Лишки функції

доц. І.В. Орловський

1. Лишок функції в ізольованій особливій точці

Означення 1

Лишком функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називають число

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma:|z-z_0|=r} f(z)dz,$$

де γ – коло, яке лежить в області аналітичності функції $f(z)$ (тобто, у кільці $0 < |z - z_0| < R$).

З формули для коефіцієнтів ряду Лорана

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma:|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

випливає, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Отже, лишок функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 дорівнює коефіцієнту при $(z-z_0)^{-1}$ у розвиненні в ряд Лорана цієї функції у проколеному околі точки z_0.

2. Обчислення лишків функції

Лишок в усувній особливій точці

Якщо $z = z_0$ є правильною або усувною особливою точкою, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0,$$

оскільки у відповідному розвиненні в ряд Лорана відсутня головна частина.

Лишок функції в простому полюсі (полюсі 1-го порядку)

Нехай точка z_0 є простим полюсом функції $f(z)$, тоді

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n .$$

Помножмо обидві частини цієї рівності на $z - z_0$ та, переходячи до границі, коли $z \to z_0$ дістаємо, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z) \left(z - z_0\right),$$

Нехай

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

де $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ має простий нуль у точці $z = z_0$, тобто

$$\psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0.$$

Застосовуючи формулу для обчислення лишка в простому полюсі, маємо:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z - z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

тобто

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Лишок функції у полюсі порядку m

Нехай точка z_0 є полюсом порядку m функції $f(z)$:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \; c_{-m} \neq 0.$$

Щоб усунути від'ємні степені $z - z_0$, помножмо обидві частини цієї рівності на $(z-z_0)^m$,

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+m}.$$

Продиференціюємо одержане співвідношення $(m-1)$ разів і, переходячи до границі, коли $z \to z_0$ дістаємо, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z)(z-z_0)^m \right].$$

Лишок в істотно особливій точці

Якщо точка z_0 – істотно особлива точка функції $f(z)$, то коефіцієнт c_{-1}, а, отже, і лишок цієї функції визначають з розвинення в ряд Лорана функції в проколеному околі точки z_0.

Лишок функції в нескінченно віддаленій точці

Нехай функція $f(z)$ – аналітична в деякому околі точки $z = \infty$.
Лишком функції $f(z)$ у нескінченності називають

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma^-:|z|=r} f(\xi) d\xi = -c_{-1},$$

де зовнішність круга $|z| > r$ не містить інших особливих точок.

Теорема 1

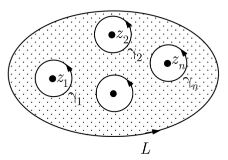
Нехай функція $f(z)$ аналітична скрізь в однозв'язній області D за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок $z_1, \ldots, z_n$ і L – замкнена додатно орієнтована крива, яка розташована в D і містить точки $z_1, \ldots, z_n$ всередині. Тоді правдива рівність

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доведення

Побудуймо кола

$$\gamma_k\ :\ |z - z_k| = r, \quad k = \overline{1, n},$$



такого малого радіусу, щоб обмежені ними круги містилися в області D і не перетиналися один з одним.

Позначмо через D^* область, яку одержимо з області D видаленням усіх кругів.

Оскільки функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D^*, то за теоремою Коші для багатозв'язної області маємо

$$\oint\limits_{L} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k : |z - z_k| = r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \quad \blacksquare$$

Теорема 2 (про суму лишків функції)

Якщо функція $f(z)$ має в розширеній комплексній площині скінченну кількість особливих точок, то сума всіх її лишків разом із лишком у нескінченності дорівнює нулеві:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Отже,

$$\oint_{L} f(z)dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

4. Застосування лишків до обчислення визначених і невласних інтегралів

1 Інтеграл вигляду $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, де $R(u, v)$ – раціональна функція аргументів u та v.

Зробимо змінну змінних $z = e^{it}$. Тоді

$$dt = \frac{dz}{iz}, \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

У цьому випадку $|z| = 1,\ 0 \le t \le 2\pi$. Отже, початковий інтеграл переходить в інтеграл від функції комплексної змінної за замкненим контуром:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}.$$

Цей інтеграл можна обчислити за основною теоремою про лишки.

2 Інтеграл вигляду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$.

Якщо дробово-раціональна функція $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неперервна на всій дійсній осі ($Q_m(x) \neq 0$) і $m \geq n+2$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k \\ \mathrm{Im}\ z_k>0}} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

де лишки обчислюють за особливими точками підінтегральної функції, які лежать у верхній півплощині.

3

Інтеграл вигляду $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{itx} dx.$

Якщо $n > m$, $t > 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k\\ \mathrm{Im}\ z_k>0}} \left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{itz} \right).$$

Якщо $n > m$, $t > 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \begin{Bmatrix} \cos tx \\ \sin tx \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \mathrm{Re} \\ \mathrm{Im} \end{Bmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{itx} dx.$$

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.