Нечіткі числа та інтервали

Зміст:

1. Нечітка величина. Нечіткі числа та інтервали.
2. Операції над нечіткими числами та інтервали, заданими функціями належності.
3. Нечіткі числа та інтервали в формі (L-R)-функцій.
4. Трикутні нечіткі числа і трапецієвидні нечіткі інтервали та операції над ними.

Поняття нечіткої множини має різні уточнення, які доцільно використовувати для більш адекватного відображення семантики невизначеності при побудові нечітких моделей складних систем. Такими уточненнями є поняття нечіткої величини, нечіткого числа та нечіткого інтервалу, які широко використовуються в нечіткому управлінні для представлення вхідних і вихідних даних керуючої системи.

1. Нечітка величина. Нечіткі числа та інтервали.

Означення 1. *Нечіткою величиною* називається довільна нечітка множина, яка задана на множині дійсних чисел *R*, тобто для якої універсальною множиною *X* є вся множина *R*.

Функція належності нечіткої величини μ є відображення: $R \to [0;1]$.

Якщо в якості універсальної множини X взяти підмножину невід'ємних дійсних чисел R_+, то отримаємо визначення *невід'ємної нечіткої величини* B_+.

Якщо в якості універсальної множини X взяти підмножину недодатних дійсних чисел R-, то отримаємо визначення *недодатньої нечіткої величини* B_-.

1.1. Нечіткий інтервал.

Означення 2. *Нечітким інтервалом* називається нечітка величина, що задовольняє умовам:

1) нечітка множина *A*, яка визначає нечітку величину, є нормальною, тобто $\max\limits_{x \in X} \mu_A(x) = 1$;
2) функція належності $\mu_A(x)$ нечіткої величини є з квазіопуклою догори функцією, тобто для будь-яких двох точок x_1 і x_2 з множини *X*, виконується нерівність

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

для всіх $\lambda \in [0, 1]$.

На рис. 1 подано приклад функції належності нечіткого інтервалу, що характеризується своїм *носієм*, *ядром*, *лівою* і *правою* границями.

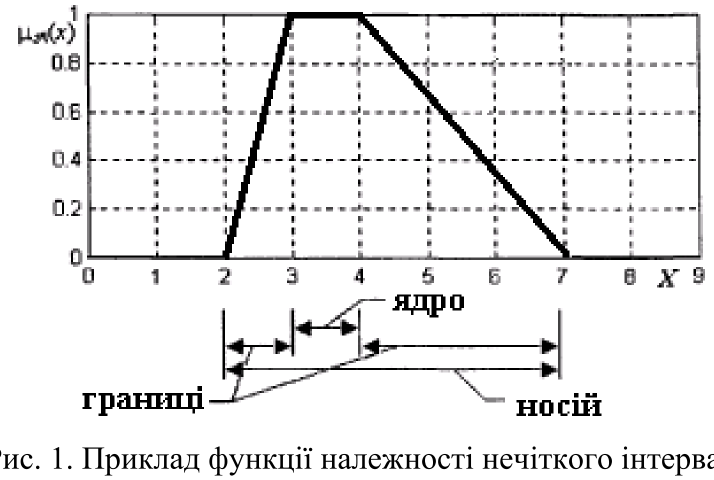

Рис. 1. Приклад функції належності нечіткого інтервалу

Примітка. В науковій літературі нечіткий інтервал іноді називають *толерантним нечітким числом*.

1.2. Нечітке число.

Означення 3. *Нечітким числом* називається нечітка величина, що задовольняє умовам:

1) нечітка множина A, яка визначає нечітку величину, є нормальною;
2) функція належності $\mu_A(x)$ нечіткої величини є з квазіопуклою догори функцією;
3) функція належності $\mu_A(x)$ нечіткої величини є унімодальною, тобто значення $\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1$ досягається лише в одній точці.

На рис. 1 подано приклад функції належності нечіткого інтервалу. Очевидно, що нечітке число є окремим випадком нечіткого інтервалу, що повністю узгоджується зі звичайними числами та інтервалами на множині дійсних чисел.

