## 6.4 Пошукові автомати

### *Скінченні автомати*

Неформально скінченний автомат можна розуміти як систему, яка у кожен момент часу може знаходиться в одному з скінченної кількості заданих станів. Кожен такт автомата полягає в тому, що при перебуванні у будь-якому стані і зчитуванні одного з вхідних символів він переходить у визначений стан, причому символи, які зчитувались раніше не запам'ятовуються. Скінчений автомат – це односторонній скінченний розпізнавач без пам'яті.

Формально ***скінченним автоматом*** М називається п'ятірка позначень $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, де

$Q$ - скінченна множина станів автомату $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$;

$\Sigma$ - скінченна множина вхідних символів $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$;

$\delta$ - відображення множини $Q \times \Sigma$ в $P(Q)$ (множину всіх підмножин $Q$), що визначає поведінку керуючого пристрою (функцію $\delta$(q, a), де $q \in Q$, $a \in \Sigma$, називають функцією переходів);

$q_0 \in Q$ - початковий стан керуючого пристрою;

$F \subseteq Q$ - множина заключних станів.

Робота скінченного автомату полягає у виконанні послідовності кроків (тактів). Такт визначається поточним станом керуючого пристрою, який оглядається головкою читання. Зміна стану автомата – це зміна керуючого пристрою і зсув головки вправо на одну комірку.

Для того, щоб визначити поведінку скінченного автомата треба знати

- поточний стан керуючого пристрою;
- ланцюжок символів, що починаються з комірки, на який вказує головка читання.

Ці два параметри визначають миттєвий опис скінченного автомата, який називається ***конфігурацією (тактом)***.

Пара $(q, \omega) \in Q \times \Sigma^*$ називається ***конфігурацією*** автомата $M$ .

Конфігурація $(q_0, \omega)$ називається ***початковою конфігурацією***, а $(q, e)$, $q \in F$ - ***заключною***.

Кажуть, що автомат переходить з конфігурації $(q, a\omega)$, $a \in \Sigma$, в конфігурацію $(q', \omega)$, якщо $q' \in \delta(q, a)$ і позначають це так: $(q, a\omega) \mapsto (q', \omega)$.

Робота скінченого автомата – це послідовність конфігурацій. Нехай $K_0, K_1, ..., K_p$ - деякі конфігурації автомата. Якщо можна перейти $K_0 \mapsto K_1 \mapsto ... \mapsto K_p$, то це можна позначити так: $K_0 \overset{*}{\mapsto} K_p$ або $K_0 \overset{p}{\mapsto} K_p$.

Кажуть, що автомат $M$ ***допускає ланцюжок*** $\omega$, якщо $(q_0, \omega) \overset{p}{\mapsto} (q\ , e)$, де $q \in F$.

***Мовою***, що визначається (допускається) автоматом $M$, називається множина вхідних ланцюжків, що допускається цим автоматом.

$$L(M)=\{\omega \mid \omega\in\Sigma^*,(q_0,\omega\}\overset{*}{\mapsto}(q,e) \text{ для деякого } q\in F\}.$$

Стан $p$ називається ***досяжним***, якщо існує ланцюжок $\omega$ такий, що $(q_0,\omega)\overset{*}{\mapsto}(p,e)$.

За даним скінченним автоматом можна знайти найменший еквівалентний йому автомат, якщо вилучити всі недосяжні стани, а потім склеїти еквівалентні стани.

Кажуть, що ланцюжок $x\in\Sigma^*$ ***розрізняє*** стани $q_1\neq q_2$, $q_1\in Q$, $q_2\in Q$, якщо із стану $q_1$ по ланцюжку $x$ можна перейти в $q_3$, а з $q_2$ по $x$ можна перейти в $q_4$, причому $q_3\in F$, $q_4\notin F$ або $q_3\notin F$, $q_4\in F$.

Якщо ланцюжок $x$ такий, що $(q_1,x)\mapsto^k(q_3,e)$, $(q_2,x)\mapsto^k(q_4,e)$, то ланцюжок $x$ довжиною $k$ розрізняє ці стани.

