5.2 Властивості графів

5.2.1 Степені вершин

Кількість ребер, які інцидентні вершині v, називається **степенем** (або **валентністю**) вершини v і позначається $d(v)$.

Якщо степінь вершини дорівнює нулю (тобто $d(v) = 0$), то вершина має назву **ізольованої**. Якщо степінь вершини дорівнює одиниці (тобто $d(v) = 1$), то вершина називається **кінцевою** або **висячою.**

Граф називається **однорідним (регулярним) степеню** $\boldsymbol{k}$, якщо степені всіх його вершин дорівнюють k і, отже, є рівними між собою.

На рис. 1 зображені приклади регулярних графів степеню 3, які також називаються **кубічними** або **трьохвалентними**. Другий граф також має назву графу Петерсена.

Рис. 1

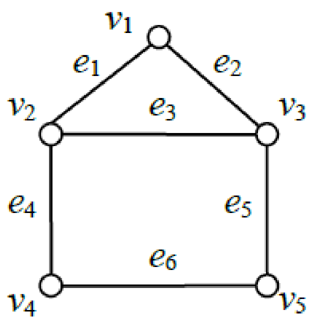
Степені вершин *неорієнтованого графу* легко розрахувати за матрицями інцидентності E або суміжності Δ.

Справді, в i-му рядку матриці інцидентності, який відповідає вершині v_i, одиниці знаходяться на перетині зі стовпцями, яким відповідають інцидентні цій вершині ребра, а інші елементи стовпця дорівнюють 0. Тобто, сума елементів по рядках матриці інцидентності рівна степеням вершин

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij} .$$

Для неорієнтованого графу: суми по рядках та стовпцях матриці суміжності збігаються та рівні степеням вершин.

Приклад. Для неорієнтованого графу з попередньої лекції матимемо:



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$d(v)$
v_1	1	1	0	0	0	0	2
v_2	1	0	1	1	0	0	3
v_3	0	1	1	0	1	0	3
v_4	0	0	0	1	0	1	2
v_5	0	0	0	0	1	1	2

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$d(v)$
v_1	0	1	1	0	0	2
v_2	1	0	1	1	0	3
v_3	1	1	0	0	1	3
v_4	0	1	0	0	1	2
v_5	0	0	1	1	0	2
$d(v)$	2	3	3	2	2	

Для *орграфу* кількість дуг, які виходять з вершини v, називається **півстепенем виходу** $d^{-}(v)$, а вхідних — **півстепенем входу** $d^{+}(v)$.

Локальні степені вершин орграфу визначаються через коефіцієнти δ_{ij} його матриці суміжності:

$$d^{-}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}, \qquad d^{+}(v_i) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ki}\,.$$

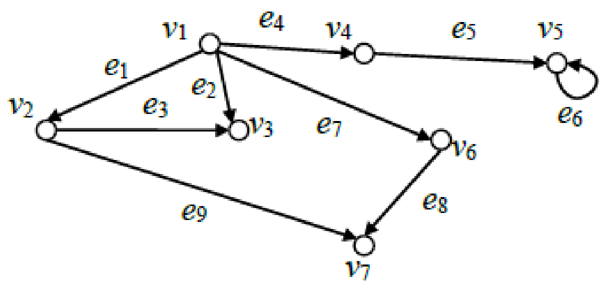
Таким чином, для орієнтованого графу:

— сума по рядку матриці суміжності дорівнює півстепеню виходу;

— сума по стовпцю матриці суміжності дорівнює півстепеню заходу.

Вираз їх через коефіцієнти матриці інцидентності — значно складніший.

Приклад. Для орієнтованого графу з попередньої лекції матимемо:



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$d^{-}(v_i)$
v_1	0	1	1	1	0	1	0	4
v_2	0	0	1	0	0	0	1	2
v_3	0	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	1	0	0	1
v_5	0	0	0	0	1	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	0	1	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0
$d^{+}(v_i)$	0	1	2	1	2	1	2	

Теорема 1 (Ейлера). Сума степенів вершин графу дорівнює подвоєній кількості ребер:

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m .$$

Доведення. При підрахуванні суми степенів вершин, кожне ребро враховується двічі: для одного кінця ребра і для другого. ►

Наслідок 1. Кількість вершин непарного степеню парна.

