Ряди Тейлора

доц. І.В. Орловський

1. Розвинення функції у степеневий ряд

Означення 1

Функцію $f(x)$ називають розвиненою у степеневий ряд (за степенями $x - x_0$ або в т. x_0)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, $R > 0$, якщо в цьому інтервалі вказаний ряд збігається до суми $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Теорема 1 (про єдиність розвинення функції у степеневий ряд)

Нехай функція $f(x)$ розвинена у степеневий ряд (1) в околі точки x_0, тоді таке розвинення єдине, а коефіцієнти степеневого ряду знаходяться за формулою

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Нехай функція $f(x)$ при $x = x_0$ має похідні всіх порядків $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, тобто є нескінченно диференційовною в точці x_0. Утворимо для цієї функції формальний степеневий ряд, обчислюючи його коефіцієнти за відповідними формулами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Означення 2

Рядом Тейлора функції $f(x)$ в околі точки x_0 називають степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots .$$

Коефіцієнти цього ряду $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. називають коефіцієнтами Тейлора.

Якщо $x_0 = 0$, тоді ряд $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$ називають рядом Маклорена.

Теорема 2

Якщо в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ *функція* $f(x)$ *розвивається в степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

то цей ряд є рядом Тейлора функції $f(x)$.

Приклад 1

Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

Показати, що розклад функції f в ряд Тейлора в точці $x_0 = 0$ не співпадає із значеннями функції.

Функція $f(x)$ нескінченно диференційовна на всій осі Ox, причому всі її похідні в точці $x_0 = 0$ дорівнюють нулеві. Дійсно, при $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

та

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{e^{z^2}} = 0.$$

Аналогічно,

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^4}{e^{z^2}} = 0$$

і т.д. Отже, всі коефіцієнти Тейлора функції $f(x)$ при $x_0 = 0$ дорівнюють нулеві. Дістанемо збіжний ряд

$$0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{0}{n!}x^n + \ldots \equiv 0,$$

тобто він збігається, але не до функції $f(x)$.

Теорема 3 (Критерій розвивності)

Функція $f(x)$ розвивається у степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

в інтервалі $|x - x_0| < R$ тоді й лише тоді, коли:

1. *у цьому інтервалі функція $f(x)$ є нескінченно разів диференційовною;*
2. *залишковий член $r_n(x)$ формули Тейлора*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

прямує до нуля при $n \to \infty$ для всіх x з цього інтервалу:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \ \forall x : |x - x_0| < R.$$

Теорема 4 (достатня умова розвивності)

Для того, щоб функцію $f(x)$ в інтервалі $|x - x_0| < R$ можна було розвинути у ряд Тейлора, достатньо щоб:

1. *у цьому інтервалі функція $f(x)$ була нескінченно разів диференційовною;*
2. *існувала стала $M > 0$ така, що для всіх $n = 0, 1\,2, \ldots,$ та $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M.$$

3. Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена

I Розвинення експоненти $f(x) = e^x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

II Розвинення синуса $f(x) = \sin x$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

III Розвинення косинуса $f(x) = \cos x$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

IV Біноміальний ряд для $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n =$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Якщо $\alpha \in \mathbb{N}$, функція $(1+x)^{\alpha}$ є многочленом n–го степеня, та

$$r_n(x) \equiv 0, \;\; n > \alpha.$$

V Важливі окремі випадки біноміального ряду

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1;$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

VI Розвинення логарифмічної функції $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \leq 1.$$

VII Розвинення гіперболічного синуса $f(x) = \operatorname{sh} x$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

VIII Розвинення гіперболічного косинуса $f(x) = \operatorname{ch} x$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

I Наближене обчислення значення функції

Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ у точці $x = x_1$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ в степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

і $x_1 \in (x_0 - R; x_0 + R)$, то

$$f(x_1) \approx S_n(x_1).$$

1. Для знакопочережних рядів (типу Лейбніца)

$$|R_n(x_1)| = |f(x_1) - S_n(x_1)| \le \left|a_{n+1}(x_1 - x_0)^{n+1}\right|.$$

2. Для знакозмінних та знакосталих рядів похибку, як правило, оцінюють так:

$$\begin{aligned} |R_n(x_1)| &= |f(x_1) - S_n(x_1)| \le \\ &\le \left|a_{n+1}(x_1 - x_0)^{n+1}\right| + \left|a_{n+2}(x_1 - x_0)^{n+2}\right| + \ldots \\ &< c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots = \tilde{R}_n, \end{aligned}$$

де $\sum c_n$ — певний знакододатний збіжний ряд, суму якого легко обчислити, приміром, геометричний ряд.

II Наближене обчислення визначених інтегралів

Щоб обчислити інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

який або не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислення, функцію $f(x)$ розвивають (якщо це можливо) у степеневий ряд й інтегрують його всередині інтервалу збіжності (тобто, $[a, b] \subset (x_0 - R,\ x_0 + R)$).

III Наближене інтегрування диференціальних рівнянь

Якщо розв'язок диференціального рівняння не зводиться до інтегралів, то для наближеного інтегрування можна скористатись рядом Тейлора.
Нехай треба знайти частинний розв'язок $y(x)$ задачі Коші:

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0.$$

За певних умов на функцію $f(x, y)$ цей розв'язок можна шукати як суму ряду Тейлора з центром у точці x_0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Значення $y(x_0)$ беруть з початкової умови, значення $y'(x_0)$ з диференціального рівняння:

$$y'(x_0) = f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}};$$

а значення $y''(x_0), y'''(x_0), \dots$ знаходять поступовим диференціюванням обох частин диференціального рівняння.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.