**Приклад 1**. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

$f(x):=\sqrt[3]{x}$

$x:=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ Вузли інтерполяції: $x_0=1$ $x_1=2$ $x_2=3$

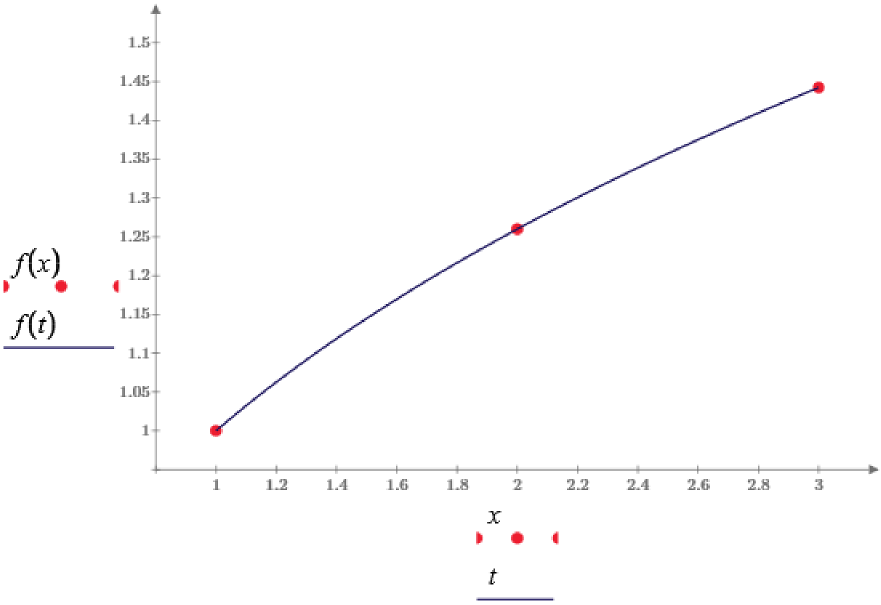
$f(x)=\begin{bmatrix}1\\1.2599\\1.4422\end{bmatrix}$

Значення функції *f*(*x*) у вузлах $f(x_0)=1$ $f(x_1)=1.2599$ $f(x_2)=1.4422$

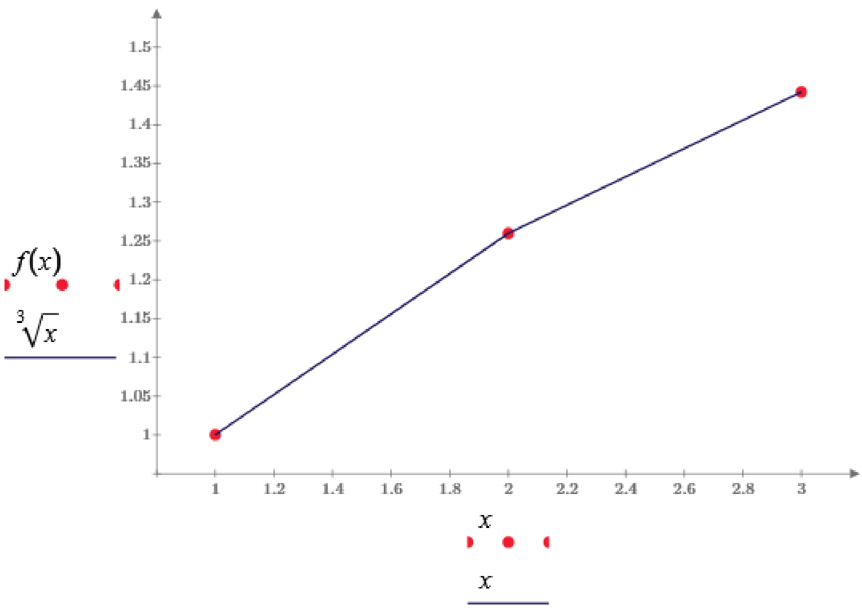
1) Побудуємо графік даної функції $f(x)$ та значення функції у вузлах інтерполяції

