1.4 Відображення і функції

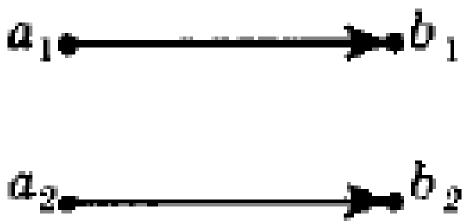
1.4.1 Функціональні відношення

Відношення R між множинами X і Y ($R \subseteq X \times Y$) є **функціональним**, якщо всі його елементи різні за першим елементом:

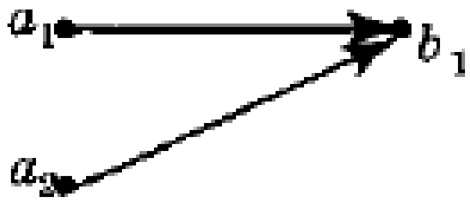
кожному $x \in X$ або відповідає тільки один елемент $y \in Y$, такий, що xRy, або такого елемента y взагалі не існує.

Матриця функціонального відношення, що задане на скінченних множинах X і Y, містить не більше однієї одиниці в кожному рядку.

Якщо функціональне відношення задано у вигляді графа, то з кожної вершини, що зображує першу координату, виходить не більше однієї дуги.



а) функціональне відношення



б) функціональне відношення

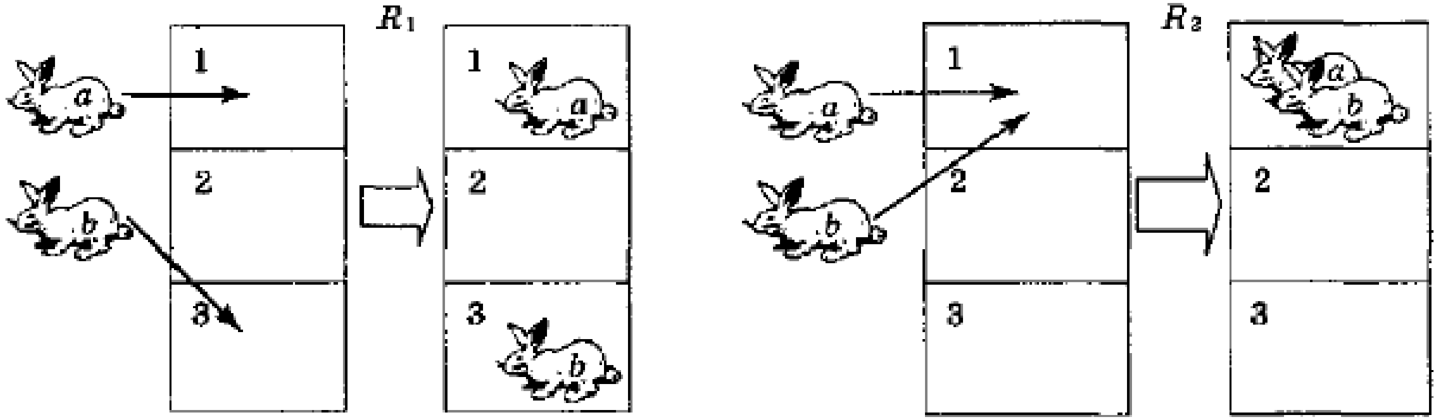
в) нефункціональне відношення

Приклад. Нехай A — множина кроликів; B — множина кліток.

