3.5 ПОВНІ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ

3.5.1. Функції, що зберігають нуль та одиницю

Булева функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається ***функцією, що зберігає 0***, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0: $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

Булева функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називається ***функцією, що зберігає 1***, якщо на одиничному наборі вона дорівнює 1: $f(1,1, ... 1) = 1$.

Приклад. Функції $x \wedge y$, $x \vee y$ зберігають 0:

$$0 \wedge 0 = 0, \quad 0 \vee 0 = 0.$$

Дані функції також зберігають 1:

$$1 \wedge 1 = 1, \quad 1 \vee 1 = 1.$$

Функція $\overline{x}$ не зберігає 0 і не зберігає 1:

$$\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0.$$

Приклад. Чи зберігає 0 та 1 функція

$$f(x, y, z) = x \vee \overline{y}\ \overline{z}\ ?$$

<u>*Розв'язок*</u>.

$$f(0, 0, 0) = 0 \vee \overline{0} \wedge \overline{0} = 0 \vee 1 \wedge 1 = 0 \vee 1 = 1,$$

$$f(1, 1, 1)=1 \vee \overline{1} \wedge \overline{1} = 1 \vee 0 \wedge 0 = 1 \vee 0 = 1.$$

$\Rightarrow$ функція зберігає 1 і не зберігає 0.

3.5.2 Монотонні функції

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ – будь-які набори.

Для двох наборів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ виконується ***відношення передування*** $\alpha \le \beta$, якщо

$$\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, ..., \alpha_n \le \beta_n.$$

Приклад. Набори $\alpha = (0, 1, 0, 1)$ та $\beta = (1, 1, 0, 1)$ знаходяться у відношенні передування.

Булева функція f називається ***монотонною***, якщо для будь-яких пар наборів значень змінних $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, для яких виконується відношення

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \le (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n),$$

правильна і нерівність

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \le f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n).$$

Приклад. Дослідити на монотонність функцію $f(x, y) = x \wedge y$.

Розв'язок.

$(0, 0) \le (0, 1)$, $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$, $f(0, 0) \le f(0, 1)$.

$(0, 0) \le (1, 0)$, $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 0$, $f(0, 0) \le f(1, 0)$.

$(0, 0) \le (1, 1)$, $f(0, 0) = 0$, $f(1, 1) = 1$, $f(0, 0) \le f(1, 1)$.

$(0, 1) \le (1, 1)$, $f(0, 1) = 0$, $f(1, 1) = 1$, $f(0, 1) \le f(1, 1)$.

$(1, 0) \le (1, 1)$, $f(1, 0) = 0$, $f(1, 1) = 1$, $f(1, 0) \le f(1, 1)$.

$\Rightarrow$ функція $f(x, y) = x \wedge y$ є монотонною.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію $g(x, y) = x \oplus y$.

<u>*Розв'язок*</u>.

$(0, 0) \leq (0, 1)$, $g(0, 0) = 0$, $g(0, 1) = 1$, $g(0, 0) \leq g(0, 1)$.

$(0, 0) \leq (1, 0)$, $g(0, 0) = 0$, $g(\mathrm{l}, 0) = 1$, $g(0, 0) \leq g(\mathrm{l}, 0)$.

$(0, 0) \leq (1, 1)$, $g(0, 0) = 0$, $g(\mathrm{l}, 1) = 0$, $g(0, 0) \leq g(\mathrm{l}, 1)$.

