

1 МЕТОДИ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ

Переважна більшість технологічних процесів є неперервними, їх моделі також мають неперервну форму у вигляді диференціальних рівнянь, передаточних функцій, імпульсних, перехідних характеристик і т.п. Але при моделюванні неперервних систем на цифрових ЕОМ (або регулюванні за допомогою цифрових контролерів) такі системи зводять до еквівалентних дискретних, в яких аналогові сигнали хоча б на одній ділянці схеми періодично перетворюються з аналогової форми в дискретну.

Найбільш поширеним перетворенням сигналу є дискретизація за часом, яке переводить аналогову функцію $y(t)$ в послідовність вузьких імпульсів шириною $\tau_{\text{ім}} \rightarrow 0$ із сталою частотою (періодом дискретизації $T_{\text{кв}}$)

$$\{y(nT_{\text{кв}})\} = [y(0T_{\text{кв}}), y(1T_{\text{кв}}), y(2T_{\text{кв}}), \dots]$$

$$\text{або } \{y_n\} = [y_0, y_1, y_2, \dots],$$

огонаючи яких відповідає аналоговому сигналу.

Така форма сигналу дозволяє застосовувати z – перетворення, яке широко використовується для аналізу і розрахунку дискретних систем.

1.1 Метод z -перетворень для цифрового моделювання динамічних систем

Z – перетворенням неперервної функції $y(t)$ є перетворення послідовності величин

$$\{y_n\} = [y_0, y_1, y_2, \dots]$$

у функцію комплексної змінної z і визначається, як сума від’ємних степенів змінної z за допомогою співвідношення

$$Z\{y_n\} = y(z) = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}. \quad (5.1)$$

Таким чином, z – перетворення неперервної функції $y(t)$ можна представити у вигляді послідовності комплексної змінної z у степенях, що зменшуються, коефіцієнти яких дорівнюють амплітудам послідовних імпульсів $\{y_n\}$.

Приклад. Визначити z – перетворення одиничної степеневі функції

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Розв’язок. Імпульсна послідовність для $u(t)$ має вид $u(t) = 1$ для $n=0,1,2,\dots$

У відповідності з (5.1) маємо

$$Z\{u_n\} = u(z) = Z[1] = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

1.1.1 Важливі властивості z – перетворення

1. Лінійність. Якщо функції $y(t)$ та $x(t)$ мають z – перетворення, а коефіцієнти a і b – константи, які не залежать від t та z , тоді

$Z\{ax(t) + by(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} (ax_n + by_n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} ax_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} by_n z^{-n} =$ $= aX(z) + bY(z).$	(5.2)
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

2. Зсув у часовій області. Якщо $y(t)$ має z – перетворення, а $T_{кв}$ – період комутації (переривання) імпульсного пристрою, який перетворює $y(t)$ в імпульсну послідовність (решітчасту функцію), тоді:

$$Z\{y(t - nT_{кв})\} = z^{-n}y(z),$$

$$a \quad Z\{y(t + nT_{кв})\} = z^k \left[y(t) - \sum_{i=0}^{n-1} y(iT_{кв})z^i \right]. \quad (5.3)$$

Таким чином, множник z^{-1} свідчить, що у часовій області імпульсна послідовність $\{y_n\}$ затримується на n тактів (відповідно множник zn призводить до зсуву вправо (упередження) $\{y_n\}$ на n тактів).

Приклад. З використанням наведених властивостей визначимо різницю двох імпульсних послідовностей, одна з яких зсунута на такт

$$Z\{y(t) - y(t - T_{кв})\} = (1 - z^{-1})y(z).$$

1.1.2 Імпульсна передаточна функція

Властивості (5.2) і (5.3) корисні при виконанні операцій z – перетворення з рекурентними співвідношеннями.

Розглянемо співвідношення, яке використовується для інтегрування за формулою прямокутників

$$I_n = I_{n-1} + T_{кв} X_{n-1}, \quad (5.4)$$

де I_{n-1} , I_n – значення інтеграла на $(n-1)$ та n кроках,

X_{n-1} – значення підінтегральної функції на $(n-1)$ кроці,

$T_{кв}$ – період дискретизації (дискретності розрахунку).

Візьмемо z – перетворення від обох частин (5.4)

$$Z\{I_n\} = Z\{I_{n-1} + T_{кв} X_{n-1}\},$$

$$I(z) = z^{-1}I(z) + T_{кв} z^{-1}X(z).$$

Домноживши обидві частини рівняння на z , отримаємо

$$zI(z) = I(z) + T_{кв} X(z)$$

або

$$I(z) = \frac{T_{кв}}{z-1} X(z).$$

Відношення зображень вихідної змінної $I(z)$ до вхідної $X(z)$ має назву імпульсної передаточної функції $H(z)$. В даному випадку

$$H(z) = \frac{I(z)}{X(z)} = \frac{T_{\kappa\theta}}{z-1}, \quad (5.5)$$

тобто (5.5) є імпульсною передаточною функцією ланки інтегрування за методом прямокутників.

