Ряди в комплексній площині

доц. І.В. Орловський

1. Числові ряди

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

членами якого є комплексні числа, називають числовим рядом (в комплексній області). Ряд (1) з комплексними членами $u_n = a_n + ib_n$ можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots,$$

де $a_n,\ b_n,\ n \in \mathbb{N}$, – дійсні числа.
Суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k$$

перших n членів ряду (1) називають n-тою частковою сумою ряду

Якщо існує скінченна границя S послідовності часткових сум $\{S_n,\ n \geq 1\}$ ряду (1):

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

тоді ця границя називається сумою ряду (1), а сам числовий ряд називають збіжним.
Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує , тоді ряд (1) називають розбіжним.
Очевидно, що ряд (1) є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним кожен з рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{3}$$

Більш того, тоді $S = S_a + iS_b$, де S_a – сума ряда (2), а S_b – сума ряда (3). Це означає, що дослідження збіжності ряду з комплексними членами зводиться до дослідження рядів (2) і (3) з дійсними членами.

Завдяки останьому, основні означення, більшість теорем та їх доведення є аналогічними відповідним означенням та теоремам теорії рядів з дійсними членами.

Ряд

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + i \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

називають n-м залишком ряду (1).

Теорема 1 (Необхідна ознака збіжності ряда)

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то його* n*-ий член* u_n *прямує до нуля при* $n \to \infty$*, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots . \tag{4}$$

Теорема 2

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є абсолютно збіжним (збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$), тоді сам ряд також буде збіжним.

Властивості абсолютно збіжних рядів з комплексними членами

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – абсолютно збіжні ряди, причому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_u$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S_v$. Тоді

1. $\forall c \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ збігається абсолютно, причому його сума дорівнює cS_u.
2. ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ є абсолютно збіжними, причому їх суми рівні $S_u \pm S_v$.
3. добуток цих двох рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, де $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}$, також є абсолютно збіжним, причому його сума дорівнює $S_u \cdot S_v$.
4. ряд, який отримано з $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ довільною перестановкою його членів буде також абсолютно збіжним і матиме ту ж саму суму S_u.

Зауважимо також, що при дослідженні рядів з комплексними членами можна застосовувати всі відомі, з дійсного аналізу, ознаки збіжності знакопостійних рядів. Наприклад, радикальна ознака Коші: якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$, то при $l < 1$, то ряд (1) є абсолютно збіжним, а при $l > 1$ – розбіжним.

2. Степеневі ряди

Степеневим рядом в комплексній області називають ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n = c_0 + c_1 \left(z - z_0\right) + \ldots + c_n \left(z - z_0\right)^n + \ldots, \tag{5}$$

де c_n, $n \geq 0$, – комплексні числа (коефіцієнтами степеневого ряду), $z = x + iy$ – комплексна змінна.

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$ заміною $z - z_0 = t$ зводиться до ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{6}$$

з центром в точці $z_0 = 0$.

Покладаючи $z = z_0 \in \mathbb{C}$ у степеневому ряді (6), дістаємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z_0^n$. Якщо отриманий числовий ряд збігається (розбігається), то точку z_0 називають точкою збіжності (розбіжності) ряду (6), а сам ряд збіжним (розбіжним) в цій точці.

Сукупність всіх точок збіжності степеневого ряду (6) називають областю збіжності цього ряду.

Теорема 3 (Абеля)

Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *збігається в точці* $z_0 \neq 0$, *тоді він збігається абсолютно у всіх точках* z, *які задовольняють нерівність*

$$|z| < |z_0| .$$

Якщо ряд розбігається в деякій точці z_1, *то він розбігається і у всіх точках* z, *що задовольняють нерівність*

$$|z| > |z_1| .$$

З теореми Абеля випливає існування такого невід'ємного числа R, що при всіх значеннях z, для яких $|z| < R$, степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ збігається абсолютно, а при $|z| > R$ є розбіжним. Зазначимо, що нерівності $|z| < R$ задовольняють точки комплексної площини, що лежать всередині круга радіусом R з центром в точці $z = 0$.

Величину R називають радіусом збіжності степеневого ряду (6), а кругу $|z| < R$ — кругом збіжності ряду. У крузі $|z| < R$ ряд збігається, поза кругом ($|z| > R$) – розбігається, а на колі $|z| = R$ можуть бути як точки збіжності, так і точки розбіжності ряду.

Якщо ряд (6) збігається лише в точці $z = 0$, тоді вважають $R = 0$. Якщо ж ряд збігається на всій комплексній площині, то $R = \infty$. Кругом збіжності ряду (5) буде круг $|z - z_0| < R$.

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Деякі властивості степеневих рядів

1. Сума степеневого ряду всередині круга збіжності є аналітичною функцією;
2. Степеневий ряд всередині круга збіжності можна почленно диференціювати та інтегрувати будь яку кількість разів. Ряд, який при цьому отримується, буде мати такий же радіус збіжності, що і початковий ряд.

3. Ряд Тейлора

Теорема 4 (Тейлора)

Будь-яку аналітичну у крузі $|z - z_0| < R$ функцію $f(z)$ можна єдиним чином розвинути у цьому крузі у степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n \tag{7}$$

коефіцієнти якого визначають за формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

де l_r – довільне коло з центром у точці z_0, який лежить всередині заданого круга.

Ряд (7) називають рядом Тейлора з центром у точці z_0 функції $f(z)$.

Теорема 5 (про єдиність розвинення ряд Тейлора)

Якщо функція $f(z)$ *розвивна у крузі* $|z-z_0|<R$ *у степеневий ряд*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n$$

то цей ряд буде рядом Тейлора з центром у точці z_0 *функції* $f(z)$.

Розвинення деяких функцій в ряд Маклорена (з центром в точці $z_0=0$)

1. $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C};$
2. $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in\mathbb{C};$
3. $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in\mathbb{C};$
4. $\operatorname{sh} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in\mathbb{C};$
5. $\operatorname{ch} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in\mathbb{C};$
6. $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1;$
7. $\dfrac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1;$
8. $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n},\quad |z|<1.$

Теорема 6 (Лорана)

Будь-яку аналітичну в кільці $r < |z - z_0| < R$ $(0 \le r < R \le \infty)$ функцію $f(z)$ можна єдиним чином розвинути у цьому кільці в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n \tag{8}$$

коефіцієнти якого визначають за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{Z},$$

де γ_r – довільне коло з центром у точці z_0, який лежить всередині заданого кільця.

Ряд (8) називають рядом Лорана з центром у точці z_0 функції $f(z)$.

Ряд Лорана для функції

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{\left(z-z_0\right)^m}$$

складається з двох частин.
Першу частину ряду Лорана

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$$

називають правильною частиною ряду Лорана; цей ряд збігається до аналітичної функції $f_1(z)$ всередині круга $|z-z_0|<R$.
Другу частину ряду Лорана

$$f_2(z)=\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{\left(z-z_0\right)^m}$$

називають головною частиною ряду Лорана; цей ряд збігається до аналітичної функції $f_2(z)$ ззовні круга $|z-z_0|>r$

Всередині кільця $r < |z - z_0| < R$ ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

збігається до аналітичної функції $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.
При цьому в будь-якому вужчому кільці

$$r' < |z - z_0| < R'$$

де $r < r' < R' < R$, ряд Лорана збігається абсолютно і рівномірно.
Якщо функція $f(z)$ не має особливих точок всередині круга $|z - z_0| < R$, то її розвинення в ряд Лорана перетворюється на ряд Тейлора.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.