ЛЕКЦІЯ 4

ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Нагадаємо, що випробування називають *незалежними*, якщо ймовірність будь-якого результату випробування не залежить від того, які наслідки мали інші випробування.

Повторні незалежні випробування – це важливий концепт у теорії ймовірностей, який описує ситуації, коли одна й та сама випадкова подія повторюється багаторазово незалежно від попередніх результатів.

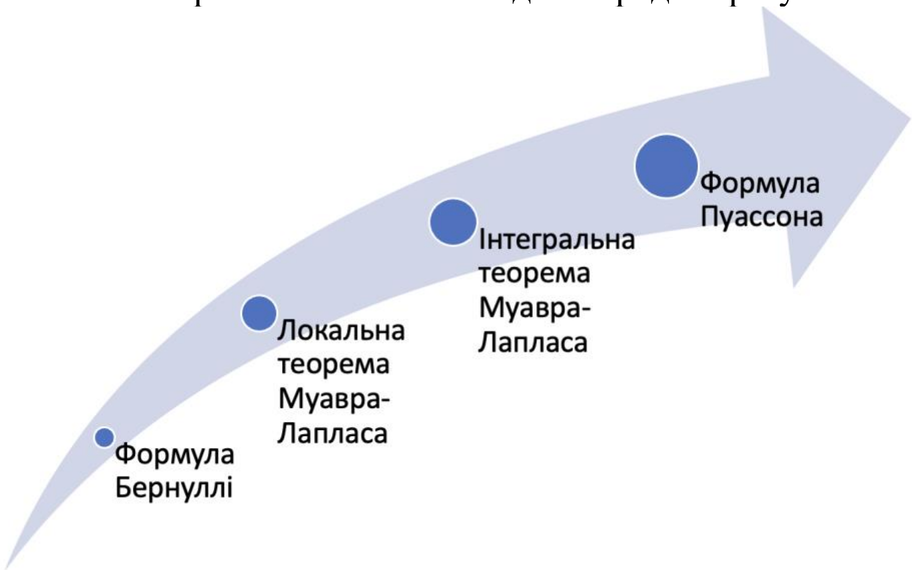

Рис. 4.1. Основні схеми для повторних незалежних випробувань

Окрім вищеназваних схем для розв'язання задач використовується Поліноміальна схема, яка є узагальненням схеми (формули) Бернуллі.

4.1. Формула Бернуллі. Найймовірніша кількість успіхів

У теорії ймовірності, формула Бернуллі дозволяє обчислити ймовірність успіхів у серії незалежних експериментів.

Теорема 4.1. *Якщо ймовірність* p *настання події* A *в кожному випробуванні постійна, то ймовірність* $P_n(m)$ *того, що подія* A *на ступить* m *раз в* n *незалежних випробуваннях, обчислюється за формулою* (4.1):

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \ (m = 1,2, \dots, n). \qquad (4.1)$$

Доведення. Нехай проводиться серія з n незалежних в сукупності випробувань. В кожному з цих випробувань подія A може з'явитись зі сталою ймовірністю p і не з'явитись з ймовірністю $q = 1 - p$. Така серія випробувань називається *схемою Бернуллі*.

Знайдемо ймовірність того, що в схемі Бернуллі подія A з'явиться рівно m разів $(0 \leq m \leq n)$. Настання події A будемо називати «успіхом»

Позначимо через $P_n(m)$ ймовірність того, що в серії з n незалежних в сукупності випробувань подія A з'явиться рівно m разів. Нехай подія A_i полягає у тому, що подія A з'явилась у i-му випробуванні. З теорем додавання і множення ймовірностей, дістанемо

$$\begin{aligned}
P_n(m) &= P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m \cdot \overline{A_{m+1}} \cdot \overline{A_{m+2}} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}) + \cdots \\
&+ P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_{n-m}} \cdot A_{n-m+1} \cdot A_{n-m+2} \cdot \ldots \cdot A_n) = \\
&= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_m) \cdot P(\overline{A_{m+1}}) \cdot P(\overline{A_{m+2}}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) + \cdots \\
&+ P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_{n-m}}) \cdot P(A_{n-m+1}) \cdot P(A_{n-m+2}) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = \\
&= \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-m} + \cdots + \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-m}.
\end{aligned}$$

Всього доданків $p^m \cdot q^{n-m}$ буде стільки, скількома способами можна з n випробувань вибрати m, а отже отримуємо (4.1).

Формула (4.1) називається *формулою Бернуллі*.

Формула Бернуллі широко використовується в задачах з дискретної ймовірності, наприклад:

- Задачі з монетами (ймовірність випадання певної кількості гербів при підкиданні монети кілька разів).
- Задачі з урнами (ймовірність витягнути певну кількість кульок певного кольору).
- Генетичні задачі (ймовірність певної кількості успадкувань ознаки).

Формула Бернуллі дає точні значення ймовірностей $P_n(m)$, проте при великих значеннях n вона приводить до громіздких обчислень.

