ЛЕКЦІЯ 2

ПАРАДОКСИ В ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ЙМОВІРНІСНИЙ ПРОСТІР. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ. НЕЗАЛЕЖНІ ПОДІЇ. НЕСУМІСНІ ПОДІЇ

2.1. Парадокси в теорії ймовірностей

Парадокс (грец. Παράδοξος – «несподіваний; дивний», від грец. Παρα – «проти, всупереч» і грец. Δόξα – «думка, уявлення; припущення») в широкому сенсі – висловлювання, думка, міркування, яке розходиться із загальноприйнятою думкою і здається нелогічним або таким, що суперечить здоровому глузду (найчастіше лише при поверхневому розумінні).

У логіці «парадоксом» називають формально-логічні суперечності, які виникають при збереженні логічної правильності міркування. Парадокс виникає, коли два взаємовиключних (суперечать) судження виявляються в рівній мірі доказовими.

Парадокси в теорії ймовірностей можуть демонструвати, як інтуїція людей часто виявляється неправильною в контексті математичних ймовірностей. Ось кілька відомих парадоксів у теорії ймовірностей.

Парадокс Бертрана

Парадокс Бертрана – проблема класичного визначення теорії ймовірностей. Жозеф Бертран описав парадокс у своїй роботі Calcul des probabilités (1888) в якості прикладу того, що ймовірність не може бути чітко визначена, поки не визначений механізм або метод вибору випадкової величини.

<u>Парадокс</u>

Розглянемо рівносторонній трикутник, вписаний в коло. Навмання вибирається хорда кола. Яка ймовірність того, що обрана хорда довша сторони трикутника?

<u>Розв'язання</u>

Бертран запропонував три рішення, очевидно вірних, але дають різний результат.

1. <u>Метод «випадкових кінців»</u>: навмання виберемо дві точки на колі і проведемо через них хорду. Щоб порахувати шукану ймовірність, уявімо, що трикутник повернутий так, що одна з його вершин збігається з кінцем хорди. Зауважимо, що якщо інший кінець хорди лежить на дузі між двома іншими вершинами трикутника, то довжина хорди більше сторони трикутника. Довжина розглянутої дуги дорівнює третині довжини кола, слідуючи класичним визначенням, шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{3}$ (рис. 2.1).

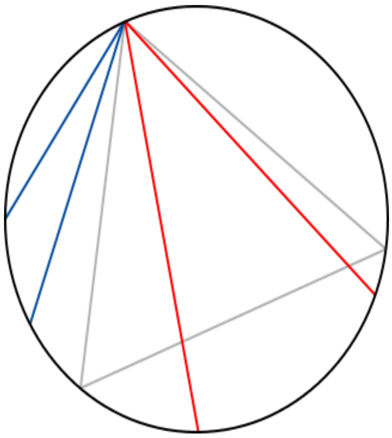

Рис 2.1. Випадкові хорди, обрані за методом 1; червоні – довші сторони трикутника, сині – коротші.

2. Метод «випадкового радіусу»: зафіксуємо радіус кола, навмання виберемо точку на радіусі. Побудуємо хорду, перпендикулярну зафіксованим радіусу, що проходить через обрану точку. Для знаходження шуканої ймовірності уявімо, що трикутник повернутий так, що одна з його сторін перпендикулярна зафіксованим радіусу. Хорда довше сторони трикутника, якщо її центр ближче до центру, ніж точка перетину трикутника з зафіксованим радіусом. Сторона трикутника ділить навпіл радіус, отже ймовірність вибрати хорду довше сторони трикутника $\frac{1}{2}$ (рис. 2.2).

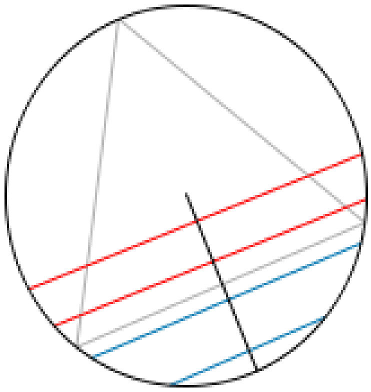

Рис 2.2. Випадкові хорди, обрані за методом 2

3. Метод «випадкового центру»: виберемо навмання довільну точку всередині кола і побудуємо хорду з центром у вибраній точці. Хорда довше сторони рівностороннього трикутника, якщо обрана точка знаходиться всередині кола, вписаного в трикутник. Площа вписаного кола є $\frac{1}{4}$ від площі більшого, значить, вихідна ймовірність дорівнює $\frac{1}{4}$ (рис. 2.3).

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a, R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a.$$

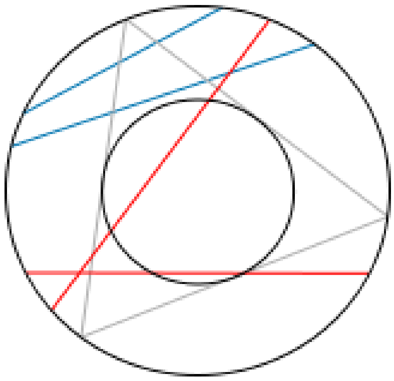

Рис 2.3. Випадкові хорди, обрані за методом 3

Парадокс де Мере

Історія парадоксу

Мабуть, Лейбніц вперше розказав про те, як відомий французький гравець де Мере по дорозі в свій маєток в Пуату зустрів Блеза Паскаля і поставив перед ним дві задачі. Ці задачі Паскаль обговорював у 1654 р. у своєму листуванні з П′єром де Ферма, що проживав у Тулузі. Обидва вчених дійшли однакового результату, що вельми обрадувало Паскаля. В своєму листі він відмічав: «Я бачу, що істина однакова і в Тулузі, і в Парижі» Ейнштейн Оре, професор Йєльського університету, правада, стверджує, що парадокси, приписувані де Мере, насправді були відомі набагато раніше, справа лише в тому, що Паскаль про них не знав. Невірно й те, що шевальє був пристрасним гравцем. Парадокси цікавили його скоріш теоретично, і тому його не задовольнило, що Паскаль «всього-навсього» розв′язав задачу, підтвердивши правильну відповідь, яку де Мере вже знав. Шевальє не зміг зрозуміти, як пояснюється парадокс.

