ЛЕКЦІЯ 10

ОСНОВНІ РОЗПОДІЛИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН (ПРОДОВЖЕННЯ)

10.1. Степінь свободи

Степінь свободи (*degrees of freedom*) в розподілі випадкової величини — це параметр, який визначає кількість незалежних змінних або параметрів, які можуть бути вільно змінювані в межах певної статистичної моделі або розподілу.

Для статистичної вибірки степінь свободи обчислюється за формулою (10.1):

$$k = n - 1, \tag{10.1}$$

де n – кількість елементів у виборці або кількість інтервалів в групованому варіативному ряду.

Уявімо, що ми маємо вибрати три числа, середнє значення яких дорівнює 10. Прикладом можуть слугувати наступні трійки чисел: $\{9,10,11\}$, або $\{8,10,12\}$, або $\{5,10,15\}$. Як тільки було вибрано перші два числа – третє є фіксованим. Іншими словами, ми не можемо змінювати третє число. Лише перші два можуть змінювати свої значення так, аби середнє значення залишалося рівним 10.

В математичній статистиці при перевірці гіпотез про тип розподілу степінь свободи рахуватиметься за формулою (10.2):

$$k = n - m - 1, \tag{10.2}$$

де n – об'єм вибірки, m – кількість параметрів, що описують розподіл.

Наприклад, нормальний розподіл має степінь свободи $k = n - 2 - 1 = n - 3$, оскільки даний розподіл залежить від 2-х параметрів: a, σ. Для показникового розподілу степінь свободи $k = n - 1 - 1 = n - 2$, оскільки даний розподіл залежить від 1-го параметру λ.

Розуміння ступеня свободи допомагає в правильному інтерпретуванні статистичних тестів і побудові довірчих інтервалів.

10.2. Розподіл $\mathcal{X}^2$

Розподіл $\mathcal{X}^2$ (*хі-квадрат*) з k степенем свободи — це статистичний розподіл, який часто використовується в гіпотезах та тестах для оцінки відповідності між спостережуваними і очікуваними частотами або для перевірки незалежності у крос-табуляціях. Він є особливим випадком розподілу, що виникає як сума квадратів k незалежних нормально розподілених випадкових змінних Z_i $(i = 1,2, \dots, k)$, кожна з яких має середнє 0 і стандартне відхилення 1, тобто $N(0; 1)$ (формула (10.3)).

$$\mathcal{X}^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2. \tag{10.3}$$

Щільність ймовірності розподілу $\mathcal{X}^2$ має вигляд (10.4):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\left(\frac{k}{2}-1\right)} \cdot e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}, \text{де } x \geq 0; \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{де } x < 0. \end{cases} \qquad (10.4)$$

В формулі (10.4) $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} (e^{-t} \cdot t^{y-1}) dt$ – гамма-функція Ейлера.

Графік функції щільності розподілу $\mathcal{X}^2$ наведено на рис. 10.1.

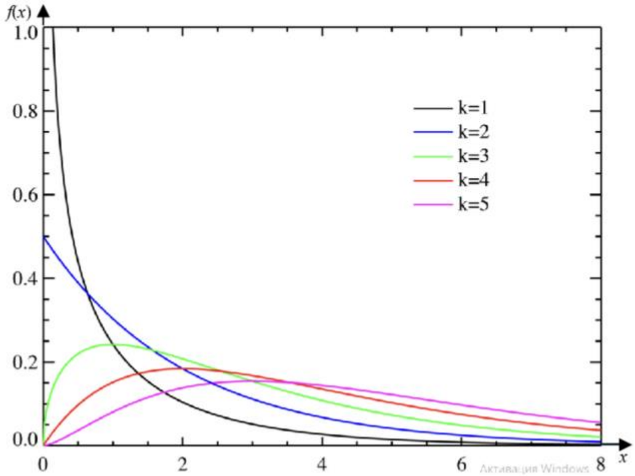

Рис. 10.1. Графік функції щільності $f(x)$ розподілу $\mathcal{X}^2$

Властивості розподілу $\mathcal{X}^2$

1. *Функція розподілу $F(x)$ матиме вигляд* (10.5):

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \text{де } x \geq 0; \\ 0, \qquad \text{де } x < 0. \end{cases} \qquad (10.5)$$

Доведення. Перевіримо відповідність функції $F(x)$ основним властивостям функції розподілу.

Зростання: Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ є зростаючою функцією, тобто з збільшенням x ймовірність також збільшується.

Граничні значення: При $x = 0$: $F(0) = 0$.

При $x \to \infty$; $F(x) \to 1$.

Монотонність: Функція $F(x)$ для розподілу $\mathcal{X}^2$ завжди монотонно зростає.

Графік функції розподілу для розподілу $\mathcal{X}^2$ наведено на рис. 10.2.

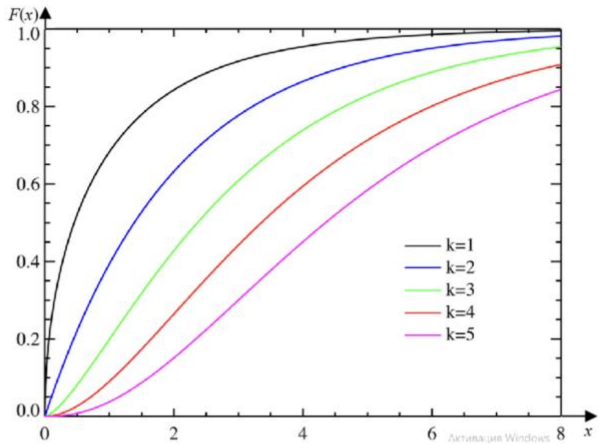

Рис. 10.2. Графік функції розподілу $F(x)$ розподілу $\mathcal{X}^2$

На рис. 10.2 наведено фрагмент таблиці критичних значень розподілу $\mathcal{X}^2$ для степеню свободи k та рівня значущості α.

k	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928

Рис. 10.3 Таблиця критичних значень розподілу $\mathcal{X}^2$

2. *Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ випадкової величини, що має розподіл $\mathcal{X}^2$, обчислюються за формулами* (10.6):

$$M(X) = k; D(X) = 2 \cdot k; \sigma(X) = \sqrt{2 \cdot k}. \tag{10.6}$$

3. *Мода та медіана випадкової величини X, що має* розподіл $\mathcal{X}^2$, *співпадають з її математичним сподіванням* (10.7).

$$Mo(X) = \begin{cases} 0, & \text{де } k < 2; \\ k - 2, & \text{де } k \geq 2; \end{cases} Me(X) \approx k \cdot \left(1 - \frac{2}{9 \cdot k}\right)^3. \tag{10.7}$$

4. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X, що має* розподіл $\mathcal{X}^2$, *дорівнюють* (10.8)

$$As(X) = \sqrt{\frac{8}{k}}, Es(X) = \frac{3}{k}. \tag{10.8}$$

Тобто, розподіл $\mathcal{X}^2$ має додатну (правосторонню) асиметрію та має більшу «піковість» або «випуклість» в порівнянні з нормальним розподілом.