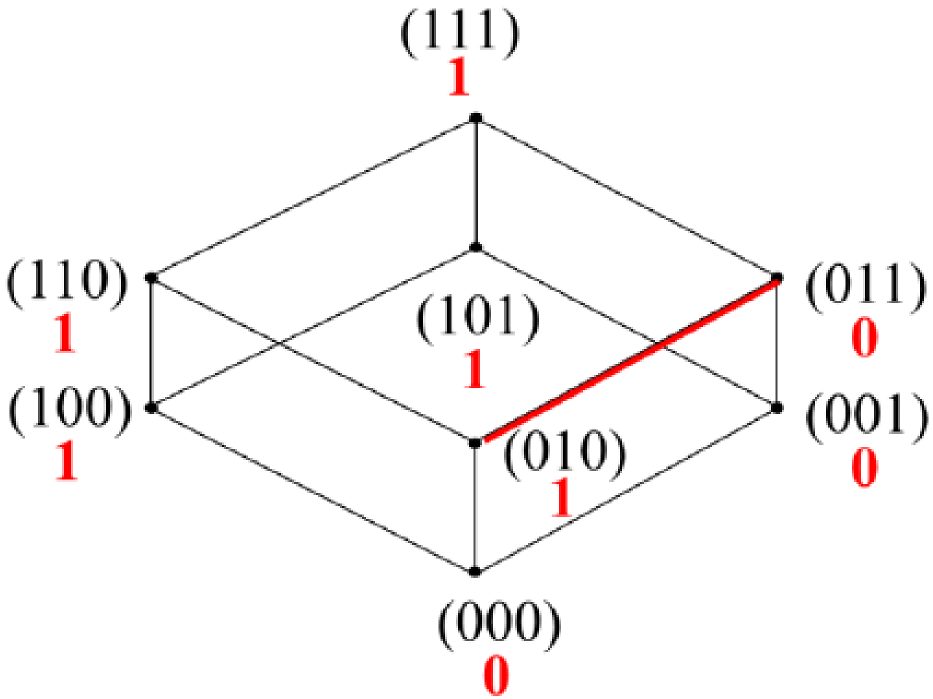
$(0, 1) \leq (1, 1)$, $g(0, 1) = 1$, $g(\mathrm{l}, 1) = 0$, $g(0, 1) \geq g(\mathrm{l}, 1)$.

$\Rightarrow$ функція $g(x, y) = x \oplus y$ не є монотонною.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію

$$h(x, y, z) = x \vee y\ \ \bar{z}.$$

Діаграма Хассе:



Теорема. Булева функція, відмінна від констант 0 і 1, є монотонною, якщо і тільки якщо вона припускає зображення формулою булевої алгебри без заперечень.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x, y, z, t) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \to (z \vee t).$$

<u>Розв'язок</u>.

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) \to (z \vee t) = xy \vee z \vee t.$$

$\Rightarrow$ функція $f(x,y,z,t)$ є монотонною.

3.5.3 Повнота та замкненість

Замиканням множини $\boldsymbol{\Sigma}$ ***булевих функцій*** називається множина $[\Sigma]$, що складається з функцій, які можна одержати суперпозицією функцій з Σ.

Якщо $\Sigma = [\Sigma]$, то множина булевих функцій Σ називається ***замкненим класом.***

Система булевих функцій $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ називається ***функціонально повною***, якщо її замикання є множиною всіх можливих булевих функцій, що залежать від будь-якого числа змінних.

Теорема Поста (критерій повноти Поста).

Для того, щоб система булевих функцій $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила:

1) хоча б одну функцію, що не зберігає нуль;

2) хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю;

3) хоча б одну несамодвоїсту функцію;

4) хоча б одну немонотонну функцію;

5) хоча б одну нелінійну функцію.

Класи функцій. Існують п’ять класів булевих функцій: T_0, T_1, S, M, L, які називають класами Поста:

T_0 — клас функцій, що зберігають нуль;

T_1 — клас функцій, що зберігають одиницю;

S — клас самодвоїстих функцій;

M — клас монотонних функцій;

L — клас лінійних функцій.

Для повноти системи функцій необхідно і достатньо, щоб для кожного з п’яти замкнених класів T_0, T_1, S, M, L вона містила функцію, яка цьому класу не належить.

Наслідок 1. Доповнення будь-якого з класів Поста функцією, що не входить в цей клас, перетворить таку систему булевих функцій на функціонально повну. Інших класів з такою властивістю не існує.

Повна система булевих функцій називається ***нескоротною***, якщо з неї не можна виключити жодної функції без втрати властивості повноти.

Повна система булевих функцій називається ***нескоротною***, якщо з неї не можна виключити жодної функції без втрати властивості повноти.

<u>Наслідок 2</u>. Максимальна кількість булевих функцій у нескоротній функціонально повній системі дорівнює чотирьом, мінімальна – одній.

Приклад. Перевірити, чи є задані функції лінійними, монотонними, самодвоїстими, чи зберігають 0 та/або 1.

