ЛЕКЦІЯ 11

ОПЕРАЦІЇ НАД ВИПАДКОВИМИ ВЕЛИЧИНАМИ. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

11.1. Арифметичні операції над випадковими величинами

Операції над випадковими величинами відіграють ключову роль у теорії ймовірностей і статистиці, дозволяючи будувати нові випадкові величини та вивчати їх властивості.

Арифметичні операції між випадковими величинами дозволяють створювати нові випадкові величини Z, аналізувати їх властивості та взаємозв'язки. Вони є фундаментальними для моделювання випадкових процесів та явищ у різних галузях науки і техніки.

Основні арифметичні операції над дискретними незалежними випадковими величинами:

1. *Додавання*: Якщо X і Y — випадкові величини, то сума $Z = X + Y$ також є випадковою величиною, де $z_{ij} = x_i + y_j, g_{ij} = p_i \cdot q_j$, де p_i – ймовірність, що випадкова величина X набуде значення x_i; q_j – ймовірність, що випадкова величина Y набуде значення y_j; g_{ij} – ймовірність, що випадкова величина X набуде значення x_i та випадкова величина Y набуде значення y_j.

Математичне сподівання:

$$M(Z) = M(X) + M(Y).$$

Дисперсія:

$$D(Z) = D(X) + D(Y).$$

2. *Віднімання*: Різниця $Z = X - Y$ також є випадковою величиною, де $z_{ij} = x_i - y_j, g_{ij} = p_i \cdot q_j$.

Математичне сподівання:

$$M(Z) = M(X) - M(Y).$$

Дисперсія:

$$D(Z) = D(X) + D(Y).$$

3. *Множення на константу*: Якщо C — константа, то $Z = C \cdot X$ — випадкова величина, де $z_i = C \cdot x_i$, а p_i лишається як і для випадкової величини X.

Математичне сподівання:

$$M(Z) = C \cdot M(X).$$

Дисперсія:

$$D(Z) = C^2 \cdot D(X).$$

4. *Множення*: Добуток $Z = X \cdot Y$ — випадкова величина, де $z_{ij} = x_i \cdot y_j, g_{ij} = p_i \cdot q_j$.

Математичне сподівання:

$$M(Z) = M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Дисперсія:

$$D(Z) = D(X \cdot Y) = M(X^2) \cdot M(Y^2) - \left(M(X)\right)^2 \cdot \left(M(Y)\right)^2.$$

5. *Ділення*: Частка $Z = \frac{X}{Y}$ — випадкова величина, за умови, що $Y \neq 0$, де $z_{ij} = \frac{x_i}{y_j}$, $g_{ij} = p_i \cdot q_j$.

Формули для математичного сподівання та дисперсії частки випадкових величин досить складні, тому їх використання є недоречним. В даному випадку доцільніше використовувати стандартні формули, наведені в лекції 7.

6. *Піднесення до n-го степеню*: $Z = X^n$ — випадкова величина, де $z_i = x_i^n$, а p_i лишається як і для випадкової величини X.

Математичне сподівання:

$$M(Z) = M(X^n).$$

Дисперсія:

$$D(Z) = D(X^n).$$

7. *Лінійні комбінації випадкових величин*: Якщо X і Y — дві незалежні випадкові величини, а a і b — константи, то лінійна комбінація $Z = a \cdot X + b \cdot Y$ є також випадковою величиною.

Математичне сподівання:

$$M(Z) = M(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot M(X) + b \cdot M(Y).$$

Дисперсія:

$$D(Z) = D(a \cdot X + b \cdot Y) = a^2 \cdot D(X) + b^2 \cdot D(Y).$$

Зауваження

1. *Випадкова величина Z набуває лише тих значень, які є результатами перерахованих операцій.*

2. *Всі формули для обчислення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини Z є наслідком з властивостей даних числових характеристик, які наведено в лекції 7.*

3. *Функція розподілу для випадкової величини Z будується за правилом, наведеним в лекції 6.*

Приклад 11.1. *Наведено закони розподілу двох незалежних випадкових величин (табл. 11.1, 11.2):*

Таблиця 11.1. Ряд розподілу дискретної випадкової величини X

x_i	1	3	6
p_i	0,5	0,2	0,3

Таблиця 11.2. Ряд розподілу дискретної випадкової величини Y

y_j	-1	0	1
q_j	0,1	0,6	0,3

Знайти закони розподілу випадкових величин: **а)** $Z = X + Y$, **б)** $U = 2 \cdot X$.