Парадокс

При чотирьох підкиданнях одного грального кубика ймовірність того, що як мінімум один раз випаде 1*, більша* $\frac{1}{2}$*. В той же час при* 24 *підкиданнях двох кубиків ймовірність того, що як мінімум один раз випадуть дві* 1 *одночасно, менша* $\frac{1}{2}$*. Це здається дивним, оскільки шанси отримати одну* 1 *в шість раз більші, ніж шанси випадання двох* 1*, а* 24 *якраз в 6 раз більше* 4.

Пояснення парадоксу

Прості підрахунки показують, що при k підкиданнях одного кубика потрібна ймовірність дорівнює

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^k,$$

що менше $\frac{1}{2}$ при $k=3$ і більше $\frac{1}{2}$ при $k=4$. Так само друга потрібна ймовірність дорівнює

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^k,$$

що менше $\frac{1}{2}$ при $k=24$ і більше $\frac{1}{2}$, починаючи з $k=25$. Отже, «критичне значення» для одного кубика дорівнює 4, а для двох дорівнює 25. Цей безумовно правильний розв′язок не задовольнив де Мере, оскільки відповідь він вже знав, але з розв′язку так і не зрозумів, чому відповідь не узгоджується з «правилом пропорційності критичних значень», стверджуючим, що коли ймовірність зменшується в 6 раз, то критичне значення зростає в 6 раз ($4:6 = 24:36$). Абрахам де Муавр (1667-1754) у своїй книзі «Доктрина шансів», опублікованій в 1718 р., довів, що «правило пропорційності критичних значень» недалеке від істини. Так, якщо p – ймовірність деякої події, то критичне значення k можна знайти з рівняння

$$(1-p)^x = \frac{1}{2}.$$

Тоді критичне значення буде найменшим цілим числом, більшим за x.

Оскільки

$$x = -\frac{ln2}{ln(1-p)} = \frac{ln2}{(p+\frac{p^2}{2}+\cdots)},$$

то при можливості знехтувати значенням $\frac{p^2}{2}$ «правило пропорційності критичних значень» близьке до істини. Сам де Муавр використовував наближену формулу $x \approx \frac{ln2}{p}$ для дослідження питань, пов′язаних з Лондонською лотереєю. В цьому випадку значення p було $\frac{1}{32}$, а для $p = \frac{1}{32}$ точне значення $x = 22{,}135$, а наближена формула дає $22{,}08$. Парадокс де Мере виникає тому, що при $p = \frac{1}{6}$ величина $\frac{p^2}{2}$ і інші доданки в знаменнику ще не досить малі. Отже, «правило пропорційності критичних значень» є правилом, вірним асимптотично, і помилка від його застосування росте з ростом p. Це й є справжнім розв′язком парадоксу.

Зауваження

Типове неправильне розв′язання задачі де Мере йде аж до Кардано. Він міркував так: ймовірність отримати пару одиниць дорівнює $\frac{1}{32}$, значить, щоб з імовірністю $\frac{1}{2}$ отримати пару одиниць як мінімум один раз, треба зробити рівно 18 підкидань. Якщо так міркувати, то при підкиданні кубика більше 36 раз така ймовірність стане більшою 1!.

Парадокс роздачі подарунків; травми, спричинені кіньми

Історія парадоксу

Парадокс роздачі подарунків розглядався в книзі Ремона де Монмора, опублікованій в Парижі в 1708 р.

Парадокс

Декілька чоловік вирішили зробити один одному подарунки таким чином. Кожен з них приносить подарунок. Подарунки складаються разом, змішуються і випадково розподіляються серед учасників. Парадоксально, але ймовірність того, що ніхто не отримає свій власний подарунок, менша $\frac{1}{2}$ (*крім випадку, коли учасників двоє, і ця ймовірність дорівнює* $\frac{1}{2}$).

Пояснення парадоксу

Обчислення показують, що

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Якщо збирається щонайменше 6 чоловік, то $p_n \approx \frac{1}{e} \approx 0{,}3679$ з точністю до чотирьох знаків після крапки. Ймовірність конкретного співпадіння дорівнює $\frac{1}{n}$ і прямує до 0 при збільшенні n. Цей парадокс підтверджує , що «по крапельці – море, по стеблинці – стіг».

Зауваження

1) Розглянемо дещо іншу проблему. Нехай подарунки розподіляються так, що кожен чоловік може отримати будь-який подарунок з однаковою ймовірністю незалежно від розподілу інших подарунків. Нехай подія A полягає в тому, що конкретний чоловік не отримає подарунку. Тоді ймовірність A дорівнює

$$q_n = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

і прямує так само до e^{-1}. Розглянемо тепер випадок, коли кількість людей n не обов′язково співпадає з кількістю подарунків m. В цьому випадку шукана ймовірність дорівнює

$$q_n = \frac{(n-1)^m}{n^m} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Якщо $\frac{m}{n}$ прямує до λ при $n \to \infty$, то ця ймовірність прямує до $e^{-\lambda}$. Узагальнюючи цей результат, отримаємо: ймовірність того, що конкретна людина отримає рівно k подарунків, прямує до $\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$ при $n \to \infty$. Ми отримали добре відомий розподіл Пуассона. Повертаючись до «парадоксу розподілу подарунків», отримаємо, що кількість людей, яким дістануться їх власні подарунки, також описується законом Пуассона з параметром λ.