Зробити висновок щодо функціональної повноти заданого набору функцій

$$xy \vee xz \vee yz, \quad x \oplus y \oplus z, \quad 1.$$

Розв’язання. **1)** $\varphi_1 = xy \vee xz \vee yz$

x	y	z	xy	xz	yz	φ_1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

1.1) $\varphi_1(0, 0, 0) = 0$ — зберігає нуль

1.2) $\varphi_1(1, 1, 1) = 1$ — зберігає одиницю

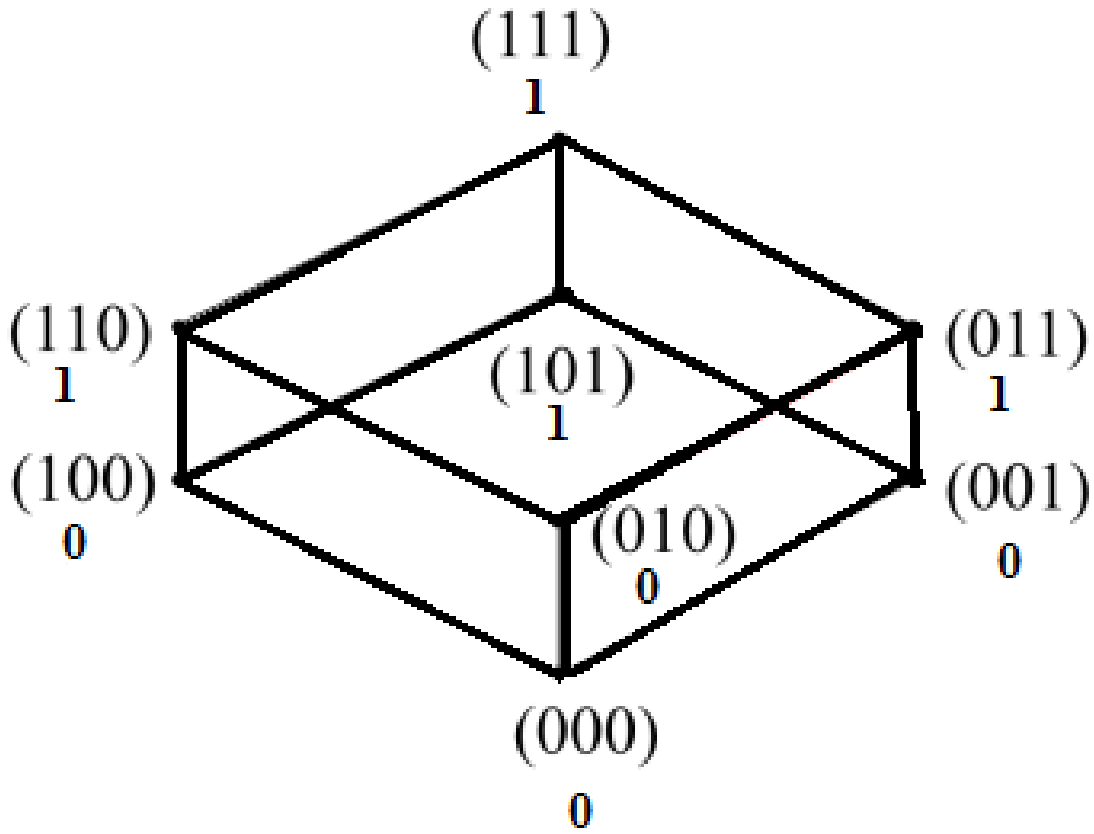
1.3) ***Самодвоїстість***. Функцію $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають **двоїстою** до функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$.

Функцію, що двоїста сама собі, тобто $f = f^*$, називають **самодвоїстою**.

x	y	z	φ_1	φ_1^*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$\Rightarrow \varphi_1$ — самодвоїста функція

1.4) Діаграма Хассе (гіперкуб):



φ_1 — монотонна функція

1.5) **Лінійність**. Булеву функцію називають ***лінійною***, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон’юнкцій змінних.