$f(t):=\sqrt[3]{t}$

Графік функції *f*(*x*) та значення функції у вузлах інтерполяції




**Не вірно побудований графік функції *f*(*x*) (графіком не є ламана лінія):**



2) Побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа за формулою

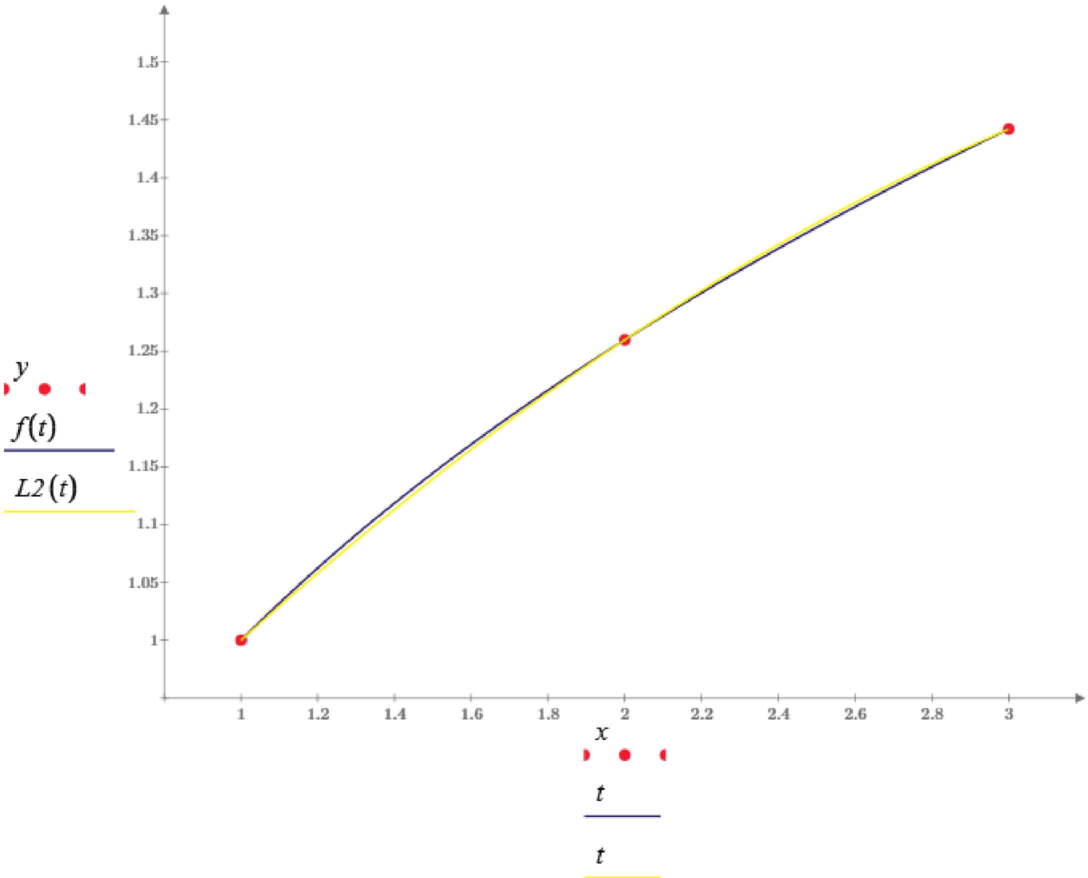
$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2599 \\ 1.4422 \end{bmatrix}$$

$$L2(t) := \frac{(t-x_1)\cdot(t-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}\cdot y_0 + \frac{(t-x_0)\cdot(t-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}\cdot y_1 + \frac{(t-x_0)\cdot(t-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}\cdot y_2$$

$L2(t) \xrightarrow{collect} -0.0388\cdot t^2 + 0.3763\cdot t + 0.6625$ - інтерполяційний многочлен Лагранжа

3) Побудуємо порівняльний графік інтерполяційного многочлена Лагранжа та даної функції