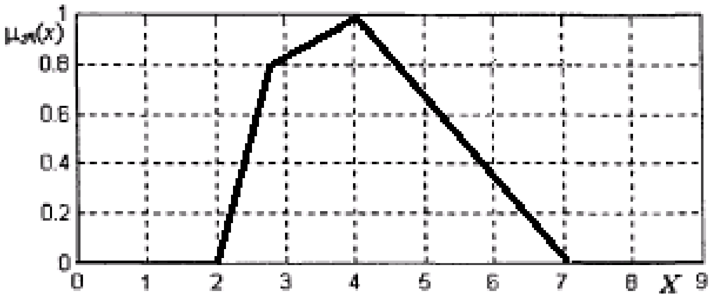

Рис. 2. Приклад функції належності нечіткого числа

Означення 4. Нечітке число називається *нечітким нулем*, якщо його модальне значення (мода) дорівнює 0.

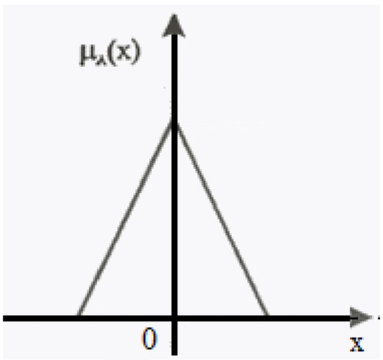

Рис. 1.3. Приклади нечіткого нуля

Означення 5. Нечітке число називається *додатнім (від'ємним)* нечітким числом, якщо воно має строго додатній (строго від’ємний) носій.

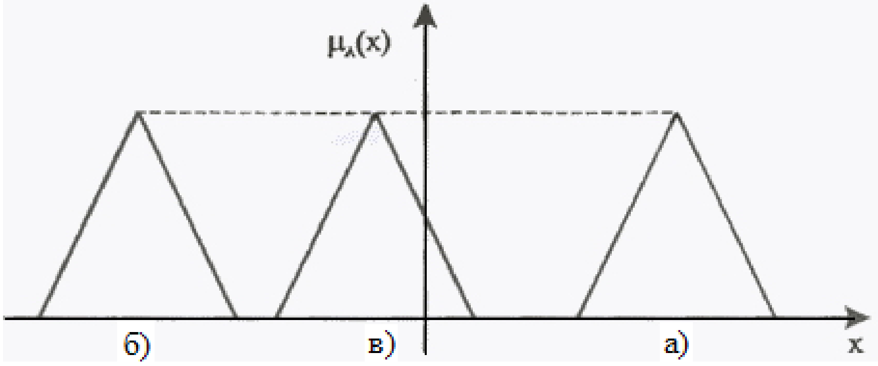

Рис. 1.3. Приклади нечітких чисел: а) додатного, б) від’ємного в) нечіткого числа, яке не є ні додатним, ні від’ємним

Оскільки нечіткі числа й інтервали являють собою нечіткі множини, то для них виявляються справедливими всі властивості та операції для нечітких множин. Це повною мірою відноситься до визначення нормального нечіткого числа і нормального нечіткого інтервалу, носія і ядра, а також властивостей квазіопуклості й унімодальності функцій належності нечітких чисел і нечітких інтервалів, які були використані при їх визначенні.

Примітка. При загальному визначенні нечіткого інтервалу і нечіткого числа не робиться ніяких припущень щодо нормальності відповідних нечітких множин.

2. Операції над нечіткими числами та інтервали, заданими функціями належності

Для нечітких чисел та інтервалів з використанням принципу узагальнення можуть бути визначені аналоги звичайних арифметичних операцій.

У цьому випадку розширені бінарні арифметичні операції (додавання, віднімання, множення, ділення) для нечітких чисел та інтервалів визначаються через відповідні операції для звичайних дійсних чисел.

Нехай *A і B* – довільні нечіткі числа (нечіткі інтервали) з функціями належності $\mu_A(x)$ *і* $\mu_B(y)$ відповідно.

Означення 6. Операцією *додавання* двох нечітких чисел (інтервалів) *A* і *B* називається операція, результатом якої є нечітке число (інтервал) $C=A+B=\{(z, \mu_C(z))\}$ з функцією належності, яка визначається формулою:

$$\mu_C(z) = \max_{z=x+y}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \qquad (1)$$

Означення 7. Операцією *віднімання* від нечіткого числа (інтервалу) *A* нечіткого числа (інтервалу) *B* називається операція, результатом якої є нечітке число (інтервал) $C=A-B=\{(z, \mu_C(z))\}$ з функцією належності, яка визначається формулою:

$$\mu_C(z) = \max_{z=x-y}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \qquad (2)$$

Означення 8. Операцією *множення* двох нечітких чисел (інтервалів) *A* і *B* називається операція, результатом якої є нечітке число (інтервал) $C=A*B=\{(z, \mu_C(z))\}$ з функцією належності, яка визначається формулою:

$$\mu_C(z) = \max_{z=x\cdot y}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \qquad (3)$$