Кажуть, що стани $q_1,q_2$ $k-$***не розрізняються:*** $q_1\equiv^k q_2$, якщо не існує ланцюжка $x\in\Sigma^*,|x|\leq k.$ , який розрізняє ці стани.

Будемо говорити, що $q_1,q_2$ ***не розрізняються*** і писати $q_1\equiv q_2$, якщо вони $k$-не розрізняються для будь-якого $k\in N$.

Стан $q$ називається ***недосяжним***, якщо не існує вхідного ланцюжка $x\in\Sigma^*:(q_0,x)\mapsto^*(q,e)$.

Скінченний автомат $M$ є ***недетермінованим***, якщо існують такі $a\in\Sigma,q\in Q$, що функція переходів $\delta$ є множиною, що складається більш, ніж з одного стану: $\delta(q,a)=\{q_1,q_2,...,q_n\}$, $n>1$.

Скінченний автомат $M$ є ***детермінованим***, якщо для кожних $a\in\Sigma,q\in Q$ існує не більше одного стану, в який відбувається перехід.

Скінченний детермінований автомат називається ***повністю визначеним***, якщо $\delta(q,a)$ для кожних $a \in \Sigma, q \in Q$ містить рівно один стан.

Скінченний детермінований автомат $M$ називається ***зведеним (мінімальним)***, якщо в $Q$ немає недосяжних станів і немає двох станів, що не розрізняються.

***Діаграмою переходів*** (графом переходів) автомата $M$ називається навантажений граф, вершини якого навантажені іменами станів автомату, і в діаграмі присутнє ребро $(p,q)$, якщо справджується таке співвідношення: $q \in \delta(p,a), a \in \Sigma$. Ребра навантажені всіма символами $a \in \Sigma$, по яких є перехід з $p$ в $q$.

Тобто, діаграмою переходів скінченого автомата є граф, вершинами якого є стани автомата, а ребра графа визначаються функцією переходу автомата.

**Приклад недетермінованого скінченного автомата**

Побудуємо автомат в алфавіті $\Sigma = \{1,2,3\}$, який буде розпізнавати слова, в яких є хоча б одна двійка.

Наприклад, $w_1 = 12231 \in L(M)$, $w_2 = 1131131 \notin L(M)$.
Визначимо стани:

$p$ - початковий стан: двійки ще не було

$q$ - заключний стан: двійка вже була.

Отже, автомат має вигляд $M = (\{p,q\},\{1,2,3\},\delta,p,\{q\})$.

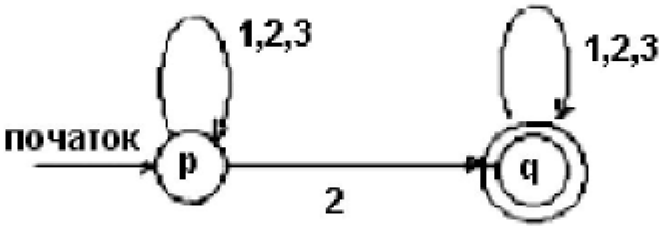
Визначимо функцію переходів $\delta$:

$$\delta(p,1) = p, \delta(p,2) = \{p,q\}, \delta(p,3) = p,$$
$$\delta(q,1) = q, \delta(q,2) = q, \delta(q,3) = q.$$

Функцію $\delta$ прийнято зображати у вигляді ***таблиці переходів***:

| Стани | Вхідні символи | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| $p$ | $\{p\}$ | $\{p,q\}$ | $\{p\}$ |
| $q$ | $\{q\}$ | $\{q\}$ | $\{q\}$ |

Функцію $\delta$ можна зобразити у вигляді ***діаграми переходів***:




Заключний стан у таблиці обведений, а на діаграмі – знаходиться у подвійному кружечку.

