5.2 Інтерполювання сплайнами

5.2.1 Визначення сплайн-функції

Нехай про функцію $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ відомо лише її значення y_i у вузлах $x_0, x_1, ..., x_n$ $(i = 0,1,2,...,n)$, тобто функція задана у вигляді таблиці

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

В проміжних точках функція може набувати будь-яких значень. Тоді заміна функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом навіть дуже високого степеню, крім великої обчислювальної роботи, нової інформації може і не дати.

При інтерполюванні функцій з великою кількістю вузлів інтерполяційний поліном має високий степінь, що спричиняє коливання полінома на проміжках між вузлами інтерполювання. Щоб зменшити степінь інтерполяційного полінома, вузли інтерполювання можна розбити на групи і будувати інтерполяційні поліноми з меншою кількістю вузлів. Але в цьому разі на стиках між вузлами порушуються аналітичні властивості інтерполяційного полінома, з'являються точки розриву похідних.

Якщо для розв'язування задачі інтерполяції з великою кількістю вузлів використати багатоінтервальну інтерполяцію, то в точках поєднання лінійних, квадратичних або кубічних функцій не буде існувати похідна.

Позбутися цих недоліків при інтерполюванні можна за допомогою особливого виду інтерполювання — *інтерполювання сплайнами*. Сплайн на проміжку між вузлами інтерполювання є поліномом невисокого степеню. На всьому відрізку інтерполювання сплайн – це функція, склеєна з різних частин поліномів заданого степеню, в місцях сполучення яких перша та друга похідні неперервні. Для їх побудови необхідно задати коефіцієнти, які однозначно визначають поліном у проміжку між двома точками. Наочне уявлення про сплайни дають криві, побудовані за допомогою лекал, а також трамвайні та залізничні колії. Найпростіший приклад сплайнів — ламані.

У загальному випадку відрізок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ розбивають на частини, і на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1,2,...,n)$ будують свій інтерполяційний многочлен. Вимагаючи гладкого спряження многочленів на сусідніх відрізках, приходимо до кусково-многочленних функцій з однорідною структурою, що і називаються сплайнами або сплайн-функціями.

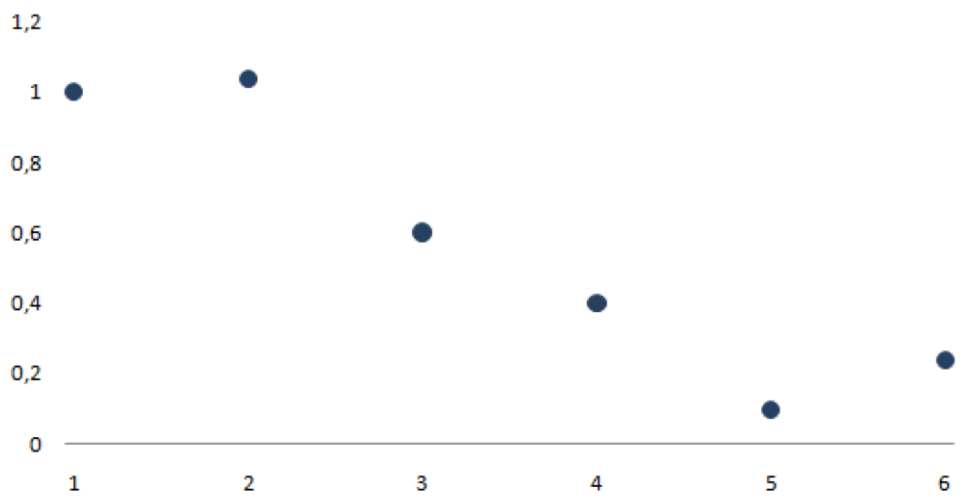
В задачах інтерполяції, інтерполяція сплайном краща, ніж інтерполяція многочленом, оскільки дає схожі результати навіть при менших степенях поліномів.