Доведення. Обчислимо центральні моменти 3-го та 4-го порядків.

$$\mu_3(X) = 8 \cdot k; \ \mu_4(X) = 12 \cdot k \cdot (k+1).$$

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{8 \cdot k}{\left(\sqrt{2 \cdot k}\right)^3} = \sqrt{\frac{8}{k}}.$$

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{12 \cdot k \cdot (k+1)}{\left(\sqrt{2 \cdot k}\right)^4} - 3 = \frac{12 \cdot k \cdot (k+1)}{4 \cdot k^2} - 3 = \frac{3}{k}.$$

Для розподілу $\mathcal{X}^2$ (формули (10.8)) очевидно, що $As(X) > 0$, тобто «довша» частина кривої знаходиться правіше моди, порівняно з графіком щільності нормального розподілу (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

Для розподілу $\mathcal{X}^2$ (формули (10.8)) очевидно, що $Es(X) > 0$, тобто графік функції щільності має більшу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

5. *При степенях свободи $k > 30$ розподіл $\mathcal{X}^2$ наближається до стандартного нормального розподілу $N(0; 1)$.*

Доведення. З попередньої властивості (формула (10.8)) видно, що при $k \to \infty$ $As(X) = 0$; $Es(X) = 0$. Це свідчить про те, що розподіл $\mathcal{X}^2$ за рівнем асиметрії та «піковості» або «випуклості» дійсно стає подібним до нормального розподілу.

Визначення степеня свободи (k) для $\mathcal{X}^2$-розподілу

Тест $\mathcal{X}^2$ для відповідності (Goodness-of-Fit Test):

Використовується для перевірки того, наскільки спостережувані частоти відрізняються від очікуваних частот на основі певного теоретичного розподілу.

Ступінь свободи визначається за формулою (10.1):

$$k = n - 1,$$

де n — кількість категорій або груп (в деяких випадках n – об'єм статистичної вибірки або n – кількість інтервалів в групованому статистичному раду). Це тому, що одна з категорій залежить від інших, тому маємо $n - 1$ незалежних категорій.

Тест $\mathcal{X}^2$ для незалежності (Test of Independence):

Використовується для перевірки, чи існує залежність між двома категоріальними змінними.

Ступінь свободи визначається за формулою (10.9):

$$k = (r - 1) \cdot (c - 1), \tag{10.9}$$

де r — кількість рядків, а c — кількість стовпців у таблиці спряженості (крос-табуляції). Це враховує той факт, що і ряди, і стовпці підпорядковуються обмеженням.

Тест $\mathcal{X}^2$ для перевірки однорідності (Test for Homogeneity):

Використовується для порівняння розподілів двох або більше груп.

Ступінь свободи також визначається за формулою (10.10),

$$k = (r-1) \cdot (c-1),$$

де r — кількість рядків, а c — кількість стовпців у крос-табуляції.

Використання розподілу $\mathcal{X}^2$

Тест $\mathcal{X}^2$ для відповідності: Використовується для перевірки того, чи відповідають спостережувані частоти певному теоретичному розподілу.

Тест $\mathcal{X}^2$ для незалежності: Використовується для перевірки незалежності двох категоріальних змінних у крос-табуляції.

Тест $\mathcal{X}^2$ для добротності підгонки: Застосовується для перевірки того, чи спостережувані дані відповідають певній моделі.

10.3. Розподіл Стьюдента

Розподіл Стьюдента (або *t-розподіл*) — це розподіл випадкової величини t, яка має вигляд (10.11):

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\mathcal{X}^2}{k}}}, \tag{10.10}$$

де Z – випадкова величина, розподілена за стандартним нормальним законом ($N(0;1)$); $\mathcal{X}^2$ – незалежна від Z випадкова величина, що має розподіл $\mathcal{X}^2$ з k степенями свободи.

Вона використовується для оцінки ймовірностей і перевірки гіпотез у випадках, коли розмір вибірки невеликий, а справжнє стандартне відхилення невідоме. Він названий на честь Вільяма Сілі Госсета, який використовував псевдонім «Стьюдент».

Щільність ймовірності розподілу Стьюдента має вигляд (10.11):

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi \cdot k}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}. \tag{10.11}$$

В формулі (10.11) $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} (e^{-t} \cdot t^{y-1}) dt$ – гамма-функція Ейлера.

Графік функції щільності розподілу Стьюдента наведено на рис. 10.4.

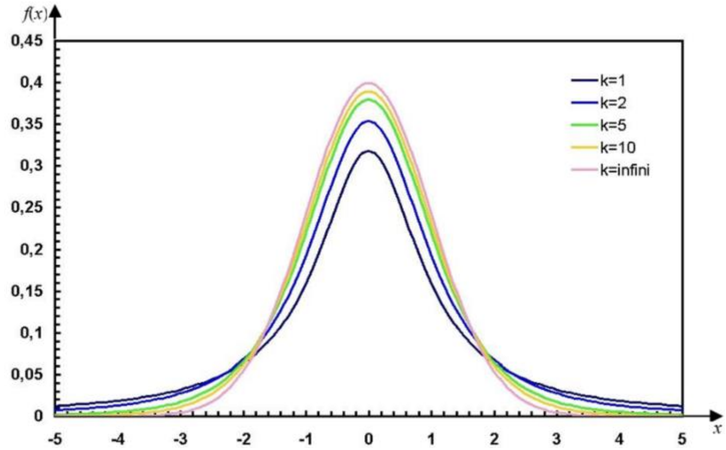

Рис. 10.4. Графік функції щільності $f(x)$ розподілу Стьюдента

Властивості розподілу Стьюдента

1. *Функція розподілу $F(x)$ матиме вигляд* (10.13):

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi\cdot k}} \cdot \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} dx. \qquad (10.12)$$

Доведення. Перевіримо відповідність функції $F(x;k)$ основним властивостям функції розподілу.

Зростання: Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ є зростаючою функцією, тобто з збільшенням x ймовірність також збільшується.

Граничні значення: При $x = 0$: $F(0) = 0$.

При $x \to \infty$; $F(x) \to 1$.

Монотонність: Функція $F(x)$ для розподілу Стьюдента завжди монотонно зростає.

Графік функції розподілу для розподілу Стьюдента наведено на рис. 10.5.

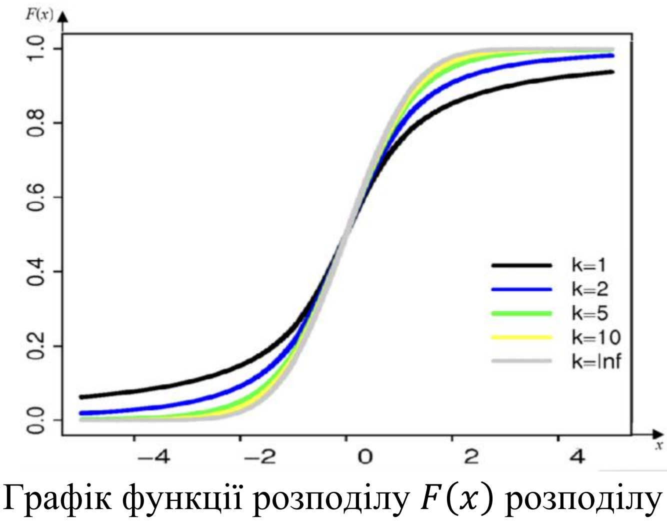

Рис. 10.5. Графік функції розподілу $F(x)$ розподілу Стьюдента

На рис. 10.6 наведено таблицю критичних значень розподілу Стьюдента для степеню свободи k та рівня значущості α.

Число ступенів свободи k	Рівень значимості α			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,80	2,20	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,05	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,90	3,96
18	1,73	2,10	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,80	3,74
25	1,71	2,06	2,79	3,72
26	1,71	2,06	2,78	3,71
27	1,71	2,05	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,76	3,66
29	1,70	2,05	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
∞	1,64	1,96	2,58	3,29

Рис. 10.6 Таблиця критичних значень розподілу Стьюдента

2. *Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ випадкової величини, що має розподіл Стьюдента, обчислюються за формулами* (10.13):

$$M(X) = 0; D(X) = \frac{k}{k-2}, k > 2; \sigma(X) = \sqrt{\frac{k}{k-2}}, k > 2. \quad (10.13)$$

3. *Мода та медіана випадкової величини X, що має розподіл Стьюдента, співпадають з її математичним сподіванням та дорівнюють*: $Mo(X) = Me(X) = 0$.