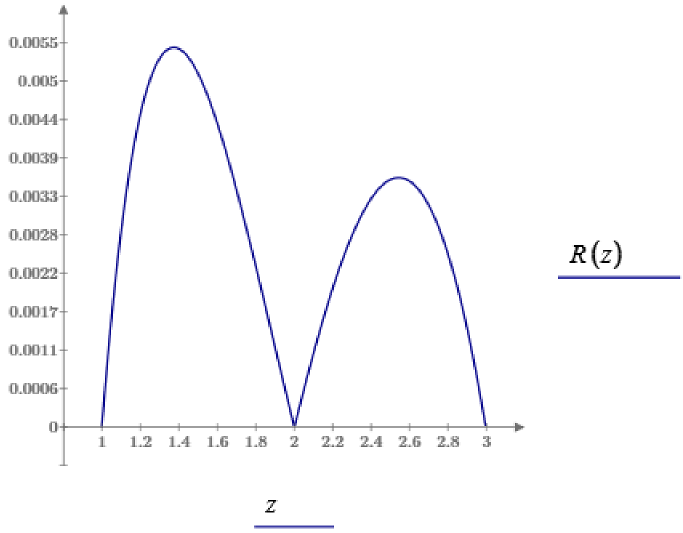

4) Розрахуємо значення похибки

$t := 1, 1.5..3$

$R(t) := |f(t) - L2(t)|$ - похибка інтерполяції в точках 1, 1.5, 2, 2.5, 3.

$$R(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0051 \\ 0 \\ 0.0035 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Графік похибки:




**Приклад 2**. Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції, заданої таблицею

| $I$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 2 | 3 | 5 |
| $f_i$ | 1 | 3 | 2 | 5 |

$x := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ - вузли інтерполювання

$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ - значення функції у вузлах інтерполяції

1) Побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа за інтерполяційною формулою Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i$$