2) Поняття розподілу Пуассона вперше з′явилося в книзі Симеона Дениса Пуассона. В роботі «Дослідження про ймовірність судових вироків з кримінальних та цивільних справ», опублікованій в 1837 р., розділ 81 присвячений застосуванням теорії ймовірностей до судової практики. Можливості широкого застосування і велика важливість пуассонівського розподілу залишилися незрозумілими в середині минулого сторіччя; більш того, про нього майже повністю забули. Але після 1894 р. цей розподіл використовували при вивченні дивного феномену. За 20 років між 1875 і 1894 роками в 14 різних кавалерійських корпусах німецької армії була зібрана статистика трагічних випадків, при яких солдат загинув від удара копита коня. За даними 280 спостережень (280 спостережень=20 років×14 корпусів), загинуло 196 солдат, тобто в середньому за рік $\lambda = 0{,}7$, якби кількість трагічних випадків описувалася розподілом Пуассона з параметром 0,7, то можна було б очікувати, що при 280 спостереженнях в 139 випадках смертей немає, в 97 – 1 смерть, в 34 випадках – 2 смерті і т.д.

А що показала статистика? В дійсності дані були 140, 91, 32 і т.д. Практика і теорія були настільки узгоджені, що навряд чи можна було чекати більшого.

Парадокс Монті Холла

Ситуація

Уявіть, що ви берете участь у телевізійній грі. Перед вами три двері. За одними з них знаходиться автомобіль, а за іншими двома – кози. Ви вибираєте одну з дверей. Ведучий (який знає, що за якими дверима) відкриває одні з двох інших дверей, за якими точно стоїть коза. Потім ведучий запитує вас, чи хочете ви змінити свій вибір на інші двері.

Питання

Чи варто змінювати свій вибір?

Розв'язок

Так, варто змінити свій вибір. При початковому виборі ймовірність вибрати автомобіль становить $\frac{1}{3}$, а ймовірність вибрати козу – $\frac{2}{3}$. Після того як ведучий відкриває двері з козою, ймовірність того, що автомобіль знаходиться за одними з двох інших дверей, залишається $\frac{2}{3}$. Отже, зміна вибору підвищує ваші шанси на виграш до $\frac{2}{3}$.

Парадокс дня народження

Ситуація

У групі з 23 осіб якова ймовірність того, що хоча б двоє людей мають однаковий день народження?

Питання

Наскільки велика ця ймовірність?

Розв'язання

Ймовірність того, що хоча б двоє з 23 людей мають однаковий день народження, становить приблизно 50,7%. Це значно більше, ніж інтуїтивно здається багатьом людям. Для групи з 57 осіб ця ймовірність перевищує 99%.

Парадокс двох конвертів

Ситуація

Перед вами два конверти. В одному з них міститься вдвічі більша сума, ніж в іншому. Ви вибираєте один конверт і відкриваєте його, щоб побачити суму X. Після цього вам пропонують обміняти конверт на інший.

Питання

Чи варто обмінювати конверт?

Розв'язання

На перший погляд здається, що обмін конвертів завжди вигідний, оскільки середнє очікуване значення при обміні становить $0{,}5 \cdot 2 \cdot X + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot X = 1{,}25 \cdot X$, що більше, ніж X. Однак, цей парадокс виникає через неправильне розуміння ймовірностей і очікуваних значень. В обох конвертах знаходиться однаковий розподіл сум, і обмін не змінює очікуваної вартості вашого вибору.

Парадокс Сімпсона

Ситуація

Парадокс Сімпсона демонструє, як загальні тенденції в даних можуть змінюватися, коли дані поділяються на групи.

Питання

Як це може відбуватися?

Розв'язання

Розглянемо дві групи пацієнтів, які отримують два різних лікування. Загалом, лікування A може виглядати більш ефективним. Проте, якщо розбити пацієнтів на підгрупи (наприклад, за віком або ступенем захворювання), може виявитися, що лікування B є ефективнішим у кожній підгрупі. Це відбувається через те, що пропорції пацієнтів у підгрупах впливають на загальну статистику.

Парадокс Санкт-Петербурга

Ситуація

Гра в казино пропонує вам наступний експеримент: ви підкидаєте монету доти, доки не випаде орел. Виграш дорівнює 2^n доларів, де n – кількість підкидань.

Питання

Скільки ви готові заплатити за участь у цій грі?

Розв'язання

Математичне очікування виграшу в цій грі є нескінченним, оскільки

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\cdot 2^n\right) = +\infty.$$

Проте в реальному житті люди готові заплатити лише обмежену суму, оскільки ймовірність виграти велику суму дуже мала, а психологічні та фінансові обмеження грають роль.

2.2. Ймовірнісний простір

Ймовірнісний простір – поняття, що ввів А.М. Колмогоров в 30-х роках XX століття для формалізації поняття ймовірності, але дало початок бурхливому розвитку теорії ймовірностей як строгої математичної дисципліни.