Доведення. Правомірність цього факту легко можна побачити на рис. 10.4.

4. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X, що має розподіл Стьюдента, дорівнюють* (10.14)

$$As(X) = 0, k > 3, Es(X) = \frac{6}{k-4}, k > 4. \quad (10.14)$$

Доведення. Обчислимо центральні моменти 3-го та 4-го порядків.

$$\mu_3(X) = 0;\ \mu_4(X) = \frac{3 \cdot k^2}{(k-2) \cdot (k-4)}.$$

$$As(X)=\frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}=\frac{0}{\left(\sqrt{\frac{k}{k-2}}\right)^3}=0.$$

$$Es(X)=\frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)}-3=\frac{\frac{3\cdot k^2}{(k-2)\cdot(k-4)}}{\left(\sqrt{\frac{k}{k-2}}\right)^4}-3=\frac{3\cdot(k-2)}{k-4}-3=\frac{6}{k-4}.$$

Дослідження коефіцієнту асиметрії та ексцесу показали, що загалом функція щільності розподілу Стьюдента схожа на дзвоноподібну функцію щільності нормального розподілу, з тією відмінністю, що у розподілі Стьюдента при малих степенях свободи вона трохи нижча і ширша (рис. 10.4).

5. *При степенях свободи $k>30$ розподіл Стьюдента наближається до стандартного нормального розподілу $N(0;1)$.*

Доведення. З попередньої властивості (формула (10.14)) видно, що $As(X)=0$, окрім того при $k\to\infty$; $Es(X)=0$. Це свідчить про те, що розподіл Стьюдента за рівнем асиметрії та «піковості» або «випуклості» дійсно стає подібним до нормального розподілу.

Визначення степеня свободи (k) для розподілу Стьюдента

Розподіл Стьюдента залежить від кількості ступенів свободи k, які зазвичай обчислюються за формулою (10.1)

$$k=n-1,$$

де n — це кількість спостережень у вибірці.

Цей ступінь свободи використовується для оцінки розподілу Стьюдента, який підходить для ситуацій, коли розмір вибірки невеликий і стандартне відхилення генеральної сукупності невідоме.

Використання розподілу Стьюдента

t-тест для однієї вибірки: Використовується для перевірки гіпотези про те, що середнє значення вибірки дорівнює певному значенню, коли стандартне відхилення генеральної сукупності невідоме і оцінюється за допомогою вибіркового стандартного відхилення.

t-тест для двох незалежних вибірок: Використовується для порівняння середніх значень двох незалежних вибірок, коли стандартні відхилення генеральних сукупностей невідомі.

Парний t-тест: Використовується для порівняння середніх значень двох залежних вибірок (наприклад, до і після експерименту) з невідомим стандартним відхиленням.

10.4. Розподіл Фішера-Снедекора

Розподілом Фішера-Снедекора (F-розподілом) називається розподіл випадкової величини (10.15):

$$F = \frac{\frac{\chi_1^2}{k_1}}{\frac{\chi_2^2}{k_2}}; \qquad (10.15)$$

де $\mathcal{X}_1^2$ та $\mathcal{X}_2^2$ – випадкові величини, що мають розподіл $\mathcal{X}^2$ з степенями свободи k_1 та k_2 відповідно.

Щільність ймовірності розподілу Фішера-Снедекора має вигляд (10.16):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\cdot k_1^{\left(\frac{k_1}{2}\right)}\cdot k_2^{\left(\frac{k_2}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot x^{\left(\frac{k_1}{2}-1\right)}\cdot(k_1\cdot x+k_2)^{-\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}, \text{де } x \geq 0; \\ 0, \qquad \text{де } x < 0. \end{cases} \qquad (10.16)$$

В формулі (10.17) $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty}(e^{-t}\cdot t^{y-1})dt$ – гамма-функція Ейлера.

Графік функції щільності розподілу Фішера-Снедекора наведено на рис. 10.7.

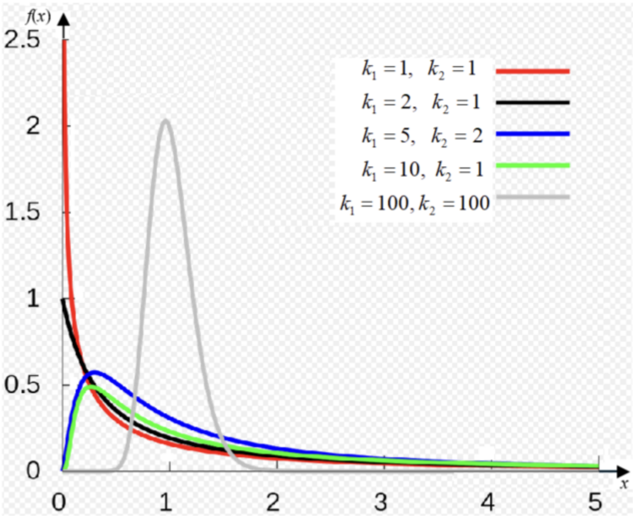

Рис. 10.7. Графік функції щільності $f(x)$ розподілу Фішера-Снедекора

Властивості розподілу Фішера-Снедекора

1. *Функція розподілу $F(x)$ матиме вигляд* (10.17):

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\cdot k_1^{\left(\frac{k_1}{2}\right)}\cdot k_2^{\left(\frac{k_2}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot \int_{-\infty}^{x} x^{\left(\frac{k_1}{2}-1\right)}\cdot(k_1\cdot x+k_2)^{-\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}dx, \text{де } x \geq 0; \\ 0, \qquad \text{де } x < 0. \end{cases} \qquad (10.17)$$

Доведення. Перевіримо відповідність функції $F(x)$ основним властивостям функції розподілу.

Зростання: Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ є зростаючою функцією, тобто з збільшенням x ймовірність також збільшується.
Граничні значення: При $x = 0$: $F(0) = 0$.

При $x \to \infty$; $F(x) \to 1$.

Монотонність: Функція $F(x)$ для розподілу Фішера-Снедекора завжди монотонно зростає.

Графік функції розподілу для розподілу Фішера-Снедекора наведено на рис. 10.8.

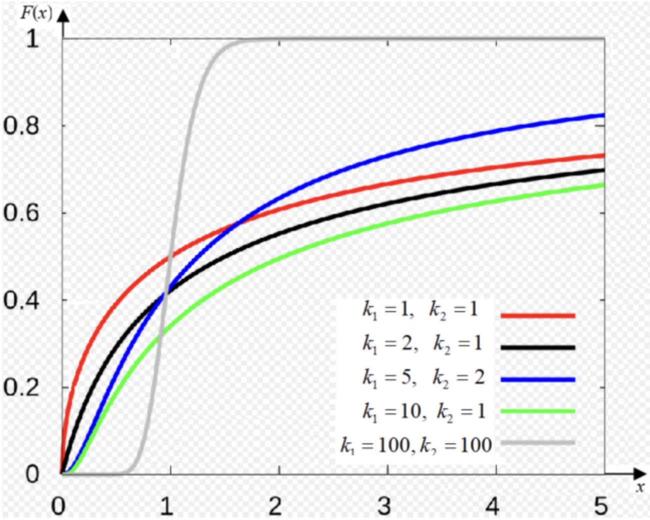

Рис. 10.8. Графік функції розподілу $F(x)$ розподілу Фішера-Снедекора

На рис. 10.9 наведено таблицю критичних значень розподілу Фішера-Снедекора для степенів свободи k_1, k_2 та рівня значущості α.