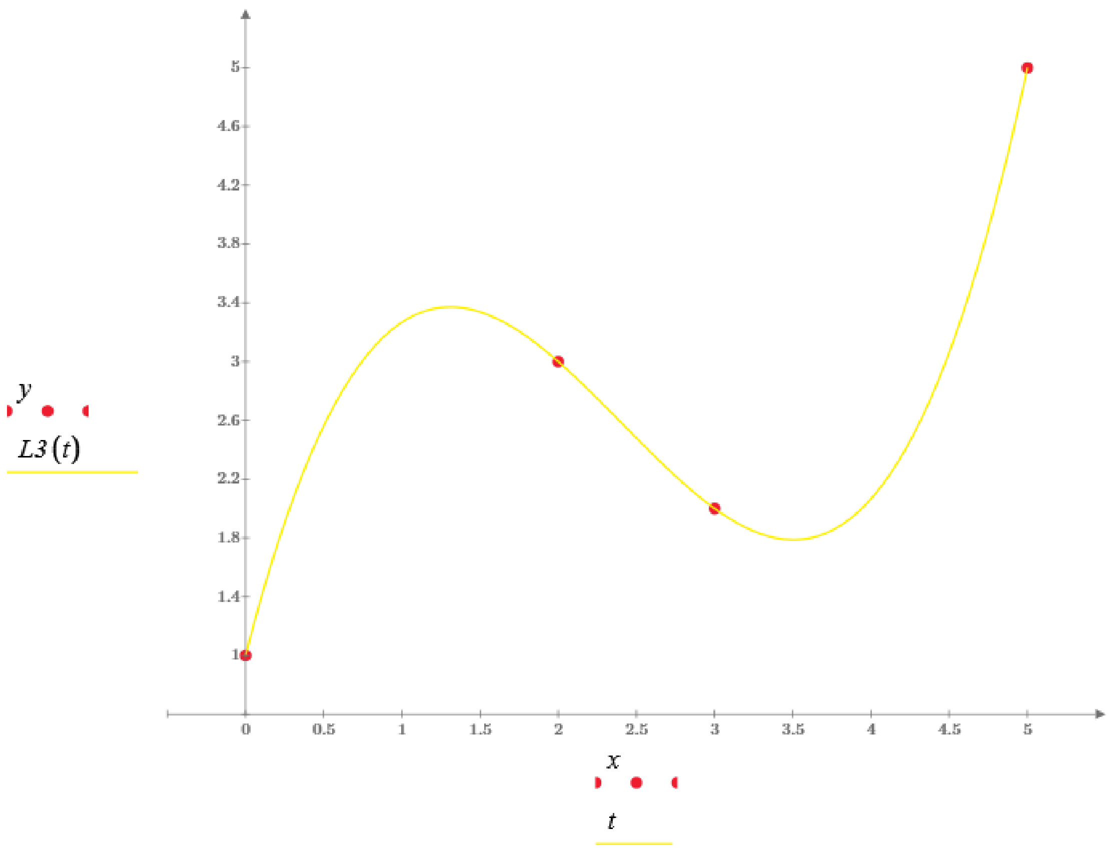
$\mathbf{clear}(t)$

при n=3

$$L3(t) := \frac{(t-x_1)\cdot(t-x_2)\cdot(t-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)}\cdot y_0 + \frac{(t-x_0)\cdot(t-x_2)\cdot(t-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}\cdot y_1 + \frac{(t-x_0)\cdot(t-x_1)\cdot(t-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}\cdot y_2 + \frac{(t-x_0)\cdot(t-x_1)\cdot(t-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}\cdot y_3$$

$L3(t) \xrightarrow{collect} \frac{3}{10}\cdot t^3 - \frac{13}{6}\cdot t^2 + \frac{62}{15}\cdot t + 1$ - інтерполяційний многочлен Лагранжа

2) Побудуємо графік інтерполяційного многочлена Лагранжа та даної функції




**Приклад 3**. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона для функції, заданої таблицею

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 |
| $y$ | 0 | 2 | 10 |

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$x := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ - вузли інтерполювання

$$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$ - значення функції у вузлах інтерполяції

1) Обчислимо розділені різниці

Обчислимо розділені різниці першого порядку $\Delta(x_i,\, x_j) = \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j},\ i \neq j,\ i = \overline{1,n}.$

$$\Delta\_x1\_x2 := \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 2 \qquad \Delta\_x2\_x3 := \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = 8$$

Обчислимо розділені різниці другого порядку $\Delta(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{\Delta(x_1, x_2) - \Delta(x_2, x_3)}{x_1 - x_3}$

$$\Delta\_x1\_x2\_x3 := \frac{\Delta\_x1\_x2 - \Delta\_x2\_x3}{x_1 - x_3} = 3$$

2) Побудуємо інтерполяційний поліном Ньютона використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона інтерполювання вперед

$$f(x) \approx y_1 + (x - x_1)\Delta(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta(x_1, x_2, x_3) + \dots$$
$$+ (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= y_1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\Delta(x_1, x_2, \dots, x_k)\prod_{j=1}^{k-1}(x - x_j)\right).$$

$$f\_newton1(t) := y_1 + (t - x_1) \cdot \Delta\_x1\_x2 + (t - x_1) \cdot (t - x_2) \cdot \Delta\_x1\_x2\_x3$$

$$f\_newton1(t) \xrightarrow{collect} 3 \cdot t^2 - t$$

3) Побудуємо інтерполяційний поліном Ньютона використовуючи інтерполяційну формулу Ньютона інтерполювання назад

$$f(x) \approx y_n + (x - x_n)\Delta(x_{n-1}, x_n) + (x - x_n)(x - x_{n-1})\Delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) + \dots$$
$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1)\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= y_n + \sum_{k=2}^{n}\left(\Delta(x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \dots, x_n)\prod_{j=n-k+2}^{n}(x - x_j)\right).$$

$$f\_newton2(t) := y_3 + (t - x_3) \cdot \Delta\_x2\_x3 + (t - x_3) \cdot (t - x_2) \cdot \Delta\_x1\_x2\_x3$$

$$f\_newton2(t) \xrightarrow{collect} 3 \cdot t^2 - t$$

4) Побудуємо графік інтерполяційного полінома Ньютона та даної функції

$t := 0, 0.01 .. 2$