Нехай у нас є ланцюжок 12231. Випишемо всі можливі послідовності конфігурацій:

$(p,12231) \mapsto (p,2231) \mapsto (p,231) \mapsto (p,31) \mapsto (p,1) \mapsto (p,\mathrm{e})$

$(p,12231) \mapsto (p,2231) \mapsto (p,231) \mapsto (q,31) \mapsto (q,1) \mapsto (q,\mathrm{e})$

$(p,12231) \mapsto (p,2231) \mapsto (q,231) \mapsto (q,31) \mapsto (q,1) \mapsto (q,\mathrm{e})$

Оскільки серед останніх конфігурацій присутня заключна конфігурація $(q,\mathrm{e})$, то існує послідовність, що перетворює початкову конфігурацію $(p,12231)$ в заключну. Це означає, що ланцюжок $12231 \in L(M)$.

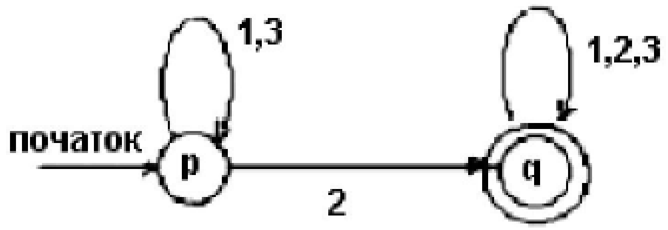
**Приклад детермінованого скінченного автомата**

Знов побудуємо автомат в алфавіті $\Sigma = \{1,2,3\}$, який буде розпізнавати слова, в яких є хоча б одна двійка. Але тепер він буде детермінованим.

Визначимо такі ж стани, як і раніше, але змінимо функцію переходів $\delta$:

$$\delta(p,1) = p, \delta(p,2) = \{q\}, \delta(p,3) = p,$$
$$\delta(q,1) = q, \delta(q,2) = q, \delta(q,3) = q.$$

| Стани | Вхідні символи | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| $p$ | $\{p\}$ | $\{q\}$ | $\{p\}$ |
| $q$ | $\{q\}$ | $\{q\}$ | $\{q\}$ |




Отже, автомат має вигляд $M = (\{p,q\}, \{1,2,3\}, \delta, p, \{q\})$. Він повністю визначений і мінімальний.

Оскільки автомат детермінований, то для будь-якого ланцюжка існує єдина послідовність конфігурацій. Нехай у нас є ланцюжок 12231. Тоді послідовність конфігурацій має вигляд:

$$(p,12231) \mapsto (p,2231) \mapsto (q,231) \mapsto (q,31) \mapsto (q,1) \mapsto (q,\mathrm{e})$$

Ця послідовність перетворює початкову конфігурацію в заключну. Це означає, що ланцюжок $12231 \in L(M)$.

Зазначимо, що працювати з детермінованим автоматом простіше, ніж з недерміннованим, але, як правило, для складних мов його непросто визначити. Існують алгоритми перетворення недетермінованого автомата в детермінований, а потім – і у мінімальний. Вони розглянуті далі, а нижче наведено алгоритм моделювання роботи скінченного детермінованого автомату:

```
q = q0;                // початковий стан автомата
a = GetChar();         // зчитування першого символу з вхідної стрічки
while (a != eof)       // поки не кінець стрічки
{
  // перехід автомату в інший стан по прочитаному символу
  q = Delta(q, a);     // функція переходів Delta керує роботою автомата
  a = GetChar();       // зчитування наступного символу з вхідної стрічки
}                      // стрічку прочитано
if (q is in F)         // автомат попав в заключний стан ?
      return "yes";    // ланцюжок належить мові автомата
else return "no";      // ланцюжок не належить мові автомата
```

## *Магазинні автомати*

Магазинні автомати, відомі також як автомати з магазинною пам'яттю або як МП-автомати, формально визначаються у такий спосіб:

МП-автомат – це сімка позначень P = (Q, Σ, Γ, δ, $q_0$, $Z_0$, F), де:

Q – скінченна множина станів;

Σ – скінченний вхідний алфавіт;

Γ – скінченний алфавіт магазинних символів;