Аналогічно можна отримати імпульсну передаточну функцію для ланки інтегрування за методом трапецій. Рекурентна формула має вигляд

$$I_n = I_{n-1} + \frac{T_{\kappa\theta}}{2}(x_n + x_{n-1}). \quad (5.6)$$

Виконуючи z – перетворення від обох частин рівняння (5.6), отримаємо

$$I(z) = z^{-1}I(z) + \frac{T_{\kappa\theta}}{2}X(z) + \frac{T_{\kappa\theta}}{2}z^{-1}X(z)$$

або

$$(z-1)I(z) = \frac{T_{\kappa\theta}}{2}(z+1)X(z)$$

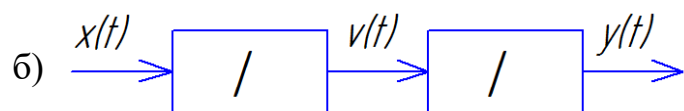
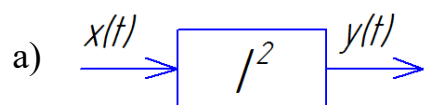
і нарешті

$$I(z) = \frac{T_{\kappa\theta}}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)} X(z), \quad (5.7)$$

де $\frac{T_{\kappa\theta}}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)}$ – імпульсна передаточна функція для ланки інтегрування

за методом трапецій.

Переваги по точності при використанні методу трапецій над методом прямокутників очевидні уже при подвійному інтегруванні. Процедuru подвійного інтегрування (а) можна представити послідовним виконанням інтегрування двома ланками (б), рис. 5.1.



в)
$$v(t) = \int_0^T x_1(t) dt$$

$$y = \int_0^T x_2(t) dt$$

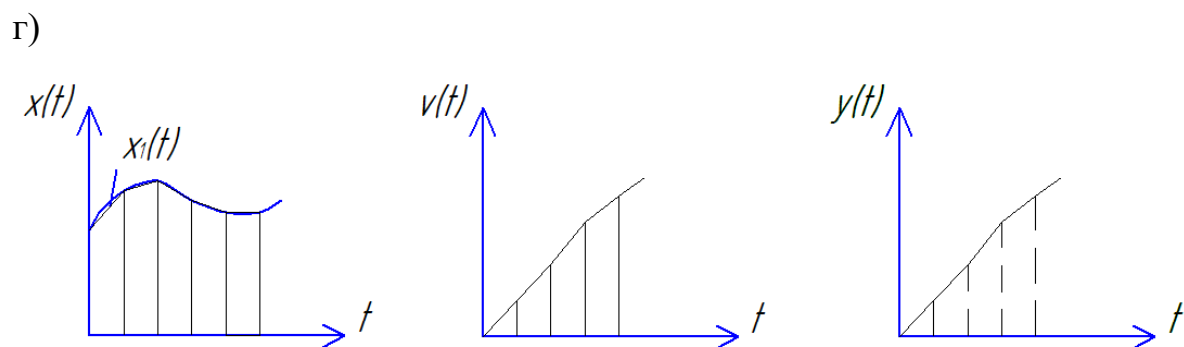
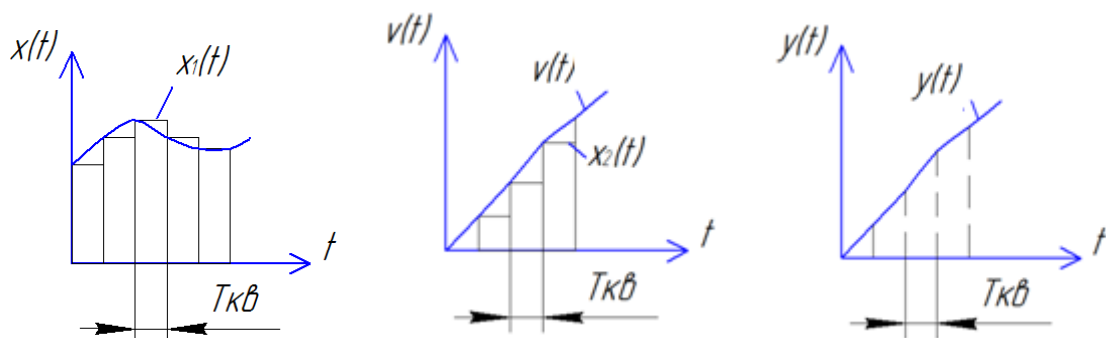


Рис.5.1. Структурні схеми [а), б)] та графіки змінних при подвійному інтегруванні

а) процедура подвійного інтегрування,

- б) послідовне інтегрування двома ланками,
- в) за методом прямокутників,
- г) за методом трапецій.