Приклад 4.1. *Підкидаємо три рази монету. Знайдіть ймовірність того, що випало рівно два герба.*

Розв'язання. За формулою Бернуллі

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Відповідь. $P_3(2) = \frac{3}{8}$.

Приклад 4.2. *Яка ймовірність того, що при* n *підкиданнях грального кубика хоча б два рази з'явиться шістка* (*подія* A)?

Розв'язання. Знайдемо ймовірність події $\bar{A}$ – шістка з'явилась менше двох раз.

$$P(\bar{A}) = P_n(0) + P_n(1).$$

Оскільки $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, то

$$P(\bar{A}) = C_n^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n + C_n^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^n + n \cdot \frac{5^{n-1}}{6^n} =$$
$$= \frac{5^{n-1}}{6^n} \cdot (5 + n).$$

Тоді $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^{n-1}}{6^n} \cdot (5 + n)$.

Відповідь. $P(A) = 1 - \frac{5^{n-1}}{6^n} \cdot (5 + n)$.

Приклад 4.3. *Випадково зустрінутий на вулиці перехожий з ймовірністю* 0,3 – *шатен, з ймовірністю* 0,4 – *блондин, з ймовірністю* 0,2 – *брюнет і з ймовірністю* 0,1 – *рудий. Яка ймовірність того, що серед зустрінутих 6 людей* ***а)*** *не менше* 4 *блондинів,* ***б)*** *хоча б один рудий,* ***в)*** 3 *блондина і* 3 *шатена*?

Розв'язання.

а) $P_6(4 \le m \le 6) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 + C_6^5 \cdot p^5 \cdot q^1 + C_6^6 \cdot p^6 \cdot q^0$.

За умовою $p = 0{,}4; q = 0{,}6$.

Отже,

$$P_6(4 \le m \le 6) = 15 \cdot (0{,}4)^4 \cdot (0{,}6)^2 + 6 \cdot (0{,}4)^5 \cdot (0{,}6)^1 + 1 \cdot (0{,}4)^6 \cdot (0{,}6)^0 = 0{,}1792.$$

б) $P_6(1 \le m \le 6) = 1 - P_6(0)$.

В цьому випадку, за умовою, $p = 0{,}1;\ q = 0{,}9$.

Звідки

$$P_6(1 \le m \le 6) = 1 - (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^6 = 0{,}468559.$$

в) Розглянемо наступні події: $A =${зустрілись 3 блондина і 3 шатена}; $B_i =$ {i-тий зустрінутий – блондин}; $C_i =${i-тий зустрінутий – шатен} $(i = 1,2,\ldots,6)$.

Тоді

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6) + P(B_1 \cdot B_2 \cdot C_3 \cdot B_4 \cdot C_5 \cdot C_6) + \cdots + \\ + P(C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot B_4 \cdot B_5 \cdot B_6).$$

Доданків буде стільки, скількома способами можна вибрати трьох, наприклад, блондинів з шести чоловік, тобто C_6^3. Кожен доданок дорівнює $(0{,}3)^3 \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}3)^0$.

Тоді

$$P(A) = 20 \cdot (0{,}3)^3 \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}3)^0 = 0{,}03456.$$

Відповідь. а) $P_6(4 \le m \le 6) = 0{,}1792$; б) $P_6(1 \le m \le 6) = 0{,}468559$; в) $P(A) = 0{,}03456$.

Приклад 4.4. *Підводний човен атакує крейсер: випускає по ньому одну за одною* 4 *торпеди. Ймовірність попадання кожної дорівнює* $\frac{3}{4}$. *Кожна з торпед з однаковою ймовірністю може попасти в один з* 10 *відсіків крейсера. Якщо торпеди попали хоча б в два різних відсіки, то крейсер буде потоплено. Яка ймовірність цього* (*подія* A)?

Розв'язання. Нехай події A_i полягають у тому, що в крейсер попало i торпед $(i = 2,3,4)$. В цих випадках крейсер може бути потоплен.

Тоді

$$P(A_2) = P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128};$$

$$P(A_3) = P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64};$$

$$P(A_4)=P_4(4)=C_4^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{81}{256}.$$

Треба врахувати, що всі i торпед можуть попасти в один відсік; ймовірність цього $\frac{1}{10^{i-1}}$. Тоді крейсер не буде потоплено. Отже,

$$P(A)=P(A_2)\cdot P(A/A_2)+P(A_3)\cdot P(A/A_3)+P(A_4)\cdot P(A/A_4)=$$
$$=\frac{27}{128}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{2-1}}\right)+\frac{27}{64}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{3-1}}\right)+\frac{81}{256}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{4-1}}\right)\approx$$
$$\approx 0{,}9236.$$

Відповідь. $P(A)\approx 0{,}9236$.