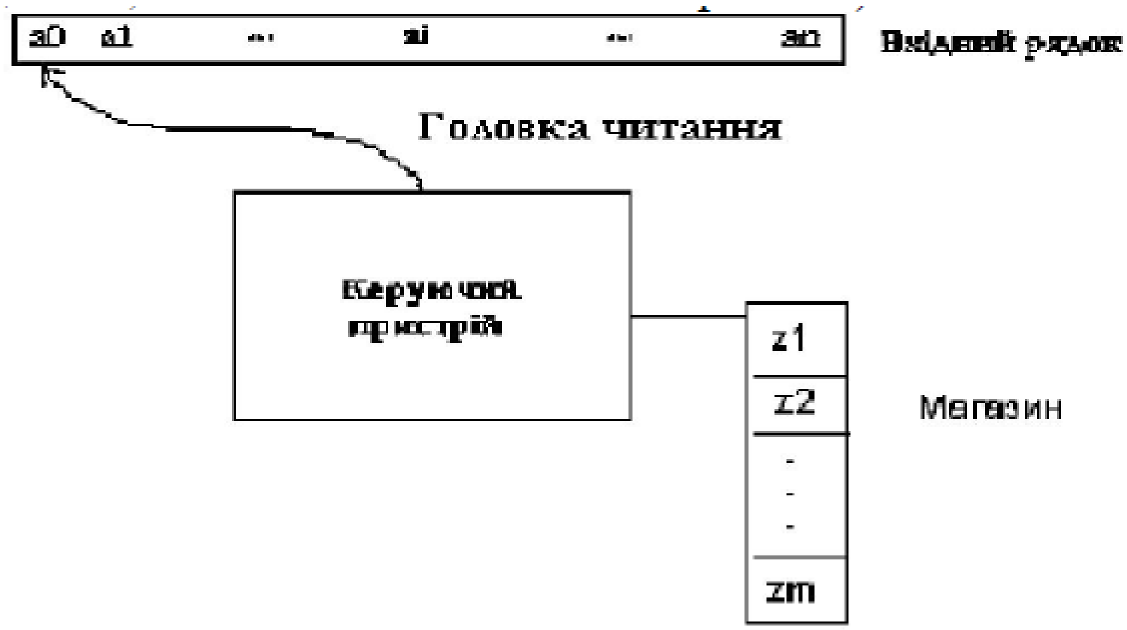
δ – функція переходу, відображення множини $Q \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma$ у множину скінченних підмножин множини $Q \times \Gamma^*$;

$q_0 \in Q$ – початковий стан керуючого пристрою;

$Z_0 \in \Gamma$ – символ, що знаходиться в магазині у початковий момент (початковий символ);

$F \subseteq Q$ – множина заключних станів.

***Конфігурацією*** МП-автомата $P$ називається трійка позначень $(q,\omega,\alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ , де $q$ – поточний стан керуючого пристрою, $\omega$ – невикористана частина вхідного ланцюжка (якщо $\omega$=$\varepsilon$, то вважається, що весь вхідний ланцюжок прочитаний), $\alpha$ – вміст магазина (самий лівий символ ланцюжка $\alpha$ вважається верхнім символом магазина; якщо $\alpha$=$\varepsilon$, те магазин вважається порожнім).




На кожному кроці роботи МП-автомат може або занести щось у магазин, або зняти якісь значення з його вершини. Відзначимо, що МП-автомат може продовжувати працювати у випадку закінчення вхідного ланцюжка, але не може продовжувати роботу у випадку спустошення магазина.

Клас мов, що розпізнаються МП-автоматами, у точності збігається з класом мов, які задаються контекстно-вільними граматиками.

МП-автомат P = (Q, Σ, Γ, δ, $q_0$, $Z_0$, F) називається ***детермінованим***, якщо для кожних $q \in Q$ і $Z \in \Gamma$ вірно одне з наступних тверджень:

- δ($q$, $a$, $Z$) містить не більш одного елемента для кожного $a \in \Sigma$ і δ($q$, $\varepsilon$, $Z$) = Ø;
- δ($q$, $a$, $Z$) = Ø для всіх $a \in \Sigma$ і δ($q$, $\varepsilon$, $Z$) містить не більш одного елемента.