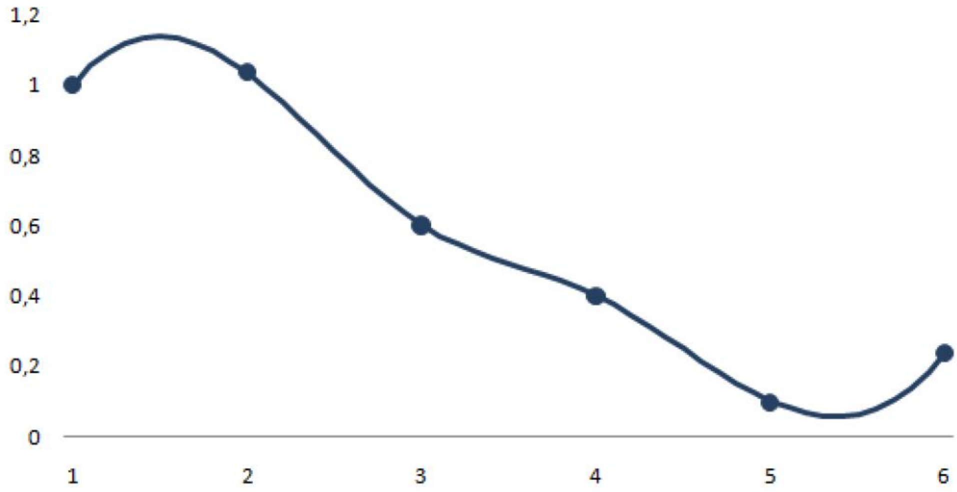
Сплайн — це функція, яка на кожному частинному відрізку інтерполяції є алгебраїчним многочленом, а на всьому заданому відрізку неперервна разом із кількома своїми похідними. Для побудови інтерполяційного сплайну на практиці використовують многочлени першого $y=P_1(x)$, другого $y=P_2(x)$ або третього $y=P_3(x)$ степеня. Максимальний степінь поліномів в сплайні називається ***степенем сплайна***.

Функцію $y=S_k(x)$ будемо називати *інтерполяційним сплайном* k*-ої степені*, якщо вона задовольняє умовам:

1) на кожному i-ому проміжку сплайн є многочленом k-ої степені, тобто $S_k(x)=P_k^i(x)$ для $x\in[x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$;
2) сплайн $y=S_k(x)$ є функцією неперервною разом зі своїми похідними до $(k-1)$-го порядку;
3) у вузлових точках сплайн повинен приймати значення, що задані таблицею, тобто $S_k(x_i)=y_i$, $i=\overline{1,n}$.

Гладке поєднання окремих функцій досягається за рахунок неперервності похідних до $(k-1)$-го порядку у вузлових точках.





5.2.2 Лінійний сплайн

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Побудуємо сплайн-інтерполяційну функцію, що називається *лінійним сплайном*, тобто на кожному i-ому частковому проміжку вона є многочленом першої степені

$$S_1(x) = P_1^i(x) \qquad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Крім того, лінійний сплайн повинен бути неперервним і мати неперервні похідні нульового порядку. Похідна нульового порядку від лінійного сплайну – це сама функція, яка і так є неперервною.

Сплайн-інтерполяційну функцію отримаємо у вигляді

$$P_1^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) \qquad \text{якщо } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, $i = \overline{1, n}$ скористаємося умовою, що у вузлових точках кожного часткового проміжку сплайн повинен набирати значення, що задані таблицею

$$P_1^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad a_i = y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$P_1^i(x_i) = y_i \qquad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = y_i, \qquad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

На кожному частковому проміжку сплайн-інтерполяційна функція складається з лінійних функцій вигляду

$$P_1^i(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_{i-1}), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Похідна нульового порядку від лінійної функції – це сама функція, тому гладкого поєднання функцій не відбудеться і тому лінійний сплайн повністю збігається з інтерполяційною функцією, побудованою за допомогою лінійної багатоінтервальної інтерполяції.