Приклад 4.5. *Ймовірність виготовлення на автоматичному верстаті стандартної деталі дорівнює* 0,8. *Знайти ймовірності можливого числа появи бракованих деталей серед* 5 *відібраних.*

Розв'язання. Ймовірність виготовлення бракованої деталі $p=1-0{,}8=0{,}2$. Шукані ймовірності знаходимо за формулою (4.1):

$$P_5(0)=C_5^0\cdot(0{,}2)^0\cdot(0{,}8)^5=0{,}32768;$$
$$P_5(1)=C_5^1\cdot(0{,}2)^1\cdot(0{,}8)^4=0{,}4096;$$
$$P_5(2)=C_5^2\cdot(0{,}2)^2\cdot(0{,}8)^3=0{,}2048;$$
$$P_5(3)=C_5^3\cdot(0{,}2)^3\cdot(0{,}8)^2=0{,}0512;$$
$$P_5(4)=C_5^4\cdot(0{,}2)^4\cdot(0{,}8)^1=0{,}0064;$$
$$P_5(5)=C_5^5\cdot(0{,}2)^5\cdot(0{,}8)^0=0{,}00032.$$

Отримані результати представимо у вигляді таблиці 4.1.

Таблиця 4.1. Результати для можливого числа бракованих деталей

m	0	1	2	3	4	5
$P_n(m)$	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Згідно табл. 4.1, отримані ймовірності зобразимо графічно точками з координатами $(m, P_n(m))$. Поєднуючи ці точки, отримаємо багатокутник, або полігон, розподілу ймовірностей (рис. 4.1).

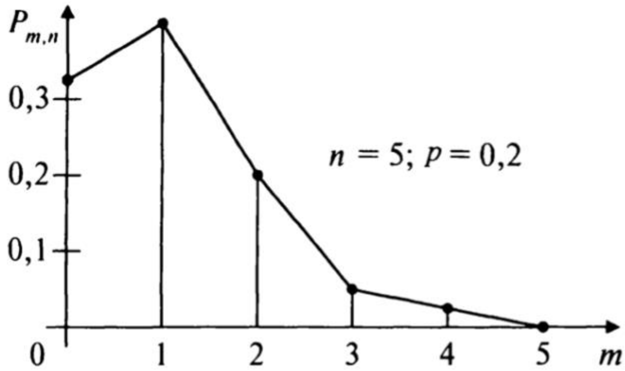

Рис. 4.1. Багатокутник розподілу при $n=5$

Розглядаючи багатокутник розподілу ймовірностей (рис. 4.1), ми бачимо, що є такі значення m (в даному випадку, одне – $m_0=1$), що мають найбільшу ймовірність $P_n(m)$.

Відповідь. $P_5(0) = 0{,}32768; P_5(1) = 0{,}4096; P_5(2) = 0{,}2048; P_5(3) = 0{,}0512; P_5(4) = 0{,}0064; P_5(5) = 0{,}00032.$

Число m_0 настання події A в n незалежних випробуваннях називається *найймовірніше*, якщо ймовірність здійснення цієї події $P_n(m)$ буде, принаймні, не менше ймовірностей інших подій $P_n(m)$ при будь-якому n.

Теорема 4.2. *Найймовірніше число* m_0 *появ події* A *в* n *випробуваннях визначається з нерівностей* (4.2):

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p. \tag{4.2}$$

Доведення. Для знаходження m_0 запишемо систему нерівностей

$$\begin{cases} P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1), \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1). \end{cases}$$

З першої нерівності, враховуючи формулу Бернуллі, матимемо

$$\frac{n!}{m_0! \cdot (n - m_0)!} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0 + 1)! \cdot (n - m_0 - 1)!} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}.$$

Оскільки

$$(m_0 + 1)! = m_0! \cdot (m_0 + 1),$$

то $\frac{1}{n-m_0} \cdot q \geq \frac{1}{m_0+1} \cdot p$, або $(m_0 + 1) \cdot q \geq (n - m_0) \cdot p$.

Остаточно $m_0 \geq n \cdot p - q$, враховуючи, що $p + q = 1$.

Аналогічно для другої нерівності $m_0 \geq n \cdot p + p$.

Об'єднуючи отримані рішення двох нерівностей, приходимо до подвійного нерівності:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p.$$

Оскільки $n \cdot p + p - (n \cdot p - q) = p + q = 1$, число m_0 завжди існує, причому, якщо $n \cdot p + q$ – ціле число, то найймовірніших чисел буде два: $m_0 = n \cdot p - q$ і $m_0 = n \cdot p + p$.

Якщо ймовірність появи події A в кожному з n випробувань дорівнює p, то кількість випробувань, які необхідно здійснити, щоб з ймовірністю P можна було стверджувати, що подія A відбудеться хоча б один раз, обчислюється за формулою (4.3):

$$n \geq \frac{ln\,(1-P(A))}{ln\,(1-p)}. \tag{4.3}$$

Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m пов’язане з певними труднощами.

Приклад 4.6. *Ймовірність відмовлення кожного приладу при його випробуванні складає* 0,2. *Скільки приладів потрібно випробувати, щоб з ймовірністю не менше* 0,9 *отримати хоча б один прилад, який відмовить.*

Розв’язання. Нехай $A =$\{при n випробувань хоча б один прилад відмовить\}.

