Dokumentácia k Fyzikálnemu SISO Systému
Zadanie č. 3

Roiko Oleksii

30. januára 2024

sys.jpg

Obr. 1: M5 model

1. Analytická Identifikácia

1a) Matematický popis fyzikálneho SISO systému

Matematický popis uvažovaného hydraulického systému získame využitím rovnice kontinuity Qm = p . S . v = konšt. (v = v(t) = rýchlosť prúdenia kvapaliny), pre nestlačiteľnú kvapalinu:

$$Qm = S_1.v_1 = s_1.v_{11} = S_2.v_2 = s_2.v_{22} = konšt., \tag{1}$$

ktorá hovorí, že množstný tok Qm vyjadrujúci objem kvapaliny s hustotou p, ktorý pretečie potrubím s prierezom S rýchlosťou v za jednotkov času, je v každom mieste potrubia konštantný. Pomocou Torricelliho vzorca

$$v = \sqrt{2.g.h}, \tag{2}$$

možno pre zmenu objemu kvapaliny v 1.nádrži písať:

$$S_1.dh_1(t)/dt = q_0(t) - q_1(t) \tag{3}$$

a výsledná diferenciálna rovnica je:

$$S_1.\dot{h}_1(t) = q_0 - p_1.s_1\sqrt{2.g.h_1(t)}. \tag{4}$$

Analogicky pre zmenu objemu kvapaliny v druhej nádrži platí:

$$S_2.\dot{h}_2(t) = p_1.s_1\sqrt{2.g.h_1(t)} - p_2.s_2\sqrt{2.g.h_2(t)}, \tag{5}$$

kde p_1,p_2 je percent otvorenia ventilu 2.nádoby

1b) Popis fyzikálnych veličín a parametrov

Parameter	Popis
$R1$	polomer 1. nádoby
$d1$	priemer výtokového otvoru 1. nádoby
$s1$	plocha výtokového otvoru 1. nádoby
$S1$	plocha hladiny v 1.j nádrži
$p1$	percento otvorenia ventilu 1. nádrže
$R2$	polomer 2. nádoby
$d2$	priemer výtokového otvoru valcovej nádoby
$s2$	plocha výtokového otvoru valcovej nádoby
$S2$	plocha hladiny v 2. nádrži
$p2$	percento otvorenia ventilu 2. nádrže
ρ	hustota kvapaliny
g	gravitačné zrýchlenie

Tabuľka 1: Popis parametrov

Fyzikálna veličina	Popis
$q0(t)$	prítok do guľovej nádrže
$q1(t)$	voľný odtok z 1. nádrže
$q2(t)$	voľný odtok z 2. nádrže
$v1(t)$	rýchlosť poklesu hladiny v 1. nádrži
$v11(t)$	odtoková rýchlosť z 1. nádrže
$v2(t)$	rýchlosť poklesu hladiny v 2. nádrži
$v22(t)$	odtoková rýchlosť z 2. nádrže
$h1(t)$	výška hladiny v 1. nádrži
$h2(t)$	výška hladiny v 2. nádrži

Tabuľka 2: Popis Fyzikálnych veličin

2. Výpočty, Analýza a Simulácia Modelu

Simulačný model vytvoríme úpravou matematického modelu (diferenciálna rovnica) na substitučný kanonický tvar:

$$h_1(t) = x_1(t) \tag{6}$$

$$\hat{h}_1(t) = \hat{x}_1(t) = \frac{q0 - p_1.s_1.\sqrt{2.g.x_1(t)}}{S_1} \tag{7}$$

$$h_2(t) = x_2(t) \tag{8}$$

$$\hat{h}_2(t) = \hat{x}_2(t) = \frac{p_1.s_1.\sqrt{2.g.x_1^*(t)} - p_2.s_2.\sqrt{2.g.x_2^*(t)}}{S_2} \tag{9}$$