Як видно з графіків абсолютна похибка апроксимації підінтегральної функції $x(t)$ функцією $x_1(t)$ на кожному інтервалі дискретизації значно більша для методу прямокутників, але ці похибки мають різні знаки, що у підсумку значно нівелює загальну похибку.

Але вже при апроксимації кусково-лінійної функції $v(t)$ кусково-сталого формою $x_2(t)$ за методом прямокутників на кожному інтервалі $T_{кв}$ виникає похибка, яка постійно накопичується. В той же час апроксимація $v(t)$ кусково-лінійною $x_2(t)$ за методом трапецій позбавлена цього недоліку.

Таким чином, при необхідності використання z – перетворення над ланками інтегрування рекомендується користуватися імпульсними передаточними функціями ланок інтегрування за методом трапецій. Тоді при виконанні z – перетворення над ланкою подвійного інтегрування $H(z)$ буде мати вигляд (рис.5.2):

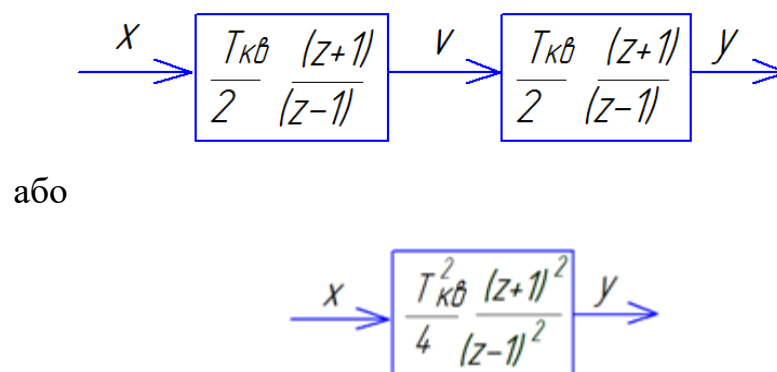


Рис. 5.2. Структурна схема подвійного інтегрування за методом трапецій

1.1.3 Методика перетворення диференціальних рівнянь до рекурентного вигляду

З імпульсної передаточної функції нескладно отримати рекурентне співвідношення у часовій області. Покажемо таке перетворення на такому прикладі. Нехай

$$y(z) = H(z)x(z), \quad (5.8)$$

де $H(z)$ – дробово-раціональна функція від z , наприклад

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}. \quad (5.9)$$

Поділивши чисельник та знаменник (5.9) на z^2 (у загальному випадку на z у найвищій степені) і підставивши результат у (5.8), отримаємо

$$y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot x(z). \quad (5.10)$$

З останнього рівняння маємо

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})x(z). \quad (5.11)$$

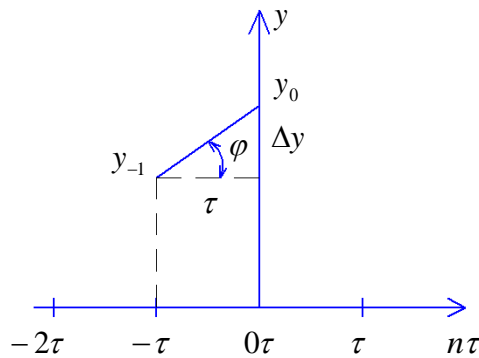
Враховуючи властивість (5.3) z – перетворення, отримуємо

$$y_n = \frac{1}{a_0} (b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}). \quad (5.12)$$

Таким чином за допомогою z – перетворення легко встановити відповідність між імпульсними передаточними функціями, які характеризують динаміку дискретних систем, та рекурентними співвідношеннями, які описують поведінку тих самих систем у часовій області і мають зручну форму для виконання розрахунків.

Обчислення за рівнянням (5.12) вимагає знання послідовності вхідної змінної x_i , а також значень y_0 та y_{-1} при розрахунку y_1 . Ці значення знаходять з початкових (або крайових) умов. Так $y_0 = y(0)$, а y_{-1} можна визначити з $\dot{y}(0)$ за умови, що відрізок $y(t)$ на ділянці $[-\tau, 0\tau]$ може бути

апроксимований лінійною функцією, тангенс кута нахилу якої дорівнює $\dot{y}(0)$ (рис. 5.3).



$$\frac{\Delta y}{\tau} = \operatorname{tg} \varphi = \dot{y}(0),$$

$$y_{-1} = y_0 - \tau \cdot \dot{y}(0).$$

Рис. 5.3. Ілюстрація для визначення початкових умов

Наведемо методику перетворення звичайних диференціальних рівнянь до рекурентного вигляду. Вона базується на методі z – перетворення та властивості операторів інтегрування (I_x) та диференціювання (D_x). Зокрема при відповідному виборі початкових умов оператор $I_x = \int_0^t x(t) dt$ є оберненим

до оператора $D_x = \frac{dx(t)}{dt}$ (тобто $I = \frac{1}{D}$; $I^2 = \frac{1}{D^2}$ і т.д.).