Тоді $p = 0{,}2$; $P(A) = 0{,}9$. Одержимо за формулою (4.3):

$$n \geq \frac{ln(0,1)}{ln(0,8)} \approx 10,3;\ n \geq 11.$$

Відповідь. Необхідно випробувати не менше 11 приладів.

4.2. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Локальна теорема Муавра-Лапласа є важливим результатом теорії ймовірностей. Вона апроксимує ймовірність появи події A рівно m разів в серії з n повторних незалежних випробувань (при великих значеннях параметра n).

Теорема 4.3. *Якщо ймовірність* p *появи події* A *у кожному випробуванні стала і відмінна від* 0 *і* 1*, то ймовірність* $P_n(m)$ *того, що подія* A *відбудеться* m *разів в* n *випробуваннях для достатньо великих значень* n*, наближено обчислюється за формулою* (4.4):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x), \tag{4.4}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – *функція Гауса, таблиця значень якої наведено в додатку* 1 *Гмурмана, де* $x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$*. Чим більше* n*, тим точніше формула* (4.4). *Вона дає невелику похибку, якщо* $n \cdot p \cdot q \geq 10$.

Доведення. Процес доведення має наступні етапи.

Формула Бернуллі

Ймовірність того, що випадкова величина A настане рівно m разів в серії з n експериментів обчислюється за формулою (4.1).

Формула Стірлінга

Для великих n використовуємо наближення Стірлінга для факторіалів:

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Застосуємо формулу Стірлінга до біноміального коефіцієнта:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \approx \frac{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (n-m)} \cdot \left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}}.$$

Спрощення

Спрощуємо це наближення:

$$C_n^m \approx \frac{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot (n-m)} \cdot \left(\frac{n-m}{e}\right)^{n-m}}$$

Далі:

$$C_n^m \approx \frac{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot m \cdot (n-m)}}.$$

Підставлення

Підставимо це у формулу для $P_n(m)$:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \approx \frac{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^m \cdot \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot m \cdot (n-m)}} \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Перепишемо в зручнішій формі:

$$P_n(m) \approx \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot m \cdot (n-m)}} \cdot \left(\frac{n^n}{m^m \cdot (n-m)^{n-m}}\right) \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Логарифмічне перетворення:

Враховуючи $m = n \cdot p + \Delta$, логарифмуючи 2, 3 та 4 множники, а також застосовуючи розкладання в ряд Тейлора, отримуємо:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot p \cdot q}} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2 \cdot n \cdot p \cdot q}},$$

звідки й отримуємо формулу (4.4).

Властивості

1. *Функція* $\varphi(x)$ *парна*: $\varphi(x) = \varphi(-x)$;

2. *Функція* $\varphi(x)$ *– монотонно спадна* (*практично можна вважати, що для* $x > 4$: $\varphi(x) \approx 0$).

Значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	[illegible]	1692	[illegible]	[illegible]	1626	[illegible]	1582	1561	1540	[illegible]

Рис. 4.2. Фрагмент таблиці функції Гауса

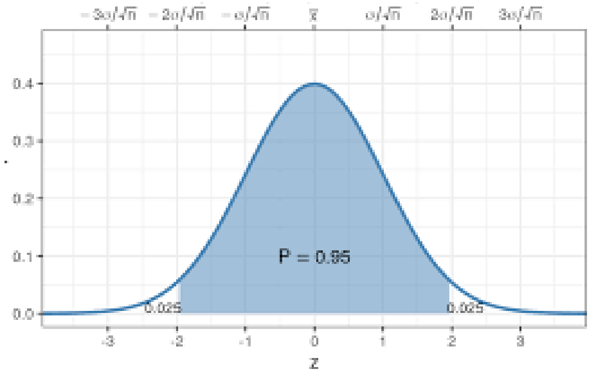

Рис. 4.3. Функція Гауса

Приклад 4.7. *Перевірки податкової інспекції показали, що кожне друге мале підприємство порушує фінансову дисципліну.* **1.** *Знайти ймовірність того, що серед* 800 *малих підприємств району порушили фінансову дисципліну*: 380 *підприємств.* **2.** *Яке найймовірніше число малих підприємств, що порушили фінансову дисципліну*?

Розв'язання. 1. За умовою $p = 0{,}5$. Число малих підприємств достатньо велике $n = 800$, тому застосуємо локальну формулу Муавра-Лапласа, крім того

$$n \cdot p \cdot q = 800 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5) = 200.$$

Для цього знайдемо

$$x = \frac{380 - 800 \cdot 0{,}5}{\sqrt{800 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -1{,}414.$$

За формулою (4,4) знайдемо:

$$P_{800}(380) \approx \frac{\varphi(-1{,}414)}{\sqrt{800 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \approx \frac{\varphi(1{,}414)}{\sqrt{200}} \approx \frac{0{,}1468}{\sqrt{200}} \approx 0{,}0106.$$

2. Тепер знайдемо найймовірніше число малих підприємств, що порушили фінансову дисципліну.

Маємо: $800 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \leq m_0 \leq 800 \cdot 0{,}5 + 0{,}5$, тобто $399{,}5 \leq m_0 \leq 400{,}5$. Звідси $m_0 = 400$.