Розв’язання. а) Складемо допоміжну таблицю за наступним принципом: $z_{ij} = x_i + y_j, g_{ij} = p_i \cdot q_j$ $(i, j = \overline{1,3})$ (табл. 11.3).

Таблиця 11.3. *Розрахункова таблиця для прикладу* 11.1

X \ Y		$y_1 = -1$	$y_2 = 0$	$y_3 = 1$
		$q_1 = 0{,}1$	$q_2 = 0{,}6$	$q_3 = 0{,}3$
$x_1 = 1$	$p_1 = 0{,}5$	0 / 0,05	1 / 0,3	2 / 0,15
$x_2 = 3$	$p_2 = 0{,}2$	2 / 0,02	3 / 0,12	4 / 0,06
$x_3 = 6$	$p_3 = 0{,}3$	5 / 0,03	6 / 0,18	7 / 0,09

В розрахунковій таблиці (табл. 11.3, згори ліворуч) наведено значення z_{ij}, які набуває випадкова величина Z. Причому, якщо її значення z_{ij}, z_{lt} $(i, j, l, t = \overline{1,3})$ співпадають, то їх ймовірності (табл. 11.3, знизу праворуч) додаються згідно теореми про додавання несумісних випадкових величин. В результаті маємо випадкову величину Z, яка набуває значень z_k $(k = \overline{1,8})$ з ймовірностями g_k.

Остаточний закон розподілу (табл. 11.4):

Таблиця 11.4. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини* Z

z_k	0	1	2	3	4	5	6	7
g_k	0,05	0,3	0,17	0,12	0,06	0,03	0,18	0,09

Робимо перевірку: сума ймовірностей дорівнює одиниці.

Слід зазначити, що ряди розподілу для випадкових величин, які утворені додаванням, множенням та діленням двох випадкових величин X, Y будуються аналогічним чином.

б) Складемо допоміжну таблицю за наступним принципом: $u_i = 2 \cdot x_i$,·а ймовірність p_i лишається без змін.

Остаточний закон розподілу (табл. 11.5):

Таблиця 11.5. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини* U

u_i	2	6	12
p_i	0,5	0,2	0,3

Слід зазначити, що ряд розподілу для випадкової величини, яка утворена множенням величини X будується аналогічним чином.

Відповідь. а) табл. 11.4; б) табл. 11.5.

Приклад 11.2. *Наведено закони розподілу двох незалежних випадкових величин* (*табл.* 11.6):

Таблиця 11.6. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини* X

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

Знайти закони розподілу випадкових величин: ***а)*** $Z = X \cdot X$, ***б)*** $U = X^2$.

Розв’язання. а) Складемо допоміжну таблицю за наступним принципом: $z_{ij} = x_i \cdot x_j, g_{ij} = p_i \cdot q_j$ $(i, j = \overline{1,3})$ (табл. 11.7).

Таблиця 11.7. *Розрахункова таблиця для прикладу* 11.2

X \ Y		$x_1 = 0$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$
		$p_1 = 0{,}5$	$p_2 = 0{,}2$	$p_3 = 0{,}3$
$x_1 = 0$	$p_1 = 0{,}5$	0 / 0,25	0 / 0,1	0 / 0,15
$x_2 = 2$	$p_2 = 0{,}2$	0 / 0,1	4 / 0,04	8 / 0,06
$x_3 = 4$	$p_3 = 0{,}3$	0 / 0,15	8 / 0,06	16 / 0,09

Остаточний закон розподілу (табл. 11.8):

Таблиця 11.8. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини* Z

z_k	0	4	8	16
g_k	0,75	0,04	0,12	0,09

Робимо перевірку: сума ймовірностей дорівнює одиниці.