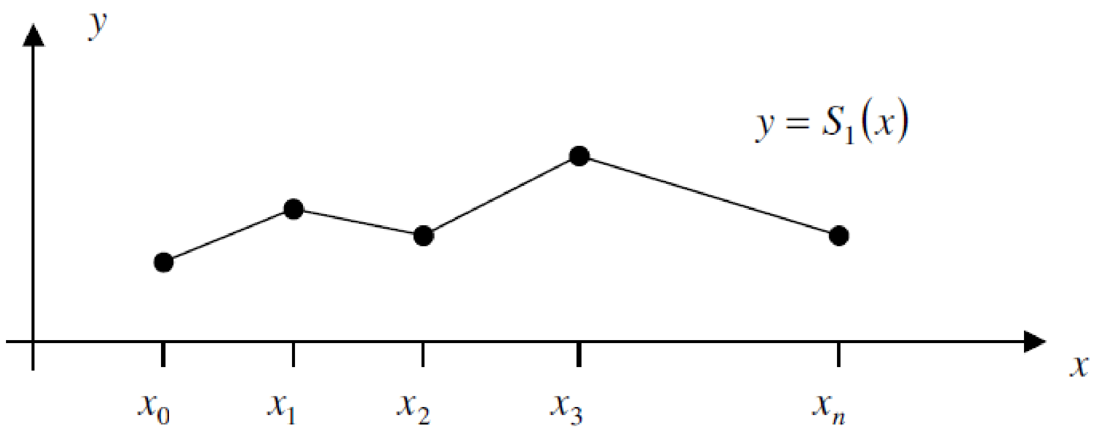


Рисунок 1 – Лінійний сплайн

5.2.3 Квадратичний сплайн

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Побудуємо *квадратичний* сплайн, тобто сплайн-інтерполяційну функцію, яка на кожному i-ому частковому проміжку є многочленом другої степені

$$S_2(x) = P_2^i(x) \qquad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Сплайн-інтерполяційну функцію на кожному частковому проміжку представимо у вигляді

$$P_2^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 \qquad \text{якщо } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Введемо позначення $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, $i = \overline{1, n}$ скористаємося тими умовами, що квадратичний сплайн має бути неперервним і мати неперервну похідну першого порядку.

Неперервність функції забезпечується тим, що квадратичний сплайн у вузлових точках кожного проміжку повинен приймати значення, задані таблицею

$$P_2^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \qquad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^2 = y_{i-1},$$

$$\text{звідки} \qquad a_i = y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$P_2^i(x_i) = y_i \qquad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 = y_i,$$

$$\text{звідки} \qquad b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 = y_i - y_{i-1}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Для того, щоб поєднання квадратичних функцій відбувалося гладко, потрібно щоб похідна першого порядку інтерполяційної функції була неперервною, тобто щоб у внутрішніх вузлових точках виконувалася умова

$$\lim_{x \to x_i - 0} S_2'(x) = \lim_{x \to x_i + 0} S_2'(x), \qquad i = \overline{1, n-1}$$

або

$$\left(P_2^i(x_i - 0)\right)' = \left(P_2^{i+1}(x_i + 0)\right)', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Одержимо вираз для похідної від інтерполяційної функції

$$\left(P_2^i(x)\right)' = b_i + 2c_i \cdot (x - x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Граничні значення похідної ліворуч і праворуч від внутрішньої вузлової точки залежать від того, з якого проміжку відбувається підхід до граничної точки

$$\left(P_2^i(x_i - 0)\right)' = b_i + 2c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = b_i + 2c_i h_i,$$

$$\left(P_2^{i+1}(x_i + 0)\right)' = b_{i+1} + 2c_{i+1} \cdot (x_i - x_i) = b_{i+1}.$$

Порівняємо отримані вирази

$$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}, \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Для однозначного визначення всіх коефіцієнтів необхідно отримати ще одну рівність. Вона може бути отримана, якщо припустити, що на першому проміжку парабола має лінійне продовження. Цього можна досягти, якщо кривизну на лівому кінці першого проміжку вважати рівною нулю, що визначається рівністю

$$S''(x_0) = 0,$$

це означає, що

$$\left(P_2^1(x_0)\right)'' = 0,$$

$$\left(a_1 + b_1 \cdot (x - x_0) + c_1 \cdot (x - x_0)^2\right)''\Big|_{x = x_0} = 0,$$

$$\left(b_1 + 2c_1 \cdot (x - x_0)\right)'\Big|_{x = x_0} = 0,$$

$$c_1 = 0.$$

Отже, на кожному частковому проміжку квадратичний сплайн складається з функцій вигляду

$$P_2^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 \quad \text{якщо } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n},$$

де коефіцієнти a_i, b_i, c_i, $i = \overline{1, n}$ є розв'язком системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 = y_i - y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Побудувати квадратичний сплайн для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$.

