Приклад 1. Побудувати квадратичний сплайн для функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

$$f(x):=\sqrt[3]{x} \qquad x:=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad y:=\begin{bmatrix}1\\1.2599\\1.4422\end{bmatrix}$$

1) Побудуємо квадратичний сплайн S2(*x*)

У таблиці задано два проміжки $x\in[1,2]$ і $x\in[2,3]$, $n=2$, на кожному із проміжків побудуємо квадратичні функції так, щоб вони утворювали сплайн. Квадратичний сплайн представимо у вигляді

$$S_2(x)=\begin{cases}a_1+b_1(x-x_0)+c_1(x-x_0)^2, & x\in[x_0,x_1];\\ a_2+b_2(x-x_1)+c_2(x-x_1)^2, & x\in[x_1,x_2]\end{cases}$$

або

$$S_2(x)=\begin{cases}a_1+b_1(x-1)+c_1(x-1)^2, & x\in[1,2];\\ a_2+b_2(x-2)+c_2(x-2)^2, & x\in[2,3]\end{cases}$$

Невідомі коефіцієнти визначимо як розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 при умові, що $h_1=x_1-x_0=1$, $h_2=x_2-x_1=1$.

$$\begin{cases}a_i=y_{i-1}, & i=\overline{1,n},\\ b_i\cdot h_i+c_i\cdot h_i^2=y_i-y_{i-1}, & i=\overline{1,n},\\ b_i+2c_ih_i=b_{i+1}, & i=\overline{1,n-1},\\ c_1=0.\end{cases}$$

$$h1:=x_1-x_0=1 \qquad h2:=x_2-x_1=1$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$a1:=y_0=1$$
$$a2:=y_1=1.2599$$

$$b1\cdot h1+c1\cdot h1^2=y_1-y_0$$
$$b2\cdot h2+c2\cdot h2^2=y_2-y_1$$
$$b1+2\cdot c1\cdot h1=b2$$
$$c1=0$$

або

$$b1\cdot 1+c1\cdot 1^2=1.2599-1$$
$$b2\cdot 1+c2\cdot 1^2=1.4422-1.2599$$
$$b1+2\cdot c1\cdot 1=b2$$
$$c1=0$$

Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою блока Given - Fined:

Guess Values

$$b1:=0 \qquad b2:=0$$
$$c1:=0 \qquad c2:=0$$

Constraints

Given

$$b1\cdot 1+c1\cdot 1^2=1.2599-1$$
$$b2\cdot 1+c2\cdot 1^2=1.4422-1.2599$$
$$b1+2\cdot c1\cdot 1=b2$$
$$c1=0$$

Solver

$$solution:=find(b1,b2,c1,c2)=\begin{bmatrix}0.2599\\0.2599\\0\\-0.0776\end{bmatrix}$$

Отже, коефіцієнти сплайнів:

$a1 = 1$ $\quad b1 := solution_0 = 0.2599$ $\quad c1 := solution_2 = 0$

$a2 = 1.2599$ $\quad b2 := solution_1 = 0.2599$ $\quad c2 := solution_3 = -0.0776$