x	y	z	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	0	0	1	1		
0	1	1	1	1	0	1	0			
1	0	0	0	1	1	1				
1	0	1	1	0	0					
1	1	0	1	0						
1	1	1	1							

$$\varphi_1(x, y, z) = yz \oplus xz \oplus xy$$

$\Rightarrow$ φ_1 — не лінійна функція

2) $\varphi_2(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$

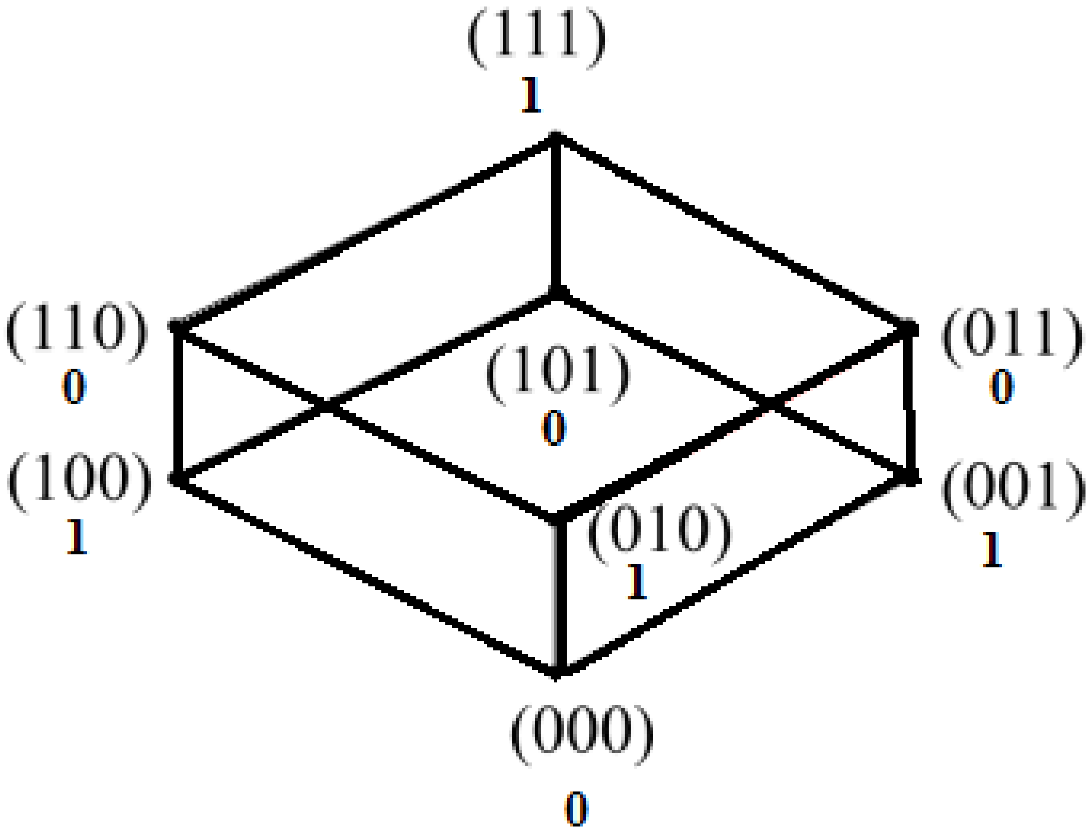
x	y	z	x⊕y	φ_2	φ_2^*
0	0	0	0	**0**	0
0	0	1	0	**1**	1
0	1	0	1	**1**	1
0	1	1	1	**0**	0
1	0	0	1	**1**	1
1	0	1	1	**0**	0
1	1	0	0	**0**	0
1	1	1	0	**1**	1

2.1) $\varphi_2(0,0,0)=0$ — функція зберігає нуль

2.2) $\varphi_2(1,1,1)=1$ — функція зберігає одиницю

2.3) $\varphi_2=\varphi_2^* \quad \Rightarrow \quad \varphi_2$ — самодвоїста функція

2.4) Діаграма Хассе (гіперкуб):



$\Rightarrow$ g_2 — не монотонна функція

2.5) $\varphi_2\left(x, y, z\right) = x \oplus y \oplus z$ — лінійна функція

3) $\varphi_3 = 1$ — не зберігає константу 0, несамодвоїста, монотонна, лінійна функція

Таблиця Поста:

	T_0	T_1	S	M	L
$\varphi_1 = xy \vee xz \vee yz$	+	+	+	+	–
$\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$	+	+	+	–	+
$\varphi_3 = 1$	–	+	–	+	+

$\Rightarrow$ набір функцій $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ не є функціонально повним