Розв'язування. Вхідні дані представимо у вигляді таблиці

x_i	1	2	3
$y_i=\sqrt[3]{x_i}$	1,000	1,260	1,442

У таблиці задано два проміжки $x\in[1,2]$ і $x\in[2,3]$, $n=2$, на кожному із проміжків побудуємо квадратичні функції так, щоб вони утворювали сплайн. Квадратичний сплайн представимо у вигляді

$$S_2(x)=\begin{cases} a_1+b_1(x-x_0)+c_1(x-x_0)^2, & x\in[x_0,x_1]; \\ a_2+b_2(x-x_1)+c_2(x-x_1)^2, & x\in[x_1,x_2] \end{cases}$$

або

$$S_2(x)=\begin{cases} a_1+b_1(x-1)+c_1(x-1)^2, & x\in[1,2]; \\ a_2+b_2(x-2)+c_2(x-2)^2, & x\in[2,3] \end{cases}$$

Невідомі коефіцієнти визначимо як розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ при умові, що $h_1=x_1-x_0=1$, $h_2=x_2-x_1=1$.

$$\begin{cases} a_i=y_{i-1}, & i=\overline{1,2}, \\ b_i\cdot h_i+c_i\cdot h_i^2=y_i-y_{i-1}, & i=\overline{1,2}, \\ b_i+2c_ih_i=b_{i+1}, & i=1, \\ c_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=y_0, \\ a_2=y_1, \\ b_1\cdot h_1+c_1\cdot h_1^2=y_1-y_0, \\ b_2\cdot h_2+c_2\cdot h_2^2=y_2-y_1, \\ b_1+2c_1h_1=b_2, \\ c_1=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1=1{,}000, \\ a_2=1{,}260, \\ b_1\cdot 1+c_1\cdot 1^2=1{,}260-1{,}000, \\ b_2\cdot 1+c_2\cdot 1^2=1{,}442-1{,}260, \\ b_1+2c_1\cdot 1=b_2, \\ c_1=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1=1{,}000, \\ a_2=1{,}260, \\ b_1=0{,}260, \\ b_2=0{,}260, \\ c_1=0, \\ c_2=-0{,}078. \end{cases}$$

Одержали квадратичний сплайн у вигляді

$$S_2(x) = \begin{cases} 1{,}000 + 0{,}260 \cdot (x-1), & x \in [1,\ 2]; \\ 1{,}260 + 0{,}260 \cdot (x-2) - 0{,}078 \cdot (x-2)^2, & x \in [2,\ 3]. \end{cases}$$

який складається з лінійної функції на першому проміжку і квадратичної функції на другому проміжку, при цьому поєднання цих функцій відбувається гладко. Проілюструємо це графічно.

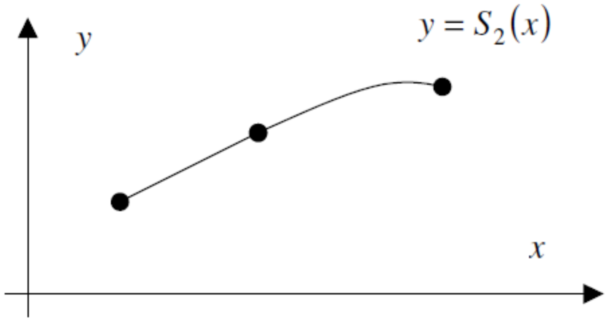


Рисунок 2 – Квадратичний сплайн з лінійним продовженням

5.2.4 Алгоритм побудови кубічної сплайн-функції

Припустимо, що у вузлах $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ відрізка $[a;b]$ задані значення функції $f(x)$: $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,2,...,n$. Довжину частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$ позначимо через $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,...,n)$. Будемо шукати кубічний сплайн на кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ у вигляді

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

де a_i, b_i, c_i, d_i — четвірка невідомих коефіцієнтів для одного частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$. Таких відрізків усього n: $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$. Тоді на всьому відрізку $[a;b]$ інтерполяційний сплайн має вигляд

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) \text{ для } x \in [x_0; x_1] \\ S_2(x) \text{ для } x \in [x_1; x_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_n(x) \text{ для } x \in [x_{n-1}; x_n] \end{cases}.$$

Оскільки невідомих коефіцієнтів усього $4n$, то для однозначного визначення цих коефіцієнтів потрібно мати систему з $4n$ рівнянь.