Ймовірнісний простір – це трійка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, де:

Ω – простір елементарних подій;

$\mathcal{F}$ – сігма-алгебра підмножин множини Ω (випадкових подій);

P – ймовірнісна міра або ймовірність, тобто сігма-адетивна скінченна міра, така, що $P(\Omega) = 1$.

Нагадаємо, що:

σ –алгебра (*сігма-алгебра*) — алгебра множин, замкнена щодо операції зліченого об'єднання.

Поняття сигма-алгебри має важливе значення для визначення мір множин, в математичному аналізі та теорії ймовірностей.

Міра множини — спільна назва різних типів узагальнень понять евклідової довжини, площі плоских фігур та n-вимірного об'єму для загальніших просторів, тощо.

Якщо зворотне не вказане явно, то зазвичай мається на увазі зліченно-адитивна міра.

Нехай задано простір X (в нашому випадку $X = \Omega$) з виділеним класом підмножин $\mathcal{F}$, замкненим щодо скінчених перетинів та об'єднань. Функція $\mu: \mathcal{F} \to [0, \infty)$ (в нашому випадку в якості функції μ розглядаємо функцію $P: \mathcal{F} \to [0,1]$) називається *скінчено-адитивною мірою*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Якщо $X_i \ (i = 1,2, \dots, k) \subset \mathcal{F}$ — скінченне сімейство множин, що попарно не перетинаються $X_i \cap X_j, i \neq j$, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(X_i). \qquad (2.1)$$

В нашому випадку $X_i = A_i$, де A_i – це подія з простору елементарних подій Ω. Таким чином

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i), \qquad (2.2)$$

де $P(A_i)$ обчислюється за формулою (1.2) минулої лекції (класичне означення ймовірності).

Нехай задано простір X (в нашому випадку $X = \Omega$) з виділеним класом підмножин $\mathcal{F}$, замкненим щодо скінчених перетинів та об'єднань. Функція $\mu: \mathcal{F} \to [0, \infty)$ (в нашому випадку в якості функції μ розглядаємо функцію $P: \mathcal{F} \to [0,1]$) називається *злічено-адитивною мірою*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Якщо $X_i \ (i = 1,2, \dots, k, \dots) \subset \mathcal{F}$ — скінченне сімейство множин, що попарно не перетинаються $X_i \cap X_j, i \neq j$, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(X_i). \qquad (2.3)$$

В нашому випадку $X_i = A_i$, де A_i – це подія з простору елементарних подій Ω. Таким чином

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i), \qquad (2.4)$$

де $P(A_i)$ обчислюється за формулою (1.9) минулої лекції (геометрична ймовірність).

Примітки

- Довільна злічено-адитивна міра є скінчено-адитивною, але не навпаки.
- Якщо міра всього простору скінчена, тобто $\mu(X) < +\infty$, то така міра називається скінченою. В протилежному випадку міра нескінчена.

Зауваження

- Елементарні події (елементи множини Ω) – це результати випадкового експерименту, з яких в даному експерименті відбулася лише одна конкретна подія.
- Кожна випадкова подія (елементи $\mathcal{F}$) – це підмножина множини Ω.
- Вимога, що $\mathcal{F}$ є сігма-алгеброю підмножин Ω, дозволяє, зокрема, говорити про ймовірність випадкової події, об'єднання зліченої кількості випадкових подій, а також про ймовірність доповнення будь-якої події (протилежної події до даної).

Приклад 2.1. *Розглянуто експеримент з підкиданням монетки. Задати ймовірнісний простір.*

Розв'язання. Простір елементарних подій – $\mathcal{U} = \Omega = \{0,1\}$, сігма-алгебра підмножин множини Ω – $\mathcal{F} = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\{\emptyset\}\}$, ймовірності: $P(\{0\}) = 0,5; P(\{1\}) = 0,5; P(\{0,1\}) = 1; P(\{\emptyset\}) = 0$.

2.3. Умовні ймовірності

Часто доводиться розглядати ймовірність наставання події A внаслідок випробування, якщо відомо що у цьому випробуванні вже відбулась подія B, що має додатну ймовірність.

Цю ймовірність називають *умовною ймовірністю* та позначають $P(A/B)$.

До того, як дати загальне формальне означення умовної ймовірності, розглянемо найпростішу ситуацію.

Нехай простір елементарних подій Ω складається з m рівноймовірних елементарних подій, настанню події B сприяє t елементарних подій, події $A \cap B = A \cdot B$ сприяє r елементарних подій (рис. 2.4).

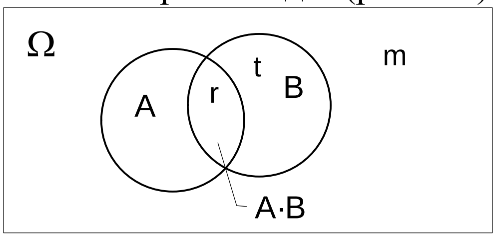

Рис. 2.4. Перетин множин A та B

Зауважимо, що згідно класичному означенню ймовірності

$$P(B) = \frac{t}{m}, P(A \cap B) = \frac{r}{m}.$$

Визначимо умовну ймовірність $P(A/B)$. Відомо, що у цьому випробуванні подія B вже відбулася і, таким чином, множина усіх можливих у випробувані елементарних подій звузилась до t елементарних подій. Внаслідок рівноможливості, ймовірність кожної елементарної події, що належить B, тепер можна вважати рівною $\frac{1}{t}$. Події A сприяє тепер тільки r елементарних подій. Внаслідок рівноможливості природньо визначити

$$P(A/B) = \frac{r}{t} = \frac{r/m}{t/m} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Розглянемо тепер більш загальну ситуацію, коли простір Ω не обов'язково складається з рівно можливих елементарних подій. Нехай проведено n випробувань і в n_B з них відбулася подія B, а в $n_{A\cap B}$ випробуваннях відбулася подія $A \cap B$. Визначимо умовну частість наставання події A за умови, що відбулась подія B:

$$W_n(A/B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{n_{A\cap B}/n}{n_B/n} = \frac{W_n(A \cap B)}{W_n(B)}.$$

Раніше вже відмічалося, що частість наставання події у певному розумінні збігається до ймовірності за кількості випробувань, що прямує до нескінченності.