Доведення. За теоремою Ейлера сума степенів усіх вершин — парне число. Сума степенів вершин парної степені — парна, значить, сума степенів вершин непарної степені також парна. ►

Наслідок 2. Сума півстепенів вузлів орграфу дорівнює подвійній кількості дуг:

$$\sum_{v\in V} d^{-}(v) + \sum_{v\in V} d^{+}(v) = 2m .$$

Доведення. Сума півстепенів вузлів орграфу дорівнює сумі степенів вершин графу, отриманого з орграфу, в якому «забуті» орієнтації дуг. ►

5.2.2 Підграфи. Дводольні графи

Підграфом $G' = (V', E')$ графу $G = (V, E)$ називають граф, такий що множини його вершин та ребер є підмножинами вихідного графу, тобто $V' \subset V$, $E' \subset E$.

Підграф називають **каркасним** (або **фактором**), якщо $V' = V$.

Якщо $V' \neq V$, а E' — множина всіх ребер з E, які мають кінці в V', то підграф називають **породженим** (або **індукованим**) **множиною** V' і позначають $G(V')$.

Приклад. На рисунку 2 зображено граф G та три його підграфи H_1, H_2, H_3, серед яких H_2 — породжений, а H_3 — каркасний.

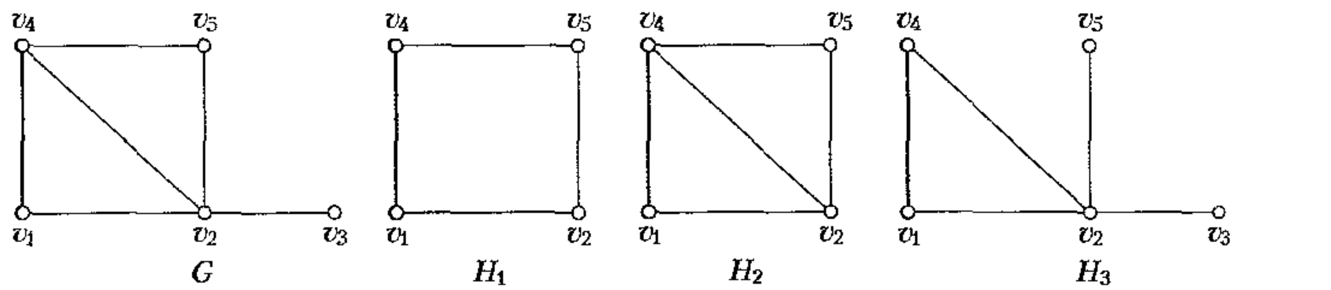


Рис. 2

Повним графом називається граф, в якому для кожної пари вершин v_1, v_2, існує ребро, інцидентне v_1 і інцидентне v_2 (кожна вершина з'єднана ребром з будь-якою іншою вершиною).

Граф називається **дводольним** або **двочастковим**, якщо існує таке розбиття множини його вершин на дві підмножини, при якому жодне ребро не з’єднує вершини однієї і тієї ж підмножини.

Повним дводольним називається двочастковий граф, в якому кожна вершина одної підмножини з'єднана ребром з кожною вершиною іншої підмножини.

Дводольний граф можна визначити іншим шляхом — в термінах розфарбування його вершин двома кольорами, наприклад, синім і зеленим. При цьому граф називається дводольним, якщо кожну його вершину можна пофарбувати синім або зеленим кольором так, щоб кожне його ребро мало один кінець синій, а другий — зелений (рис. 3).

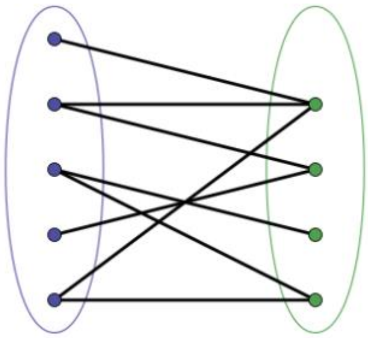


Рис. 3

Повний дводольний граф, у якого один клас має m вершин, а другий n вершин, позначають $K_{m,n}$.

Повний дводольний граф виду $K_{1,n}$ називається **зірковим графом**. На рис. 4 зображений граф $K_{1,5}$.

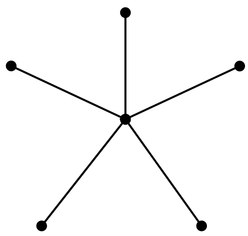


Рис. 4

На рис. 5 наведено повні дводольні графи $K_{3,2}$ та $K_{3,3}$.