Детерміновані МП-автомати описують тільки підмножину з класу контекстно-вільних мов – ця підмножина називається ***детермінованими контекстно-вільними мовами***. Цей клас мов називають також LR(k)-граматиками, тому що вони можуть бути однозначно розібрані шляхом перегляду ланцюжка зліва направо із загляданням уперед не більш, ніж на $k$ символів.

**Приклад магазинного автомата**

Розглянемо магазинний автомат, що розпізнає мову $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$. Нехай $P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{Z,0\}, \delta, q_0, Z, \{q_0\})$, де:

$$\delta(q_0, 0, Z) = \{(q_1, 0Z)\}$$
$$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, 00)\}$$
$$\delta(q_1, 1, 0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, 1, 0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$
$$\delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

Робота автомата полягає в копіюванні в магазин початкових нулів із вхідного ланцюжка і наступному вилученню по одному нулю з магазина на кожну прочитану одиницю.

### *Регулярні множини і регулярні вирази*

Нехай V- скінченний алфавіт. Рекурсивно ***регулярна множина*** в алфавіті V визначається так:

1) $\varnothing$ – регулярна множина в алфавіті V;
2) $\{e\}$ – регулярна множина в алфавіті V;
3) $\{a\}$, де $a \in V$ – регулярна множина в алфавіті V;
4) Якщо $P, Q$ - регулярні множини в V, то $P \bigcup Q, PQ, P^*$ – регулярні множини;
5) Ніщо інше не є регулярною множиною в V.

Таким чином, множина в V є регулярною тоді і тільки тоді, коли вона є регулярною внаслідок або 1), або 2), або 3), або її можна одержати з них за допомогою операції об'єднання, конкатенації чи ітерації. Регулярні множини можна визначити через регулярні вирази, праволінійні граматики, детерміновані і недетерміновані скінченні автомати.

***Регулярний вираз*** в алфавіті V визначається рекурсивно:

1) $\varnothing$ - регулярний вираз, що позначає регулярну множину $\varnothing$;
2) e - регулярний вираз , що позначає регулярну множину {e};
3) якщо $a \in V$, то a - регулярний вираз , що позначає регулярну множину {a};
4) якщо p,q - регулярні вирази, що позначають регулярні множини P,Q, то
   - (p+q) регулярний вираз, що позначає регулярну множину $P \cup Q$;
   - (pq) регулярний вираз, що позначає регулярну множину PQ;
   - (p)* регулярний вираз, що позначає регулярну множину P* ;
5) ніщо інше не є регулярним виразом.

Для спрощення запису і для того, щоб в регулярних виразах писати менше дужок, введемо позначення ( $p^+ = pp^*$ ) та пріоритети операцій : ітерація (*), конкатенація, об'єднання (+).

Операцію об'єднання будемо називати ще й операцією альтернативи і позначати вертикальною рискою (|).

Приклади регулярних виразів:

- 01 позначає множину {01}
- 0* позначає множину {0}*
- (0+1)* позначає множину {0,1}*
- (0+1)*011 позначає множину усіх ланцюжків, що складаються з нулів і одиниць і закінчуються ланцюжком 011
- (a+b)(a+b+0+1)* позначає множину усіх ланцюжків з множини {a,b,0,1}*, що починаються з a або b.

Для кожного регулярного виразу існує регулярна мова, а для довільної регулярної мови існують різні регулярні вирази. Будемо говорити, що ***регулярні вирази рівні***, якщо вони позначають однакові регулярні множини.

Нехай $\alpha, \beta, \gamma$ - регулярні вирази. Тоді справджуються ***тотожності*** над регулярними виразами:

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
4. $\alpha e = e\alpha = \alpha$
5. $\alpha^* = \alpha + \alpha^*$
6. $\alpha + \alpha = \alpha$
7. $\varnothing^* = e$
8. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
9. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
10. $\alpha\varnothing = \varnothing\alpha = \varnothing$
11. $(\alpha^*)^* = \alpha^*$
12. $\alpha + \varnothing = \alpha$