Означення 9. Операцією *ділення* нечіткого числа (інтервалу) *A* на нечітке число (інтервал) *B* називається операція, результатом якої є нечітке число (інтервал) $C=A\div B=\{(z, \mu_C(z))\}$ з функцією приналежності, яка визначається формулою:

$$\mu_C(z) = \max_{z=x\div y}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\}. \qquad (4)$$

У виразах (1)-(4) праворуч від знаку рівності максимум береться за кожним із сукупності значень елементів універсальної множини, які в свою чергу є результатом відповідної звичайної арифметичної операції над чисельними значеннями елементів універсальної множини вхідних нечітких чисел (інтервалів).

Результатом арифметичних операцій над нечіткими числами не завжди є нечітке число.

Ця проблема зникає тоді, коли операції виконуються над нечіткими числами, що мають неперервні функції належності, що стверджується наступною теоремою:

Теорема 1 (Дюбуа і Прейда). *Якщо нечіткі числа A і B мають неперервні функції належності, то результатом арифметичних операцій додавання, віднімання, множення і ділення будуть нечіткі числа.*

Означення 10. Операцією *розширеного мінімуму* нечітких чисел (інтервалів) A і B називається операція, результатом якої є нечітке число (інтервал) $C=\min\{A,B\}=\{(z,\mu_C(z))\}$ з функцією належності $\mu_C(z)$, яка визначається формулою:

$$\mu_C(z)=\max_{z=\min\{x,y\}}\left\{\min\left\{\mu_A(x),\mu_B(y)\right\}\right\}.$$

Означення 11. Операцією *розширеного максимуму* нечітких чисел (інтервалів) A і B називається операція, результатом якої є нечітке число (інтервал) $C=\max\{A,B\}=\{(z,\mu_C(z))\}$ з функцією належності $\mu_C(z)$, яка визначається формулою:

$$\mu_C(z)=\max_{z=\max\{x,y\}}\left\{\min\left\{\mu_A(x),\mu_B(y)\right\}\right\}.$$

Функції належності нечітких чисел та інтервалів, взагалі кажучи, можуть і не мати аналітичного подання. Все це ускладнює практичне використання цих загальних понять для вирішення конкретних завдань нечіткого моделювання. З цієї причини в подальшому розглядаються деякі способи уточнення даних понять на основі використання певних типів функції належності.

3. Нечіткі числа та інтервали в формі (L-R)-функцій

Арифметичні операції над нечіткими числами потребують проведення складних обчислень. Тому Дюбуа і Прейд запропонували форму подання нечітких чисел за допомогою трьох параметрів, які значно спрощують нечітку арифметику.

Нехай $L(x)$ і $R(x)$ – функції, які здійснюють відображення

$$(-\infty,\infty)\rightarrow[0,1]$$

і задовольняють умови:

1) $L(-x)=L(x),\ R(-x)=R(x)$,
2) $L(0)=1,\ R(0)=1$,
3) $L(x)$ і $R(x)$ – функції, які не зростають на інтервалі $[0,+\infty)$.

Приклади функцій $L(x)$ і $R(x)$:

$L(x)=R(x)=e^{-|x|^p},\ p>0,$

$L(x)=R(x)=\dfrac{1}{1+|x|^p},\ p>0,$

$L(x)=R(x)=\max\left(0.1-|x|^p\right),\ p>0,$

$L(x)=R(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1;1],\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$

Означення 12. Нечітке число A називається *нечітким числом типу* $L-R$, коли його функція належності має вигляд:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & \text{якщо } x\le m,\\[2ex] R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & \text{якщо } x\ge m,\end{cases}$$

де m – дійсне число, яке називається *середнім значенням* нечіткого числа A $(\mu_A(m)=1)$, α – додатне дійсне число, яке називається *лівостороннім розкидом*, β – додатне дійсне число, яке називається *правостороннім розкидом*.

Відмітимо, що при збільшенні розкидів α і β число A стає «більш» нечітким. Нечітке число типу $L-R$ можна скорочено записати у вигляді

$$A=\left(m_A,\alpha_A,\beta_A\right)_{LR}.$$

Приклад 3.1. Нехай нечітке число «близьке до 9» визначено як $A = (9,3,3)_{LR}$.