Сказане дозволяє дати наступне загальне означення умовної ймовірності.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір, $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, P(B) \neq 0$.

Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B, називається величина

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \qquad (2.5)$$

При $P(B) = 0$ умовна ймовірність $P(A/B)$ – невизначена.

Можна переконатися, що умовні ймовірності задовольняють наступним **властивостям**:

1. $P(A/B) \geq 0$;
2. $P(\Omega/B) = 1$;
3. $P(B/B) = 1$;
4. *Якщо* $\{A_i\}$ *– послідовність парно несумісних випадкових подій* $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$*, то*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i/B)\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i/B).$$

Доведення. Властивості 1) – 3) перевірте самостійно.
Доведемо 4). Маємо:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i/B)\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)/B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}(A_i \cap B)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i/B).$$

Якщо позначити через $\mathcal{F}_в$ $\sigma-$алгебру усіх множин виду $A \cap B$, то з властивостей 1) – 4) виходить, що $(B, \mathcal{F}_в, P(B))$ – ймовірнісний простір.

З означення умовної ймовірності виходить

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A), \qquad (2.6)$$

якщо $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

Співвідношення (2.6) має назву *формула множення ймовірностей двох подій*.

Вона узагальнюється на випадок довільної кількості k множників.

Теорема 2.1. *Нехай є система випадкових подій* $A_1, A_2, \ldots, A_k$*, і нехай*

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_k) > 0,$$

тоді

$$P(A_1, \ldots, A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P\big(A_3/(A_1 \cap A_2)\big) \cdot$$
$$\cdot \ldots \cdot P\big(A_k/(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})\big) \qquad (2.7)$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що з

$$\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{k-2} A_i \subseteq \cdots \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$$
та з $P(A_1, A_2, \ldots A_k) > 0$ виходить, що
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k-s} A_i\right) > 0, s = \overline{1; k-1}.$$
Отже усі умовні ймовірності $P\left(A_n / \cap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ визначено.

Далі використовуємо метод математичної індукції. Раніше встановлено, що формула вірна при $k = 2$. Нехай вона вірна для добутку $(k-1)$ випадкових подій, тобто
$$P(A_1, \ldots, A_{k-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_{k-1}/(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-2})).$$
Позначимо $B = A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}$, так що $P(A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}) = P(B)$. Тоді
$$P(A_1, A_2, \ldots, A_k) = P(A_k \cap B) = P(B) \cdot P(A_k/B) = \\ = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdot \ldots \cdot P(A_k/(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})).$$
Таким чином, формула (2.7) доведена.

Формула (2.7) називається *формулою множення ймовірностей k подій*.

Приклад 2.2. *На шістьох картках намальовані літери, з яких можна зіставити слово КАРЕТА. Картки перегортуються літерами до столу та добре перемішуються. Далі витягуються три картки по одній. Треба обчислити ймовірність того, що в порядку витягування ми одержимо слово РАК.*

Розв'язання. Введемо події:

A ={витягнути картку з літерою Р};

B ={витягнути картку з літерою А};

C ={витягнути картку з літерою К}.

Нас цікавить ймовірність добутку цих подій РАК. За формулою множення ймовірностей маємо
$$P(\text{РАК}) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot \text{P}(C/(A \cap B)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}.$$
Відповідь. $P(\text{РАК}) = \frac{1}{60}$

2.4. Незалежні та залежні події

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір. Випадкові події A і B $(A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F})$ називаються *незалежними*, якщо поява однієї події призводить до появи другої події.

Якщо ця умова не виконується, то події називаються *залежними*.

Таке означення незалежних подій, на перший погляд, має чисто формальний характер. Якщо, одначе, відмовитись від розгляду випадкових подій нульової ймовірнісної міри, введене поняття незалежності має близьке до природних уявлень тлумачення. Доведемо наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $P(B) > 0$. Випадкові події A і B незалежні тоді й тільки тоді, коли $P(A/B) = P(A)$ (поява події B не змінює ймовірності події A).*

Доведення. Дійсно, якщо A і B незалежні та $P(B) > 0$, то

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Якщо ж відомо, що

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A),$$

то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, а це означає, що A і B незалежні.

За допомогою теореми 2.2 та формули (2.6) для двох незалежних подій A і B отримуємо формулу:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2.8}$$

Таким чином, для подій ненульової ймовірнісної міри маємо еквівалентне означення незалежності: дві події A і B *незалежні*, коли умовна ймовірність наставання однієї з них, за умови, що друга відбулась, дорівнює безумовній ймовірності першої події.

Мають місце наступні **властивості незалежних подій**:

Якщо A і B незалежні, то події A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$ також незалежні.

Доведення: Доведемо, що A і $\bar{B}$ незалежні (решту довести самостійно). Зауважимо, що $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A$, $P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = P(A)$.

Тому

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

Якщо A і B незалежні, то

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot \big(1 - P(B)\big) = P(A) \cdot P(\bar{B}).$$

Отже, A і $\bar{B}$ незалежні. Що й треба було довести.