Слід зазначити, що ряди розподілу для випадкових величин, які утворені додаванням, множенням та діленням двох випадкових величин X, Y будуються аналогічним чином.

б) Складемо допоміжну таблицю за наступним принципом: $u_i = x_i^2$,·а ймовірність p_i лишається без змін.

Остаточний закон розподілу (табл. 11.9):

Таблиця 11.9. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини* U

u_i	0	4	16
p_i	0,5	0,2	0,3

Слід зазначити, що ряд розподілу для випадкової величини, яка утворена множенням величини X будується аналогічним чином.

Відповідь. а) табл. 11.8; б) табл. 11.9.

З прикладу 11.2 видно, що *операції множення випадкової величини X на себе n разів та піднесення до n-го степеню не є тотожними. Аналогічно, сума n разів випадкової величини X та множення її на константу n також не є тотожними.*

11.2. Функції одного випадкового аргументу. Числові характеристики функції випадкового аргументу

Функції від випадкових величин — це математичні вирази, які перетворюють одну або кілька випадкових величин у нову випадкову величину. Це корисно в багатьох прикладних задачах, таких як статистичний аналіз, теорія ймовірностей, обробка сигналів, економіка тощо. Функції від випадкових величин широко використовуються для моделювання реальних процесів, оцінювання параметрів, статистичного аналізу та оптимізації.

Вищеописані операції над випадковими величинами (додавання, віднімання, лінійна комбінація випадкових величин, піднесення до степеню) є прикладами функцій від випадкових величин.

Розглянемо функцію від одного випадкового аргументу.

Нехай кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y, то Y називають *функцією випадкового аргументу* X: $Y = \varphi(X)$.

1. Нехай X – дискретна випадкова величина.

Якщо різним можливим значенням випадкової величини X відповідають різні значення функції Y, то ймовірність відповідних значень X і Y рівні між собою. Якщо різним можливим значенням випадкової величини X відповідають значення Y, серед яких є рівні між собою, то ймовірності рівних значень Y додаються.

Нехай задана дискретна випадкова величина X (табл. 11.10):

Таблиця 11.10. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини X*

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Нехай $Y = \varphi(X)$. Тоді справедливі формули (11.1)-(11.2):

$$M(\varphi(X)) = \sum_k \varphi(x_k) \cdot p_k, \tag{11.1}$$

$$D(\varphi(X)) = \sum_k \varphi^2(x_k) \cdot p_k - M^2(\varphi(X)). \tag{11.2}$$

2. Нехай X неперервна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x)$, а $Y = \varphi(X)$.

Якщо $Y = \varphi(X)$ – диференційована строго зростаюча або строго спадна функція, обернена до якої $X = \psi(Y)$, то щільність розподілу $g(Y)$ випадкової величини Y знаходиться з рівності (11.3):

$$g(Y) = f(\psi(Y)) \cdot |\psi'(Y)|. \tag{11.3}$$

Якщо функція $Y = \varphi(X)$ в інтервалі можливих значень X не монотонна, то потрібно розбити цей інтервал на такі інтервали, на яких $\varphi(X)$ монотонна, знайти щільності розподілів $g_i(Y)$ для кожного з інтервалів монотонності, а потім подати $g(Y)$ у вигляді суми (11.4):

$$g(Y) = \sum_i g_i(Y). \tag{11.4}$$

Числові характеристики випадкової величини Y знаходяться за формулами (11.5)-(11.6):

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) \cdot f(x))dx, \tag{11.5}$$

$$D(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi^2(x) \cdot f(x))dx - M^2(\varphi(X)). \tag{11.6}$$

Зокрема, якщо можливі значення X належать інтервалу (a, b), то справедливі формули (11.7)-(11.8):

$$M(\varphi(X)) = \int_a^b (\varphi(x) \cdot f(x))dx, \tag{11.7}$$

$$D(\varphi(X)) = \int_a^b (\varphi^2(x) \cdot f(x))dx - M^2(\varphi(X)). \tag{11.8}$$

Для зручності функцію розподілу для випадкової величини Y позначимо як $G(y)$.