Ймовірність цієї події, з-за того, що $x = 400 - 800 \cdot 0{,}5 = 0$, дорівнює

$$P_{800}(400) \approx \frac{\varphi(0)}{\sqrt{200}} \approx \frac{0{,}3989}{\sqrt{200}} \approx 0{,}0282.$$

Відповідь. 1. $P_{800}(380) \approx 0{,}0106; m = 400$; 2. $P_{800}(400) \approx 0{,}0282$.

4.3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа є результатом теорії ймовірностей, який дозволяє апроксимувати ймовірність появи події A від m_1 до m_2 разів в серії з n повторних незалежних випробувань.

Теорема 4.4. *Якщо ймовірність* p *появи події* A *в кожному випробуванні стала і відмінна від* 0 *і* 1, *то ймовірність того, що число* m *появ події* A *в* n *незалежних випробуваннях буде міститься у границях від* m_1 *до*

m_2 *(включно), для достатньо великих* n *наближено обчислюється за формулою* (4.5):

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (4.5)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ *– функція Лапласа, таблиця значень якої наведена в додатку* 2 *Гмурмана, де* $x_1 = \frac{m_1 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $x_2 = \frac{m_2 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$.

Доведення. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа є наслідком центральної граничної теореми. Доведення буде надано пізніше.

Формула (4.5) дає невелику похибку для $n \cdot p \cdot q \ge 10$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,49	0,1879	0,98	0,3365	1,47	0,4292
0.01	0.0040	0.50	0.1915	0.99	0.3389	1.48	0.4306
0.02	0.0080	0.51	0.1950	1.00	0.3413	1.49	0.4319
0.03	0.0120	0.52	0.1985	1.01	0.3438	1.50	0.4332
0.04	0.0160	0.53	0.2019	1.02	0.3461	1.51	0.4345
0.05	0.0199	0.54	0.2054	1.03	0.3485	1.52	04357
0.06	0.0239	0.55	0.2088	1.04	0.3508	1.53	0.4370
0.07	0.0279	0.56	0.2123	1.05	0.3531	1.54	0.4382
0.08	0.0319	0.57	0.2157	1.06	0.3554	1.55	0.4394
0.09	0.0359	0.58	0.2190	1.07	0.3577	1.56	0.4406
0.10	0.0398	0.59	0.2224	1.08	0.3599	1.57	0.4418
0.11	0.0438	0.60	0.2257	1.09	0.3621	1.58	0.4429
0.12	0.0478	0.61	0.2291	1.10	0.3643	1.59	0.4441
0.13	0.0517	0.62	0.2324	1.11	0.3665	1.60	0.4452
0.14	0.0557	0.63	0.2357	1.12	0.3686	1.61	0.4463
0.15	0.0596	0.64	0.2389	1.13	0.3708	1.62	0.4474
0.16	0.0636	0.65	0.2422	1.14	0.3729	1.63	0.4484
0.17	0.0675	0.66	0.2454	1.15	0.3749	1.64	0.4495
0.18	0.0714	0.67	0.2486	1.16	0.3770	1.65	0.4505
0.19	0.0753	0.68	0.2517	1.17	0.3790	1.66	0.4515
0.20	0.0793	0.69	0.2549	1.18	0.3810	1.67	0.4525
0.21	0.0832	0.70	0.2580	1.19	0.3830	1.68	0.4535
0.22	0.0871	0.71	0.2611	1.20	0.3949	1.69	0.4545
0.23	0.0910	0.72	0.2642	1.21	0.3869	1.70	0.4554
0.24	0.0948	0.73	0.2673	1.22	0.3888	1.71	0.4564
0.25	0.0987	0.74	0.2703	1.23	0.3907	1.72	0.4573
0.26	0.1026	0.75	0.2734	1.24	0.3925	1.73	0.4582
0.27	0.1064	0.76	0.2764	1.25	0.3944	1.74	0.4591
0.28	0.1103	0.77	0.2794	1.26	0.3962	1.75	0.4599
0.29	0.1141	0.78	0.2823	1.27	0.3980	1.76	0.4608
0.30	0.1179	0.79	0.2852	1.28	0.3997	1.77	0.4616
0.31	0.1217	0.80	0.2881	1.29	0.4015	1.78	0.4625
0.32	0.1255	0.81	0.2910	1.30	0.4032	1.79	0.4633
0.33	0.1293	0.82	0.2939	1.31	0.4049	1.80	0.4641
0.34	0.1331	0.83	0.2967	1.32	0.4066	1.81	0.4649
0.35	0.1368	0.84	0.2995	1.33	0.4082	1.82	0.4656
0.36	0.1406	0.85	0.3023	1.34	0.4099	1.83	0.4664
0.37	0.1443	0.86	0.3051	1.35	0.4115	1.84	0.4671
0.38	0.1480	0.87	0.3078	1.36	0.4131	1.85	0.4678
0.39	0.1517	0.88	0.3106	1.37	0.4147	1.86	0.4686
0.40	0.1554	0.89	0.3133	1.38	0.4162	1.87	0.4693
0.41	0.1591	0.90	0.3159	1.39	0.4177	1.88	0.4699
0.42	0.1628	0.91	0.3186	1.40	0.4192	1.89	0.4706
0.43	0.1664	0.92	0.3212	1.41	0.4207	1.90	0.4713
0.44	0.1700	0.93	0.3238	1.42	0.4222	1.91	0.4719
0.45	0.1736	0.94	0.3264	1.43	0.4236	1.92	0.4726
0.46	0.1772	0.95	0.3289	1.44	0.4251	1.93	0.4732
0.47	0.1808	0.96	0.3315	1.45	0.4265	1.94	0.4738
0.48	0.1844	0.97	0.3340	1.46	0.4279	1.95	0.4744