За умовою функція $S(x)$ у вузлах повинна збігатися із заданими значеннями функції $f(x)$:

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \tag{1}$$

$$S_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3. \tag{2}$$

Кількість таких рівнянь дорівнює $2n$. Інші $2n$ рівнянь отримуємо з таких міркувань. Вимагатимемо неперервності першої і другої похідних від $S(x)$ в усіх точках, включаючи і вузли. Для цього потрібно прирівняти ліві і праві похідні $S'(x-0)$, $S'(x+0)$, $S''(x-0)$, $S''(x+0)$ у внутрішніх вузлах:

$$S_i'(x_i - 0) = S_{i+1}'(x_i + 0), \tag{3}$$

$$S_i''(x_i - 0) = S_{i+1}''(x_i + 0). \tag{4}$$

Геометрично умова (3) означає, що графіки сусідніх кускових многочленів у вузловій точці мають спільну дотичну; умова (4) означає, що графіки сусідніх кускових многочленів у вузловій точці мають однаковий напрям опуклості, якщо друга похідна не рівна нулю, або точка $(x_i; y_i)$ – точка перегину графіка функції $S(x)$, якщо $S''(x_i) = 0$.

Знаходимо похідні:

$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$
$$S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

Далі маємо:

$$S_i'(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0}\left(b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2\right) =$$
$$= b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}) + 3d_i(x_i - x_{i-1})^2 = b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2,$$
$$S_{i+1}'(x_i + 0) = \lim_{x \to x_i + 0}\left(b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2\right) = b_{i+1},$$
$$S_i''(x_i - 0) = \lim_{x \to x_i - 0}\left(2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})\right) = 2c_i + 6d_i(x_i - x_{i-1}) = 2c_i + 6d_ih_i,$$
$$S_{i+1}''(x_i + 0) = \lim_{x \to x_i + 0}\left(2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i)\right) = 2c_{i+1}.$$

Отже, рівності (3), (4) набирають вигляду

$$b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 = b_{i+1}, \qquad (5)$$
$$2c_i + 6d_ih_i = 2c_{i+1}, \text{ або } c_i + 3d_ih_i = c_{i+1}, \qquad (6)$$

де $i = 1, 2, ..., n-1$.

Рівняння (5), (6) дають ще $2(n-1)$ умов. Дві умови, що залишилися, замінюють вимогою у точках $x_0 = a$ і $x_n = b$ нульової кривизни, тобто рівності нулю другої похідної:

$$S_1''(x_0) = 2c_1 = 0, \quad S_n''(x_n) = 2c_n + 6d_nh_n = 0. \qquad (7)$$

Запишемо усі рівняння (1), (2), (5) – (7) разом, урахувавши, що $a_i = y_{i-1}$:

$$\begin{cases} b_ih_i + c_ih_i^2 + d_ih_i^3 = y_i - y_{i-1}, \ (i = 1, 2, ..., n) \\ b_{i+1} - b_i - 2c_ih_i - 3d_ih_i^2 = 0, \ (i = 1, 2, ..., n-1) \\ c_{i+1} - c_i - 3d_ih_i = 0, \ (i = 1, 2, ..., n-1) \\ c_1 = 0, \quad c_n + 3d_nh_n = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Система (8) складається з $n + 2(n-1) + 2 = 3n$ рівнянь та $3n$ невідомих b_i, c_i, d_i, $i = 1, 2, ..., n$ (відомо, що $a_i = y_{i-1}$). Розв'язавши цю систему, наприклад методом Гауса, дістанемо сукупність усіх формул для шуканого інтерполяційного сплайна.