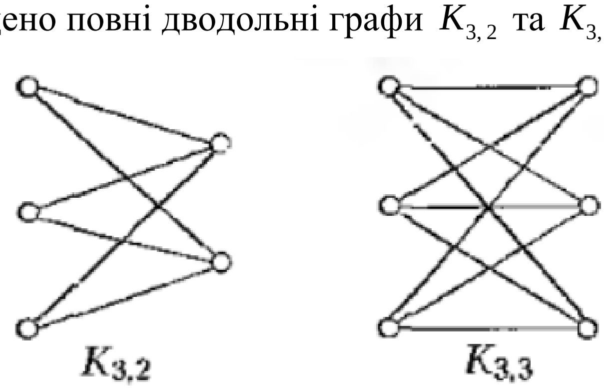


Рис. 5

Аналогічно можна ввести k-дольні графи. Граф називається **k-дольним** графом, якщо існує таке розбиття множини його вершин на k класів, при якому всяке ребро графу з'єднує дві вершини різних класів.

5.2.3 Маршрути, ланцюги та цикли

Нехай G — неорієнтований граф.

Маршрутом M у графі G називається така скінченна або нескінченна послідовність вершин і ребер, які чергуються,

$$(\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n\text{-}1}, e_{n\text{-}1}, v_n, \ldots),$$

що кожні два сусідні ребра $e_{i\text{-}1}$ та e_i мають спільну інцидентну вершину v_i.

Очевидно, маршрут M можна задавати послідовністю $(\ldots, v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ його вершин (у звичайному графі), а також послідовністю $(\ldots, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ ребер, що й робитимемо далі. Одне і те саме ребро може зустрічатися в маршруті кілька разів. Надалі будуть розглядатися в основному скінченні маршрути. У таких маршрутах існують перше e_1 та останнє e_n ребра. Вершина v_0, інцидентна ребру e_1, називається початком маршруту. Якщо ребра e_1 та e_2 — кратні, то потрібна спеціальна вказівка, яку з двох інцидентних ним вершин слід вважати початком маршруту. Аналогічно означається кінець маршруту. Вершини, інцидентні ребрам маршруту, крім початкової і кінцевої, називаються внутрішніми, або проміжними.

Оскільки різні ребра маршруту можуть бути інцидентними одній і тій самій вершині, початок або кінець маршруту може одночасно виявитися внутрішньою вершиною.

Нехай маршрут $M(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ має початок v_0 і кінець v_n. Тоді його називають **сполучним**. Число ребер маршруту є його довжиною.

Якщо $v_0=v_n$, то маршрут називають замкненим, або **циклічним**.

Відрізок $(e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j)$ скінченного або нескінченного маршруту M є маршрутом. Він називається **ділянкою** маршруту M.

Маршрут M називається **ланцюгом**, якщо кожне ребро зустрічається в ньому не більше одного разу, і **простим ланцюгом**, якщо будь-яка вершина, крім, можливо, початкової, зустрічається в ньому не більш як один раз.

Якщо ланцюг є замкненим, то його називають **циклом**, а якщо простий ланцюг — замкнений, то це — простий цикл. Граф, який не містить циклів, називається **ациклічним**.

В орієнтованому графі маршрут називається **шляхом**. Відповідно можна перенести також визначення ланцюга, простого ланцюга та циклу. Простий цикл в орієнтованому графі ще називається **контуром**.

Граф, який складається з простого циклу з k вершинами, позначається C_k.

Приклад. Для графу, що зображений на рисунку 6, $v_1v_2v_5v_2v_3$ — маршрут, який не є ланцюгом, $v_1v_2v_5v_4v_2v_3$ — ланцюг, який не є простим ланцюгом, $v_2v_4v_5v_2$ — простий цикл.

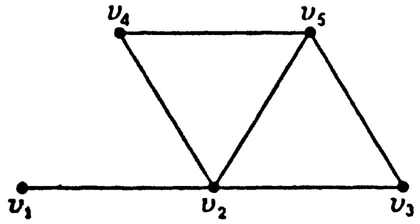


Рис. 6

5.2.4 Метричні характеристики графів

Відстанню $d(v, w)$ між двома вершинами v і w графу G називається довжина найкоротшого ланцюга між цими вершинами. Якщо вершини v та w не з'єднані, то покладають $d(v,w)=\infty$. Найкоротший простий ланцюг часто називають **геодезичним**.

Очевидно, для неорієнтованого графу виконуються наступні властивості:

- $d(v, w) \geq 0$;
- $d(v, w) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $v=w$;
- $d(v, w) = d(w, v)$.

Множина вершин, які знаходяться на однаковій відстані n від вершини v (позначається $D(v, n)$), називається **ярусом**:

$$D(v, n) = \{ w \in V : d(v, w) = n \}.$$

Ексцентриситетом $ecc(c)$ вершини c називається відстань від даної вершини c до найбільш віддаленої від неї вершини:

$$ecc(c) = \max_{v \in V} d(c, v).$$

Вершина з найменшим ексцентриситетом називається **центральною** вершиною графу G, а з найбільшим — **периферійною**.

Множина всіх центральних вершин графу називається **центром** графу G та позначається $C(G)$.

Радіусом $rad(G)$ графу G називається мінімальний ексцентриситет серед всіх вершин графу:

$$rad(G) = \min_{v \in V} ecc(v).$$

Діаметром $diam(G)$ графу G називається максимальний ексцентриситет серед всіх вершин графу, тобто максимальна з відстаней між його вершинами:

$$diam(G) = \max_{v \in V} ecc(v).$$

Приклад. Для графу, що зображений на рисунку 7, ексцентриситети вершин наведено в таблиці 1.

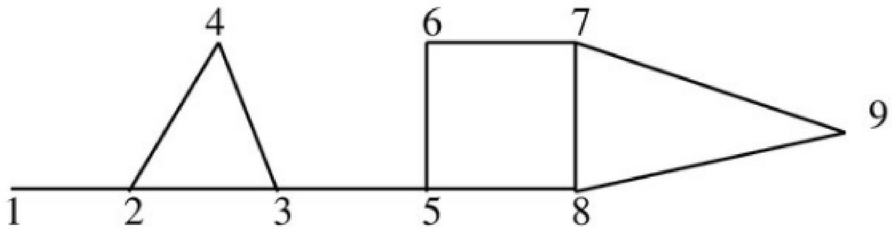


Рис. 7

Таблиця 1

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ecc(v)$	5	4	3	4	3	4	5	4	5

Таким чином, радіус графу дорівнює 3:

$$rad(G) = \min_{v \in V} ecc(v) = 3;$$

діаметр графу дорівнює 5:

$$diam(G) = \max_{v \in V} ecc(v) = 5;$$

центральні вершини графу: 3, 5, тобто центр графу $C(G) = \{3, 5\}$;

периферійні вершини графу: 1, 7, 9.

5.2.5 Операції над графами

Введемо наступні операції над графами:

1. **Доповнення графу** $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $\overline{G}(V_1, E_1)$) називається граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \text{ та } E_2 = \overline{E}_1 = \{ e \in V_1 \times V_1 : e \notin E_1 \}.$$

2. **Об'єднанням графів** $G_1(V_1, E_1)$ та $G_2(V_2, E_2)$ (позначається $G_1(V_1, E_1) \cup$ $\cup G_2(V_2, E_2)$, за умовою $V_2 \cap V_1 = \varnothing$, $E_2 \cap E_1 = \varnothing$) називається граф $G(V, E)$, де

$$V = V_1 \cup V_2 \text{ та } E = E_1 \cup E_2.$$

3. **З'єднання графів** $G_1(V_1, E_1)$ та $G_2(V_2, E_2)$ (позначається $G_1(V_1, E_1) +$ $+ G_2(V_2, E_2)$, за умовою $V_2 \cap V_1 = \varnothing$, $E_2 \cap E_1 = \varnothing$) називається граф $G(V, E)$, де

$$V = V_1 \cup V_2 \text{ та } E = E_1 \cup E_2 \cup \{ e=(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}.$$

4. **Видалення вершини** v з графу $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1) - v$, за умовою $v \in V_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \backslash \{v\} \text{ та } E_2 = E_1 \setminus \{ e=(v_1, v_2) : v_1 = v \text{ або } v_2 = v \}.$$

5. **Видалення ребра** e з графу $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)–e$, за умовою $e \in E_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \text{ та } E_2 = E_1 \setminus \{e\}.$$

6. **Додавання вершини** v в граф $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)+v$, за умовою $v \notin V_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \cup \{v\} \text{ та } E_2 = E_1.$$

7. **Додавання ребра** e в граф $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)+e$, за умовою $e \notin E_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$$V_2 = V_1 \text{ та } E_2 = E_1 \cup \{e\}.$$

8. **Стягування підграфу** A графу $G_1(V_1, E_1)$ (позначається $G_1(V_1, E_1)/A$, за умовою $A \subset V_1$, $v \notin V_1$) дає граф $G_2(V_2, E_2)$, де

$V_2 = (V_1 \setminus A) \cup \{v\}$,

$E_2 = E_1 \setminus \{ e = (u, w) : u \in A$ або $w \in A\} \cup \{ e = (u, v) : u \in \Gamma(A) \setminus A \}$.

Мають місце наступні співвідношення:

1. $K_{m,n} = \bar{K}_m + \bar{K}_n$;
2. $K_{p-1} = K_p - v$;
3. $G + v = G \cup K_1$;
4. $K_{p-1} = K_p / K_2$;
5. $K_p / K_{p-1} = K_2$.