Степеневі ряди

доц. І.В. Орловський

1. Означення

Розглянемо послідовність $\{a_n, n \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ та $x_0 \in \mathbb{R}$.

Означення 1

Степеневим рядом називають функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

де сталі a_n, $n \geq 0$, називають коефіцієнтами степеневого ряду.

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ заміною $x - x_0 = t$ зводиться до ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

з центром в точці $x_0 = 0$.

Теорема 1 (перша теорема Абеля)

Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається в точці* $x_0 \neq 0$, *тоді він збігається абсолютно у всіх точках* x, *які задовольняють нерівність*

$$|x| < |x_0|.$$

Якщо ряд розбігається в деякій точці x_1, *то він розбігається і у всіх точках* x, *що задовольняють нерівність*

$$|x| > |x_1|.$$

Доведення

За умовою теореми числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ збігається. Тоді за необхідною ознакою збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.
Отже, послідовність $\{a_n x_0^n\}$ обмежена, тобто

$$\exists M > 0 \ : \ |a_n x_0^n| \le M, \ \forall n \ge 0.$$

Розглянемо ряд з абсолютних величин членів степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, де $|x| < |x_0|$, та оцінимо його загальний член. Маємо

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M q^n,$$

де $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Геометричний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n$ $(q < 1)$ збігається. Тому за першою ознакою порівняння збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| ,$$

а, отже, степеневий ряд збігається абсолютно, якщо $|x| < |x_0|$.
Нехай тепер степеневий ряд розбігається в точці x_1. Припустимо, що в деякій точці x_2, такій, що $|x_2| > |x_1|$, ряд збігається. Тоді за доведеним він повинен збігатись в області $|x| < |x_2|$, зокрема, в точці x_1, що суперечить умові.
Отже, для всіх x, таких, що $|x| > |x_1|$, степеневий ряд розбігається. $\blacksquare$

3. Область збіжності степеневого ряду

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду. Дійсно, якщо x_0 — точка збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тоді він збігається абсолютно в інтервалі $(-|x_0|\,;\,|x_0|)$ з центром в точці 0. Якщо x_1 — точка розбіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тоді ряд розбігається в області $(-\infty; -|x_1|) \cup (|x_1|\,; +\infty)$.

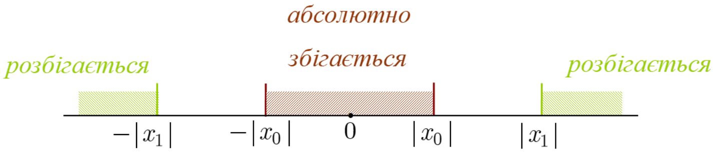

Рис.:

Отже, для області збіжності степеневого ряду можливі лише три випадки:

- ряд збігається лише в точці $x = 0$. Наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = 1 \cdot x + 2^2 x^2 + \ldots + n^n x^n + \ldots$$

  збігається лише в точці $x = 0$, оскільки при $x \neq 0$ для достатньо великих значень n: $|nx| > 1, \ \lim\limits_{n\to\infty} (nx)^n \neq 0$;

- ряд збігається при всіх $x \in (-\infty; \ +\infty)$. Наприклад, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

  збігається $\forall x \in \mathbb{R}$.

- існує таке скінченне число $R > 0$, що при $|x| < R$ степеневий ряд абсолютно збігається, а при $|x| > R$ — розбігається.

Означення 2

Невід'ємне число R, таке, що степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в інтервалі $(-R;\ R)$ й розбігається при $|x| > R$, називають радіусом збіжності степеневого ряду, а інтервал $(-R;\ R)$ — інтервалом збіжності степеневого ряду.

Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається лише в точці $x = 0$, тоді вважають $R = 0$. Якщо ж ряд збігається на всій дійсній осі, то $R = +\infty$.

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за формулою Коші — Адамара (ДЗ. Вивести самостійно (оптимістам)):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Зауваження

Питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = -R$ та $x = R$ розглядається для кожного ряду окремо. Таким чином, областю збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є інтервал $(-R;\ R)$, до якого може додаватись одна або обидві граничні точки інтервалу.

Приклад 1

Знайдіть область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Зауваження

Якщо степеневий ряд містить не всі степені x, тоді інтервал збіжності ряду знаходять, безпосередньо застосовуючи ознаку Д'Аламбера або радикальну ознаку Коші для ряду, складеного з модулів членів заданого степеневого ряду.

Приклад 2

Знайдіть область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n}.$$

3. Властивості степеневих рядів

I (друга теорема Абеля)

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається рівномірно на довільному проміжку $[a; b]$, який цілком міститься всередині інтервалу збіжності ряду.

Доведення

Нехай R — радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a та b — дві внутрішні точки інтервалу збіжності. Позначимо через r найбільше з чисел $|a|$ та $|b|$. Розглянемо три проміжки:

$$[a;\ b] \subset [-r;\ r] \subset (-R;\ R)\,.$$

Точка $x = r$ є внутрішньою точкою проміжку $(-R;\ R)$. В цій точці за першою теоремою Абеля ряд збігається абсолютно, тобто збігається ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$, який є мажорантою ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на відрізку $[-r;\ r]$, оскільки $|a_n x^n| \leq |a_n|\, r^n$. Отже, за ознакою Веєрштраса ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається рівномірно на $[a; b]$.

II (Неперервність суми степеневого ряду)

Сума степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ неперервна в кожній точці x його інтервалу збіжності $(-R;\ R)$, $R > 0$.

III (Інтегрування степеневих рядів)

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на проміжку $[0;\ x]$, де $|x| < R$, можна почленно інтегрувати, так що

$$\int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Приклад 3

Знайдіть суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$.

IV (Диференціювання степеневих рядів)

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати в довільній точці x інтервалу збіжності $(-R;\ R)$, $R > 0$, при цьому має місце рівність

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Приклад 4

Знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.