2a) Simulačný model v MATLAB/Simulink

Listing 1: Main.m

```
clear;
clc;

g = 9.81;
p1 = 0.85;
s1 = 0.083;
p2 = 0.95;
s2 = 0.083;
R1 = 2;
R2 = 2;

h1s = 0.1;
h2s = 0.07;

a = 0.03;
b = 0;

U_pulse = @(t) 5 .* (mod(t, 100) < 50) + 0 .* (mod(t, 100) >= 50);
U_constant = @(t) ones(size(t)) * 5;

signalType = input("Enter signal type (constant/pulse): ", "s");

if signalType == "constant"
    q0 = @(t) a * U_constant(t) + b;
else
    q0 = @(t) a * U_pulse(t) + b;
end
```

```
S1 = 2*pi*R1*h1s + 2*pi*R1^2;
S2 = 2*pi*R2*h2s + 2*pi*R2^2;

K1 = (p1 * s1 * sqrt(2*9.8066*10^2)) / (2 * sqrt(h1s));
K2 = (p2 * s2 * sqrt(2*9.8066*10^2)) / (2 * sqrt(h2s));

t_span = [0 1000];
x0 = [0 0];

A = [-(K1/S1), 0; K1/S2, -(K2/S2)];
B = [1/S1; 0];
C = eye(2);
D = 0;

[t1, x1] = ode45(@(t,x) fun(t, x, q0(t), p1, s1, R1, R2, s2, p2, g)
, t_span, x0);
[t2, x2] = RK(@(t, x) fun(t, x, q0(t), p1, s1, R1, R2, s2, p2, g)
, x0, t_span, 0.1);

sys = ss(A, B, C, D);

t_range = t_span(1):0.05:t_span(2);
U_range = q0(t_range);
y = lsim(sys, U_range, t_range,[0 0]);

yData = sim("model.slx");


figure(Name="ode45 VS Runge-Kutta")

hold on;
plot(t1, x1, "-", 'LineWidth', 2);
plot(t2, x2,"--", 'LineWidth', 2);
hold off;
title('ode45 VS Runge-Kutta');
xlabel('Time');
ylabel('Solution');
legend("h1(t) ode45","h2(t) ode45","h1(t) Runge-Kutta"
,"h2(t) Runge-Kutta");

figure(Name="ode45 VS Linerized model im Matlab")
hold on;
plot(t1, x1, "--", 'LineWidth', 2);
plot(t_range, y, 'LineWidth', 2);
hold off;
title('ode45 VS Linerized model');
xlabel('Time');
```

```
ylabel('Solution');
legend("h1(t) nonlinear","h2(t) nonlinear","h1(t) linear"
,"h2(t) linear");

figure(Name="Simulink model VS Simulink linerized model")
hold on;
plot(yData.system.Time, yData.system.Data, '--', 'LineWidth', 2);
plot(yData.lin.Time, yData.lin.Data, 'LineWidth', 2);
hold off;
xlabel('Time');
ylabel('Solution');
title("Simulink model VS Simulink linerized model");
legend("h1(t) nonlinear","h2(t) nonlinear", "h1(t) linear"
, "h2(t) linear");
```

Listing 2: fun.m

```
function dxdt = fun(~, x, q0, p1, s1, R1, R2, s2, p2, g)
    h1 = x(1);
    h2 = x(2);

    S1 = 2*pi*R1.*h1 + 2*pi*R1^2;
    S2 = 2*pi*R2.*h2 + 2*pi*R2^2;

    dh1dt = (q0 - p1 * s1 * sqrt(2 * g .* h1)) / S1;
    dh2dt = (p1 * s1 * sqrt(2 * g .* h1) -
    p2 * s2 * sqrt(2 * g .* h2)) / S2;

    dxdt = [dh1dt; dh2dt];
end
```

2b) Linearizácia nelineárneho modelu

Linearizácia prebieha v stanovenom pracovnom bode x_s s požadovanými hodnotami U_{mot}, p_1, p_2 a ustálenými výškami hladín h_1s, h_2s. Použitím Jacobihob matice pre maticu dynamiky A a maticu vstupu B platí:

$$A = \begin{bmatrix} -(2^{1/2}gp_1s_1)/(2S_1(gh_1)^{1/2}) & 0 \\ (2^{1/2}gp_1s_1)/(2S_2(gh_1)^{1/2}) & -(2^{1/2}gp_2s_2)/(2S_2(gh_2)^{1/2}) \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/S1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

V systéme neexistuje priama väzba a pri riadení sledujeme x_2 (výstup $y = x_2$), teda pre maticu výstupu D a maticu výstupu C platí:

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0 \tag{12}$$

Stavový opis linearizovaného systému má tvar:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^T x + Du \tag{13}$$

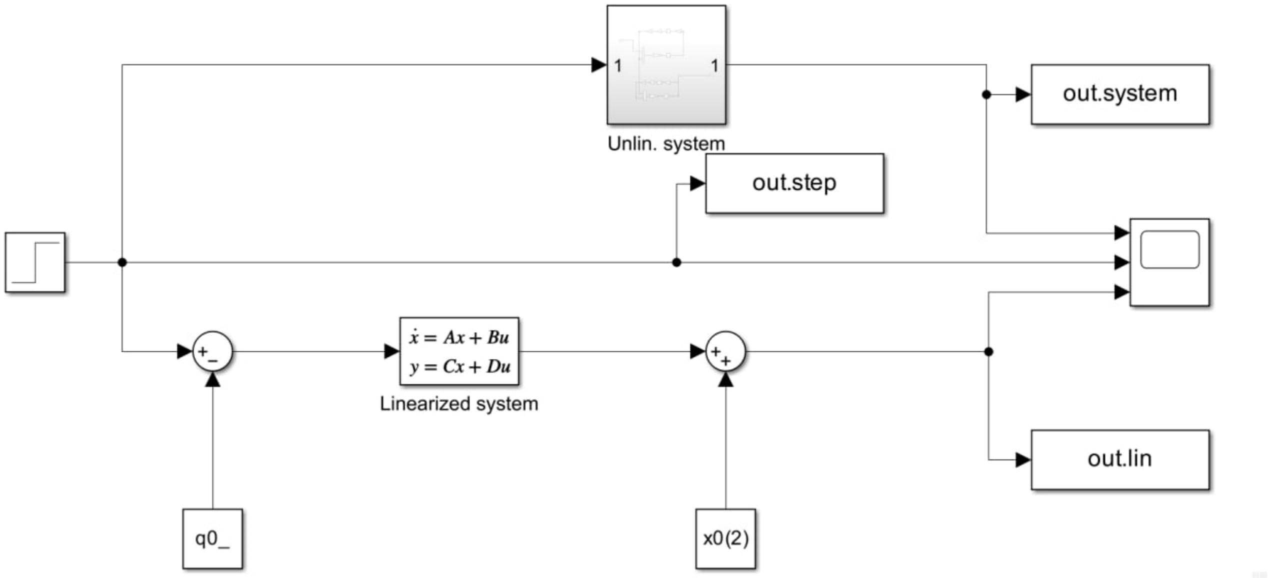
Listing 3: MATLAB code for linearization

```
A = jacobian(f, [h1, h2]);
simplify(A);
disp(A);
A = double(subs(A, [q0, g, h1, h2, p1, p2, s1, s2, R1, R2, S2, S1], ...
    [q0_, g_, h1_, h2_, p1_, p2_, s1_, s2_, R1_, R2_, S2_, S1_]));
disp(A);

B = jacobian(f, q0);
simplify(B);
disp(B);
B = double(subs(B, [q0, g, h1, h2, p1, p2, s1, s2, R1, R2, S2, S1], ...
    [q0_, g_, h1_, h2_, p1_, p2_, s1_, s2_, R1_, R2_, S2_, S1_]));
disp(B);

C = [0 1];

D = 0;

sys = ss(A,B,C,D);
```

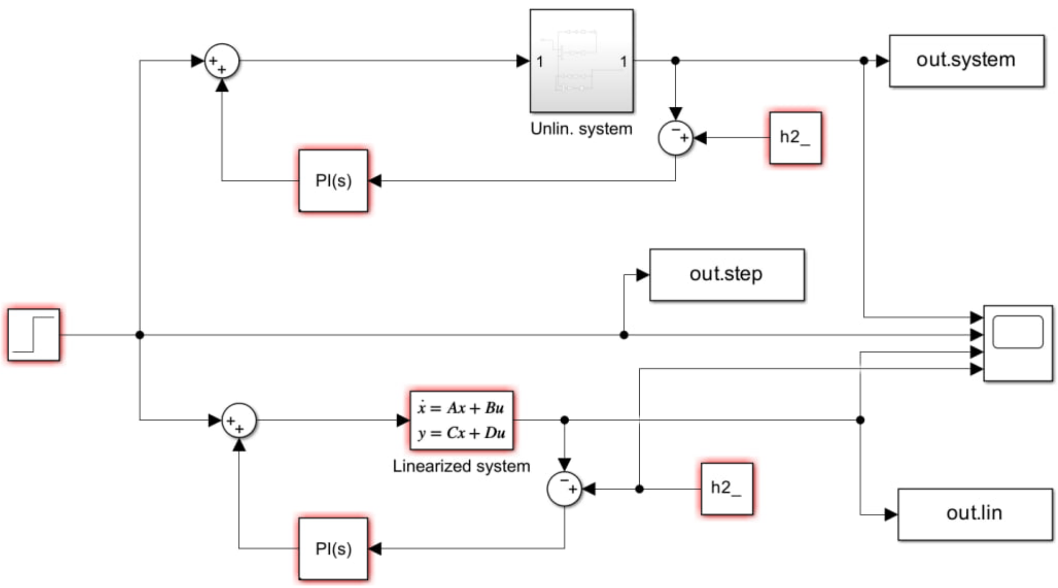
3. Simulink

V tejto časti ukážem svoje riešenie tohto systému v Simulinku.

Takto vyzerá celý systém v Simulinku:



Obr. 2: Cely system bez PID



Obr. 3: Cely system z PID

Na zostavenie modelu boli použité premenné a hodnoty z pracovného priestoru matlabu

3a) Simulation

Parametry systemu a simulacii:

$R_1 = 2\,\mathrm{cm}$	$R_2 = 2\,\mathrm{cm}$
$d_1 = 0.325\,\mathrm{cm}$	$d_z = 0.325\,\mathrm{cm}$
$p_1 = 0.85$	$p_2 = 0.95$
$s_1 = \pi \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 0.083\,\mathrm{cm}^2$	$s_2 = \pi \cdot \left(\frac{d_z}{2}\right)^2 = 0.083\,\mathrm{cm}^2$
$T_{\mathrm{sim}} = 500\,\mathrm{s}$	$dT = 0.1\,\mathrm{s}$
$U_{mot} = 5\,\mathrm{V}$	

Na vypocet pracovneho bodu odvodili tieto formuly z diferencialnych rovnic == 0:

Listing 4: MATLAB code for finding working point

```
g_ = 9.81;
p1_ = 0.85;
s1_ = 0.083;
p2_ = 0.95;
s2_ = 0.083;
R1_ = 2;
R2_ = 2;
h1_ = 0.15;
a = p1_*s1_*sqrt(2*g_);
b = p2_*s2_*sqrt(2*g_);
h2_ = (a^2*h1_)/(b^2);
q0_ = b*sqrt(h2_);


S1_ = 2*pi*R1_*h1_ + 2*pi*R1_^2;
S2_ = 2*pi*R2_*h2_ + 2*pi*R2_^2;
```

3b) PID

Tak isto podla Graham-Lathrop metody ziskali sme hodnoty P a I pre PI regulator:

Listing 5: MATLAB code for linearization

```
[num,den] = ss2tf (A , B , C , D );
w0 = den (2)/1.75;
K = (2.15* w0 ^2 - den (3))/ num (3);
I = w0 ^3/ num (3);
```

Na jeho vypocet sme použili tieto vzorce:

$$1 + F_r \times F_s = 0 \tag{14}$$

$$F_s = \frac{b_0}{a_2 \times s^2 + a_1 \times s + a_0} \tag{15}$$

$$F_r = K \times \left(1 + \frac{1}{T_i \times s}\right) \tag{16}$$

$$a_2 \times s^3 + a_1 \times s^2 + (a_0 + b_0 \times K) \times s + \frac{b_0 \times K}{T_i} = 0 \tag{17}$$

$$I = \frac{K}{T_i} \tag{18}$$

$$a_2 \times s^3 + a_1 \times s^2 + (a_0 + b_0 \times K) \times s + I = 0 \tag{19}$$

$$a_2 = 1, a_1 = 0.0338, a_0 = 0.00028245, b_0 = 0.00056048 \tag{20}$$

$$\text{Zvolíme si riešenie metódou Graham-Lathrop:} \tag{21}$$

$$s^3 + 0.0338s^2 + (0.00028245 + 0.00056048 \times K)s + 0.00056048 \times I = 0 \tag{22}$$

$$s^3 + 1.75s^2 \times w_0 + 2.15s \times w_0^2 + w_0^3 = 0 \tag{23}$$

$$s^3 : 1 = 1 \tag{24}$$

$$s^2 : 0.00028245 = 1.75 \times w_0 \tag{25}$$

$$w_0 = 0.01934 \tag{26}$$

$$s : 0.00028245 + 0.00056048 \times K = -2.15 \times w_0^2 \tag{27}$$

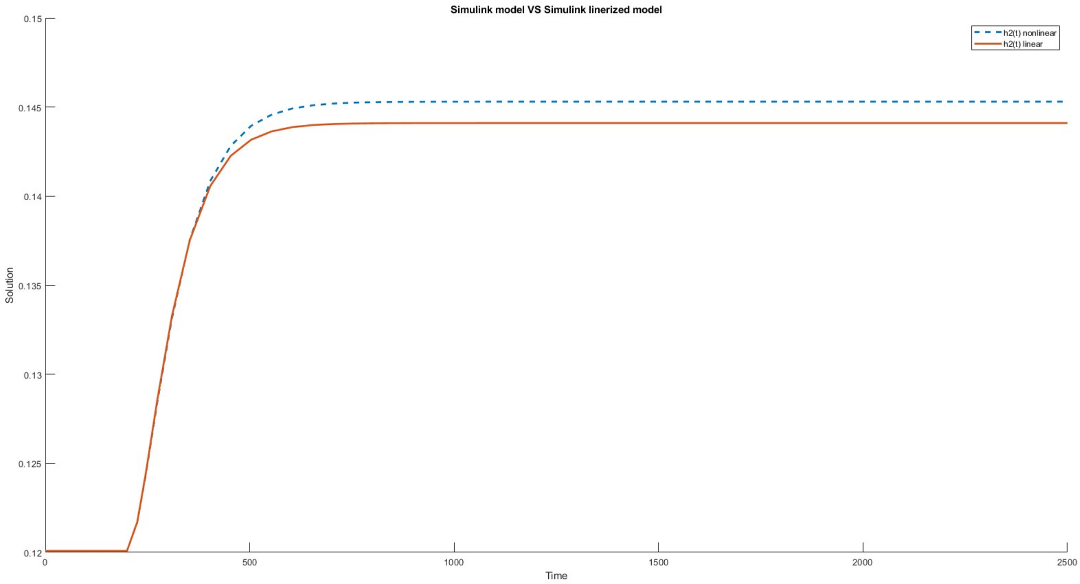
$$K = (2.15 \times w_0^2 - 0.00028245)/0.00056048 \tag{28}$$

$$K = 0.9311 \tag{29}$$

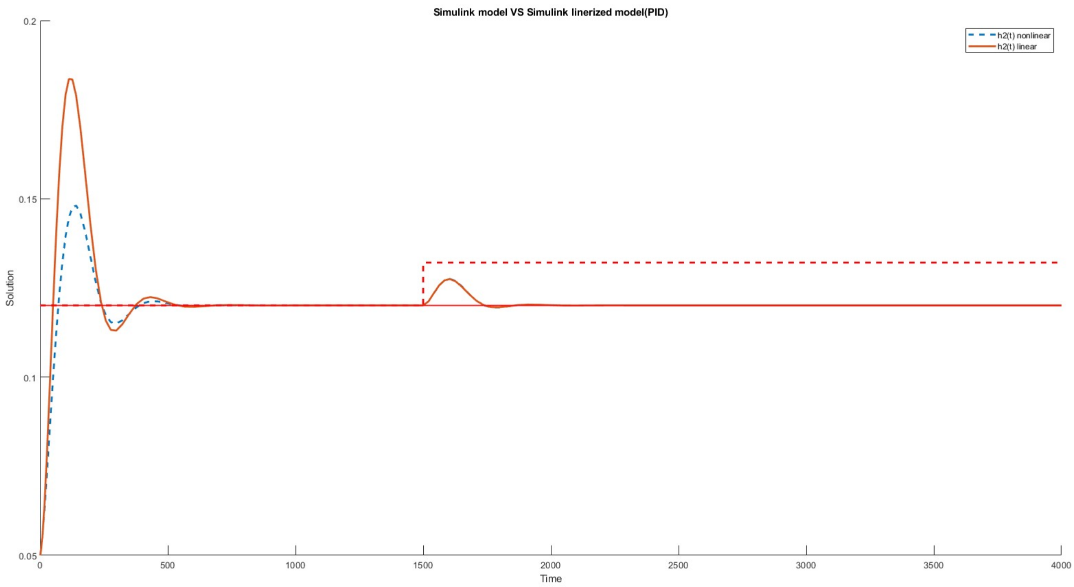
$$I : 0.00056048 * I = w_0 \tag{30}$$

$$I = 0.0129 \tag{31}$$

a dostali sme tieto vysledky:



Obr. 4: Odozva nelinearneho a zlinearizovaneho systemu



Obr. 5: Model z PIDom step(initial$_{value} = q0, final_{value} = q0_{*}1.1$)