Одержали квадратичний сплайн у вигляді

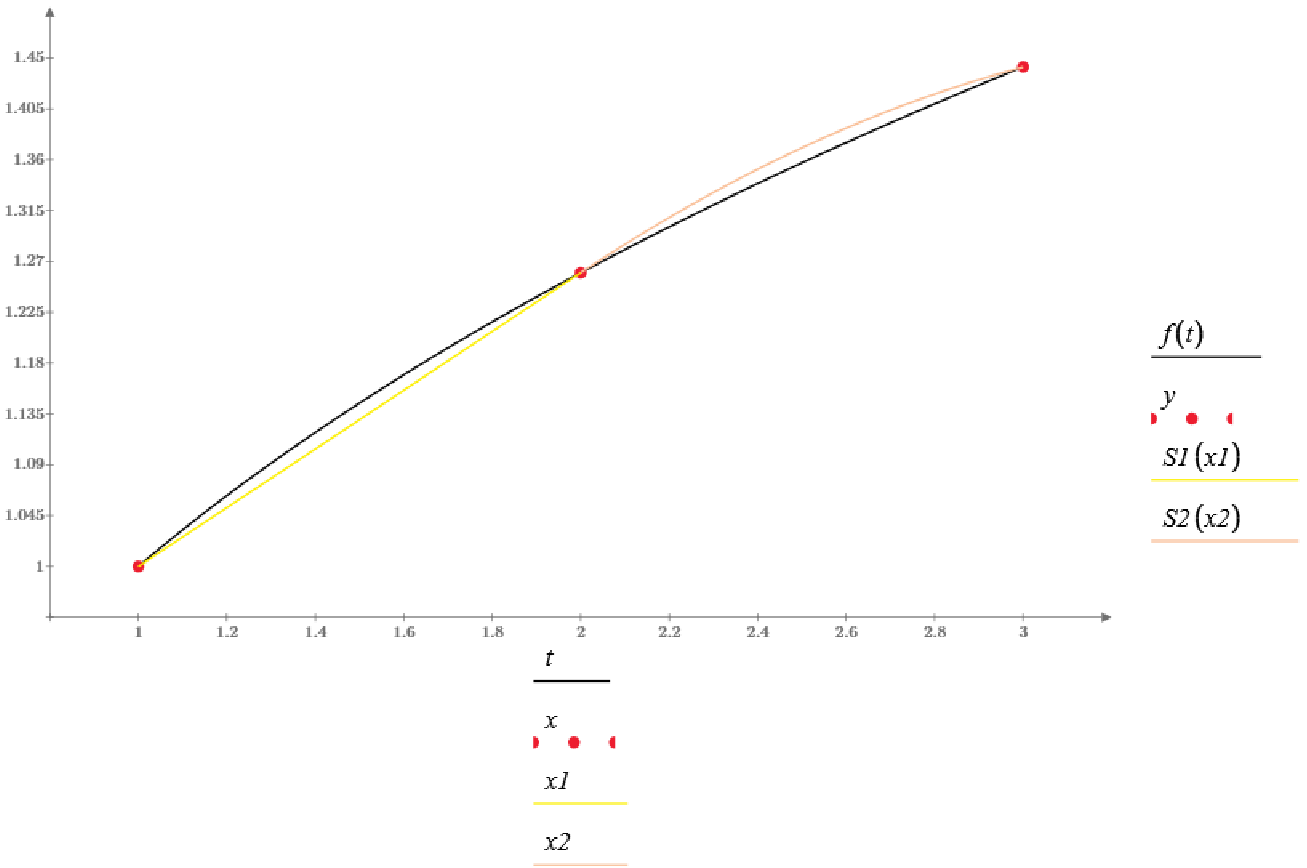
$$S_2(x) = \begin{cases} 1{,}000 + 0{,}260 \cdot (x-1), & x \in [1,\ 2]; \\ 1{,}260 + 0{,}260 \cdot (x-2) - 0{,}078 \cdot (x-2)^2, & x \in [2,\ 3]. \end{cases}$$

2) Побудуємо порівняльний графік побудованого квадратичного сплайну та заданої функції *f*(*x*)

$$x1 := 1, 1.01 .. 2$$
$$S1(x1) := 1.000 + 0.260 \cdot (x1 - 1)$$

$$x2 := 2, 2.01 .. 3$$
$$S2(x2) := 1.260 + 0.260 \cdot (x2 - 2) - 0.078 \cdot (x2 - 2)^2$$