Процес обчислення коефіцієнтів кубічного сплайну можна спростити, якщо систему рівнянь (8) перетворити таким чином, щоб невідомими були тільки коефіцієнти c_i, $i = 2, 3, ..., n$ $(c_1 = 0)$. Рівність (1) відразу дає всі коефіцієнти a_i. З рівностей (6) та (7) випливає

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

Підставивши (9) у формулу (2) та замінюючи $a_i = y_{i-1}$, матимемо

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{3} h_i \left(c_{i+1} + 2c_i \right), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{10}$$

Виключаючи з рівності (5) коефіцієнти b_i та b_{i+1} відповідно до рівності (10) та коефіцієнти d_i за рівністю (9), отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів c_i:

$$c_1 = 0,$$

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right), \quad i = 2, 3, ..., n; \tag{11}$$

$$c_{n+1} = 0.$$

Матриця цієї системи є тридіагональною матрицею, оскільки всі елементи, що не розташовані на головній та двох побічних діагоналях, дорівнюють нулеві. Системи такого вигляду розв'язують методом прогону. За знайденими коефіцієнтами c_i коефіцієнти d_i та b_i обчислюють за формулами (9) та (10).

5.2.5 Метод прогону

Метод прогону застосовується для розв'язання СЛАР із тридіагональною матрицею. Така система рівнянь записується у вигляді

$$k_i x_{i-1} + l_i x_i + m_i x_{i+1} = q_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{12}$$

де $k_1 = 0, \quad m_n = 0$.

Запишемо систему (12) в розгорнутій формі

$$\begin{cases} l_1 x_1 + m_1 x_2 = q_1 \\ k_2 x_1 + l_2 x_2 + m_2 x_3 = q_2 \\ k_3 x_2 + l_3 x_3 + m_3 x_4 = q_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{n-1} x_{n-2} + l_{n-1} x_{n-1} + m_{n-1} x_n = q_{n-1} \\ k_n x_{n-1} + l_n x_n = q_n \end{cases}$$

Вибір найбільшого елемента при виключенні невідомих за методом Гауса в таких системах робити не можна, оскільки перестановка рядків руйнує структуру матриці. Найчастіше для розв'язку системи з тридіагональною матрицею використовують метод прогону, який є частинним випадком методу Гауса і складається з прямого та зворотного ходу обчислення. Прямий хід обчислення полягає у вилученні елементів матриці системи (12), що лежать нижче за головну діагональ. У кожному рівнянні залишиться не більше двох невідомих і формулу зворотного ходу можна записати в наступному вигляді:

$$x_i = U_i x_{i+1} + V_i, \quad i = n, n-1, ..., 1. \tag{13}$$

Якщо виразити $x_{i-1} = U_{i-1} x_i + V_{i-1}$ і підставити у систему (12), то матимемо $k_i \left(U_{i-1} x_i + V_{i-1} \right) + l_i x_i + m_i x_{i+1} = q_i$, звідки

$$x_i = -\frac{m_i}{k_i U_{i-1} + l_i} x_{i+1} + \frac{q_i - k_i V_{i-1}}{k_i U_{i-1} + l_i}. \tag{14}$$

Прирівнюючи рівності (13) та (14) отримаємо

$$U_i = -\frac{m_i}{k_i U_{i-1} + l_i}, \quad V_i = \frac{q_i - k_i V_{i-1}}{k_i U_{i-1} + l_i}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Оскільки $k_1 = 0$, то

$$U_1 = -\frac{m_1}{l_1}, \quad V_1 = \frac{q_1}{l_1}. \tag{16}$$

Отже, за формулами (16) та (15) можуть бути обчислені прогоночні коефіцієнти U_i та V_i $\left(i = 1, 2, ..., n \right)$ на прямому ході прогону. Знаючи прогоночні коефіцієнти за формулою (13) можна обчислити x_i, $i = n, n-1, ..., 1$ (обернений хід прогону).