Алгоритм такого перетворення покажемо на прикладі диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = ku(t). \quad (5.13)$$

1. Записують рівняння (5.13) в операторній формі з використанням оператора D

$$(D^2 + aD + b)y = ku. \quad (5.14)$$

2. Ділять обидві частини рівняння (5.14) на оператор D в старшій степені (у прикладі D^2)

$$\left(1 + \frac{a}{D} + \frac{b}{D^2}\right)y = \frac{k}{D^2}u.$$

3. Записують операторне рівняння через оператор I

$$(1 + aI + bI^2)y = kI^2u.$$

4. Виконують z – перетворення від обох частин останнього рівняння. (При цьому при перетворенні оператора I використовуємо імпульсну передаточну функцію для ланки інтегрування за методом трапецій.)

$$\left[1 + a \frac{T_{\kappa\theta}}{2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) + b \frac{T_{\kappa\theta}^2}{4} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 \right] y(z) = k \frac{T_{\kappa\theta}^2}{4} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2 u(z).$$

5. Позбавляємось від знаменника (при цьому $z \neq 1$) і після зведення подібних отримаємо

$$(Az^2 + Bz + C)y(z) = (Dz^2 + Ez + F)u(z), \quad (5.15)$$

$$\text{де } A = 4 + aT_{\kappa\theta} + bT_{\kappa\theta}^2,$$

$$B = 2bT_{\kappa\theta}^2 - 8,$$

$$C = 1 - aT_{\kappa\theta} + bT_{\kappa\theta}^2,$$

$$D = F = kT_{\kappa\theta}^2,$$

$$E = 2kT_{\kappa\theta}^2.$$

6. Поділивши обидві частини рівняння (5.15) на z в старшій степені (у даному випадку z^2), отримаємо

$$(A + Bz^{-1} + Cz^{-2})y(z) = (D + Ez^{-1} + Fz^{-2})u(z).$$

7. З урахуванням властивості зсуву назад (5.3) остаточно отримаємо рекурентний вираз

$$y_n = \frac{1}{A} (Du_n + Eu_{n-1} + Fu_{n-2} - By_{n-1} - Cy_{n-2}).$$

1.2 Метод лівих різниць

Метод зручно використовувати для отримання дискретних моделей, якщо неперервна модель об'єкта представлена у вигляді диференціальних рівнянь при умові малих тактів дискретизації ($T_{\kappa\theta} \ll T_0$).

За цих умов диференціали можуть замінюватись лівими різницями:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y(k)}{T_{\text{кв}}} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T_{\text{кв}}};$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \approx \frac{\Delta^2 y(k)}{T_{\text{кв}}^2} = \frac{\Delta y(k) - \Delta y(k-1)}{T_{\text{кв}}^2} = \frac{y(k) - y(k-1) - y(k-1) + y(k-2)}{T_{\text{кв}}^2} =$$

$$\frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{T_{\text{кв}}^2};$$

і т.д.,

де $\Delta^n y(k)$ – ліва різниця n-го порядку ($n=0,1,2,\dots$).

Приклад. Перетворити неперервну модель виду

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = ku(t)$$

у дискретну форму з періодом дискретизації $T_{\text{кв}}=0,1$

$a_0=50$, $a_1=10$, $k=25$.

Рішення. Замінюємо похідні на ліві різниці

$$\frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{0,01} + a_1 \frac{y(k) - y(k-1)}{0,1} + a_0 y(k) = ku(k)$$

і після нескладних перетворень отримаємо

$$250y(k) - 150y(k-1) + 100y(k-2) = 25u(k)$$

або

$$y(k) = 0,6y(k-1) - 0,4y(k-2) + 0,1u(k).$$

1.3 Метод Тастіна

Метод доцільно використовувати для перетворення неперервних моделей, які задані у формі передаточних функцій. В цьому випадку слід врахувати в дискретній моделі наявність на вході фіксатора (екстраполятора нульового порядку)

