Числові ряди

доц. І.В. Орловський

Означення 1

Нехай $\{a_n,\, n \geq 1\}$ *– послідовність дійсних чисел. Вираз*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

*називається **числовим рядом** і позначається* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Тобто,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots . \qquad (1)$$

Числа $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ називають **членами ряду**, a_n – **n-им** або **загальним членом ряду**. Суму перших n членів ряду називають **n-тою частковою сумою ряду** та позначають

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Ряд

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

який отримується з ряду (1) відкиданням його перших n членів, називають n-м залишком ряду.

Означення 2

Якщо існує скінченна границя S послідовності часткових сум $\{S_n,\ n \geq 1\}$ ряду (1)*:*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

тоді ця границя називається сумою ряду (1)*, а сам числовий ряд називають збіжним. Записують*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або дорівнює нескінченності, тоді ряд (1) називають розбіжним.

I Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним і має суму S, то $\forall c \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$$

також є збіжним, причому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = cS$.

Доведення

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та позначимо через $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ – його n-ту часткову суму. Помітимо, що для часткової суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$

$$\tilde{S}_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = cS_n,$$

а тому $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n = cS$. ∎

II Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним і має суму S_a, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжним і має суму S_b, то ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$$

також є збіжними, а їх суми відповідно дорівнюють $S_a \pm S_b$.

Доведення

ДЗ. Довести самостійно

Зауваження

1. Сума/різниця збіжного та розбіжного рядів є розбіжним рядом;
2. Сума/різниця двох розбіжних рядів може бути як збіжним, так і розбіжним рядом.

III Якщо до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ додати (або відняти) скінченну кількість членів, то отриманий і початковий ряди будуть збігатися та розбігатися одночасно.

Доведення

ДЗ. Довести самостійно (оптимістам)

3. Геометричний ряд

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^n + \ldots$$

називають геометричним рядом.

ДЗ. Записати n-ту часткову суму та дослідити на збіжність в залежності від значень q.

4. Телескопічний ряд

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, який можна представити у наступному вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) =$$
$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) + \ldots,$$

де $\{b_n,\ n \geq 1\}$ – деяка числова послідовність, називають телескопічним рядом.

Оскільки часткова сума може бути представлена наступним чином

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) =$$
$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

то послідовність $\{S_n,\ n \geq 1\}$ збігається, якщо збігається послідовність $\{b_n,\ n \geq 1\}$.

Теорема 1 (Необхідна ознака збіжності ряда)

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то його* n*-ий член* a_n *прямує до нуля при* $n \to \infty$*, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доведення

Нехай збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і його сума

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ також.

Використовуючи те, що $a_n = S_n - S_{n-1}$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

Наслідок 1 (Достатня умова розбіжності ряда)

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *або ця границя не інсує, тоді ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *є розбіжним.*

Приклад 1

Дослідити збіжність ряди

$$1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{6n+1};$$

$$2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$3)\quad \left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots\,.$$

Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

називають гармонічним рядом.

Література

[1] *Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Конспект лекцій* / Уклад.: В.О. Гайдей, Л.Б. Федорова, І.В. Алєксєєва, О.О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.

[2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 2 часть. – М.: Рольф, 2000.