K_2	Число степенів свободи варіації для більшої дісперсії (K_1)									
	1	3	5	7	9	11	14	20	30	50
1	161	216	230	237	241	243	245	248	250	252
	4052	5403	5764	5928	6022	6082	6142	6208	6258	6302
3	10.3	9.28	9.01	8.88	8.81	8.76	8.71	8.66	8.62	8.58
	34.12	29.46	28.24	27.67	27.34	27.13	26.92	26.69	26.50	26.35
5	6.61	5.41	5.05	4.88	4.78	4.70	4.64	4.56	4.50	4.44
	16.26	12.06	10.97	10.45	10.15	9.96	9.77	9.55	9.38	9.24
7	5.59	4.35	3.97	3.79	3.68	3.60	3.52	3.44	3.38	3.32
	12.25	8.45	7.46	7.00	6.71	6.54	6.35	6.15	5.98	5.85
9	5.12	3.86	3.48	3.29	3.18	3.10	3.02	2.93	2.86	2.80
	10.56	6.99	6.06	5.62	5.35	5.18	5.00	4.80	4.64	4.51
11	4.84	3.59	3.20	3.01	2.90	2.82	2.74	2.65	2.57	2.50
	9.05	6.22	5.32	4.88	4.63	4.46	4.29	4.10	3.94	3.80
13	4.67	3.41	3.02	2.84	2.72	2.63	2.55	2.46	2.38	2.32
	9.07	5.74	4.86	4.44	4.19	4.02	3.85	3.67	3.51	3.37
15	4.54	3.29	2.90	2.70	2.59	2.51	2.43	2.33	2.25	2.18
	8.68	5.42	4.56	4.14	3.89	3.73	3.56	3.36	3.20	3.07
17	4.45	3.20	2.81	2.62	2.50	2.41	2.33	2.23	2.15	2.08
	8.40	5.18	4.34	3.93	3.68	3.52	3.35	3.16	3.00	2.89
19	4.38	3.13	2.74	2.55	2.43	2.34	2.26	2.15	2.07	2.00
	8.18	5.01	4.17	3.77	3.52	3.36	3.19	3.00	2.84	2.70
21	4.32	3.07	2.68	2.49	2.37	2.28	2.20	2.09	2.00	1.93
	8.02	4.87	4.04	3.65	3.40	3.24	3.07	2.88	2.72	2.58
23	4.28	3.03	2.64	2.45	2.32	2.24	2.14	2.04	1.96	1.88
	7.88	4.46	3.94	3.54	3.30	3.14	2.97	2.78	2.62	2.48
25	4.24	2.99	2.60	2.41	2.28	2.20	2.11	2.00	1.92	1.84
	7.77	4.68	3.86	3.46	3.21	3.05	2.89	2.70	2.54	2.40
27	4.21	2.96	2.57	2.37	2.25	2.16	2.08	1.97	1.88	1.80
	7.68	4.60	3.79	3.39	3.14	2.98	2.83	2.63	2.45	2.33
29	4.18	2.93	2.54	2.35	2.22	2.14	2.05	1.94	1.85	1.77
	7.60	4.54	3.73	3.33	3.08	2.92	2.77	2.57	2.41	2.27

Рис. 10.9 Таблиця критичних значень розподілу Фішера-Снедекора $\alpha = 0{,}95$ та $\alpha = 0{,}99$ (верхній та нижній рядок відповідно)

2. *Числові характеристики* $M(X), D(X), \sigma(X)$ *випадкової величини, що має розподіл Фішера-Снедекора, обчислюються за формулами* (10.18):

$$M(X) = \frac{k_2}{k_2 - 2}\ (k_2 > 2); D(X) = \frac{2 \cdot k_2^2 \cdot (k_1 + k_2 - 2)}{k_1 \cdot (k_2 - 2)^2 \cdot (k_2 - 4)} (k_2 > 4);$$

$$\sigma(X) = \frac{k_2}{k_2 - 2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (k_1 + k_2 - 2)}{k_1 \cdot (k_2 - 4)}}\ (k_2 > 4). \tag{10.18}$$

3. *Мода випадкової величини* X, *що має розподіл Фішера-Снедекора, дорівнює* (10.19):

$$Mo(X) = \frac{k_1}{k_1 - 2} \cdot \frac{k_2 + 2}{k_2}. \tag{10.19}$$

4. *Коефіцієнт асиметрії випадкової величини* X, *що має розподіл Фішера-Снедекора, дорівнює* (10.20)

$$As(X) = \frac{2 \cdot (2 \cdot k_1 + k_2 - 2)}{k_2 - 6} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (k_2 - 4)}{k_1 \cdot (k_1 + k_2 - 2)}}\ (k_2 > 6). \tag{10.20}$$

Тобто, розподіл Фішера-Снедекора має додатну (правосторонню) асиметрію.

Доведення. Для розподілу Фішера-Снедекора (формула (10.20)) очевидно, що $As(X) > 0$, тобто «довша» частина кривої щільності знаходиться правіше моди, порівняно з графіком щільності нормального розподілу (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

5. *При* $n \to +\infty$ *розподіл Фішера-Снедекора наближається до нормального розподілу.*

Визначення степенів свободи (k_1, k_2) для розподілу Фішера-Снедекора

k_1, k_2 — це параметри, що визначають форму розподілу. Степінь свободи k_1 зазвичай обчислюється за формулою (10.1)

$$k_1 = n - 1,$$

а k_2 — за формулою (10.21)

$$k_2 = n - s, \tag{10.21}$$

де n – загальна кількість спостережень; s – кількість груп.

Використання розподілу Фішера-Снедекора

Аналіз варіацій (ANOVA): Розподіл Фішера-Снедекора використовується для перевірки гіпотез про рівність середніх у кількох групах. Він визначає, чи є значуща різниця між груповими середніми.

Регресійний аналіз: Розподіл Фішера-Снедекора застосовується для перевірки значущості регресійної моделі, зокрема для визначення, чи є включені предиктори (незалежні змінні) суттєвими для прогнозування залежної змінної.

Перевірка гіпотез: У тестах на рівність дисперсій (наприклад, тест Левена) використовується розподіл Фішера-Снедекора для перевірки, чи є дисперсії двох вибірок рівними.

10.5. Розподіл Парето

Розподіл Парето в теорії ймовірностей — двопараметрична сім'я абсолютно неперервних розподілів. Названий на честь італійського інженера з цивільного будівництва, економіста, і соціолога Вільфредо Парето.

Розподіл Парето – це степеневий розподіл ймовірностей, який використовується для описання соціальних, наукових, геофізичних, актуарних, та багатьох інших типів спостережуваних явищ.

Початково застосовувалася для описання розподілу багатства серед суспільства, що відповідає тенденції, що велика частина багатства зосереджена в руках невеликої частини населення людей. У розмовній версії розподіл Парето відомий як принцип Парето, або «правило 80-20», а також іноді може називатися «ефектом Матвія». Це правило стверджує що, наприклад, 80% багатства суспільства утримують 20% його населення.

Щільність ймовірності розподілу Парето має вигляд (10.22):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x_0} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k+1)}, \text{де } x \geq x_0; \\ 0, \quad \text{де } x < x_0, \end{cases} \tag{10.22}$$

де x_0 – параметр масштабування, який характеризує розподіл Парето; k – значення степеню, який є параметром форми для даного розподілу.