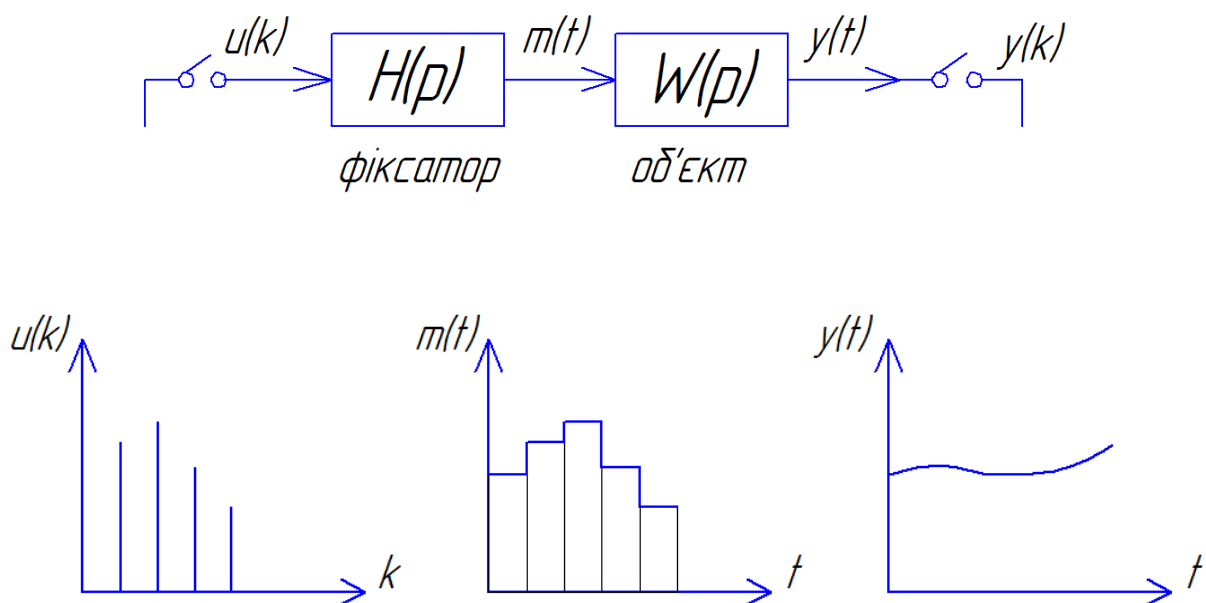


Рис. 5.4. Структурна схема дискретної моделі та графіки зміни форми сигналів у схемі.

Згідно зі схемою (рис. 5.4) дискретна передаточна функція буде мати вигляд

$$Z\{H(p) \cdot W(p)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-T_{\text{кв}} p}}{p} W(p)\right\} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}. \quad (5.16)$$

Для отримання $Z\left\{\frac{W(p)}{p}\right\}$ без використання таблиць z – перетворення

Тастін запропонував таке співвідношення

$$P \approx \frac{2}{T_{\text{кв}}} \cdot \frac{z-1}{z+1}. \quad (5.17)$$

Для доведення (5.17) розглянемо інтегральне рівняння

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad (5.18)$$

якому відповідає перетворення Лапласа

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{1}{Tp}. \quad (5.19)$$

Якщо проінтегрувати по формулі трапецій (5.18), отримаємо

$$y(k) \approx \frac{T_{\kappa\theta}}{T} \sum_{i=1}^k 0,5[u(i) + u(i-1)], \quad (5.20)$$

$$y(k-1) \approx \frac{T_{\kappa\theta}}{T} \sum_{i=1}^{k-1} 0,5[u(i) + u(i-1)]. \quad (5.21)$$

Різниця між цими рівняннями буде

$$y(k) - y(k-1) \approx \frac{T_{\kappa\theta}}{2T} [u(k) + u(k-1)]. \quad (5.22)$$

Беручи z – перетворення від останнього рівняння, отримаємо

$$\frac{y(z)}{u(z)} \approx \frac{T_{\kappa\theta}}{T} \cdot \frac{z+1}{z-1}. \quad (5.23)$$

При $T_{\kappa\theta} \rightarrow 0$ рівняння (5.19) та (5.23) повинні співпадати, тобто $p \rightarrow \frac{2}{T_{\kappa\theta}} \cdot \frac{z-1}{z+1}$. Аналогічний результат був уже отриманий в розділі 5.1., формула (5.7).

1.4 Контрольні питання

1. Метод Z-перетворень, умови його використання.
2. Імпульсна передаточна функція, чинники підвищення точності розрахунку цифрових систем при її використанні.
3. Методика перетворення диференціальних рівнянь до рекурентного виду.
4. Метод лівих різниць, умови використання.
5. Формула Тастіна.
6. Розрахувати значення виходу $y(k)$ для $k=2$, якщо його модель у просторі станів має вигляд:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

при умові, що

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а дія $u(k) = 1(k)$ для $k \geq 0$.