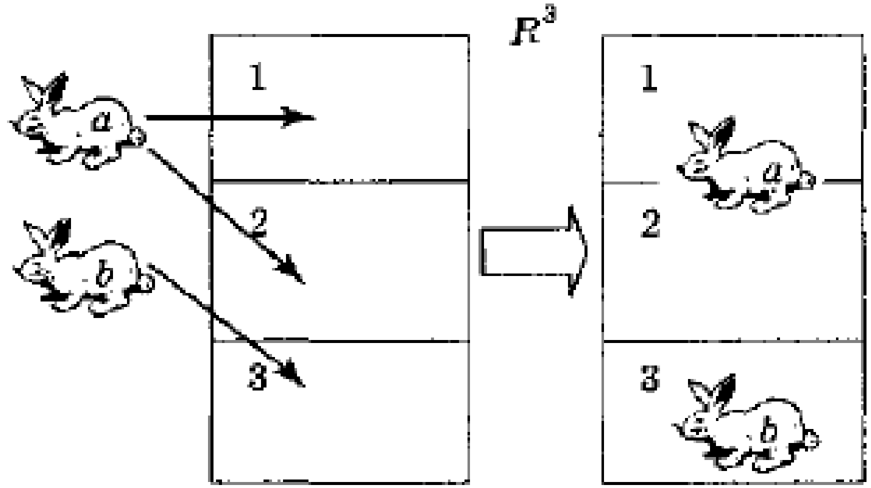
Нехай R — відношення розміщення кроликів по клітках — «Кролики — Клітки».

Нехай $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

$R_1 = \{(a, 1), (b, 3)\}$, $R_2 = \{(a, 1), (b, 1)\}$.



$$R_3 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 3)\}.$$



Приклад. Українсько-англійський словник встановлює відповідність між множиною українських та англійських слів.

Нехай R — деяке відношення, $R \subseteq X \times Y$.

Областю визначення відношення R називається множина $Dom\ R$ (D_R), що складається з усіх елементів множини X, які зв'язані відношенням R з елементами множини Y:

$$Dom\ R \subseteq X, \quad Dom\ R = \{x \colon \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

Якщо $Dom\ R = X$, то функціональне відношення R називається **всюди визначеним**.

Областю значень відношення R називається множина $Im\,R$, що складається з усіх елементів множини Y, які зв'язані відношенням R з елементами множини X:

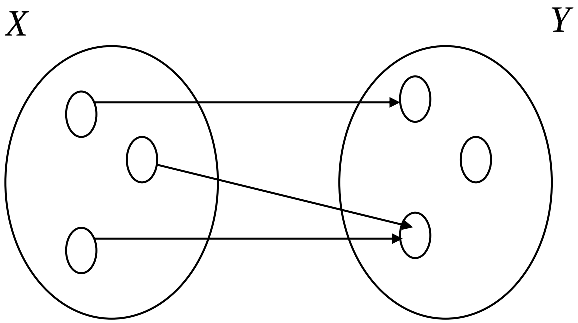
$$Im\,R \subseteq Y, \quad Im\,R = \{y\colon \exists x \in X, (x, y) \in R\}.$$

Відображенням $\boldsymbol{f}$ множини X в Y (або **функцією** $\boldsymbol{f}$) називається всюди визначене функціональне відношення.

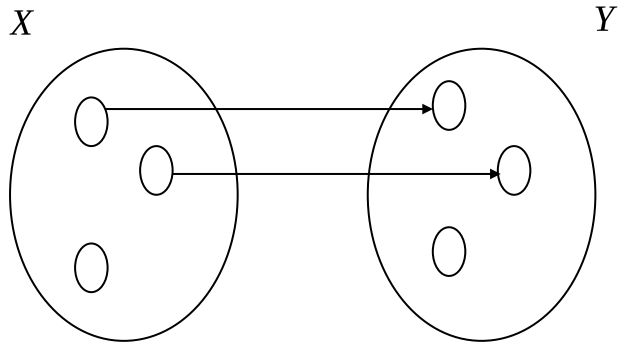
Позначення: $f : X \to Y$ або $y = f(x)$, де $x \in X$, $y \in Y$.

При цьому перша координата x впорядкованої пари $(x, y) \in f$ є **прообразом** (аргументом, змінною), а друга y — **образом** (значенням).

Приклад.