Довести самостійно, що у випадку, коли A і B незалежні та $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, то A і B обов'язково сумісні.

Випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *незалежні у сукупності*, якщо для будь-якої підмножини $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ для довільного $i, 1 \le i \le n$, та для довільного $1 \le k \le n$ виконується:

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{i_k}\right). \tag{2.9}$$

Іншими словами, події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *незалежні в сукупності*, якщо ймовірність одночасного настання будь-якої комбінації цих подій дорівнює добутку їх індивідуальних ймовірностей.

Отже, формули (2.8) та (2.9) називаються *формулами добутку ймовірностей незалежних (незалежних у сукупності) подій*.

Добуток ймовірностей залежних подій обчислюється за формулою (2.6) та (2.7).

Приклад 2.3. *Розглянемо два незалежні кидки симетричних монет. Нехай події А і В означають випадання «орла» на першій та другій монетах відповідно. Перевірити, чи є події А і В незалежними.*

Розв'язання. Ймовірності подій:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

Ймовірність одночасного настання подій A і B:

$$P(A \cap B) = P(\text{орел на першій монеті і орел на другій монеті}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \\ = P(A) \cdot P(B).$$

Оскільки $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, події A і B не є незалежними.

Відповідь. Події A і B є незалежними.

Приклад 2.4. *Розглянемо кидок грального кубика. Нехай події A, B, і C означають випадання чисел, кратних 2, 3 та 4 відповідно. Перевірити, чи є події A, B, і C незалежними в сукупності.*

Розв'язання. Ймовірності подій:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{6}.$$

Ймовірність одночасного настання подій A, B, і C ($A \cap B \cap C =${число, кратне 12}):

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

У цьому випадку події A, B, і C не є незалежними у сукупності, оскільки їх одночасне настання неможливе.

Відповідь. Події A, B, і C не є незалежними у сукупності.

Приклад 2.5. *Кидання двох кубиків. Нехай подія А означає, що сума очок на обох кубиках дорівнює 7, а подія В означає, що на першому кубику випало число 4. Чи є події А і В незалежними?*

Розв'язання. Ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ймовірність події B:

$$P(B) = \frac{1}{6}.$$

Ймовірність одночасного настання подій A і B (перший кубик 4, другий 3):

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B).$$

Оскільки $P(B/A) \neq P(B)$, події A і B не є незалежними.

Відповідь. Події A і B є незалежними.

Приклад 2.6. *У коробці є 5 червоних і 5 синіх кульок. Виймаємо послідовно дві кульки без повернення. Нехай подія А означає, що перша кулька червона, а подія В означає, що друга кулька червона. Чи є події А і В незалежними?*

Розв'язання. Ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Ймовірність події B за умови A (перша кулька червона, залишилося 4 червоні і 5 синіх):

$$P(B/A) = \frac{4}{9}.$$

Ймовірність події B:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

$$P(B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{90} + \frac{25}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $P(B/A) \neq P(B)$, події A і B не є незалежними.

Відповідь. Події A і B є незалежними.

2.5. Несумісні та сумісні події

Несумісні події — це події, які не можуть відбутися одночасно. Іншими словами, якщо одна подія відбулася, то інша подія обов'язково не відбудеться. У математичних термінах це означає, що перетин таких подій є порожньою множиною.

Дві події A і B називаються *несумісними* (або *взаємовиключними*), якщо:

$A \cap B = \emptyset.$

Тобто ймовірність одночасного настання подій A і B дорівнює нулю:

$$P(A \cap B) = 0. \qquad (2.10)$$

Приклади несумісних подій

1: Кидок грального кубика

Розглянемо кидок симетричного грального кубика. Нехай подія A означає випадання числа 2, а подія B — випадання числа 5.

$$A = \{2\}, B = \{5\}.$$

Події A *і* B є несумісними, оскільки вони не можуть відбутися одночасно:

$$A \cap B = \emptyset.$$

2: Вибір з коробки з кульками

Розглянемо коробку, що містить 3 червоні та 2 сині кульки. Нехай подія A означає витягування червоної кульки, а подія B означає витягування синьої кульки.

$$A = \{\text{червона кулька}\}, B = \{\text{синя кулька}\}.$$

Події A і B є несумісними, оскільки витягування кульки не може одночасно бути і червоним, і синім:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Властивості несумісних подій

1) Сума ймовірностей: Якщо події A і B несумісні, то ймовірність об'єднання подій A і B дорівнює сумі їх індивідуальних ймовірностей:

2) Несумісність трьох і більше подій: Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є несумісними, якщо жодна пара цих подій не може відбутися одночасно. Тобто для будь-яких $i \neq j$:

$$A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Несумісні події відіграють важливу роль у теорії ймовірностей, особливо при моделюванні ситуацій, де одночасне настання певних подій неможливе. Вони допомагають краще зрозуміти структуру ймовірнісних експериментів та коректно оцінювати ймовірності різних комбінацій подій.

Якщо події можуть відбуватися одночасно, то вони називаються *сумісними*.

У математичних термінах це означає, що перетин таких подій не є порожньою множиною.

Дві події A і B називаються *сумісними*, якщо $A \cap B \neq \emptyset$. Тобто для сумісних подій

$$P(A \cap B) > 0. \tag{2.11}$$

Властивості сумісних подій

1) Сума ймовірностей: Для двох сумісних подій A і B ймовірність об'єднання подій обчислюється за формулою включення-виключення:
2) Ймовірність перетину: Сумісні події мають ненульову ймовірність перетину:

Приклади сумісних подій

1: Кидок грального кубика

Розглянемо кидок симетричного грального кубика. Нехай подія A означає випадання парного числа, а подія B означає випадання числа більше трьох.

$$A = \{2,4,6\}, B = \{4,5,6\}.$$

Перетин подій A і B:

$$A \cap B = \{4,6\}.$$

Ймовірність одночасного настання подій A і B:

$$P(A \cap B) = P(\{4,6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $P(A \cap B) > 0$, події A і B є сумісними.

