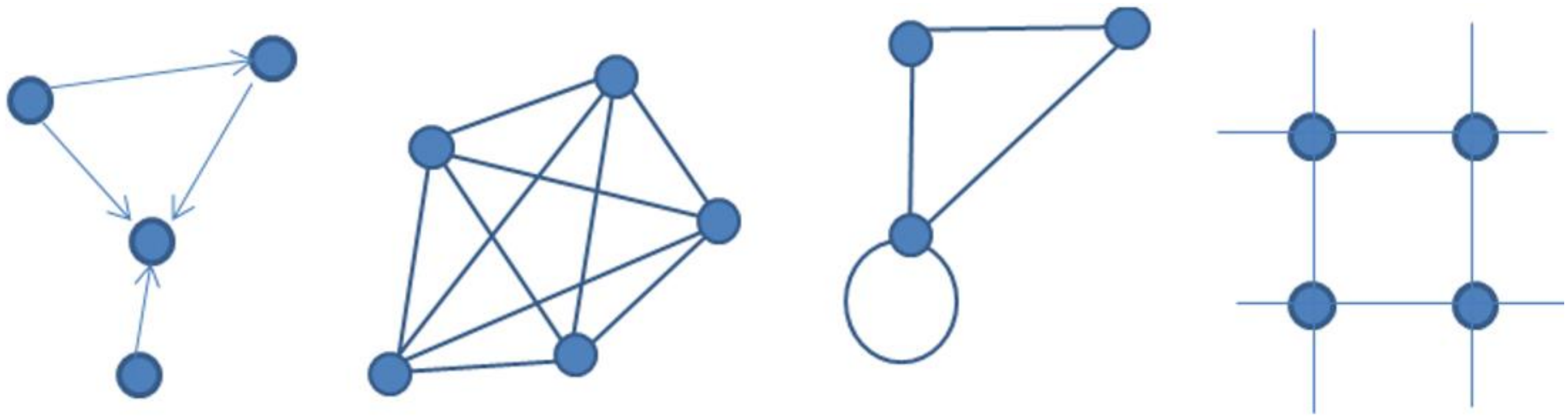
5 Теорія графів



Застосування теорії графів

- фізика;
- хімія;
- теорія зв’язку;
- проектування обчислювальних машин;
- електротехніка;
- машинобудування;
- архітектура;
- дослідження операцій;
- генетика;
- психологія;
- соціологія;
- економіка;
- антропологія;
- лінгвістика тощо.

Граф є математичною моделлю найрізноманітніших об’єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці

У вигляді графа зображують

— електричні і транспортні мережі;
— інформаційні і комп’ютерні мережі;
— карти автомобільних, залізничних, повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів;
— моделі кристалів;
— структури молекул хімічних речовин;
— моделі ігор;
— різні математичні об’єкти;

У вигляді графа зображують

— лабіринти;

— плани діяльності або плани виконання певних робіт (розклади);

— генеалогічні дерева тощо.

Приклади застосування теорії графів

— пошук зв’язних компонентів у комунікаційних мережах;

— пошук найкоротших, “найдешевших” та “найдорожчих” шляхів у комунікаційних мережах;

— побудова кістякового дерева: зв’язність з найменшою можливою кількістю ребер;

— пошук максимальної течії для транспортної мережі, в якій визначено вхідні та вихідні вершини та пропускні спроможності ребер;

Приклади застосування теорії графів

— ізоморфізм графів: ідентичність структур молекул (ізометрія);

— знаходження циклів графів:

- гамільтонів цикл: обійти всі вершини графа, побувавши в кожній з них лише один раз (задача комівояжера);
- ейлерів цикл: обійти всі ребра (контроль дієздатності мережі);

Приклади застосування теорії графів

— розфарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів тощо;

— планарність графів: проектування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв’язок тощо;

— знаходження центрів графа: вершин, максимальна відстань від яких до всіх інших вершин графа є мінімальною (“столиць”) тощо.

5.1 Основні поняття теорії графів

5.1.1 Графи

Граф зображується як множина точок, деякі з яких з’єднані лініями.

В графі несуттєві відстані між точками, форма з’єднувальних ліній та кути між ними.

Важливо тільки те, чи з’єднана дана пара точок лінією, чи ні.

Граф іноді називають **топологічним об’єктом**, тобто об’єктом, властивості якого не змінюються при розтягуванні, стисненні та викривленні.