2 МОДЕЛІ РЕГУЛЯТОРІВ

Переважна більшість контурів регулювання технологічних процесів (об'єктів) побудована із використанням типових П, ІІ, ІІД законів регулювання або їх модифікацій. Це обумовлено глибоким теоретичним підґрунтям, наявністю широкого спектру методик розрахунку параметрів таких регуляторів, простотою реалізації та надійністю при застосуванні. Тому в цьому розділі розглядаються неперервні та дискретні моделі саме таких поширених законів регулювання. Неперервні моделі описують поведінку аналогових блоків регулювання, дискретні – алгоритми регулювання, які реалізуються контролерами.

2.1 Моделі неперервних регуляторів

Спрощена структура типового регулятора наведена на рис. 6.1.

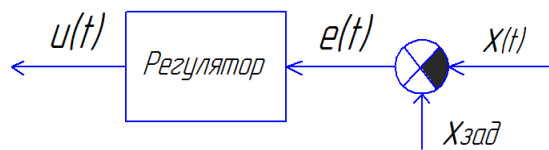


Рис. 6.1. Спрощена структура неперервного регулятора

На рис. 6.1. прийняті такі позначення:

$u(t)$ – вихідний сигнал регулятора,

$x(t)$, $x_{\text{зад}}$ – відповідно поточне та задане значення змінної, що регулюється,

$e(t) = x_{\text{зад}} - x(t)$ – розбіжність (похибка регулювання).

Стандартний ІІД – закон регулювання має вид

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_u} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (6.1)$$

де k_p – коефіцієнт передачі регулятора,

T_u – стала інтегрування,

T_d – стала диференціювання.

Зміна структури закону регулювання можлива шляхом виключення окремих складових з (6.1). Наприклад,

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_u} \int_0^T e(t) dt \right] \quad (6.2)$$

відповідає ПІ-закону регулювання,

$$u(t) = k_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (6.3)$$

відповідає ПД-закону регулювання.

Крім структур (6.1), (6.2), (6.3) можливі такі модифікації:

- при частих та суттєвих змінах завдання ($x_{\text{зад}}$) диференційна складова може розраховуватися по значенню $x(t)$

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_u} \int_0^T e(t) dt + T_d \frac{dx(t)}{dt} \right];$$

- в залежності від величини $e(t)$ виконується включення або відключення інтегральної складової:

якщо $|e(t)| < \delta$, то ПІД – закон,

якщо $|e(t)| \geq \delta$, то ПД – закон регулювання,

δ – наперед задана величина;

- для підсилення пропорційної складової в законі регулювання може використовуватися квадрат похибки регулювання

$$u(t) = k_p \left[|e(t)| e(t) + \frac{1}{T_u} \int_0^T e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

або

$$u(t) = k_p \left[|e(t)| e(t) + \frac{1}{T_u} \int_0^T e(t) dt + T_d \frac{dx(t)}{dt} \right];$$

- для безударного переходу з режиму «дистанційне управління» в режим «автоматична стабілізація» при $e(t) = 0$ значення виходу регулятора дорівнює величині керуючої дії в режимі «дистанційне управління».

Ручний -> Автоматичний

ISA-форма ПІД регулятора:

$$u(t) = K_{\Pi} \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Для безударного переходу з ручного режиму в автоматичний необхідно, щоб у цей момент

$$u(t) = u_{\text{РУЧНЕ}}(t)$$

Щоб регулятор у ручному режимі відслідковував положення свого реального виходу (те, яке задає оператор) та правильно відреагував, потрібно перерахувати інтегральну складову, яка відповідає за історію керуючого впливу

$$\frac{1}{T_I} \int e(t) dt$$

Коли регулятор знаходиться в ручному режимі, інтегральна складова має дорівнювати

$$\frac{1}{T_I} \int e(t) dt = \frac{u_{\text{РУЧНЕ}}(t)}{K_{\Pi}} - \left(e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

2.2 Автоматичний -> Ручний

Тут все просто – потрібно відслідковувати поточний вихід регулятора і присвоювати його змінній, яка відповідає за команди Положення в Ручному режимі:

$$u_{\text{РУЧНЕ}}(t) = u(t)$$

У такому випадку в момент переходу змінна Положення в ручному режимі відповідатиме поточному положенню і саме від цього буде відштовхуватися оператор.

-

Для введення диференціальної складової потрібно проводити згладжування величини $e(t)$ або $x(t)$.

Перехідна характеристика ПІД – регулятора на ступеневе тестове збурення наведена на рис. 6.2.