Рис. 4.4. Фрагмент таблиці значень функції Лапласа

Графік функції Лапласа представлено на рис (4.3), а фрагмент таблиці значень на рис. 4.4.

Властивості

1. *Функція Лапласа* $\varPhi(x)$ *непарна* $\left(\varPhi(-x) = -\varPhi(x)\right)$;

2. *Функція Лапласа монотонно зростаюча*;

3. $\varPhi(x) \to 0{,}5$, *для* $x \to +\infty$ (*для* $x \geq 5$ *можна вважати, що* $\varPhi(x) = 0{,}5$).

Приклад 4.8. *Ймовірність появи події в кожному з* 100 *незалежних випробувань стала і рівна* $p = 0{,}8$. *Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше* 75 *раз і не більше* 90 *разів.*

Розв'язання. Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа (4.5).

За умовою, $n = 100$; $p = 0{,}8; q = 0{,}2; m_1 = 75; m_2 = 90$. Обчислимо x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{90 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5.$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, тобто $\varPhi(-x) = -\varPhi(x)$, отримаємо:

$$P_{100}(75 \leq m \leq 90) = \varPhi(2{,}5) - \varPhi(-1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Відповідь. $P_{100}(75 \leq m \leq 90) = 0{,}8882$.

Приклад 4.9. *Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань рівна* $0{,}8$. *Скільки потрібно виконати випробувань, щоб з ймовірністю* $0{,}9$ *можна було очікувати, що подія з'явиться не менше* 75 *разів*?

Розв'язання. За умовою $p = 0{,}8; q = 0{,}2; m_1 = 75; m_2 = n; P_n(75 \leq m \leq n) = 0{,}9$.

Скористаємося інтегральною теоремою Лапласа (4.5).

Підставляючи дані завдання, отримаємо

$$0{,}9 = \varPhi\left(\frac{n - n \cdot 0{,}8}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \varPhi\left(\frac{75 - n \cdot 0{,}8}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right)$$

або

$$0{,}9 = \varPhi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \varPhi\left(\frac{75 - n \cdot 0{,}8}{0{,}4 \cdot \sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, число випробувань $n > 75$, тому $\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{75}}{2} \approx 4{,}33$.

Оскільки функція Лапласа зростає і $\varPhi(4{,}33) \approx 0{,}5$, то можна покласти $\varPhi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0{,}5$. Отже,

$$0{,}9 = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{75 - n \cdot 0{,}8}{0{,}4 \cdot \sqrt{n}}\right).$$

Таким чином, отримуємо рівняння (4.6)

$$\Phi\left(\frac{75-n\cdot 0{,}8}{0{,}4\cdot\sqrt{n}}\right) = -0{,}4. \qquad (4.6)$$

За таблицею у рис. 4.4 знайдемо $\Phi(1{,}28) = 0{,}4$. Звідси з співвідношення (4.6), враховуючи, що функція Лапласа непарна, отримаємо

$$\frac{75 - n \cdot 0{,}8}{0{,}4 \cdot \sqrt{n}} = -1{,}28.$$

Розв'язавши це рівняння, як квадратне відносно $\sqrt{n}$, отримаємо $\sqrt{n} = 10$. Отже, шукане число випробувань $n = 100$.

Відповідь. $n = 100$.

Наслідки з інтегральної теореми Муавра-Лапласа

1. $P_n(|m - n \cdot p| \leq \varepsilon) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\right);$

2. $P_n\left(\alpha \leq \frac{m}{n} \leq \beta\right) \approx \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$ *,де* $z_1 = \frac{\alpha-p}{\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}}$, $z_2 = \frac{\beta-p}{\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}}$;

3. $P_n(|\frac{m}{n} - p| \leq \varepsilon) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p\cdot q}}\right).$

Доведення. Доведемо властивість 1.

$$P_n(|m - n \cdot p| \leq \varepsilon) = P_n(n \cdot p - \varepsilon \leq m \leq n \cdot p + \varepsilon) \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{n \cdot p + \varepsilon - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) - \Phi\left(\frac{n \cdot p - \varepsilon - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right).$$

Наслідки 2 і 3 доводяться аналогічно.

Приклад 4.10. *Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює* 0,9. *Навмання беруть* 200 *виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з ймовірністю* 0,96.