2: Вибір з коробки з кульками

Розглянемо коробку, що містить 3 червоні, 2 сині та 1 зелену кульку. Витягуємо одну кульку. Нехай подія A означає витягування червоної кульки, а подія B означає витягування не синьої кульки.

$A =${червона кулька}, $B =${не синя кулька}={червона кулька, зелена кулька}.

Перетин подій A і B:

$A \cap B =${червона кулька}.

Ймовірність одночасного настання подій A і B:

$P(A \cap B) = P(${червона кулька}$)= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Оскільки $P(A \cap B) > 0$, події A і B є сумісними.

Сумісні події можуть відбутися одночасно, і їх аналіз допомагає зрозуміти ймовірнісні зв'язки між різними випадковими подіями. Властивості та приклади сумісних подій є основою для побудови більш складних ймовірнісних моделей та розрахунків.

2.6. Формула додавання ймовірностей

Ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей доданків.
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2.12}$$
або у випадку k несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_k$
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k). \tag{2.13}$$
Формули (2.12) та (2.13) називаються *формулами додавання ймовірностей несумісних подій*.

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_k$ у даному випробуванні утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює 1:
$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1, \tag{2.14}$$
оскільки сума, які утворюють повну групу, є подією достовірною.

Зокрема, для протилежних подій A та $\bar{A}$ маємо:
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{2.14}$$
Проте, коли доданки сумісні, згадане співвідношення, взагалі кажучи, не має місця.

Теорема 2.3.

Розглянемо дві події A і B, які є сумісними. Тоді справедлива рівність
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.15}$$

Доведення. Представимо події A і B за аналогією з множинами за допомогою кіл Ейлера (рис. 2.5).

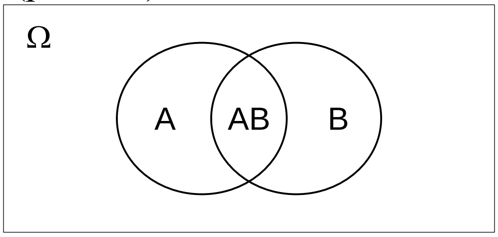

Рис. 2.5. Представлення подій A і B

Зауважимо, що $A \cup B$ можна зобразити як суму трьох несумісних доданків
$$A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash (A \cap B)),$$
та $(A \cap B) \subseteq A$, $(A \cap B) \subseteq$ B.

Звідси
$$P(A \cup B) = P\big(A \backslash (A \cap B)\big) + P(A \cap B) + P\big(B \backslash (A \cap B)\big) =$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Використовуючи метод математичної індукції, самостійно доведіть формулу додавання для довільної кількості доданків:

$$P\left(\cup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} P\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{l=j+1}^{k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_l\right) + \dots + (-1)^{k-1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k). \tag{2.16}$$

Формули (2.15) та (2.16) називається *формулами додавання ймовірностей сумісних подій*.

Приклад 2.7. *З колоди в* 32 *карти навмання витягується одна карта. Треба обчислити ймовірність того, що це буде дама або піка.*

Розв'язання. Вводимо події:

$A =$(витягнути даму);

$B =$(витягнути піку).

Нас цікавить ймовірність суми $A \cup C$. За формулою додавання ймовірностей маємо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}.$$

Відповідь. $P(A \cup B) = \frac{11}{32}$

Приклад 2.8. *Кидання двох кубиків. Нехай подія А означає, що сума очок на обох кубиках дорівнює* 7*, а подія В означає, що на першому кубику випало число* 4. *Обчислити* $P(A \cup B)$.

Розв'язання. Ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ймовірність події B:

$$P(B) = \frac{1}{6}.$$

Ймовірність події $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{36}.$$

Оскільки події є сумісними, ймовірність настання подій $A \cup B$ (перший кубик 4 або другий 3):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Відповідь. $P(A \cup B) = \frac{11}{36}$

Приклад 2.9. *У коробці є* 5 *червоних і* 5 *синіх кульок. Виймаємо послідовно дві кульки без повернення. Нехай подія А означає, що перша кулька червона, а подія В означає, що друга кулька червона. Обчислити* $P(A \cup B)$.

Розв'язання. Ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Ймовірність події B (при цьому перша кулька червона, залишилося 4 червоні і 5 синіх або перша кулька синя, залишилося 5 червоні і 4 синіх).

$$P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Ймовірність події B за умови A (перша кулька червона, залишилося 4 червоні і 5 синіх):

$$P(B/A) = \frac{4}{9}.$$

Ймовірність події $A \cap B$:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

Ймовірність події $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Дану задачу можна також розв'язати наступним чином. Розглянемо три випадки:

- $A \cap \bar{B} -$ 1-а кулька червона, друга синя,
- $\bar{A} \cap B -$ 1-а кулька синя, друга червона,
- $A \cap B -$ обидві кульки червоні.

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{7}{9}.$$

Відповідь. $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$.