Приклад 11.2. *Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу* (*табл.* 11.11):

Таблиця 11.11. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини X*

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
p_i	0,1	0,5	0,4

Знайти розподіл функції $Y = sin(X), M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

Розв'язання. Знайдемо можливі значення Y:

$$y_1 = sin(0) = 0, y_2 = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_3 = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Одержимо ряд розподілу Y (табл.11.12):

Таблиця 11.12. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини Y*

y_i	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
p_i	0,1	0,5	0,4

$$M(Y) = 0 \cdot 0{,}1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}755;\ M(Y^2) = 0 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 +$$
$$+1 \cdot 0{,}4 = 0{,}65,$$
$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 0{,}65 - 0{,}755^2 = 0{,}08,$$
$$\sigma(Y) = 0{,}28.$$

Відповідь. табл. 12.8; $M(Y) = 0{,}65$; $D(Y) = 0{,}08$; $\sigma(Y) = 0{,}28$.

Приклад 11.3. *Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу* (*табл.* 11.13):

Таблиця 11.13. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини X*

x_i	– 1	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

Знайти розподіл функції $Y = X^2$.

Розв'язання. Можливі значення Y: $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 4$. Значення $y_1 = y_2$ рівні між собою. Ймовірність цього значення

$$p_1 = 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}6.$$

Одержимо розподіл Y (табл. 11.14):

Таблиця 11.14. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини Y*

y_i	1	4
p_i	0,6	0,4

Відповідь. табл. 11.14.

Приклад 11.4. *Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої належать інтервалу (a, b). Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = A \cdot X + B$.*

Розв'язання. Функція $y = A \cdot x + B$ монотонна в інтервалі (a, b), отже, має обернену функцію

$$\psi(y) = x = \frac{y-B}{A},$$

звідки

$$\left(\psi(y)\right)' = \frac{1}{A}.$$

За формулою (11.3)

$$g(y) = \begin{cases} \left|\dfrac{1}{A}\right| \cdot f\left(\dfrac{y-B}{A}\right), y \in (A \cdot a + B, A \cdot b + B); \\ 0, \qquad\qquad\qquad y \notin (A \cdot a + B, A \cdot b + B). \end{cases}$$

Необхідно також зробити перевірку:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy = 1.$$

Відповідь. $g(y) = \begin{cases} \left|\frac{1}{A}\right| \cdot f\left(\frac{y-B}{A}\right), y \in (A \cdot a + B, A \cdot b + B); \\ 0, \qquad\qquad y \notin (A \cdot a + B, A \cdot b + B). \end{cases}$

Приклад 11.5. *Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої належать інтервалу $(-\infty, +\infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2$.*

Розв'язання. Функція $y = x^2$ спадна в інтервалі $(-\infty, 0)$ і в цьому інтервалі має обернену функцію

$$\psi_1(y) = x = -\sqrt{y},$$

звідки

$$\left(\psi_1(y)\right)' = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

За формулою (11.3):

$$g_1(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} \cdot f\left(-\sqrt{y}\right).$$

Функція $y = x^2$ зростаюча в інтервалі $[0, +\infty)$ і в цьому інтервалі має обернену функцію

$$\psi_2(y) = x = \sqrt{y},$$

звідки

$$\left(\psi_2(y)\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

Отже,

$$g_2(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} \cdot f\left(\sqrt{y}\right).$$

За формулою (11.4)

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y),$$

Тобто

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} \cdot \left(f\left(-\sqrt{y}\right) + f\left(\sqrt{y}\right)\right), y \in (0, +\infty); \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Необхідно також зробити перевірку:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy = 1.$$

Відповідь. $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\cdot\sqrt{y}} \cdot \left(f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})\right), y \in (0,+\infty); \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y \in (-\infty, 0]. \end{cases}$

Приклад 11.6. *Випадкова величина X задана щільністю розподілу:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}5 \cdot x, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти $G(y), M(Y), D(Y)$ для випадкової величини $Y = X^2$.