У теорії ймовірностей і статистиці *параметр форми* є числовим параметром із сімейства параметричних розподілів ймовірностей, який не є ні коефіцієнтом зсуву ні коефіцієнтом масштабу (ані їх функцією як, наприклад, параметр швидкості). Такий параметр повинен впливати на форму розподілу, а не просто зміщувати його (як це робить параметр розташування) або розтягувати/згортати (як це робить параметр масштабу).

Графік функції щільності розподілу Парето наведено на рис. 10.10.

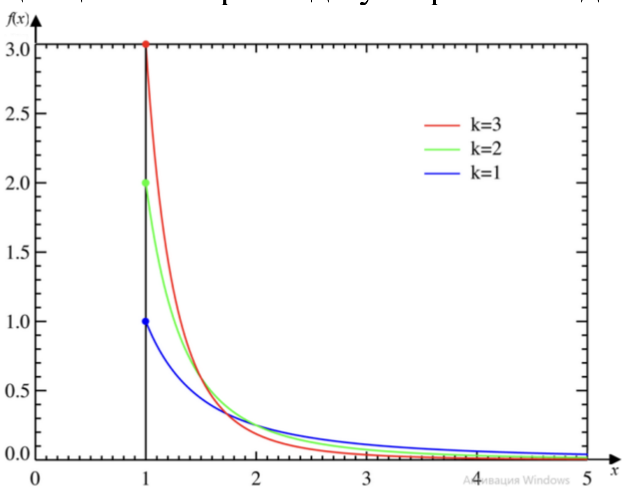

Рис. 10.10. Графік функції щільності $f(x)$ розподілу Парето при $x_0 = 1$

Властивості розподілу Парето

1. *Функція розподілу $F(x)$ матиме вигляд* (10.23):

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^k, \text{де } x \geq x_0; \\ 0, \quad \text{де } x < x_0. \end{cases} \tag{10.23}$$

Доведення. Перевіримо відповідність функції $F(x)$ основним властивостям функції розподілу.

Зростання: Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ є зростаючою функцією, тобто з збільшенням x ймовірність також збільшується.

Граничні значення: При $x = 0$: $F(0) = 0$.

При $x \to \infty$; $F(x) \to 1$.

Монотонність: Функція $F(x)$ для розподілу Парето завжди монотонно зростає.

Графік функції розподілу для розподілу Парето наведено на рис. 10.11.

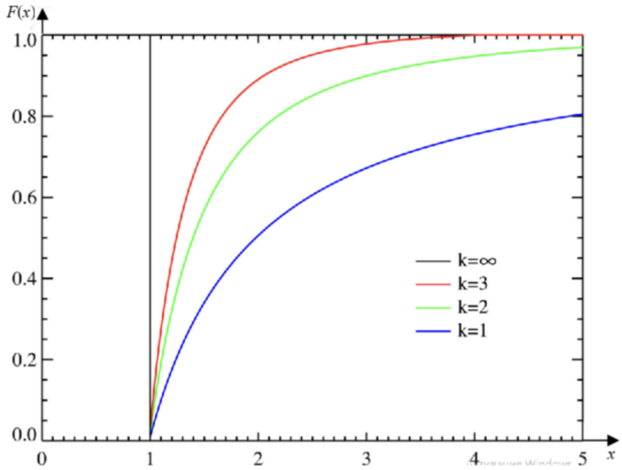

Рис. 10.11. Графік функції розподілу $F(x)$ розподілу Парето

2. *Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ випадкової величини, що має розподіл Парето, обчислюються за формулами* (10.24):

$$M(X) = \frac{k \cdot x_0}{k-1} \; (k > 1); D(X) = \frac{k \cdot x_0^2}{(k-1)^2 \cdot (k-2)} (k > 2);$$

$$\sigma(X) = \frac{x_0}{k-1} \cdot \sqrt{\frac{k}{k-2}} \; (k > 2). \tag{10.24}$$

Доведення. Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \cdot f(x)\right) dx = \int_{x_0}^{+\infty} \left(x \cdot \frac{k}{x_0} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k+1)}\right) dx =$$

$$= k \cdot \int_{x_0}^{+\infty} \left(\frac{x_0}{x}\right)^k dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{k \cdot x_0}{k-1} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k-1)} \right) \Bigg|_{x_0}^{b} =$$
$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{k \cdot x_0}{k-1} \cdot \left(\frac{x_0}{b}\right)^{(k-1)} + \frac{k \cdot x_0}{k-1} \right) = \frac{k \cdot x_0}{k-1}.$$

Обчислимо дисперсію:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 \cdot f(x)\right) dx = \int_{x_0}^{+\infty} \left(x^2 \cdot \frac{k}{x_0} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k+1)} \right) dx =$$
$$= \int_{x_0}^{+\infty} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k-1)} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{k \cdot x_0^2}{k-2} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k-2)} \right) \Bigg|_{x_0}^{b} =$$
$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{k \cdot x_0^2}{k-2} \cdot \left(\frac{x_0}{b}\right)^{(k-2)} + \frac{k \cdot x_0^2}{k-2} \right) = \frac{k \cdot x_0^2}{k-2}.$$
$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{k \cdot x_0^2}{k-2} - \left(\frac{k \cdot x_0}{k-1}\right)^2 =$$
$$= \frac{k \cdot x_0^2 \cdot (k^2 - 2 \cdot k + 1 - k^2 + 2 \cdot k)}{(k-1)^2 \cdot (k-2)} = \frac{k \cdot x_0^2}{(k-1)^2 \cdot (k-2)}.$$

Обчислимо середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{x_0}{k-1} \cdot \sqrt{\frac{k}{k-2}}.$$

3. *Мода та медіана випадкової величини X, що має розподіл Парето, дорівнюють* (10.25):

$$Mo(X) = x_0; Me(X) = x_0 \cdot \sqrt[k]{2}. \qquad (10.25)$$

Доведення. За формулою (10.22) $f(x) = \frac{k}{x_0} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k+1)}$, де $x \geq x_0$.

Оскільки $\left(\frac{x_0}{x}\right)^{(k+1)} \to 0$ при $x \to +\infty$, то $f_{max} = \frac{k}{x_0}$, яке досягається при $x = x_0$. Отже $Mo(X) = x_0$.

Обчислимо медіану:

$$F(Me(X)) = 0{,}5$$
$$1 - \left(\frac{x_0}{Me(X)}\right)^k = 0{,}5;$$
$$\left(\frac{x_0}{Me(X)}\right)^k = 0{,}5;$$
$$\frac{x_0}{Me(X)} = \sqrt[k]{0{,}5};$$
$$Me(X) = \frac{x_0}{\sqrt[k]{0{,}5}} = x_0 \cdot \sqrt[k]{2}.$$

4. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X, що має розподіл Парето, дорівнюють* (10.26)

$$As(X) = \frac{2\cdot(k+1)}{k-3}\cdot\sqrt{\frac{k-2}{k}}\ (k>3);\ Es(X) = \frac{6\cdot(k^3+k^2-6\cdot k-2)}{k\cdot(k-3)\cdot(k-4)}\ (k>4). \quad (10.26)$$

Тобто, розподіл Парето має додатну (правосторонню) асиметрію та має більшу «піковість» або «випуклість» в порівнянні з нормальним розподілом.

Доведення. Для розподілу Парето (формули (10.26)) очевидно, що $As(X) > 0$, тобто «довша» частина кривої знаходиться правіше моди, порівняно з графіком щільності нормального розподілу (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

Для розподілу Парето (формули (10.26)) очевидно, що $Es(X) > 0$, тобто графік функції щільності має більшу «піковість» або «випуклість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

5. Характеристична теорема. *Припустимо, що $X_1, X_2, X_3, \dots$ є незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподіл ймовірностей яких знаходиться в інтервалі $[x_m, +\infty)$ для деякого значення $x_m > 0$. Припустимо, що для всіх n, пара випадкових величин $min\{X_1, \dots, X_n\}$ і $\frac{X_1+\cdots+X_n}{min\{X_1,\dots,X_n\}}$ є незалежними. Тоді їх спільний розподіл буде розподілом Парето.*

Використання розподілу Парето

Наступні приклади іноді розглядають як такі, що приблизно мають розподіл Парето:

- Розмір населених пунктів (небагато міст, багато селищ/сіл);
- Розподіл розмірів файлів в Інтернет-трафіку в якому використовується протокол TCP (багато менших файлів, рідше великі);
- Частота помилок запису на жорсткому диску;
- Кластери конденсації Бозе-Ейнштейна близько абсолютного нуля;
- Величина запасів нафти в нафтових родовищах (не багато великих родовищ, і багато малих родовищ);
- Обсяг задач, які виносилися для вирішення на суперкомп'ютерах (декілька великих, багато малих);
- Нормалізована дохідність цін на окремі акції;
- Розміри частинок піску;
- Розмір метеоритів;
- Величина значних втрат унаслідок катастроф для певного роду бізнесу, генеральні зобов'язання, комерційні авто, і компенсація робітникам;

- В Гідрології розподіл Парето застосовується для моделювання надзвичайних подій таких як щорічні максимальні опади на добу і паводки у рік.

10.6. Розподіл Ерланга

Розподіл Ерланга — двопараметричне сімейство абсолютно неперервних розподілів, визначених для $x \in [0, +\infty)$. Параметрами розподілу є: $k \in N$ — параметр форми, $\lambda \in (0, \infty)$ — коефіцієнт норми. Іноді використовується обернений параметр $\beta = \frac{1}{\lambda}$ — коефіцієнт масштабу.

Розподіл Ерланга — це розподіл суми k незалежних однаково експоненційно розподілених випадкових величин з параметром $\frac{1}{\lambda}$. Еквівалентним твердженням є те, що це розподіл часу до k-тої події пуассонівського процесу з параметром λ.

Розподіли Ерланга та Пуассона є взаємнодоповнюючими: розподіл Пуассона підраховує кількість подій, що відбудуться за фіксований проміжок часу, а розподіл Ерланга підраховує кількість часу до появи фіксованої кількості подій. При $k = 1$, розподіл Ерланга збігається з експоненційним розподілом. Розподіл Ерланга — окремий випадок гамма-розподілу з натуральними значеннями параметру форми k.

Щільність ймовірності розподілу Ерланга має вигляд (10.27):

$$f(x) = \frac{\lambda^k \cdot x^{(k-1)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!}. \tag{10.27}$$

Графік функції щільності розподілу Ерланга наведено на рис. 10.12.

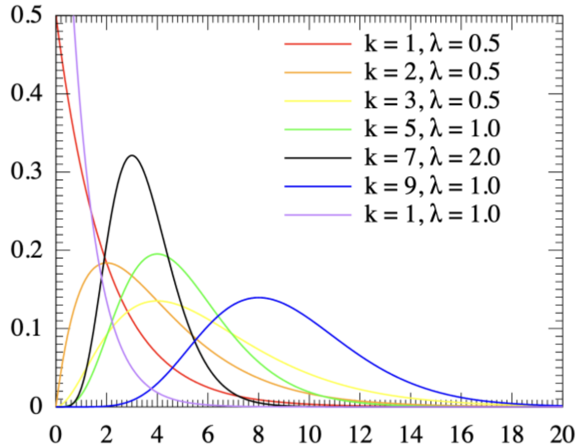

Рис. 10.12. Графік функції щільності $f(x)$ розподілу Ерланга

Властивості розподілу Ерланга

1. *Функція розподілу $F(x)$ матиме вигляд* (10.28):

$$F(x) = 1 - \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{s!} \cdot e^{-(\lambda \cdot s)} \cdot (\lambda \cdot x)^s \tag{10.28}$$

Доведення. Перевіримо відповідність функції $F(x)$ основним властивостям функції розподілу.

Зростання: Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ є зростаючою функцією, тобто з збільшенням x ймовірність також збільшується.
Граничні значення: При $x = 0$: $F(0) = 0$.

При $x \to \infty$; $F(x) \to 1$.

Монотонність: Функція $F(x)$ для розподілу Ерланга завжди монотонно зростає.

Графік функції розподілу для розподілу Ерланга наведено на рис. 10.13.

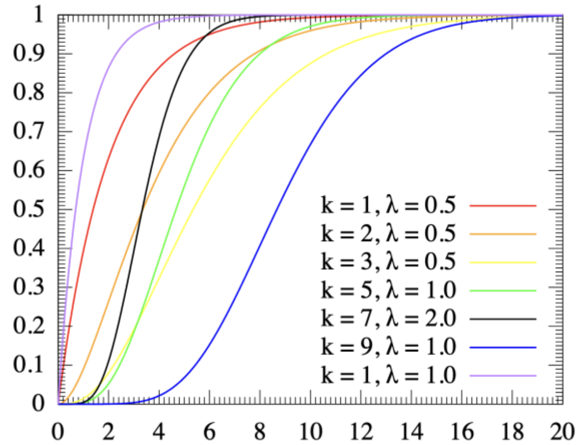

Рис. 10.13. Графік функції розподілу $F(x)$ розподілу Ерланга

2. *Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ випадкової величини, що має розподіл Релея, обчислюються за формулами* (10.29):

$$M(X) = \frac{k}{\lambda}; D(X) = \frac{k}{\lambda^2}; \sigma(X) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \tag{10.29}$$

Доведення. Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x \cdot f(x)\big)dx = \int_{0}^{+\infty} \left(x \cdot \frac{\lambda^k \cdot x^{(k-1)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!}\right) dx =$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot \int_0^{+\infty} \left(x^k \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^{(k+1)}} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{\lambda^{(k+1)}} =$$

$$= \frac{k}{\lambda}.$$

Обчислимо дисперсію:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x^2 \cdot f(x)\big)dx = \int_{x_0}^{+\infty} \left(x^2 \cdot \frac{\lambda^k \cdot x^{(k-1)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!}\right) dx =$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot \int_0^{+\infty} \left(x^{(k+1)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}\right) dx = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot \frac{\Gamma(k+2)}{\lambda^{(k+2)}}$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+2}} = \frac{k \cdot (k+1)}{\lambda^2}.$$

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 = \frac{k \cdot (k+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 = \frac{k \cdot (k+1-k)}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Обчислимо середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$

3. *Мода випадкової величини X, що має розподіл Ерланга, дорівнюють* (10.30):

$$Mo(X) = \frac{k-1}{\lambda}. \tag{10.30}$$

Доведення. За формулою (10.27) $f(x) = \frac{\lambda^k \cdot x^{(k-1)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!}$.

$$f'(x) = \frac{\lambda^k \cdot (k-1) \cdot x^{(k-2)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!} - \frac{\lambda^{k+1} \cdot x^{(k-1)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!}$$
$$= \frac{\lambda^k \cdot x^{(k-2)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!} \cdot (k - 1 - \lambda \cdot x).$$

Стаціонарна точка:

$$k - 1 - \lambda \cdot x = 0;$$
$$x = \frac{k-1}{\lambda}.$$

Обчислимо $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{\lambda^k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot x^{(k-3)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!}$$
$$- \frac{\lambda^{(k+1)} \cdot (k-1) \cdot x^{(k-2)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!}$$
$$- \frac{\lambda^{(k+1)} \cdot (k-1) \cdot x^{(k-2)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!} + \frac{\lambda^{(k+2)} \cdot x^{(k-1)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!} =$$
$$= \frac{\lambda^k \cdot x^{(k-3)} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}}{(k-1)!} \cdot$$
$$\cdot \left((k-1) \cdot (k-2) - 2 \cdot \lambda \cdot (k-1) \cdot x + \lambda^2 \cdot x^2\right).$$

$$f''\left(\frac{k-1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda^k \cdot \left(\frac{k-1}{\lambda}\right)^{k-3} \cdot e^{-(k-1)}}{(k-1)!} \cdot \left((k-1) \cdot (k-2) - (k-1)^2\right) =$$
$$= -\frac{\lambda^3 \cdot (k-1)^{k-3} \cdot e^{-(k-1)}}{(k-2)!} < 0.$$

Отже точка $x = \frac{k-1}{\lambda}$ є точкою максимуму, тобто $Mo(X) = \frac{k-1}{\lambda}$.

4. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X, що має розподіл Ерланга, дорівнюють* (10.31)

$$As(X) = \frac{2}{\sqrt{k}}; \; Es(X) = \frac{6}{k}. \tag{10.31}$$

Тобто, розподіл Ерланга має додатну (*правосторонню*) *асиметрію та має більшу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом.*

Доведення. Обчислимо центральні моменти 3-го та 4-го порядків.

$$\mu_3(X) = \frac{2 \cdot k}{\lambda^3};\ \mu_4(X) = \frac{3 \cdot k \cdot (k+2)}{\lambda^4}.$$

$$As(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{\frac{2 \cdot k}{\lambda^3}}{\left(\frac{\sqrt{k}}{\lambda}\right)^3} = \frac{2}{\sqrt{k}}.$$

$$Es(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{\frac{3 \cdot k \cdot (k+2)}{\lambda^4}}{\left(\frac{\sqrt{k}}{\lambda}\right)^4} - 3 = \frac{3 \cdot k \cdot (k+2)}{k^2} - 3 = \frac{6}{k}.$$

Для розподілу Ерланга (формули (10.31)) очевидно, що $As(X) > 0$, тобто «довша» частина кривої знаходиться правіше моди, порівняно з графіком щільності нормального розподілу (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

Для розподілу Ерланга (формули (10.31)) очевидно, що $Es(X) > 0$, тобто графік функції щільності має більшу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

Використання розподілу Ерланга

Теорія черг: В моделюванні систем, де події або обслуговування розділяються на кілька етапів, розподіл Ерланга використовується для оцінки часу обслуговування.

Телекомунікації: Використовується для аналізу навантаження на телефонні мережі та обробки викликів.

Надійність систем: Описує час до відмови системи, яка складається з кількох компонентів.

10.8. Розподіл Релея

Розподіл Релея – це розподіл безперервної випадкової величини з використанням експоненти $e^{-(k \cdot x^2)}$ у функціях розподілу.

Щільність ймовірності розподілу Релея має вигляд (10.32):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)}, & \text{де } x \geq 0; \\ 0, & \text{де } x < 0. \end{cases} \tag{10.32}$$

Графік функції щільності розподілу Релея наведено на рис. 10.13.

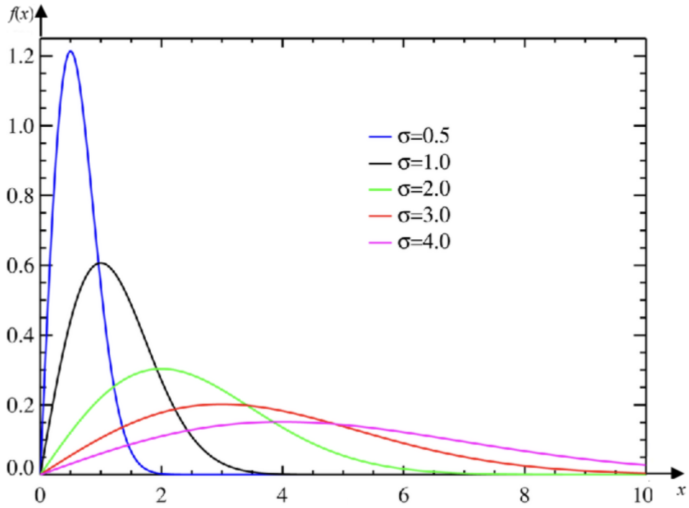

Рис. 10.13. Графік функції щільності $f(x)$ розподілу Релея

Властивості розподілу Релея

1. *Функція розподілу $F(x)$ матиме вигляд* (10.33):

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}, \text{де } x \geq 0; \\ 0, \qquad\qquad \text{де } x < 0. \end{cases} \tag{10.33}$$

Доведення. Перевіримо відповідність функції $F(x)$ основним властивостям функції розподілу.

Зростання: Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ є зростаючою функцією, тобто з збільшенням x ймовірність також збільшується.

Граничні значення: При $x = 0$: $F(0) = 0$.

При $x \to \infty$; $F(x) \to 1$.

Монотонність: Функція $F(x)$ для розподілу Релея завжди монотонно зростає.

Графік функції розподілу для розподілу Релея наведено на рис. 10.14.

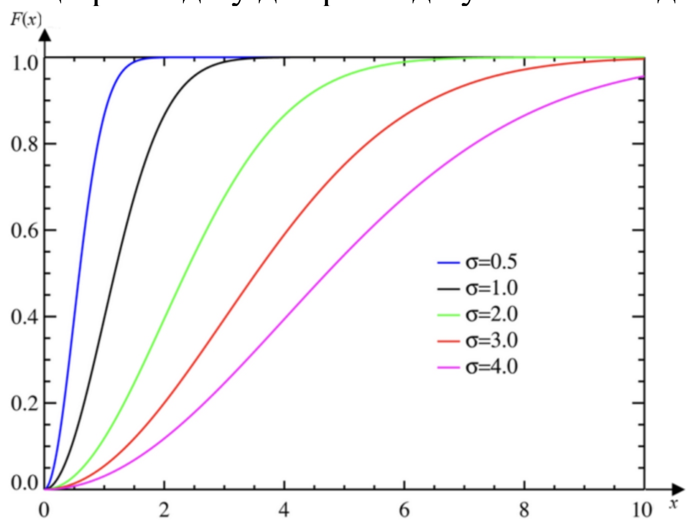

Рис. 10.14. Графік функції розподілу $F(x)$ розподілу Релея

2. *Числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ випадкової величини, що має розподіл Релея, обчислюються за формулами* (10.34):

$$M(X) = \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{2}\cdot\sigma; D(X) = \frac{4-\pi}{2}\cdot\sigma^2; \sigma(X) = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\cdot\sigma. \qquad (10.34)$$

Доведення. Обчислимо математичне сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\cdot f(x)\right)dx = \int_{0}^{+\infty}\left(x\cdot\frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}\right)dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}\right)dx = \left[\begin{matrix} u = \frac{x}{\sigma}; x = u\cdot\sigma \\ dx = \sigma du \end{matrix}\right] = \sigma\cdot\int_{0}^{+\infty}\left(u^2\cdot e^{-u^2}\right)du$$

$$= \left(\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}\right)\cdot\int_{0}^{+\infty}\left(u^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-u^2}\right)\right)du = \frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{2}\cdot\sigma.$$