Приклад. Розв'язати СЛАР методом прогону

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = -1 \\ 0{,}1x_2 + 4x_3 - x_4 = -5 \\ -x_3 + 8x_4 = 40 \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо коефіцієнти у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1 – Значення коефіцієнтів СЛАР

i	k_i	l_i	m_i	q_i
1	0,0	10	1	5
2	-2	9	1	-1
3	0,1	4	-1	-5
4	-1	8	0	40

<u>Прямий хід прогону</u>. За формулами (16) та (15) обчислюємо прогоночні коефіцієнти U_i та V_i $\left(i = 1, 2, 3, 4 \right)$:

$$U_1 = -\frac{m_1}{l_1} = -\frac{1}{10} = -0{,}1;$$

$$V_1 = \frac{q_1}{l_1} = \frac{5}{10} = 0{,}5;$$

$$U_2 = -\frac{m_2}{k_2U_1 + l_2} = -\frac{1}{-2\cdot(-0{,}1)+9} = -0{,}1087;$$

$$V_2 = \frac{q_2 - k_2V_1}{k_2U_1 + l_2} = \frac{-1-(-2)\cdot 0{,}5}{-2\cdot(-0{,}1)+9} = 0;$$

$$U_3 = -\frac{m_3}{k_3U_2 + l_3} = -\frac{-1}{0{,}1\cdot(-0{,}1087)+4} = 0{,}2507;$$

$$V_3 = \frac{q_3 - k_3V_2}{k_3U_2 + l_3} = \frac{-5-0{,}1\cdot 0}{0{,}1\cdot(-0{,}1087)+4} = -1{,}2534;$$

$$U_4 = -\frac{m_4}{k_4U_3 + l_4} = 0, \text{ оскільки } m_4 = 0;$$

$$V_4 = \frac{q_4 - k_4V_3}{k_4U_3 + l_4} = \frac{40-(-1)\cdot(-1{,}2534)}{-1\cdot 0{,}2507+8} = 5.$$

Обернений хід прогону. За формулами (13) обчислюємо x_i $(i = 4, 3, 2, 1)$:

$$x_4 = V_4 = 5 \quad (U_4 = 0);$$

$$x_3 = U_3x_4 + V_3 = 0{,}2507\cdot 5 - 1{,}2534 \approx 0;$$

$$x_2 = U_2x_3 + V_2 = -1{,}1087\cdot 0 + 0 \approx 0;$$

$$x_1 = U_1x_2 + V_1 = -0{,}1\cdot 0 + 0{,}5 \approx 0{,}5.$$

Приклад 2

2. Інтерполяційна функція задана таблицею 5.16. Знайдіть значення коефіцієнтів b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2, b_3, c_3, d_3, які визначають кубічний сплайн

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) \text{ для } x \in [2;\, 3], \\ S_2(x) \text{ для } x \in [3;\, 5], \\ S_3(x) \text{ для } x \in [5;\, 7]. \end{cases}$$

Таблиця 5.16

x	2	3	5	7
$f(x)$	4	–2	6	–3

Розв'язання. Записуємо вираз для $S(x)$:

$$S_1(x) = 4 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, \ x \in [2; 3];$$

$$S_2(x) = -2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3, \ x \in [3; 5];$$

$$S_3(x) = 6 + b_3(x-5) + c_3(x-5)^2 + d_3(x-5)^3, \ x \in [5; 7].$$

Складаємо систему (5.32):

$$\begin{cases} b_1 + c_1 + d_1 = -6, \\ 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 8, \\ 2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -9, \\ b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0, \\ b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0, \\ c_2 - c_1 - 3d_1 = 0, \\ c_3 - c_2 - 6d_2 = 0, \\ c_1 = 0, \quad c_3 + 6d_3 = 0. \end{cases} \tag{5.33}$$

Система (5.33) складається з дев’яти лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язавши цю систему, отримаємо наступні значення:

$$b_1 = -8,205 \quad c_1 = 0; \quad d_1 = 2.205;$$

$$b_2 = -1,591; \quad c_2 = 6,614; \quad d_2 = -1,909;$$

$$b_3 = 1,955; \quad c_3 = -4,841; \quad d_3 = 0,807.$$

Таким чином, шуканий кубічний сплайн має вигляд

$$S(x) = \begin{cases} 4 - 8,205 \cdot (x-2) + 0 \cdot (x-2)^2 + 2,205 \cdot (x-2)^3, \ x \in [2, 3]; \\ -2 - 1,591 \cdot (x-3) + 6,614 \cdot (x-3)^2 - 1,909 \cdot (x-3)^3, \ x \in [3, 5]; \\ 6 + 1,955 \cdot (x-5) - 4,841 \cdot (x-5)^2 + 0,807 \cdot (x-5)^3, \ x \in [5, 7]. \end{cases}$$

У таблиці 5.17 вміщено результати перевірки всіх умов, які повинен задовольняти знайдений сплайн.