Розв'язання. За формулами (11.7), (11.8) одержимо $M(Y), D(Y)$ без урахування функції щільності випадкової величини Y:

$$M(Y) = \int_0^2 (x^2 \cdot 0{,}5 \cdot x)\, dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = 2,$$

$$M(Y^2) = \int_0^2 (x^4 \cdot 0{,}5 \cdot x)\, dx = \frac{x^6}{12}\Big|_0^2 = \frac{16}{3},$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}.$$

Функція $y = x^2$ зростаюча в інтервалі $[0, +\infty)$. Тобто на цьому інтервалі вона має обернену функцію:

$$\psi(y) = x = \sqrt{y},$$

звідки

$$\left(\psi(y)\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{y}},$$

отже

$$g(y) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{y}} \cdot f\left(\sqrt{y}\right) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{y} = \frac{1}{4} \text{ при } 0 < y \le 4,$$

оскільки $y = x^2$, а $0 < x \le 2$.

Остаточно щільність випадкової величини Y:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, y \in (0,4]; \\ 0, y \notin (0,4]. \end{cases}$$

Необхідно також зробити перевірку:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy = \int_0^4 \frac{1}{4} dy = 1.$$

Функція розподілу матиме вигляд:

$$G(y) = \begin{cases} 0, \text{при } y \in (-\infty, 0]; \\ \frac{y}{4}, \text{при } y \in (0,4]; \\ 1, \text{при } y \in (4, +\infty). \end{cases}$$

Маючи функцію щільності випадкової величини Y, безпосередньо отримаємо $M(Y), D(Y)$

$$M(Y) = \int_0^4 \left(y \cdot \frac{1}{4}\right) dy = \frac{y^2}{8}\bigg|_0^4 = 2,$$

$$M(Y^2) = \int_0^4 \left(y^2 \cdot \frac{1}{4}\right) dy = \frac{y^3}{12}\bigg|_0^4 = \frac{16}{3},$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}.$$

Відповідь. $G(y) = \begin{cases} 0, \text{при } y \in (-\infty, 0]; \\ \frac{y}{4}, \text{при } y \in (0,4]; \\ 1, \text{при } y \in (4, +\infty); \end{cases}$ $M(Y) = 2$; $D(Y) = \frac{4}{3}$.

12.3. Представлення функції розподілу та щільності системи двох випадкових величин за допомогою функції Дірака

Розглянемо окремо випадок, коли функція розподілу $G(y)$ має точки розриву $y_1, y_2, \dots, y_n$ зі стрибками $p_1, p_2, \dots, p_n$. Це означає існування значень випадкової величини η (збіжних з точками розриву $y_1, y_2, \dots, y_n$), яким відповідають ненульові ймовірності $p_1, p_2, \dots, p_n$. У даному випадку щільність розподілу ймовірностей в точках $y_1, y_2, \dots, y_n$ перетворюється на нескінченність. Математична ідеалізація цього явища спирається на використання *дельта-функції Дірака $\delta(y)$*, яка не є функцією у звичайному розумінні, а являє собою так звану узагальнену функцію.

Розглядатимемо $\delta(y)$ як похідну функції одиничного стрибка (рис. 11.1, 11.2).

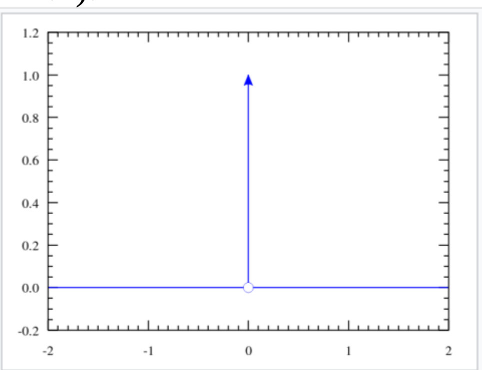

Рис.11.1. Схематичне зображення дельта-функції Дірака, як лінії, з якої виступає стрілка

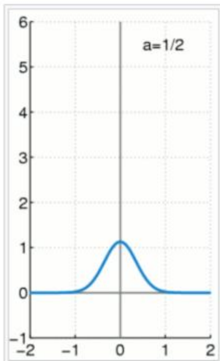

Рис. 11.2. Дельта-функція Дірака як границя послідовності гаусівських функцій розподілу

У класичному аналізі функція $\eta(y)$ недиференційована в точці $y = 0$, однак у теорії узагальнених функцій цього обмеження немає. Тоді справедлива рівність (11.9):

$$\delta(y) = \eta'(y), \text{ де } \eta(y) = \begin{cases} 1, y > 0, \\ 0, y \le 0. \end{cases} \qquad (11.9)$$

Для дельта-функції справедливі наступні властивості:

- $\delta(y) = 0, \forall y \neq 0$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy = 1$;
- $y \cdot \delta'(y) = \delta(y)$;

- $\delta\big(G(y)\big) = \sum_k \frac{\delta(y-y_k)}{\left|\left(G(y_k)\right)'\right|}$, де y_k – нулі функції $G(y)$.

Зобразимо функцію $G(y)$ у вигляді (11.10):

$$G(y) = \tilde{G}(y) + \sum_{k=1}^{n}\big(p_k \cdot \eta(y-y_k)\big), \qquad (11.10)$$

де $\tilde{G}(y)$ – неперервна («замкнена») функція. Для функції щільності одержуємо рівність (11.11):

$$g(y) = \tilde{g}(y) + \sum_{k=1}^{n}\big(p_k \cdot \delta(y-y_k)\big), \text{ де } \tilde{g}(y) = \left(\tilde{G}(y)\right)'. \qquad (11.11)$$

Приклад 11.7. *За заданою щільністю розподілу*

$$f(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{де } \xi_1 \in [-1;1]; \\ 0, \ \text{ де } \xi_1 \notin [-1;1]. \end{cases}$$

випадкової величини ξ_1 визначити функцію розподілу випадкової величини $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. Функцію $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$ задано графічно на рис. 11.3:

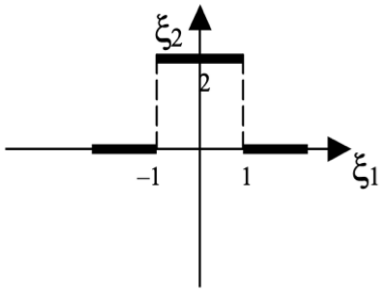

Рис. 11.3. Графік функції $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$

Дати вираз для щільності $g(\xi_2)$ розподілу випадкової величини ξ_2.

Розв'язання. Запишемо аналітично функцію, представлену на рис. 11.3.

$$\xi_2 = \begin{cases} 2, \text{де } \xi_1 \in [-1;1]; \\ 0, \text{де } \xi_1 \notin [-1;1]. \end{cases}$$

Випадок 1: $\xi_2 = 2$

З графіку та з попереднього аналітичного виразу видно, що $\xi_2 = 2$ для $\xi_1 \in [-1;1]$. Тобто, ймовірність того, що $\xi_2 = 2$ дорівнюватиме ймовірності того, що $\xi_1 \in [-1;1]$. Таким чином, враховуючи, що випадкова величина ξ_1 має неперервний рівномірний розподіл:

$$p\{\xi_2 = 2\} = p\{\xi_1 \in [-1;1]\} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Отже, $\xi_2 = 2$ з ймовірністю 1.

Випадок 2: $\xi_2 = 0$

Оскільки $\xi_2 = 0$ виникає при $\xi_1 \notin [-1;1]$, ймовірність того, що ξ_2 прийме це значення, буде дорівнювати ймовірності того, що $\xi_1 \notin [-1;1]$. Випадкова величина ξ_1 має неперервний рівномірний розподіл, що означає, що $p\{\xi_1 \notin [-1;1]\} = 1 - p\{\xi_1 \in [-1;1]\} = 1 - 1 = 0$. Отже, $p(\xi_2 = 0) = 0$.

$$p_2(\xi_2) = \begin{cases} 0, \text{де } \xi_2 = 0; \\ 1, \text{де } \xi_2 = 2. \end{cases}$$

Виразимо ξ_1 через ξ_2. Оскільки графік (рис. 11.3) має розриви, то представимо випадкову величину ξ_1 за допомогою дельта-функції Дірака.

$$\xi_1 = \psi(\xi_2) = \begin{cases} \delta(\xi_2), & \text{де } \xi_2 = 0; \\ \delta(\xi_2 - 2), & \text{де } \xi_2 = 2. \end{cases}$$

Тоді за формулою (11.11):

$$g(\xi_2) = \delta(\xi_2) \cdot 0 + \delta(\xi_2 - 2) \cdot 1 = \delta(\xi_2 - 2), \text{де } \xi_2 = 2.$$

Це означає, що випадкова величина ξ_2 завжди дорівнює 0, тобто ймовірність того, що вона прийме будь-яке інше значення, крім 2, дорівнює 0.

Таким чином, функція $\delta(\xi_2)$ вказує на те, що щільність розподілу ξ_2 сконцентрована в одній точці, в даному випадку в точці $\xi_2 = 2$.

Перевірка:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi_2) d\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi_2 - 2) d\xi_2 = 1.$$

Відповідь. $g(\xi_2) = \delta(\xi_2 - 2), \text{де } \xi_2 = 2.$

12.4. Функції двох випадкових аргументів

Якщо кожній парі можливих значень випадкових величин X і Y відповідає одне можливе значення випадкової величини Z, то Z називають *функцією двох випадкових величин X і Y*: $Z = \varphi(X, Y)$.

Далі розглянемо як знайти розподіл суми $Z = X + Y$ за відомими розподілами доданків.

1. Нехай X і Y – дискретні незалежні випадкові величини. Можливі значення $Z = X + Y$ дорівнюють сумам кожного можливого значення X з кожним можливим значенням Y; ймовірності можливих значень дорівнюють добуткам ймовірностей доданків.

2. Нехай X і Y – неперервні незалежні випадкові величини з щільностями розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то щільність розподілу $g(z)$ суми $Z = X + Y$ за умови, що щільність розподілу хоча б одного з аргументів задана в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ одною формулою, можна знайти за формулою (11.12):

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f_1(x) \cdot f_2(z - x)\big) dx \tag{11.12}$$

або за формулою (11.13):

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f_1(z - y) \cdot f_2(y)\big) dy. \tag{11.13}$$

Функція $g(z)$ утворена з функцій $f_1(x)$ і $f_2(y)$ за формулою (11.12) або (11.12) називається *згорткою* або *композицією* цих функцій.

Якщо можливі значення аргументів невід\`ємні, то щільність розподілу $Z = X + Y$ знаходиться за формулою (11.14):

$$g(z) = \int_{0}^{z} \big(f_1(x) \cdot f_2(z - x)\big) dx \tag{11.14}$$

або за рівносильною формулою (11.15):

$$g(z) = \int_{0}^{z} \big(f_1(z - y) \cdot f_2(y)\big) dy. \tag{11.15}$$

Композиція незалежних нормально розподілених випадкових величин також має нормальний розподіл. Математичне сподівання і дисперсія цієї композиції відповідно дорівнюють сумам математичних сподівань і дисперсій доданків.

Приклад 11.8. *Дискретні випадкові величини X і Y задані рядами розподілів* (*табл.* 11.15, 11.16):

Таблиця 11.15. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини X*

x_i	8	10	12
p_i	0,4	0,1	0,5

Таблиця 11.16. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини Y*

y_i	1	2
p_i	0,2	0,8

Знайти розподіл випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання. Знайдемо можливі значення Z:

$$z_1 = 8 + 1 = 9, z_2 = 8 + 2 = 10, z_3 = 10 + 1 = 11, z_4 = 10 + 2 = 12,$$
$$z_5 = 12 + 1 = 13, z_6 = 12 + 2 = 14.$$

Оскільки випадкові величини X і Y незалежні, то події $X = 10$ і $Y = 1$ також незалежні, тому ймовірність їх одночасного настання (тобто ймовірність події $Z = 9$) за теоремою множення дорівнює $0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$, так само знаходимо: $P\{Z = 8 + 2 = 10\} = 0{,}4 \cdot 0{,}08 = 0{,}32$; $P\{Z = 10 + 1 = 11\} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$; $P\{Z = 10 + 2 = 12\} = 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}08$; $P\{Z = 12 + 1 = 13\} = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$, $P\{Z = 12 + 2 = 14\} = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$.