Розв'язання. За умовою задачі: $n = 200$; $p = 0{,}9$; $P_n(|\frac{m}{n} - 0{,}9| \leq \varepsilon) \approx 0{,}96$. Підставивши ці значення в наслідок 3, дістанемо:

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}9\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{200}}{\sqrt{0{,}9\cdot 0{,}1}}\right) \approx 0{,}96;$$

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{200}}{\sqrt{0,9 \cdot 0,1}}\right) \approx 0,96;$$
$$\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{200}}{\sqrt{0,9 \cdot 0,1}}\right) \approx 0,48;$$
$$\varepsilon \cdot 27,14 = 2,06;$$
$$\varepsilon = 0,044.$$

Тоді

$$\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| \leq 0,044;$$
$$-0,044 \leq \frac{m}{n} - 0,9 \leq 0,044;$$
$$0,9 - 0,044 \leq \frac{m}{n} \leq 0,9 + 0,044;$$
$$0,856 \leq \frac{m}{n} \leq 0,944.$$

Відповідь. $0,856 \leq \frac{m}{n} \leq 0,944$.

4.4.Формула Пуассона

Формула Пуассона (4.7) використовується для обчислення ймовірності того, що певна кількість подій відбудеться за фіксований інтервал часу або в певній області простору, коли події відбуваються незалежно одна від одної і з постійною середньою швидкістю.

Теорема 4.5. *Якщо ймовірність p появи події A у кожному випробуванні прямує до 0 $(p \to 0)$ з одночасним необмеженим зростанням числа n випробувань $(n \to \infty)$, то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A відбудеться m разів в n незалежних випробувань, обчислюється за формулою* (4.7):

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \tag{4.7}$$

де $\lambda = n \cdot p \leq 10$.

Доведення. Розглянемо випадковий процес (серію з n експериментів), у якому події відбуваються незалежно одна від одної, з постійною середньою швидкістю λ.

Ймовірність подій за малий інтервал часу Δt

Припустимо, що Δt є малим інтервалом часу. Тоді ймовірність того, що відбудеться одна подія в цьому інтервалі часу, пропорційна Δt:

$$P_n(m = 1 \text{ подія в } \Delta t) = p \approx \lambda \cdot \Delta t.$$

Ймовірність того, що події не відбудеться в Δt:

$$P_n(m = 0 \text{ подій в } \Delta t) = q = 1 - p \approx 1 - \lambda \cdot \Delta t.$$

Ймовірність того, що відбудеться більше ніж одна подія в Δt, настільки мала, що її можна знехтувати:

$$P_n(m \geq 2 \text{ подій в } \Delta t) \approx 0.$$

Розбиття інтервалу часу

Розділимо інтервал часу $[0; t]$ на n малих інтервалів $[0;\Delta t]$, де $\Delta t = \frac{t}{n}$.

Ймовірність k подій

Нехай k подій відбудеться за інтервал часу $[0; t]$. Ми можемо вважати, що ці k подій відбуваються у n малих інтервалах часу $[0;\Delta t]$. Тоді за формулою Бернуллі (4.1):

$$P_n(m) = C_n^m \cdot (\lambda \cdot \Delta t)^m \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t)^{n-m}.$$

Підставимо $\Delta t = \frac{t}{n}$:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot \left(\lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^{n-m}.$$

Границі при $n \to \infty$:

Коли $n \to \infty$, вираз $\left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^{n-m}$. можна наблизити за допомогою експоненти:

$$\left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^n \to e^{-(\lambda \cdot t)}.$$

Тоді:

$$\left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^{-m} \to 1.$$

Таким чином, маємо:

$$P_n(m) = \lim_{n\to\infty} \left(C_n^m \cdot \left(\lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^{n-m}\right).$$

Комбінаторний вираз

Комбінаторний вираз для біноміального коефіцієнта:

$$C_n^m = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Коли $n \to \infty$, ми можемо використовувати:

$$C_n^m \approx \frac{n^k}{k!}.$$

Тоді:

$$P_n(m) \approx \frac{(\lambda \cdot t)^m \cdot e^{-(\lambda \cdot t)}}{m!},$$

звідки підставивши $t = 1$, отримуємо (4.7).

Формулу Пуассона застосовують для подій, що рідко трапляються, таблиця значень якої наведена на рис 4.5.

m	λ								
	0.1	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.0905	0.1638	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3596	0.3696
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494
4	-	-	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111
5	-	-	-	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020
6	-	-	-	-	-	-	0.0001	0.0002	0.0003