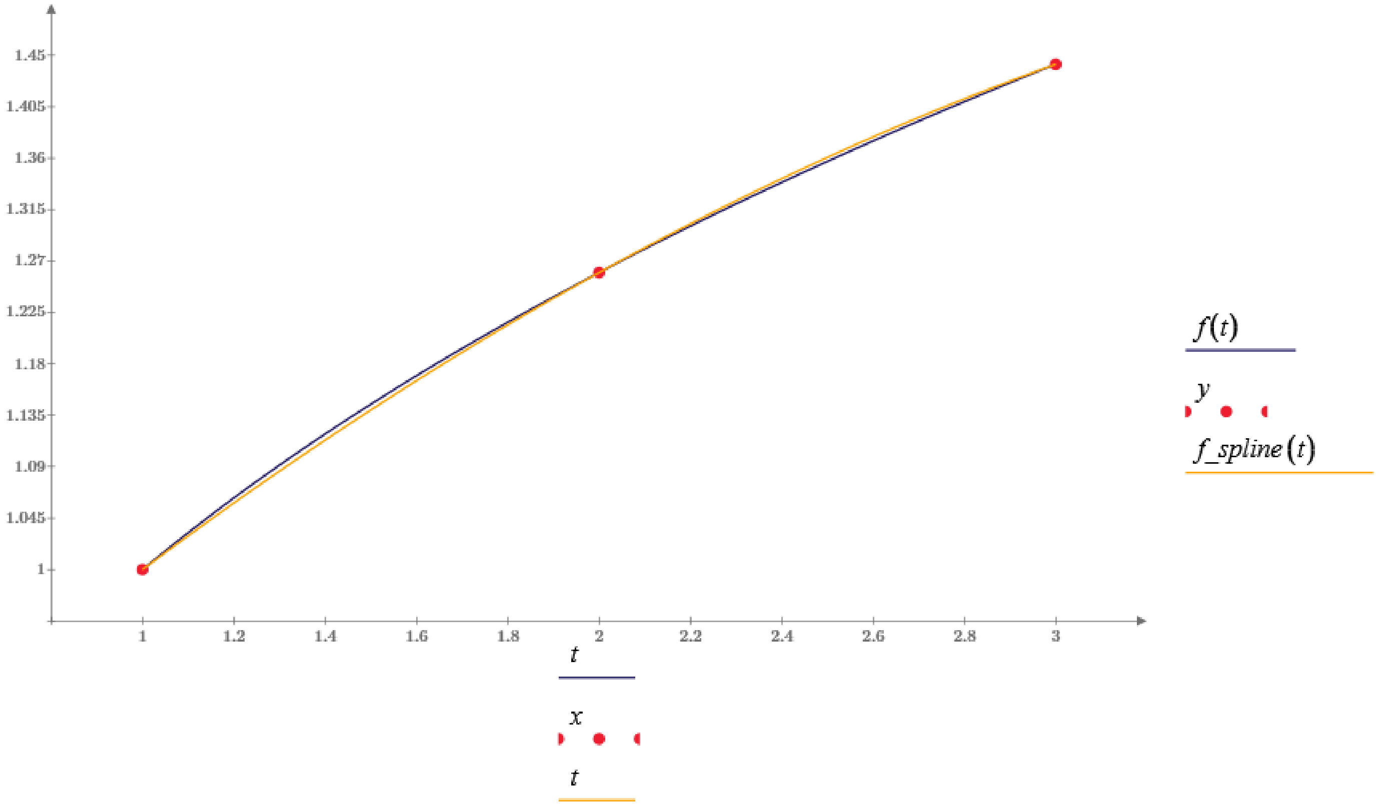
$$f(t) := \sqrt[3]{t} \qquad t := 1, 1.01 .. 3$$