Одержимо ряд розподілу випадкової величини Z (табл. 11.17):

Таблиця 11.17. *Ряд розподілу дискретної випадкової величини Z*

z_i	9	10	11	12	13	14
p_i	0,08	0,32	0,02	0,08	0,1	0,4

Контроль: $0{,}08 + 0{,}32 + 0{,}02 + 0{,}08 + 0{,}1 + 0{,}4 = 1$.

Відповідь. табл. 11.17.

Приклад 11.9. *Незалежні випадкові величини X і Y задані щільностями розподілів*:

$$f_1(x) = \frac{1}{7} \cdot e^{-\frac{x}{2}} (0 \le x < \infty),\ f_2(y) = \frac{1}{7} \cdot e^{-\frac{y}{2}} (0 \le y < \infty)$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання. За формулою (11.12)

$$g(z) = \int_0^z \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{7} \cdot e^{-\frac{z-x}{7}}\right) dx = \frac{1}{14} \cdot e^{-\frac{z}{7}} \cdot \int_0^z e^{-\frac{5}{14} \cdot x} dx = \frac{1}{14} \cdot e^{-\frac{z}{7}} \cdot$$
$$\cdot \left(-\frac{14}{5} \cdot e^{-\frac{5}{14} \cdot x}\right)\Big|_0^z = \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{z}{7}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{5}{14} \cdot x}\right).$$

Оскільки можливі значення X і Y невід`ємні, то $z > 0$, отже:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{z}{7}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{5}{14} \cdot x}\right), & 0 \le z < \infty, \\ 0, & -\infty < x < 0. \end{cases}$$

Перевірка: $\int_0^\infty \left(\frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{z}{7}} - \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{z}{2}}\right) dz = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1.$

Відповідь. $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{z}{7}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{5}{14} \cdot x}\right), & 0 \le z < \infty, \\ 0, & -\infty < x < 0. \end{cases}$

Приклад 11.10. *Задані щільності розподілу незалежних випадкових величин* X *і* Y:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1], \\ 0, x \notin [0,1], \end{cases} f_2(y) = \begin{cases} 2 \cdot y, y \in [0,1], \\ 0, \quad y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання. Розглянемо наступні випадки:

Якщо $z < 0$, то $z - x < 0$, тому $f_2(z - x) = 0$, отже $g(z) = 0$.

Якщо $z > 2$, то $z - x > z - 1 > 1$, тому $f_2(z - x) = 0$, отже $g(z) = 0$.

Нехай $1 < z \leq 2$. Підінтегральна функція $f_2(z - x)$ відмінна від нуля тільки при тих значеннях X, які задовольняють нерівності $0 \leq z - x \leq 1$, звідки. $z - 1 \leq x \leq z$.

Нехай $0 < z \leq 1$. Тоді

$$g(z) = 2 \cdot \int_0^z (z - x)dx = (2 \cdot z \cdot x - x^2)|_0^z = z^2.$$

Нехай $1 < z \leq 2$.

$$g(z) = 2 \cdot \int_{z-1}^1 (z - x)dx = (2 \cdot z \cdot x - x^2)|_{z-1}^1 = 2 \cdot z - z^2.$$

Об`єднуючи ці результати, дістанемо:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z^2, & 0 < z \leq 1, \\ 2 \cdot z - z^2, & 1 < z \leq 2, \\ 0, & z > 2. \end{cases}$$

Необхідно також зробити перевірку:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)dz = \int_0^1 z^2 dz + \int_1^2 (2 \cdot z - z^2)\, dz = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Відповідь. $g(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ z^2, & 0 < z \leq 1, \\ 2 \cdot z - z^2, & 1 < z \leq 2, \\ 0, & z > 2. \end{cases}$