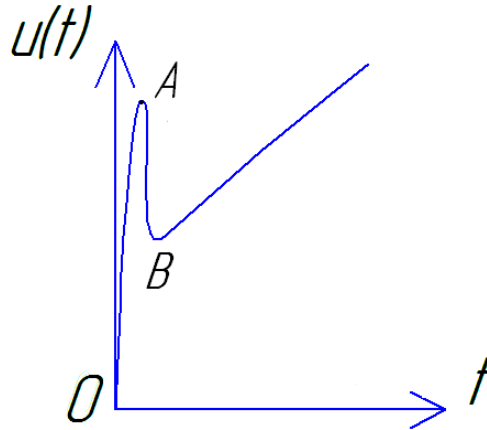


Рис. 6.2. Типова форма вихідного сигналу неперервного ПІД – регулятора на одиничний ступеневий вхід

Перше, стрибкоподібне зростання (ділянка ОА) обумовлена сумісною дією Д та П складовими на ступеневе збурення. Після завершення дії Д складової (т. В) вихідний сигнал регулятора визначається сумою П (стала величина) та І складових.

2.3 Моделі дискретних (цифрових) регуляторів [8,9]

З врахуванням малих (у порівнянні з часовими параметрами технологічних об'єктів) значень періоду дискретизації $T_{кв}$ контролерів з рівняння (6.1) за методом прямокутників отримаємо позиційний алгоритм дискретного ПІД – регулятора

$$u(k) = k_p \left\{ e(k) + \frac{T_{кв}}{T_u} \sum_{i=0}^k e(i-1) + \frac{T_d}{T_{кв}} [e(k) - e(k-1)] \right\}. \quad (6.4)$$

На практиці використовується швидкісний алгоритм регулювання,

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k), \quad (6.5)$$

у якому формування керуючої дії на k – тому кроці відбувається шляхом додавання розрахованої поправки $\Delta u(k)$ до значення керуючої дії на $(k - 1)$ кроці. Для отримання (6.5) запишемо вираз для $u(k - 1)$

$$u(k - 1) = k_p \left\{ e(k - 1) + \frac{T_{\kappa\delta}}{T_u} \sum_{i=0}^{k-1} e(i - 1) + \frac{T_\delta}{T_{\kappa\delta}} [e(k - 1) - e(k - 2)] \right\} \quad (6.6)$$

і віднімемо (6.6) від (6.4). Отримаємо

$$u(k) = u(k - 1) + q_0 e(k) + q_1 e(k - 1) + q_2 e(k - 2), \quad (6.7)$$

$$\text{де } q_0 = k_p \left(1 + \frac{T_\delta}{T_{\kappa\delta}} \right) = k_p (1 + C_\delta); \quad (6.8)$$

$$q_1 = -k_p \left(1 + 2 \frac{T_\delta}{T_{\kappa\delta}} - \frac{T_{\kappa\delta}}{T_u} \right) = -k_p (1 + C_\delta - C_u); \quad (6.9)$$

$$q_2 = k_p \frac{T_\delta}{T_{\kappa\delta}} = k_p C_\delta, \quad (6.10)$$

де у свою чергу

C_δ – коефіцієнт випередження,

C_u – коефіцієнт інтегрування.

Таким чином для швидкісного алгоритму керування (6.7) формули (6.8), (6.9), (6.10) дають можливість розрахунку параметрів дискретного регулятора (q_0, q_1, q_2) через настройки відповідного аналогового регулятора (k_p, T_δ, T_u) при умові, що $T_{\kappa\delta} \ll T_{i\text{об}}, \tau_{\text{об}}$.

З використанням формул (6.8), (6.9), (6.10) можна отримати зворотні визначення параметрів аналогового регулятора через налаштування дискретного. Якщо відняти від (6.8) рівняння (6.10) отримаємо

$$k_p = q_0 - q_2. \quad (6.11)$$

З формули (6.10)

$$C_\delta = \frac{q_2}{k_p}. \quad (6.12)$$

З формули (6.9) з урахуванням (6.11) та (6.12)

$$\begin{aligned}
q_1 &= k_p C_u - k_p - 2k_p C_o, \\
C_u &= \frac{q_0 + q_1 + q_2}{k_p}.
\end{aligned}
\tag{6.13}$$

Імпульсна передаточна функція такого регулятора II порядку ($v = 2$) має вид

$$H_p(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}.$$

Дискретні ПД – закони регулювання ідентичні аналоговим лише в обмеженнях границях, для визначення яких розглянемо реакцію дискретного регулятора (6.7) на одиничний ступеневий тестовий сигнал

$$e(k) = 1(k) = \begin{cases} 1, & \text{для } k \geq 0, \\ 0, & \text{для } k < 0. \end{cases}$$