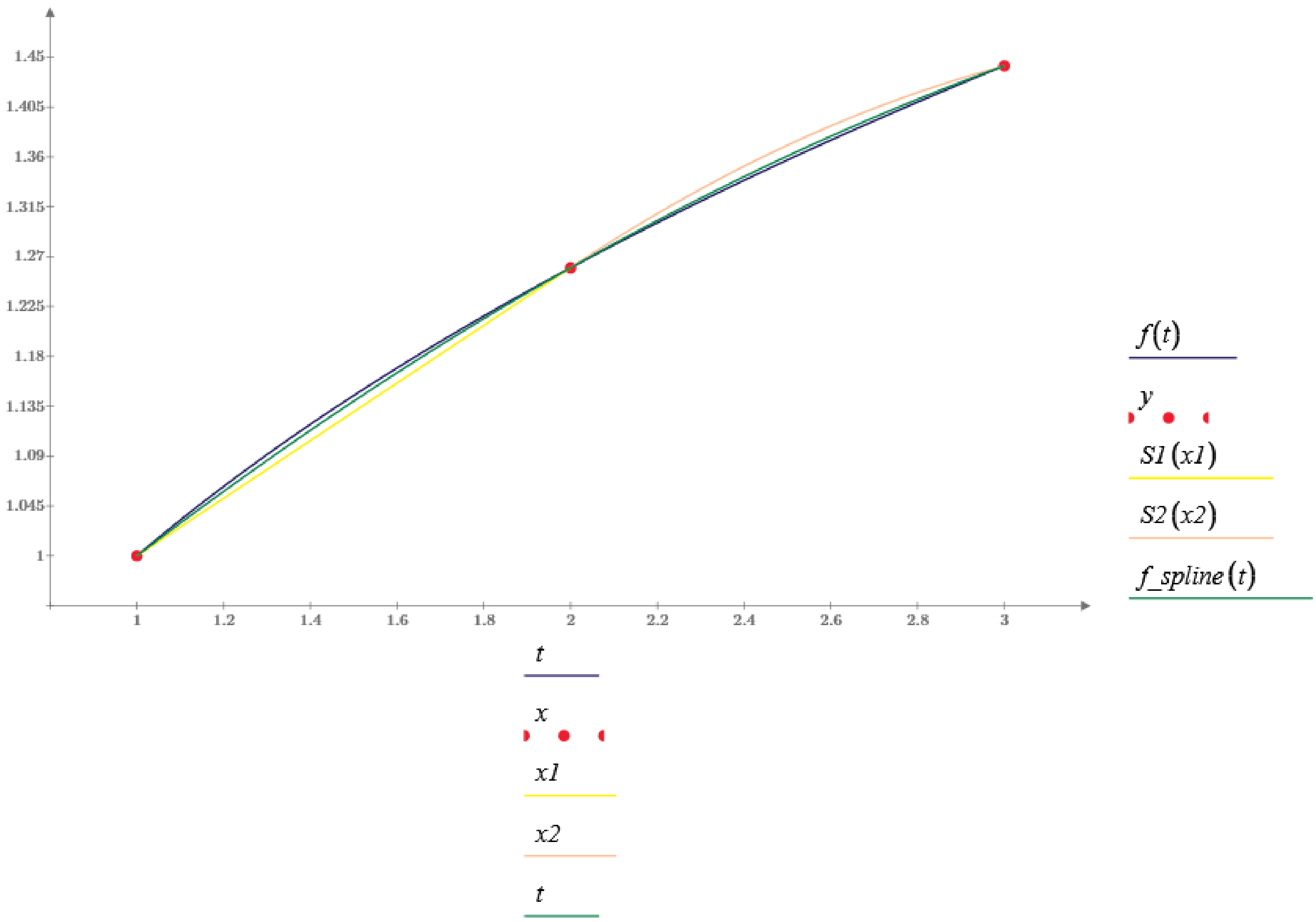
3) Побудуємо квадратичний сплайн засобами Mathcad

$$f\_spline(t) := \mathrm{interp}(\mathrm{pspline}(x, y), x, y, t)$$

4) Побудуємо порівняльний графік сплайну, побудованого засобами Mathcad, та заданої функції *f*(*x*)



5) Порівняльний графік обох сплайнів та заданої функції *f*(*x*)



6) Похибка інтерполяції

$$f(t) := \sqrt[3]{t} \qquad S1(x1) := 1.000 + 0.260 \cdot (x1 - 1) \qquad S2(x2) := 1.260 + 0.260 \cdot (x2 - 2) - 0.078 \cdot (x2 - 2)^2$$

$$x1 := 1, 1.01 .. 2$$
$$R1(x1) := |f(x1) - S1(x1)|$$

$$x2 := 2, 2.01 .. 3$$
$$R2(x2) := |f(x2) - S2(x2)|$$

Графік похибки: