Інтеграл та перетворення Фур'є

доц. І.В. Орловський

1. Інтеграл Фур'є в дійсній формі

Будь-яку функцію f, яка на відрізку $[-l;\, l]$ задовольняє умовам Діріхле, можна розвинути на цьому відрізку у тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x, \;\; \omega_n = \frac{\pi n}{l},$$

з коефіцієнтами

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos(\omega_n x) dx, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin(\omega_n x) dx, \;\; n = 1, 2, \ldots .$$

Дане розвинення буде вірним на всій числовій осі Ox у тому випадку, коли функція f є періодичною з періодом $T = 2l$.

Розглянемо випадок, коли f є неперіодичною функцією, яку задано на нескінченному проміжку $(-\infty;\ \infty)$ $(l = +\infty)$.

Щодо функції f припустимо, що вона

1. задовольняє умовам розвивності в ряд Фур'є (умови Діріхле) на будь-якому скінченому відрізку $[-l;\ l]$;
2. є абсолютно інтегровною на всій числовій осі, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = K < +\infty.$$

Теорема 1 (Фур'є)

Якщо функція f задовольняє умови Діріхле на кожному скінченному відрізку $[-l; l]$ (кусково-неперервна, кусково-монотонна) і є абсолютно інтегровною, то її можна представити інтегралом Фур'є

$$I(x) = \int_0^{\infty} (A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x))\,d\omega,$$

де

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)dx.$$

Причому:

1. $I(x) = f(x)$, *якщо* x *є точкою неперервності функції* f;
2. $I(x) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, *якщо* x_0 *є точка розриву функції* f.

Інтеграли для $A(\omega), B(\omega)$ розуміють у сенсі головного значення:

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.$$

Формулу

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \left(A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega,$$

називають інтегральною формулою Фур'є, а інтеграл, який стоїть праворуч — інтегралом Фур'є у дійсній формі.

2. Комплексна форма інтеграла Фур'є

За аналогією з комплексною формою ряду Фур'є $2l$-періодичної функції:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \ \ \omega_n = \frac{\pi n}{l},$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\omega_n x} dx, \ \ n \in \mathbb{Z},$$

за умови виконання умов теореми Фур'є для функції f можна записати інтегральну формулу Фур'є в комплексній формі:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \tag{1}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \tag{2}$$

Функцію $F(\omega)$ називають перетвором Фур'є функції $f(x)$. Перехід від функції $f(x)$ до її перетвору Фур'є $F(\omega)$ називають прямим перетворенням Фур'є і позначають

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = F(\omega).$$

Перехід від перетвору $F(\omega)$ до функції $f(x)$ називають оберненим перетворенням Фур'є і позначають

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(x) = f(x).$$

3. Властивості перетворення Фур'є

ДЗ. Записати основні властивості перетворення Фур'є.

Інтеграл Фур'є для парної функції

Нехай f — парна функція, яка справджує умови теореми Фур'є. Тоді в сенсі головного значення

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx, \quad B(\omega) = 0,$$

оскільки $f(x)\cos(\omega x)$ — парна, а $f(x)\sin(\omega x)$ — непарна за змінною x функція. Отже, інтеграл Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega x)d\omega,$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx.$$

Ці формули можна переписати в симетричному вигляді:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos(\omega x)d\omega,$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)dx.$$

де функцію $F_c(\omega)$ називають косинус-перетвором Фур'є функції $f(x)$. Подана пара формул задає пряме й обернене косинус-перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}_c\{f(x)\}(\omega) = F_c(\omega),$$
$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\omega)\}(x) = f(x).$$

Інтеграл Фур'є для непарної функції

Нехай $f(x)$ — непарна функція, яка справджує умови теореми Фур'є. Тоді

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)dx, \quad A(\omega) = 0,$$

оскільки $f(x)\sin(\omega x)$ — парна, а $f(x)\cos(\omega x)$ — непарна за змінною x функція. Отже, інтеграл Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} B(\omega)\sin(\omega x)d\omega,$$

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)dx.$$

Ці формули можна переписати в симетричному вигляді:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} F_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega,$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx.$$

де функцію $F_s(\omega)$ називають синус-перетвором Фур'є функції $f(x)$.
Подана пара формул задає пряме й обернене синус-перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}_s\{f(x)\}(\omega) = F_s(\omega),$$
$$\mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(\omega)\}(x) = f(x).$$

Функція, яку задано лише на півосі

Якщо функцію задано лише на проміжку $(0;+\infty)$, то її можна продовжити на проміжок $(-\infty;0)$ у різний спосіб, зокрема — парним чи непарним чином: у першому випадку для неї можна знайти косинус-перетвір Фур'є, а в другому — синус-перетвір Фур'є.

10. Амплітудний та фазовий спектри інтеграла Фур'є

ДЗ. Самостійно записати

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.