З огляду на (6.7) сформуємо систему рівнянь для послідовних значень $u(k)$ для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
u(-1) &= 0, \\
u(0) &= q_0, \\
u(1) &= u_0 + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1, \\
u(2) &= u(1) + q_0 + q_1 + q_2 = 3q_0 + 2q_1 + q_2, \\
&\vdots \\
u(k) &= u(k-1) + q_0 + q_1 + q_2 = (k+1)q_0 + kq_1 + (k-1)q_2.
\end{aligned}$$

Для забезпечення відповідності аналоговому регулятору характер вихідного сигналу дискретного регулятора повинен бути подібним до $u(t)$ аналогового регулятора (рис. 6.2). З цієї умови для позитивного k_p випливають такі обмеження:

$$\begin{cases} u(k) > 0, & \text{відповідно } q_0 > 0, \\ u(0) > u(1), & \text{відповідно } q_0 + q_1 < 0 \text{ або } q_1 < -q_0, \\ u(i) > u(i-1), i > 1, & \text{відповідно } q_0 + q_1 + q_2 > 0, q_2 > -(q_0 + q_1), \\ \text{якщо } k_p = q_0 - q_2 > 0, & \text{тоді } q_0 > q_2. \end{cases}
\tag{6.14}$$

Таким чином, виконання системи обмежень забезпечить реалізацію $u(k)$ дискретного регулятора, графік якого наведений на рис. 6.3.

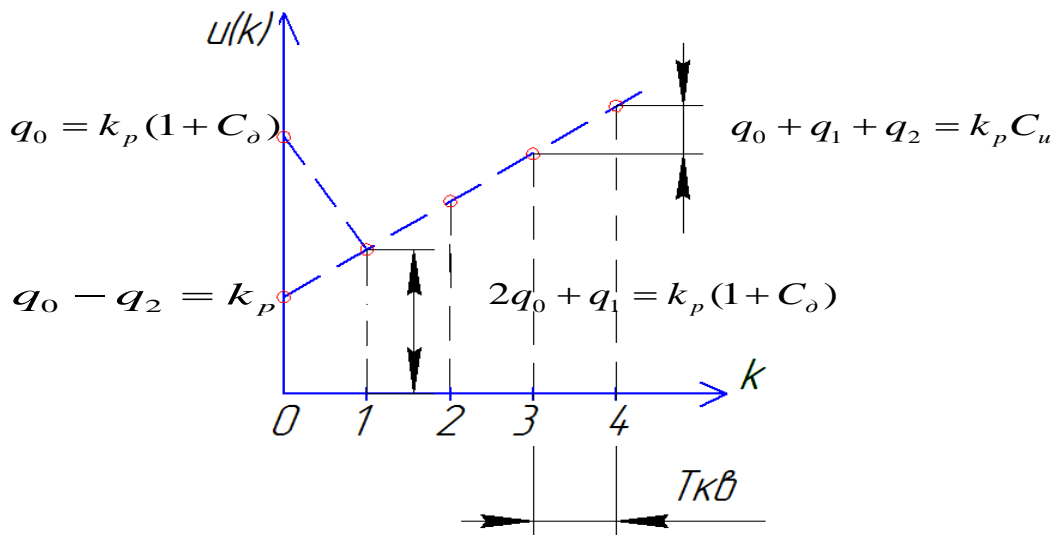


Рис. 6.3. Графік вихідного сигналу цифрового ПІД – регулятора на ступеневе одиничне збурення

Слід зауважити, що при введенні диференційної складової спочатку зазвичай проводять аперіодичне згладжування величини, що диференціюються

$$\tilde{e}(k) = Ce(k) + (1 - C)\tilde{e}(k - 1),$$

де $\tilde{e}(k), \tilde{e}(k - 1)$ - згладжені значення вхідного сигналу регулятора на k – тому та $(k - 1)$ кроці,

C – коефіцієнт згладжування,

який рекомендується розраховувати за такою формулою

$$C = e^{\frac{-8T_{кв}}{T_d}}. \quad (6.15)$$

2.4 Контрольні питання

1. Записати модель неперервного ПІД- регулятора, його можливі модифікації.
2. Позиційний та швидкісний алгоритми керування, їх особливості.
3. Сформулювати умови відповідності цифрового та аналогового ПІД- регуляторів.

4. Накреслити графік вихідного сигналу цифрового регулятора на ступеневе одиничне збурення.

5. Імпульсна передаточна функція регулятора має вид $H(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$ (де $u(z), e(z)$ - зображення відповідно виходу і входу регулятора). Розрахувати значення виходу регулятора на другому кроці при подачі на його вхід одиничного сигналу $e(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$ для $u(0) = 0$.