Перетворення Лапласа

доц. І.В. Орловський

Означення 1

Оригіналом називають будь-яку функцію $f(t)$, $t \in (-\infty; +\infty)$, яка справджує умови:

1. $f(t) = 0$ *при* $t < 0$, $f(0) = f(+0)$;
2. *кусково-неперервна й інтегровна на будь-якому відрізку* $[0; T]$;
3. *існують сталі* $s \geq 0$ *та* $M > 0$, *такі що*

$$|f(t)| \leq Me^{st}, \; t \geq 0,$$

Якщо нерівність

$$|f(t)| \leq Me^{st}, \; t > 0,$$

виконана для деякого $s = s_1$, то вона буде виконана й для будь-якого $s_2 > s_1$. Точну нижню межу всіх таких чисел s, $s_0 = \inf s$, для яких виконана нерівність, називають показником росту функції $f(t)$.

Приміром, функція

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{3t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

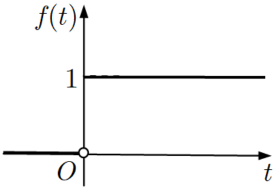
є оригіналом з показником росту $s_0 = 3$, а

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{t^2}, & t \geq 0 \end{cases}$$

не є оригіналом.

Найпростішою функцією-оригіналом є одинична функція Хевісайда

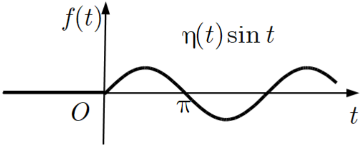
$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$



Виявляється, що якщо функція $f(t)$ задовольняє умови 2) та 3), то помноживши цю функцію на $\eta(t)$ вже одержимо функцію-оригінал $f(t)\eta(t)$.

Надалі пишемо оригінал $\sin t$ – розуміємо

$$\sin t \cdot \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases}$$



Означення 2

Перехід від функції-оригіналу $f(t)$ до її зображення за Лапласом (перетвору Лапласа)

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

де $p = s + i\sigma$ – комплексна змінна, називають прямим перетворенням Лапласа і позначають

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p).$$

Перехід від зображення $F(p)$ до функції-оригіналу $f(t)$ називають оберненим перетворенням Лапласа і позначають

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}(t) = f(t).$$

Оператор $\mathcal{L}$ називають оператором Лапласа.
Той факт, що функція-оригінал $f(t)$ має своїм зображенням $F(p)$ позначають

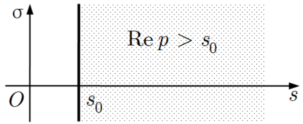
$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \doteqdot f(t).$$

Теорема 1 (існування зображення)

Для будь-якої функції-оригіналу $f(t)$ з показником росту s_0 зображення $F(p)$ визначене в півплощині $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$ і є в цій півплощині аналітичною функцією.

Доведення

Нехай $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$. Доведемо лише існування зображення $F(p)$ у вказаній півплощині. Для цього достатньо показати, що інтеграл $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ абсолютно збіжний коли $s > s_0$.



$$\left|\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int\limits_0^{\infty} \left|f(t)e^{-pt}\right| dt \le M \int\limits_0^{\infty} e^{s_0 t} \cdot \left|e^{-(s+i\sigma)t}\right| dt =$$

$$= M \int\limits_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0}.$$

Отже, $|F(p)| = \left|\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \le \frac{M}{s-s_0}$, тобто інтеграл абсолютно збігається і, відповідно, зображення $F(p)$ існує і є однозначним на півплощині $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$.

Теорема 2 (необхідна ознака існування зображення)

Якщо точка p прямує до нескінченності так, що $\operatorname{Re} p = s$ *необмежено зростає, то*

$$\lim_{s\to+\infty} F(p) = 0.$$

З теореми 2 випливає, що функції $F(p) = 1$ чи $F(p) = p$ не можуть бути зображеннями.

Теорема 3 (єдиності функції-оригіналу)

Якщо дві неперервні функції-оригінали $f(t)$ та $g(t)$ мають те саме зображення $F(p)$, то вони тотожно рівні.

Знайдімо зображення функції-оригінала $f(t) = 1$ (розуміючи її як одиничну функцію Хевісайда $\eta(t)$. Функція $\eta(t)$ є функцією-оригіналом з показником росту $s_0 = 0$.

$$1 \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_0^{A} e^{-pt} dt = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \Big|_0^A =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-Ap} + \frac{1}{p} \right) = \left| \begin{matrix} p = s + i\sigma, \\ s > 0 \end{matrix} \right| = \frac{1}{p}.$$

Отже, правдива формула:

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Знайдімо зображення $f(t) = e^{at}$ (розуміючи її, як $e^{at}\eta(t)$).
Функція $f(t) = e^{at}$, $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, є функцією-оригіналом з показником росту $s_0 = \alpha$.
Розглядаючи $\operatorname{Re} p = s > \alpha$, маємо

$$e^{at} \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_0^{A} e^{-(p-a)t} dt = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \right)\Bigg|_0^A =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{p-a} e^{-A(p-a)} + \frac{1}{p-a} \right) = \left| \begin{matrix} p = s + i\sigma, \\ s > \alpha \end{matrix} \right| = \frac{1}{p-a}.$$

Отже, правдива формула:

$$e^{at} \doteqdot \frac{1}{p-a}, \;\; \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

2. Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$ та $g(t) \doteqdot G(p)$, то для будь-яких комплексних сталих α та β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Знайдімо зображення функцій, які лінійно виражаються через експоненту:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$

$$\operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega}\right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

2. Подібність

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, то для будь-якого сталого $\lambda > 0$

$$f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

3. Зміщення (зображення)

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, то для будь-якого комплексного числа a

$$e^{at} \cdot f(t) \doteqdot F(p-a).$$

З теореми зміщення випливає наступне

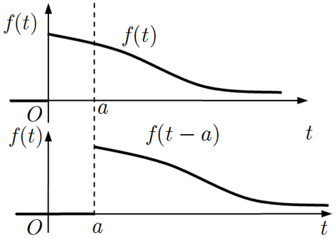
$$e^{at}\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}, \qquad e^{at}\,\mathrm{sh}\,\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2},$$

$$e^{at}\cos\omega t \doteqdot \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}, \qquad e^{at}\,\mathrm{ch}\,\omega t \doteqdot \frac{p-\alpha}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

4. Запізнення (оригіналу)

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, $\tau > 0$, то

$$f(t-\tau) = f(t-\tau)\eta(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p).$$



5. Диференціювання оригіналу

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$ і функції $f'(t),\ f''(t),\ \ldots,\ f^{(n)}(t)$ – також є оригіналами, то

$$
\begin{aligned}
f'(t) &\doteqdot pF(p) - f(0),\\
f''(t) &\doteqdot p^2F(p) - pf(0) - f'(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(t) &\doteqdot p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),
\end{aligned}
$$

де $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to 0+0} f^{(k)}(t),\ k = \overline{1, n-1}$.

6. Диференціювання зображення

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$
\begin{aligned}
F'(p) &\doteqdot -t \cdot f(t),\\
F''(p) &\doteqdot (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),\\
F^{(n)}(p) &\doteqdot (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t),
\end{aligned}
$$

тобто диференціюванню зображення відповідає множення його оригіналу на $(-t)$.

Знайдемо зображення t^n та $e^{at} \cdot t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, то, застосовуючи диференціювання зображення, маємо $-t \cdot 1 \risingdotseq \left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$, тобто

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}.$$

Далі, можна помітити, що $t^2 = (-t)^2 \cdot 1 \risingdotseq \left(\frac{1}{p}\right)'' = \left(-\frac{1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3}$. Можна довести, що

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Використовуючи властивість зміщення

$$e^{at} \cdot t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

7. Інтегрування оригіналу

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

тобто інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на p.

8. Інтегрування зображення

Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$ й інтеграл $\int\limits_p^{\infty} F(q)dq$ збігається, то він є зображенням функції $\dfrac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} F(q)dq.$$

9. Зображення періодичного оригіналу

Нехай функція $f(t)$ періодична з періодом T є функцією-оригіналом з показником росту s. Тоді,

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^T f(t) e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p = s > 0.$$

Означення 3

Нехай функції $f(t)$ та $g(t)$ означені й неперервні для всіх t. Згорткою $(f*g)(t)$ цих функцій називають функцію від t, яку визначають рівністю

$$(f*g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Для функцій-оригіналів $f(t)$ та $g(t)$ згортка функцій завжди існує, причому вона буде мати вигляд

$$f(t)*g(t) = (f*g)(t) = \int\limits_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Зазначимо також, що згортка функцій комутативна, тобто

$$(f*g)(t) = \int\limits_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int\limits_{0}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t).$$

10. Множення зображень

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, то згортка $(f * g)(t)$ має зображення $F(p)G(p)$:

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \doteqdot F(p)G(p).$$

11. Формула Дюамеля

Нехай $f(t)$ та $g(t)$ – функції-оригінали, причому функція $f(t)$ неперервна на $[0;+\infty)$, а $g(t)$ – неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$. Тоді якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, то

$$pF(p)G(p) \doteqdot \left[\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = f(t)g(0) + \int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau.$$

3. Основна таблиця зображень

1. $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$	2. $e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}$
3. $t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}$	4. $e^{at} \cdot t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5. $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	6. $\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}$
7. $\operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	8. $\operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}$
9. $e^{at} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	10. $e^{at} \cos \omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
11. $e^{at} \operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$	12. $e^{at} \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$

4. Обернене перетворення Лапласа

Теорема 4

Якщо функція $f(t)$ є функцією-оригіналом з показником росту s_0 і $F(p)$ – її зображення, то в будь-якій точці неперервності функції $f(t)$ правдива формула Рімана-Мелліна для оберненого перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp,$$

де інтеграл береться вздовж будь-якої прямої $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і його розуміють як головне значення відповідного інтеграла.

Теореми розвинення

Теорема 5 (1-а теорема розвинення)

Нехай зображення $F(p)$ – дробово-раціональна функція з полюсами p_1, p_2, ..., p_n. Тоді оригіналом для $F(p)$ буде функція $f(t)\eta(t)$, де

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k} \left(F(p)e^{pt}\right).$$

Якщо всі полюси p_1, p_2, ..., p_n функції $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ прості, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Теорема 6 (2-а теорема розвинення)

Нехай зображення $F(p)$ є аналітичною функцією в нескінченно віддаленій точці $p = \infty$, причому її розвинення в околі $|p| > R$ нескінченно віддаленої точки має вигляд

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}.$$

Тоді оригіналом для $F(p)$ буде функція

$$f(t) = \eta(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.