Граф — об’єкт дискретний і може бути заданий двома дискретними множинами:

- множиною точок (**вершин**);
- множиною ліній (**ребер**), які з’єднують деякі вершини.

Графом $G = (V, E)$ називається об'єкт, який заданий парою множин (V, E),

де V — множина **вершин**,

$E \subseteq V \times V$ — множина **ребер**.

Граф називається **скінченним**, якщо множини його вершин і ребер є скінченними.

Множину вершин графу G позначають $V(G)$, а множину ребер — $E(G)$.

Кількість вершин графу

$$n(G) = |V(G)|,$$

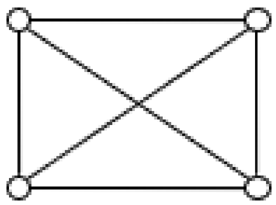
кількість ребер

$$m(G) = |E(G)|.$$

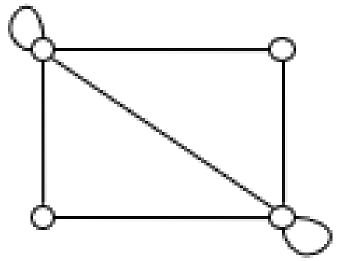
Кількість вершин $n(G)$ графу називають **порядком графу**.

Приклади графів

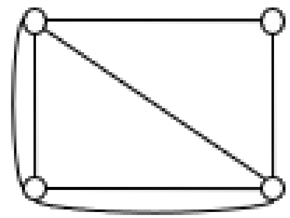
а)



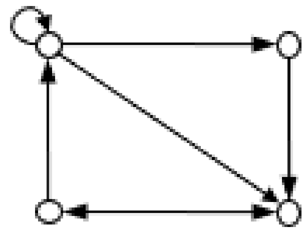
б)



в)



г)



д)

Якщо для деякого ребра $e = (v,w) \in E(G)$, то:

— вершини v та w **суміжні**;

— вершини v та w **інцидентні** ребру e;

— ребро e **інцидентне** вершинам v і w.

Множина вершин, які суміжні з вершиною v, називається **множиною суміжності** вершини v і позначається $\Gamma^+(v)$:

$$\Gamma^+(v) = \{w \in V \mid (w,v) \in E\}, \qquad \Gamma^*(v) = \Gamma^+(v) + v.$$

Якщо $A \subset V$ — множина вершин, то $\Gamma(A)$ — множина всіх вершин, суміжних з вершинами з A:

$$\Gamma(A) = \{w \in V \mid \exists v \in A, w \in \Gamma(v)\} = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v).$$

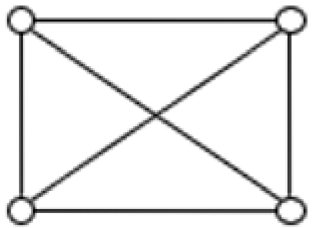
Граф називається **нуль-графом** (позначається $\varnothing$), якщо його множина ребер E є порожньою.

Приклад

Якщо множина вершин V графу — порожня, то порожньою є також множина ребер E. Такий граф називається **порожнім**.

Лінії, що зображують ребра графу, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами графу.

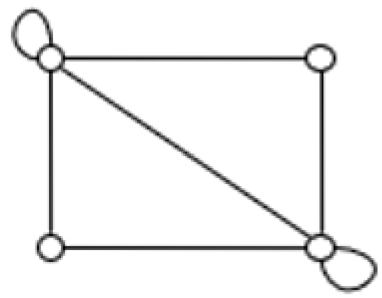
Приклад



Ребро може з’єднувати деяку вершину саму із собою, таке ребро називається **петлею**.

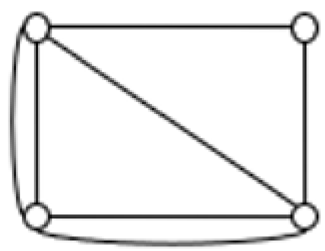
Цей випадок відповідає наявності в множині E пар вигляду (v, v).

Приклад



Різні ребра можуть бути інцидентними одній і тій самій парі вершин, такі ребра називаються **кратними**.