(а)



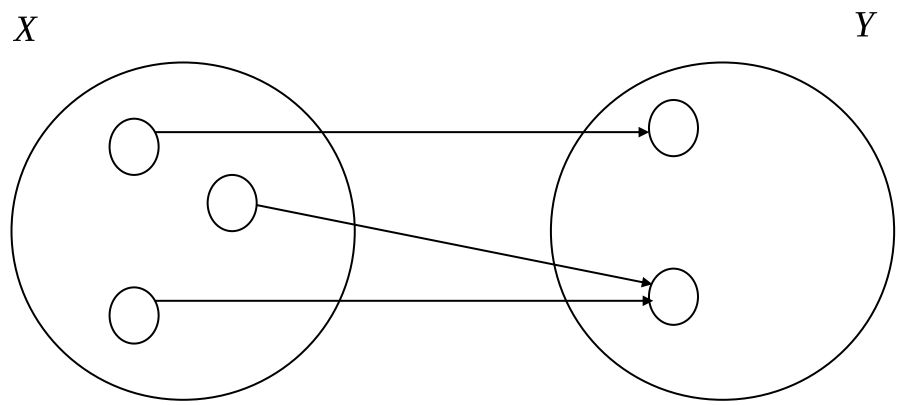
(б)

1.4.2 Типи відображень

Якщо для відображення $f : X \to Y$ будь-який елемент y з Y є образом принаймні одного елементу x з X, тобто: $\forall\ y \in Y \quad \exists\ x \in X : \quad y = f(x)$, то відображення називається **сюр'єктивним відображенням**.

Або, $f: X \to Y$ називається **сюр'єктивним відображенням**, якщо $Im\, f = Y$.

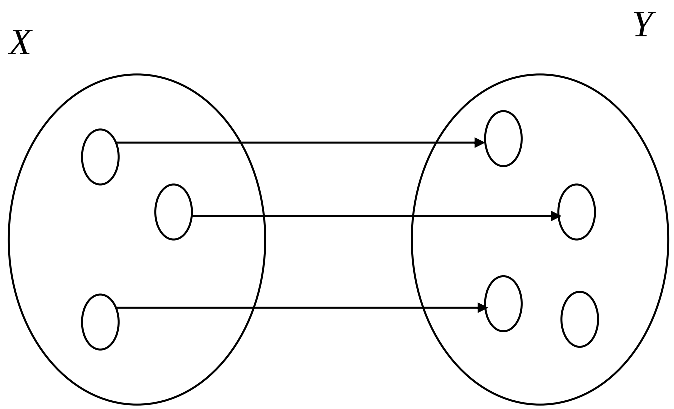
Приклад



Якщо для відображення $f: X \to Y$ для будь-яких двох різних елементів x_1 та x_2 з X їх образи y_1 та y_2 також різні, то відображення f називається **ін'єктивним відображенням**.

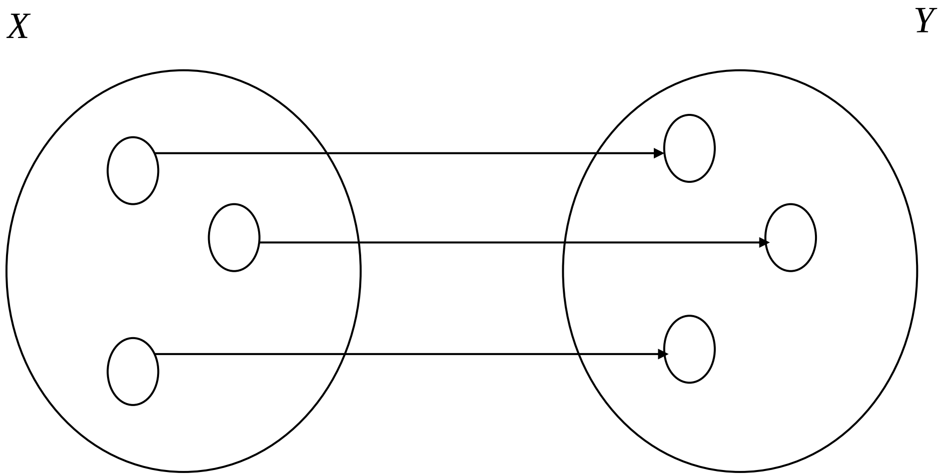
$$y = f(x_1) \text{ та } y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Приклад



Відображення, яке одночасно є сюр'єктивним та ін'єктивним називається **бієктивним** (накладанням).

Приклад



Якщо f — взаємно однозначне відображення, а $X = Y$, то $f : X \to X$ називається відображенням множини A на себе. Елементи $(x, x) \in X \times X$ утворюють **тотожне відображення** E, причому $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E$.