Приклад 2.10. *При підготовці до заліку перший студент вивчив* 25 *з* 30 *питань програми; другий студент вивчив* 20 *з* 30 *питань, а третій –* 15 *з* 30. *Для здачі заліку необхідно відповісти на* 3 *довільні питання програми. Знайти ймовірність того, що лише один студент здасть залік.*

Розв'язання. Щоб знайти ймовірність того, що лише один студент здасть залік, спочатку знайдемо ймовірності того, що кожен студент складе залік, а потім обчислимо ймовірності для кожного сценарію, коли тільки один студент здав.

Позначимо ймовірність того, що студент складе залік як $P_i(A)$ (де $i = 1,2,3$).

Ймовірності здачі заліку кожним студентом окремо

Перший студент

Перший студент вивчив 25 з 30 питань. Ймовірність того, що він відповість на 3 довільні питання правильно:

$$P_1(A) = \frac{C_{25}^3}{C_{30}^3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 0{,}548.$$

Другий студент

Другий студент вивчив 20 з 30 питань. Ймовірність того, що він відповість на 3 довільні питання правильно:

$$P_2(A) = \frac{C_{20}^3}{C_{30}^3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 0{,}299.$$

Третій студент

Третій студент вивчив 15 з 30 питань. Ймовірність того, що він відповість на 3 довільні питання правильно:

$$P_3(A) = \frac{C_{15}^3}{C_{30}^3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{30 \cdot 29 \cdot 28} \approx 0{,}108.$$

Ймовірності нездачі заліку кожним студентом

Позначимо ймовірність того, що студент не складе залік як $Q_i(A)$ (де $i = 1,2,3$).

$$Q_i(A) = 1 - P_i(A).$$
$$Q_1(A) = 0{,}452;\ Q_2(A) = 0{,}701;\ Q_3(A) = 0{,}892.$$

Ймовірність того, що лише один студент складе залік

Для цього сценарію ми маємо три можливі випадки:

- Перший студент складає залік, а другий і третій не складають.
- Другий студент складає залік, а перший і третій не складають.
- Третій студент складає залік, а перший і другий не складають.

Перший випадок

Перший студент складає залік, а другий і третій не складають:

$$P(\text{лише 1-й здав}) = P_1(A) \cdot Q_2(A) \cdot Q_3(A) \approx 0{,}342.$$

Другий випадок

Другий студент складає залік, а перший і третій не складають:

$$P(\text{лише 2-й здав}) = Q_1(A) \cdot P_2(A) \cdot Q_3(A) \approx 0{,}121.$$

Третій випадок

Третій студент складає залік, а перший і другий не складають:

$$P(\text{лише 3-й здав}) = Q_1(A) \cdot Q_2(A) \cdot P_3(A) \approx 0{,}034.$$

Загальна ймовірність

Загальна ймовірність того, що лише один студент складе залік:

$P(\text{лише один здав}) = P_1(A) \cdot Q_2(A) \cdot Q_3(A) + Q_1(A) \cdot P_2(A) \cdot Q_3(A) + Q_1(A) \cdot Q_2(A) \cdot P_3(A) = 0{,}497.$

Відповідь. $P(\text{лише один здав}) = 0{,}497.$

Слід зазначити, що формули (2.15) та (2.16) також випливають з формули включення-виключення.

Формула включення-виключення

Формула включення-виключення є важливим інструментом в комбінаториці та теорії ймовірностей для обчислення кількості елементів у об'єднанні кількох множин або ймовірності об'єднання кількох подій. Вона враховує як перетини множин (подій), так і перекривання цих перетинів, щоб отримати точну кількість або ймовірність.

Формула включення-виключення для двох множин

Для трьох множин A і B кількість елементів в об'єднанні $A \cup B$ визначається як:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (2.17)$$

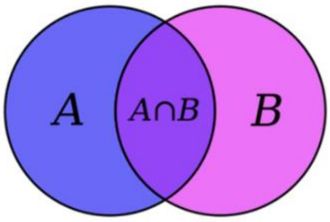

Рис. 2.6. Формула включення-виключення. Випадок двох множин

Формула включення-виключення для трьох множин

Для трьох множин A, B і C кількість елементів в об'єднанні $A \cup B \cup C$ визначається як:

$$| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | B \cap C | - | A \cap C | +$$
$$+ | A \cap B \cap C | \quad (2.18)$$

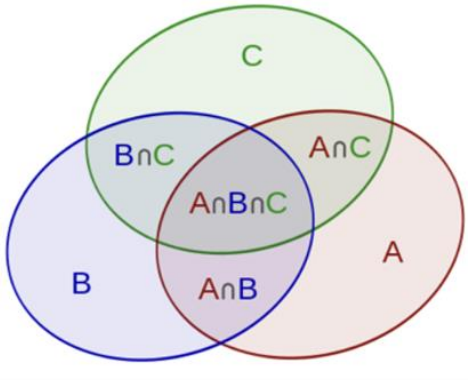

Рис. 2.7. Формула включення-виключення. Випадок двох множин

Загальна формула включення-виключення

Для n подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ймовірність їх об'єднання визначається як:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} (A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} (A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots +$$
$$(-1)^{n+1} (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \quad (2.19)$$

Приклад 2.11. *Нехай є три множини* A, B і C: $| A | = 10, | B | = 15, | C | = 20$, $| A \cap B | = 5, | B \cap C | = 7, | A \cap C | = 8, | A \cap B \cap C | = 3$. *Чому дорівнює кількість елементів у множині* $A \cup B \cup C$?

Розв'язання. Кількість елементів в об'єднанні $A \cup B \cup C$ дорівнює:

$$| A \cup B \cup C | = 10 + 15 + 20 - 5 - 7 - 8 + 3 = 28.$$

Відповідь. $| A \cup B \cup C | = 28$.