Таблиця 5.17

x	2	3	5	7
$f(x)$	4	–2	6	–3
$S_1(x)$	4	–2	–	–
$S_2(x)$	–	–2	6	–
$S_3(x)$	–	–	6	–3,04
$S_1'(x)$	–11,6	– 0,4	–	–
$S_2'(x)$	–	– 0,4	1,60	–
$S_3'(x)$	–	–	1,62	–7,62

Проаналізуйте результати таблиці 5.17 самостійно.

5.2.6 Кубічна сплайн-інтерполяція в MathCad

Для кубічної сплайн інтерполяції в Mathcad використовується функція **interp(*s*, *x*, *y*, *t*)** — функція, що апроксимує дані векторів *x* і *y* кубічними сплайнами;

де

s — вектор других похідних, створений однією з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;

x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;

y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;

t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

Перед застосуванням функції interp необхідно заздалегідь визначити перший з її аргументів — векторну змінну *s*. Робиться це за допомогою однієї з трьох вбудованих функцій тих же аргументів (*x*,*y*):

- lspline(*x*,*y*) — вектор значень коефіцієнтів линійного сплайну;
- pspline(*x*,*y*) — вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайну;
- cspline(*x*,*y*) — вектор значень коефіцієнтів кубічного сплайну;
- *x*, *y* — вектори даних.

Вибір конкретної функції коефіцієнтів сплайнів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервалу.

Приклад 3. Дані значення функції у вузлах інтерполяції, провести сплайн-інтерполяцію.

Розв'язання:

$$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T \qquad y := (15\ \ 17\ \ 7\ \ 21)^T$$

Інтерполяція сплайнами з використанням функції **lspline:**

$s1 := \mathrm{lspline}(x, y)$

$A1(t) := \mathrm{interp}(s1, x, y, t)$

$A1(2.5) = 11.1$

Інтерполяція сплайнами з використанням функції **pspline:**

$s2 := pspline(x, y)$

$A2(t) := interp(s2, x, y, t)$

$A2(2.5) = 11.25$

Інтерполяція сплайнами з використанням функції **cspline:**

$s3 := cspline(x, y)$

$A3(t) := interp(s3, x, y, t)$

$A3(2.5) = 11.25$

Результати інтерполяції заданих даних, отримані з використанням функцій **lspline**, **pspline**, **cspline** подано на рисунку 4.

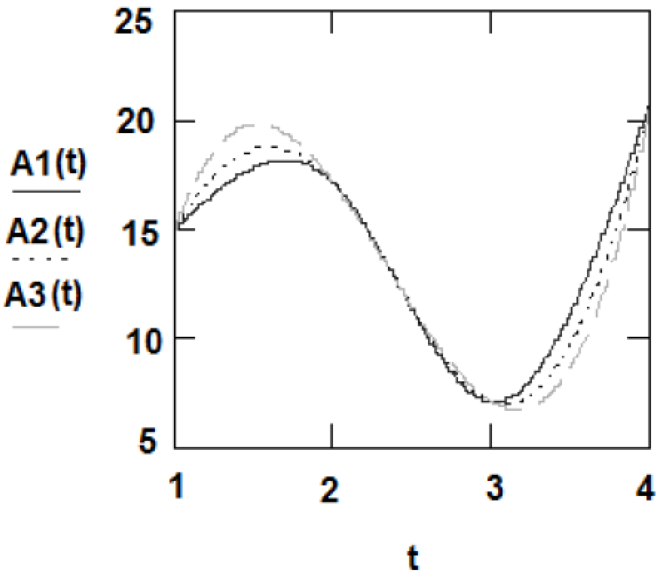


Рисунок 4 - Результати інтерполяції заданих даних, отримані з використанням функцій **lspline**, **pspline**, **cspline**