Відображення множини в її фактор-множину називається **канонічною сюр'єкцією.**

Приклад. Нехай X та Y — множини дійсних чисел, $f : X \to Y$, $f(x) = 3x + 5$.

Функція f ін'єктивна:

якщо $f(x_1) = f(x_2)$, тоді $3x_1+5 = 3x_2+5$ і відповідно $x_1 = x_2$.

Функція f є сюр'єкцією.

Для будь-якого дійсного числа y треба знайти таке x, що $f(x) = y = 3x + 5$. Якщо $x = (1/3)(y – 5)$, тоді $f(x) = y$.

Функція f представляє собою бієкцію або взаємно однозначну відповідність.

Приклад. Нехай X та Y — множини дійсних чисел, функція $f : X \to Y$, $f(x) = x^2$.

Функція f не є ін’єктивною, тому що $f(2) = f(-2)$, але $2 \neq -2$.

Функція f не є сюр’єктивною, тому що не існує такого дійсного числа x, для якого $f(x) = -1$.

Якщо X та Y — множини невід’ємних дійсних чисел, то тоді f буде і сюр’єктивним, і ін’єктивним.

У випадку коли X та Y будуть множинами натуральних чисел, то f збереже ін’єктивність, але втратить сюр’єктивність.

Приклад. Різні види кодування є відповідністю між об’єктами, що кодуються, і кодами, що присвоюються їм.

1.4.3 Властивості відображень

Сукупність усіх елементів, образом яких є заданий елемент y, називається **повним прообразом** елемента y і позначається $f^{-1}(y)$.

Сукупність елементів $f(x)$, які є образами всіх елементів множини $C \subset X$, називається **образом множини** C та позначається $f(C)$.

Сукупність усіх елементів із X, образи яких належать якійсь множині $D \subset Y$, називається **повним прообразом множини** D і позначається $f^{-1}(D)$.

Приклад. Нехай $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $f = \{(1,5), (2,6), (2,7), (3,8), (3,5)\}$.

Повний прообраз елемента “5” з множини Y:

$$f^{-1}(5) = \{1, 3\}.$$

Нехай також $C = \{1, 2\}$. Образ множини C:

$$f(C) = \{5, 6, 7\}.$$

Нехай $D = \{6, 7\}$. Повний прообраз множини D:

$$f^{-1}(D) = \{2\}.$$

Теорема 4.1. Нехай f є відображення $f : X \to Y$. Тоді справедливі наступні властивості відображень:

а) Якщо $X \subset Y$, то $f(X) \subset f(Y)$, $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$,

б) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$,

в) $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$, $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$,

г) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$,

д) $f^{-1}(X') = (f^{-1})'(X)$.

1.4.4 Композиція відображень

Якщо $f : A \to B$, $g : B \to C$, то їх **композиція** $(g \circ f) : A \to C$, причому $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Якщо існує множина пар $(a, b) \in f$ та $(b, c) \in g$, то множина пар $(a, c) \in f \circ g$ утворює композицію $(g \circ f)$.

Запис $(g \circ f)$ проводиться в порядку, який є зворотнім до того, в якому виконується операції $f : A \to B$, $g : B \to C$.

Правило: композицію відображень ($g \circ f$) треба починати з виконання операції f, яка розташована справа.

Приклад. Нехай $f : R \to R$, $f(x) = \sin x$, $g : R \to R$, $g(x) = \ln x$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \ln(\sin x),$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = \sin(\ln x),$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sin x) = \sin(\sin x),$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\ln x) = \ln(\ln x).$$

Композиція відображень асоціативна, тобто $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ і записується у вигляді $h \circ g \circ f$.

Композиція відображень не комутативна:

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Теорема 4.2. Функція f є взаємно однозначним функціональним відношенням тоді і тільки тоді, коли f^{-1} – взаємно однозначне відношення.

Теорема 4.3. Композиція двох функціональних відношень є функціональним відношенням.

Теорема 4.4. Нехай $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тоді

а) якщо f і g – сюр'єкції A на B та B на C відповідно, то $g \circ f$ є сюр'єкцією A на C.

б) якщо f і g – ін'єкції, то $g \circ f$ є ін'єкцією.

в) якщо f і g – бієкції, то $g \circ f$ є бієкцією.