Обчислимо дисперсію:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2\cdot f(x)\right)dx = \int_{x_0}^{+\infty}\left(x^2\cdot\frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}\right)dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x^3}{\sigma^2}\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}\right)dx = \left[\begin{matrix} y = \frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}; x^2 = 2\cdot y\cdot\sigma^2 \\ xdx = \sigma^2 dy \end{matrix}\right] =$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\left(\frac{2\cdot y\cdot\sigma^2}{\sigma^2}\cdot e^{-y}\cdot\sigma^2\right)dy = 2\cdot\sigma^2\cdot\int_{0}^{+\infty}\left(y\cdot e^{-y}\right)dy =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = y; du = dy \\ dv = e^{-y}dy; v = -e^{-y} \end{matrix}\right]$$

$$= 2\cdot\sigma^2\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(-\left(y\cdot e^{-y}\right)\Big|_0^b - e^{-y}\Big|_0^b\right) = 2\cdot\sigma^2.$$

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 2\cdot\sigma^2 - \left(\frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{2}\cdot\sigma\right)^2 = 2\cdot\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\cdot\sigma^2 =$$

$$= \frac{4-\pi}{2}\cdot\sigma^2.$$

Обчислимо середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\cdot\sigma.$$

3. *Мода та медіана випадкової величини X, що має розподіл Релея, дорівнюють* (10.35):

$$Mo(X) = \sigma; \quad Me(X) = \sigma\cdot\sqrt{ln\,(4)}. \qquad (10.35)$$

Доведення. За формулою (10.27) $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)} - \left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^2 \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)} = \frac{\sigma^2 - x^2}{\sigma^4} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}.$$

Стаціонарна точка:

$$\sigma^2 - x^2 = 0;$$

$$x = \sigma.$$

Обчислимо $f''(x)$:

$$f''(x) = -\frac{2 \cdot x}{\sigma^4} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)} - \frac{\sigma^2 - x^2}{\sigma^4} \cdot \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\left(\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}.$$

$$f''(\sigma) = -\frac{2 \cdot \sigma}{\sigma^4} \cdot e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2\cdot\sigma^2}\right)} - \frac{\sigma^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2} \cdot e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2\cdot\sigma^2}\right)} = -\frac{2}{\sigma^3} \cdot e^{-0,5} < 0.$$

Отже точка $x = \sigma$ є точкою максимуму, тобто $Mo(X) = \sigma$.

Обчислимо медіану:

$$F(Me(X)) = 0,5$$

$$1 - e^{-\left(\frac{(Me(X))^2}{2\cdot\sigma^2}\right)} = 0,5;$$

$$e^{-\left(\frac{(Me(X))^2}{2\cdot\sigma^2}\right)} = 0,5;$$

$$-\frac{(Me(X))^2}{2 \cdot \sigma^2} = -\ln(2);$$

$$Me(X) = \sqrt{2 \cdot \sigma^2 \cdot \ln(2)} = \sqrt{\sigma^2 \cdot \ln(4)} = \sigma \cdot \sqrt{\ln(4)}.$$

4. *Коефіцієнт асиметрії та ексцес випадкової величини X, що має розподіл Релея, дорівнюють* (10.36)

$$As(X) = 2 \cdot (\pi - 3) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{(4-\pi)^3}}; \; Es(X) = \frac{8 - 6\cdot(2-\pi)^2}{(4-\pi)^2}. \qquad (10.36)$$

Тобто, розподіл Релея має додатну (*правосторонню*) *асиметрію та має більшу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом.*

Доведення. Для розподілу Релея (формули (10.36)) очевидно, що $As(X) > 0$, тобто «довша» частина кривої знаходиться правіше моди, порівняно з графіком щільності нормального розподілу (де коефіцієнт асиметрії дорівнює 0).

Для розподілу Релея (формули (10.36)) очевидно, що $Es(X) > 0$, тобто графік функції щільності має більшу «піковість» в порівнянні з нормальним розподілом (де ексцес дорівнює 0).

Використання розподілу Релея

Розподіл амплітуд сигналів: Розподіл Релея часто використовується для моделювання амплітуд радіосигналів у середовищах з великою кількістю відбиттів, таких як міські райони.

Аналіз вібрацій: Використовується в аналізі випадкових вібрацій та інших механічних систем.

Обробка зображень: Використовується в різних алгоритмах обробки зображень для моделювання розподілу інтенсивності пікселів у шумових умовах.

10.8. Інші розподіли неперервної випадкової величини

На практиці окрім перерахованих розподілів неперервних випадкових величин використовуються наступні:

- Бета-розподіл;
- Розподіл Вейбулла;
- Гамма-розподіл;
- Квадратичний розподіл;
- Розподіл Коші;
- Розподіл Лапласа;
- Лінійний розподіл;
- Логістичний розподіл;
- Розподіл Сосновського;
- Розподіл Кочрена;
- Ель-розподіл.

Приклад 10.1. *Випадкова величина X задана своєю щільністю* (*рис.* 10.15):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \cdot \Gamma(\alpha+1)} \cdot x^{\alpha} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}, \text{де } x \geq 0 \ (\alpha > -1, \beta > 0) \\ 0, \qquad\qquad \text{де } x < 0, \end{cases}$$

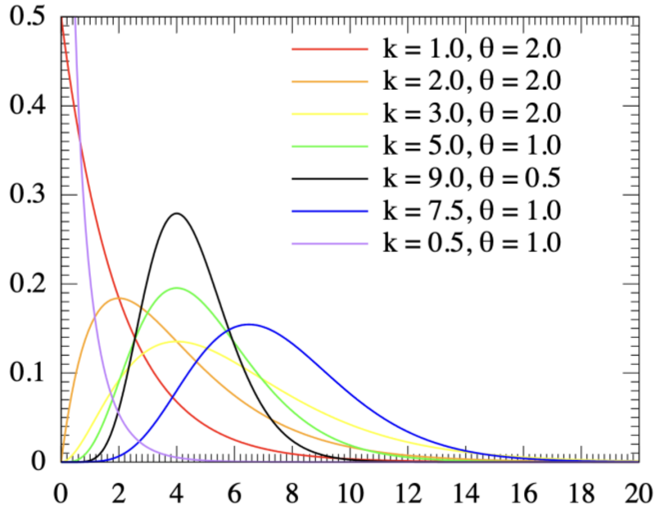

Рис. 10.15. Графік щільності $f(x)$ (Гамма розподіл $k = \alpha + 1;\ \theta = \beta$)

Знайти математичне сподівання, дисперсію та моду даної випадкової величини при $\alpha = 6, \beta = 7$.

Розв'язання.

Формули для гамма-розподілу:

Для гамма-розподілу з параметрами α (параметр форми) та β (параметр масштабу):

Математичне сподівання:

$$M(X) = (\alpha + 1) \cdot \beta.$$

Дисперсія:

$$D(X) = (\alpha + 1) \cdot \beta^2.$$

Мода:

$$Mo(X) = \alpha \cdot \beta, \text{для } \alpha > 1.$$

Коефіцієнт асиметрії:

$$As(X) = \frac{2}{\sqrt{\alpha + 1}}.$$

Ексцес:

$$Es(X) = \frac{6}{\alpha + 1}.$$

<u>Обчислення для $\alpha = 6, \beta = 7$:</u>

Математичне сподівання:

$$M(X) = 7 \cdot 7 = 49.$$

Дисперсія:

$$D(X) = 7 \cdot 7^2 = 7 \cdot 49 = 343.$$

Мода:

$$Mo(X) = 6 \cdot 7 = 42.$$

Коефіцієнт асиметрії:

$$As(X) = \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 2{,}27.$$

Ексцес:

$$Es(X) = \frac{6}{7} \approx 0{,}86.$$

Відповідь: $M(X) = 49$; $D(X) = 343$; $Mo(X) = 42$; $As(X) \approx 2{,}27$; $Es(X) \approx 0{,}86$.