Рис. 4.5. Таблиця значень $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$

m	λ								
	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1	0.3679	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011
2	0.1839	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0055
3	0.0313	0.1804	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150
4	0.0153	0.0902	0.1680	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337
5	0.0081	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607
6	0.0005	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911
7	0.0001	0.0034	0.0216	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1318
8	-	0.0009	0.0081	0.0298	0.0655	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318
9	-	0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318
10	-	-	0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1180
11	-	-	0.0002	0.0019	0.0034	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970
12	-	-	0.0001	0.0006	0.0013	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728
13	-	-	-	0.0002	0.0005	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504
14	-	-	-	0.0001	0.0002	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324
15	-	-	-	-	-	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194
16	-	-	-	-	-	0.0003	0.0014	0.0045	0.0109
17	-	-	-	-	-	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058
18	-	-	-	-	-	-	0.0002	0.0009	0.0029
19	-	-	-	-	-	-	0.0001	0.0004	0.0014
20	-	-	-	-	-	-	-	0.0002	0.0006
21	-	-	-	-	-	-	-	0.0001	0.0003
22	-	-	-	-	-	-	-	-	0.0001

Рис. 4.6. Таблиця значень $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$ (продовження)

Приклад 4.11. *База отримує* 10000 *стандартних виробів. Транспортування цих виробів приводить до пошкодження у середньому* 0,02% *виробів. Знайти ймовірність того, що з* 10000 *виробів*: **1.** *буде пошкоджено*: ***а)*** 3 *вироби*; ***б)*** *хоча б* 3 *вироби*; **2.** *не буде пошкоджено*: ***а)*** 9997 *виробів*; ***б)*** *хоча б* 9997 *виробів.*

Розв'язання. 1. а) Ймовірність того, що транспортування пошкодить виріб, дорівнює 0,0002. Оскільки p – мале, n – велике і $\lambda = n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2 \leq 10$, ми можемо застосувати формулу Пуассона:

$$P_{10000}(3) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!}.$$

Використовуючи таблицю рис. 4.5, отримаємо: $P_{10000}(3) = 0{,}18045$.

б) Ймовірність $P_{10000}(m \geq 3)$ знайдемо так:

$$P_{10000}(m \geq 3) = 1 - P_{10000}(m < 3)$$
$$= 1 - \left(P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2)\right)$$
$$= 1 - (0{,}13534 + 0{,}27067 + 0{,}27067) = 0{,}32332.$$

2. а) У даному випадку $p = 1 - 0{,}0002 = 0{,}9998$. Потрібно знайти $P_{10000}(9997)$.

Оскільки ймовірність p велика, ми не можемо застосувати формулу Пуассона. Крім того, оскільки $n \cdot p \cdot q \approx 2 < 10$, ми не можемо скористатись інтегральною формулою Муавра – Лапласа. Але подія {не пошкоджено 9997 виробів з 10000} рівносильна події {пошкоджено 3 вироби з 10000}, ймовірність якої ми вже знайшли. Тому $P_{10000}(9997) = 0{,}18045$.

б) Подія {не пошкоджено хоча б 9997 з 10000 виробів} рівносильна події {пошкоджено не більше, ніж 3 вироби з 10000}, для якої $p = 0{,}0002$. Тому:

$$P_{10000}(m \leq 3) = P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{1000}(2) + P_{10000}(3) =$$
$$= 0{,}13534 + 0{,}27067 + 0{,}27067 + 0{,}18045 = 0{,}85713.$$

Відповідь. 1. а) $P_{10000}(3) = 0{,}18045$; б) $P_{10000}(m \geq 3) = 0{,}32332$; 2. а) $P_{10000}(9997) = 0{,}18045$; б) $P_{10000}(m \leq 3) = 0{,}85713$.

4.5. Поліноміальна схема

В *поліноміальній* (*мульниноміальній*) схемі здійснюється перехід від послідовності незалежних випробувань з двома наслідками (A та $\bar{A}$) до послідовності незалежних випробувань з k наслідками ($A_1, A_2, \dots, A_k$), які виключають одне одного. При цьому в кожному випробуванні події $A_1, A_2, \dots, A_k$ настають з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_k$ відповідно. Тоді ймовірність $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ того, що в серії з n випробувань подія A_1 настане m_1 разів; подія A_2 настане m_2 разів;…; подія A_k настане m_k разів ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$) визначається за формулою (4.8):

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) отримано з урахуванням того, що подія $A =${в серії з n випробувань подія A_1 настане m_1 разів; подія A_2 настане m_2 разів;…; подія A_k настане m_k разів}, ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$) можна представити, як суму несумісних подій, ймовірності яких за теоремою про множення незалежних подій дорівнюють $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$).

В частинному випадку $m_1 = m; m_2 = n - m$; $p_1 = p; p_2 = q$. Таким чином, отримуємо формулу Бернуллі (4.1).

Приклад 4.12. *В урні міститься* 10 *кульок*: 5 *червоних,* 3 *зелених та* 2 *сині. З урни навмання беруть* 5 *кульок. Яка ймовірність того, що серед них будуть*: 2 *червоних,* 2 *зелених та* 2 *синя кульки*?

Розв'язання. З умови задачі отримуємо: $m_1 = 2$; $m_2 = 2; m_3 = 1$; $n = 5$; $p_1 = 0{,}5; p_2 = 0{,}3; p_3 = 0{,}2$.

За формулою (4.8):

$$P_5(2,2,1) = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}135.$$

Відповідь. $P_5(2,2,1) = 0{,}135.$