Приклад



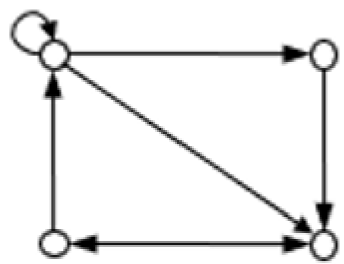
Граф називається **простим**, якщо кожну пару вершин з’єднує не більше, ніж одне ребро.

Граф називається **мультиграфом**, якщо він має кратні ребра.

Граф називається **псевдографом**, якщо він має петлі та кратні ребра.

Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $D = (V, E)$, де V — множина вершин, $E \subseteq V \times V$ — множина орієнтованих ребер або **дуг**.

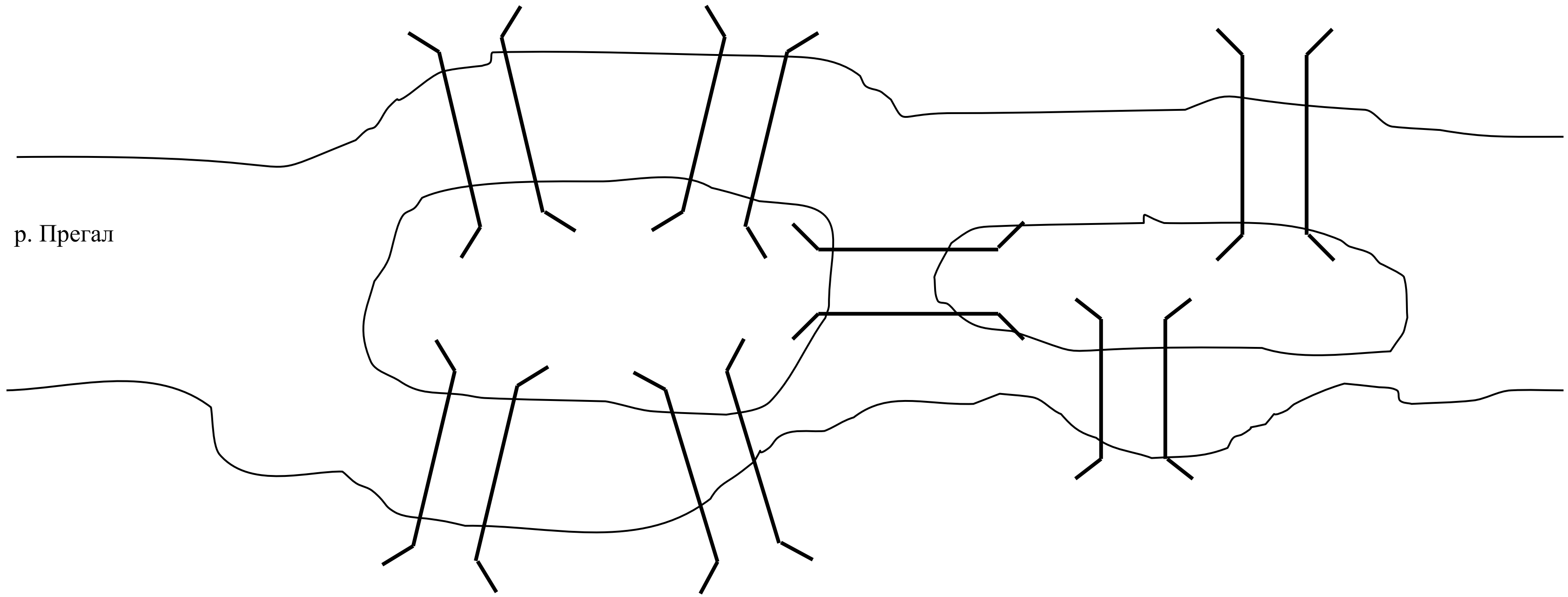
Приклад

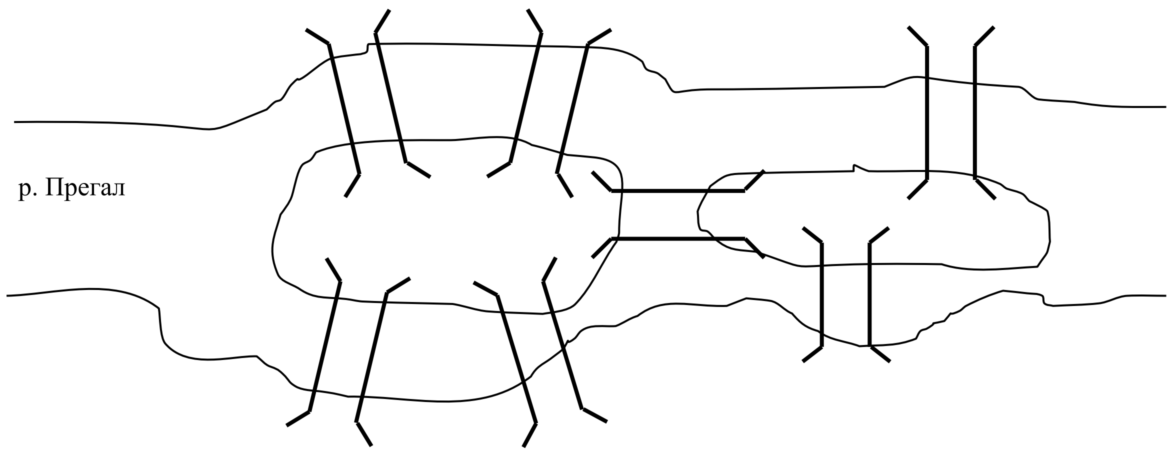


Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають зворотні напрямки.

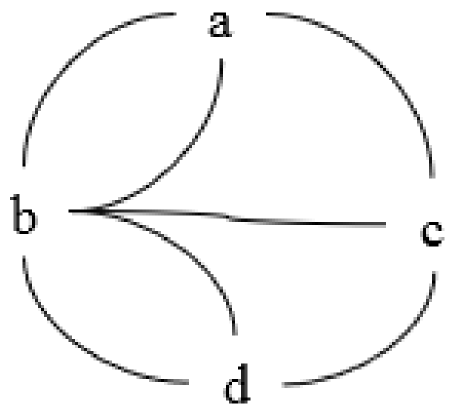
5.1.2 Приклади з історії теорії графів

Задача про кенігсбергські мости (Ейлер, 1736 р.)





а)



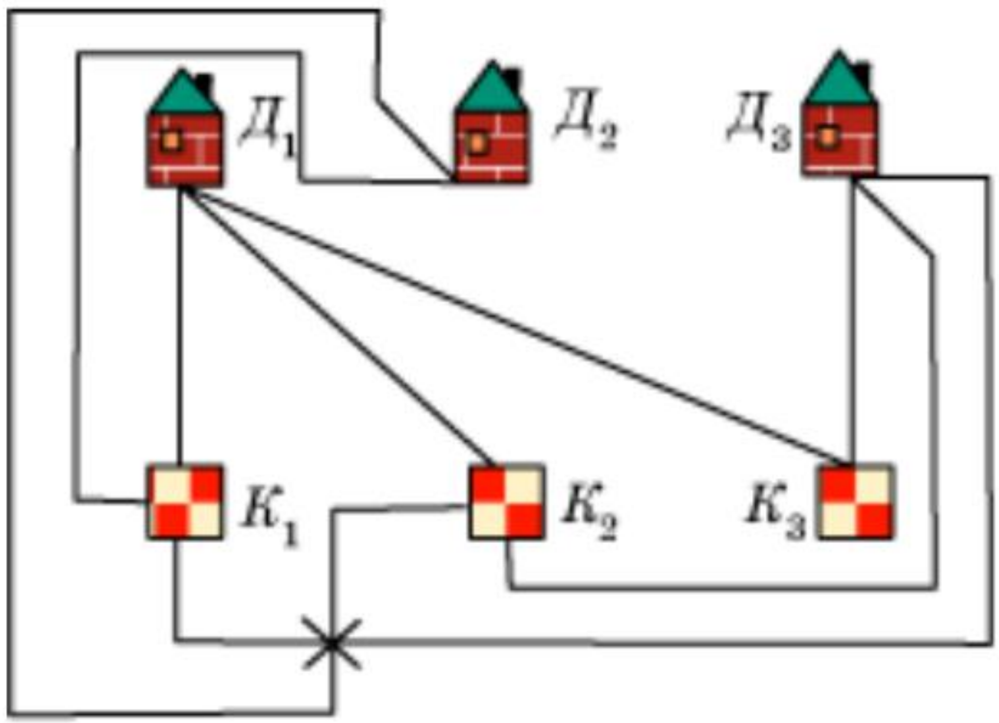
б)

б) — відповідний мультиграф, де ділянки суші — вершини, а стежки через мости — ребра.

Задача: починаючи з довільної вершини, проходячи по кожному ребру тільки один раз, повернутися у вихідну вершину.

Задача про три будинки та три колодязі

потрібно провести від кожного будинку до кожного колодязя стежку так, щоб стежки не перетинались



5.1.3 Способи задання графів

Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — вершини графу G; $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — його ребра.

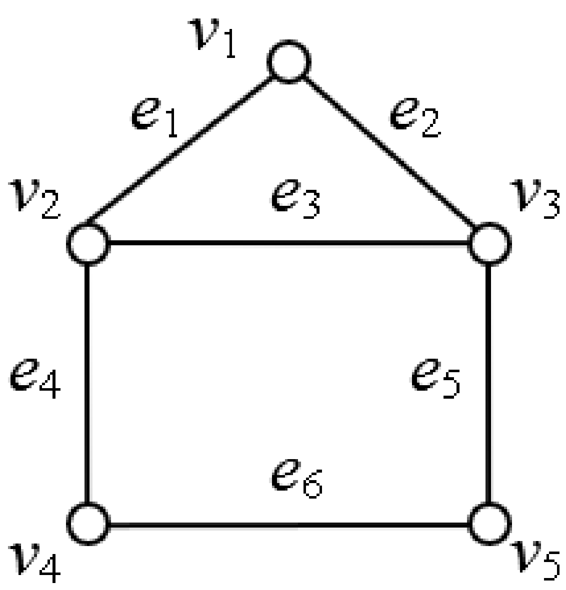
Матриця інцидентності неорієнтованого графу

Відношення інцидентності можна означити матрицею $E = \|\varepsilon_{ij}\|$, яка має n рядків та m стовпців.

Рядки відповідають вершинам графу, а стовпці — його ребрам.

Якщо ребро e_j є інцидентним вершині v_i, то $\varepsilon_{ij} = 1$, в іншому випадку $\varepsilon_{ij} = 0$.

Приклад



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0
v_3	0	1	1	0	1	0
v_4	0	0	0	1	0	1
v_5	0	0	0	0	1	1

Матриця інцидентності орієнтованого графу

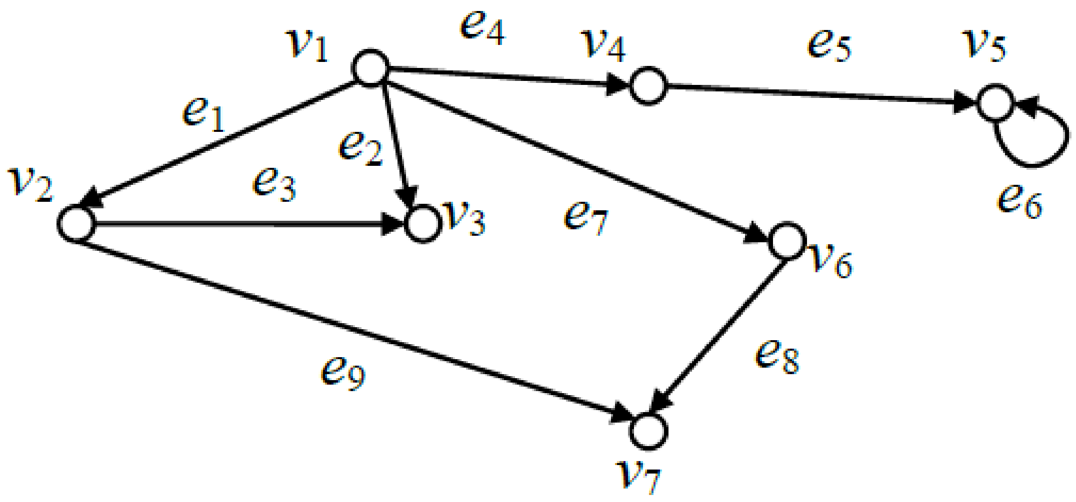
У матриці інцидентності $\|\varepsilon_{ij}\|$ орієнтованого графу:

якщо вершина v_i — початок дуги e_j, то $\varepsilon_{ij} = -1$,

якщо v_i — кінець e_j, то $\varepsilon_{ij} = 1$;

якщо e_j — петля, а v_i — інцидентна їй вершина, то $\varepsilon_{ij} = 2$.

Приклад



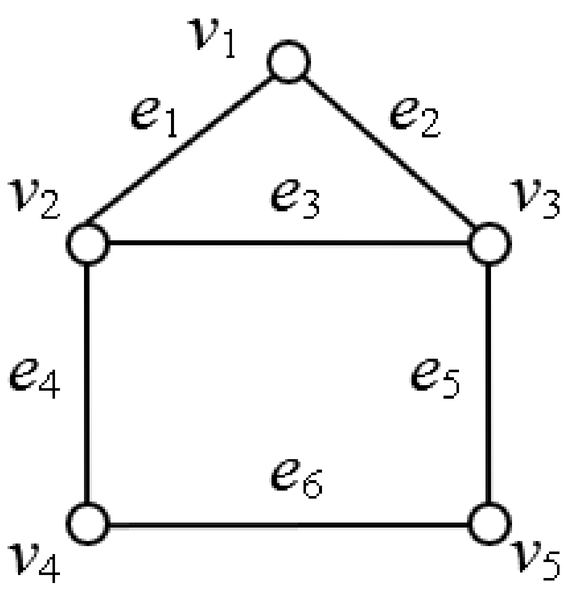
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0
v_2	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1
v_3	0	1	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	2	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Список ребер графу

Кожний рядок списку відповідає ребру, в ньому записано номери вершин, інцидентних йому.

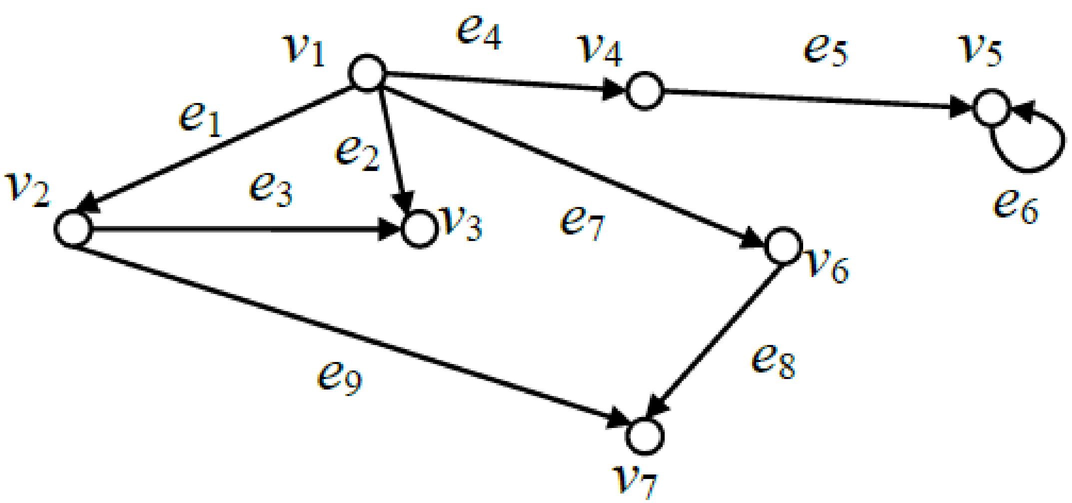
Для неорієнтованого графу порядок цих вершин у рядку довільний, для орієнтованого — першим записується номер або інше найменування початку ребра, а другим — його кінця.

Приклад



Ребро	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_2, v_4
e_5	v_3, v_5
e_6	v_4, v_5

Приклад



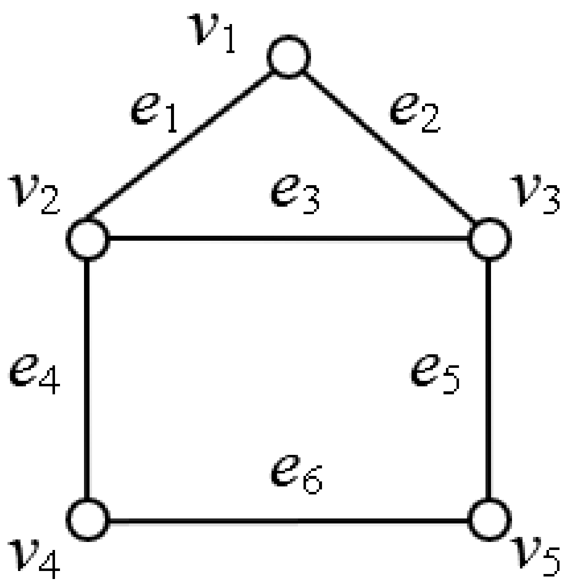
Ребро	Вершини
e_1	v_1, v_2
e_2	v_1, v_3
e_3	v_2, v_3
e_4	v_1, v_4
e_5	v_4, v_5
e_6	v_5, v_5
e_7	v_1, v_6
e_8	v_6, v_7
e_9	v_2, v_7

Матриця суміжності

Матриця суміжності — це квадратна матриця $\Delta = \| \delta_{ij} \|$, стовпцям і рядкам якої відповідають вершини графу.

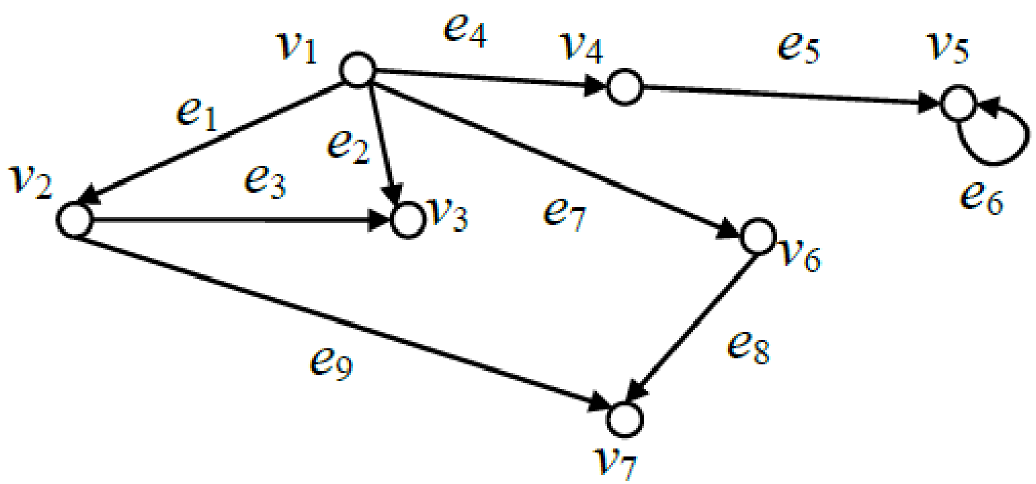
Для неорієнтованого графу δ_{ij} дорівнює кількості ребер, інцидентних *i*- та *j*-й вершинам, для орієнтованого — цей елемент матриці відповідає кількості ребер з початком в *i*-й вершині та кінцем у *j*-й вершині.

Приклад



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	1	1	0	0	1
v_4	0	1	0	0	1
v_5	0	0	1	1	0

Приклад

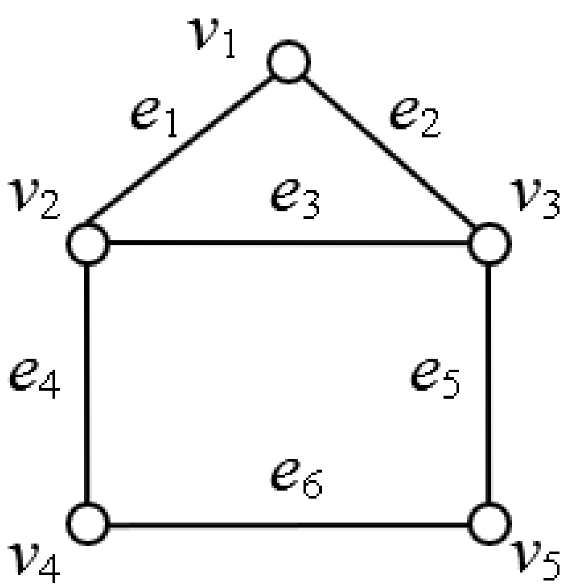


	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	1	1	1	0	1	0
v_2	0	0	1	0	0	0	1
v_3	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0
v_5	0	0	0	0	1	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0

Список суміжностей

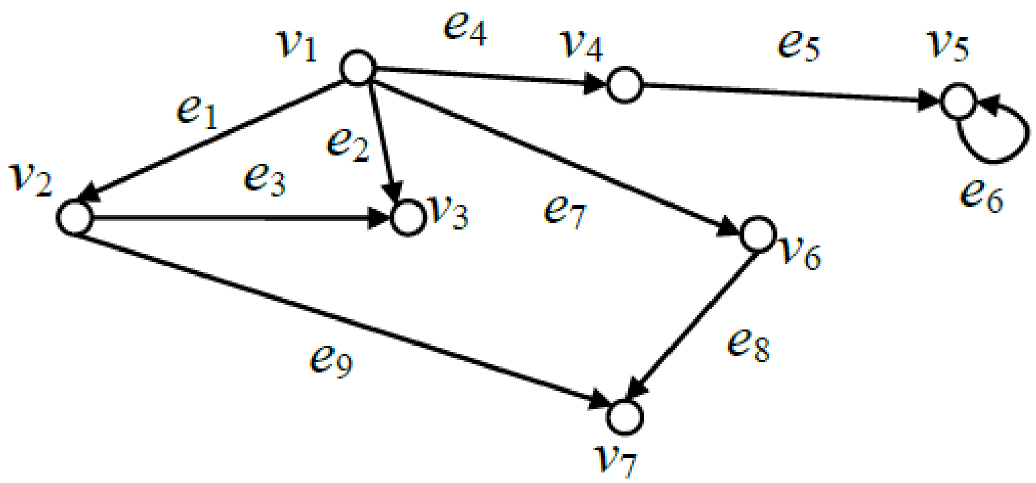
для кожної вершини v_i графу наводиться список вершин, які суміжні з вершиною v_i.

Приклад



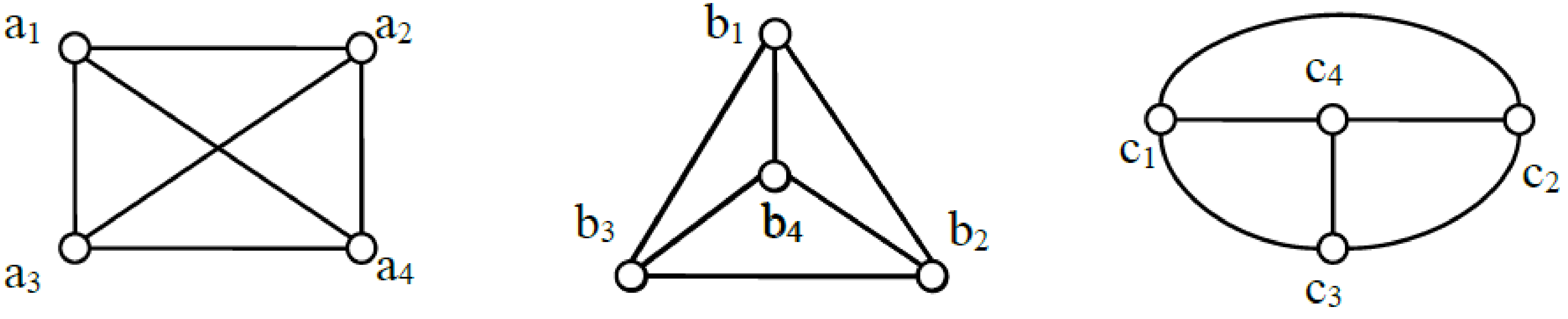
Вершина	Вершини
v_1	v_2, v_2
v_2	v_1, v_3, v_4
v_3	v_1, v_2, v_5
v_4	v_2, v_5
v_5	v_3, v_4

Приклад



Вершина	Вершини
v_1	v_2, v_3, v_4, v_6
v_2	v_3, v_7
v_3	—
v_4	v_5
v_5	v_5
v_6	v_7
v_7	—

5.1.4 Ізоморфізм графів



а) б) в)

Нехай існує бієкція φ, яка діє з множини вершин графу G на множину вершин графу H так, що для будь-яких вершин v_1 та v_2 графу G їх образи $\varphi(v_1)$ і $\varphi(v_2)$ є суміжними в H тоді й тільки тоді, коли v_1 та v_2 — суміжні в G.

Така бієкція називається **ізоморфізмом** графу G на граф H, а графи G і Н є **ізоморфними**.

5.1.5 Графи та бінарні відношення

Між простими орієнтованими графами та бінарними відношеннями існує взаємно однозначне співставлення.

Довільний граф з множиною вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ визначає бінарне відношення на множині V — відношення суміжності.

Довільне бінарне відношення R на довільній множині $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ можна зобразити графом G, вершини якого відповідають елементам A, а ребро (a_i, a_j) в цьому графі існує, тоді й тільки тоді, коли виконується $a_i R a_j$.