При цьому $L(x) = R(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Тоді функція належності числа $A = (9,3,3)_{LR}$ буде мати вигляд:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{9-x}{3}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{9-x}{3}\right)^2}, & \text{якщо } x \le 9, \\ R\left(\dfrac{x-9}{3}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-9}{3}\right)^2}, & \text{якщо } x \ge 9. \end{cases}$$

Графік функції належності $\mu_A(x)$ в системі Mathcad подано на рис. 3.1.

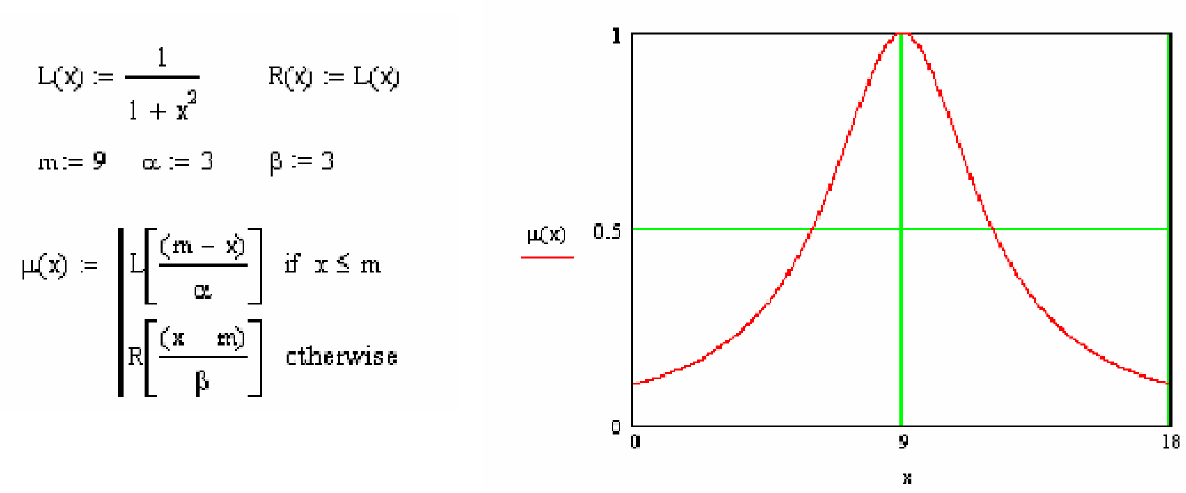

Рис. 3.1. Побудова функції належності нечіткого числа $A = (9,3,3)_{LR}$ у системі Mathcad

Арифметичні операції над нечіткими числами типу $L-R$ зводяться до операцій над трьома параметрами.

Нечітке число, протилежне нечіткому числу $A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$, має вигляд

$$-A = (-m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}.$$

Сума нечітких чисел

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \text{ і } B = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$$

має вигляд

$$A \oplus B = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B)_{LR}.$$

Інші арифметичні операції (наприклад, множення і ділення) над нечіткими числами типу $L-R$ більш складні, а їх результат носить більш наближений характер.

Функція належності $\mu_A(x)$ нечіткого числа типу $L-R$ приймає значення 1 лише в одній точці $x=m$.

Модифікуємо означення 12 так, щоб $\mu_A(x)=1$ не лише в єдиній точці $x=m$, а й у всіх точках інтервалу $[m_1, m_2]$ де $m_1 < m_2$ і $m_1, m_2 \in R$.

В цьому випадку отримуємо визначення так званого *плоского нечіткого числа*. Це визначення можна використовувати для моделювання нечітких інтервалів.

Означення 13. *Плоским нечітким числом* типу $L-R$ називається нечітке число з функцією належності

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m_1-x}{\alpha}\right), & \text{якщо } x\le m_1, \\ 1, & \text{якщо } m_1\le x\le m_2, \\ R\left(\dfrac{x-m_2}{\beta}\right), & \text{якщо } x\ge m_2. \end{cases}$$

Плоске нечітке число A можна ототожнювати з нечітким інтервалом A виду

$$A=(m_1,m_2,\alpha,\beta)_{LR}.$$

Приклад 3.2. Розглянемо нечітке твердження «*Вартість велосипеду в магазині складає від 3 до 6 тисяч гривень*».

Адекватною формалізацією цього твердження можна вважати нечіткий інтервал виду:

$$A=(3{,}6,\alpha,\beta)_{LR}.$$

На рис. 3.2. зображено приблизний графік функції належності нечіткого інтервалу $A=(3{,}6,\alpha,\beta)_{LR}$.

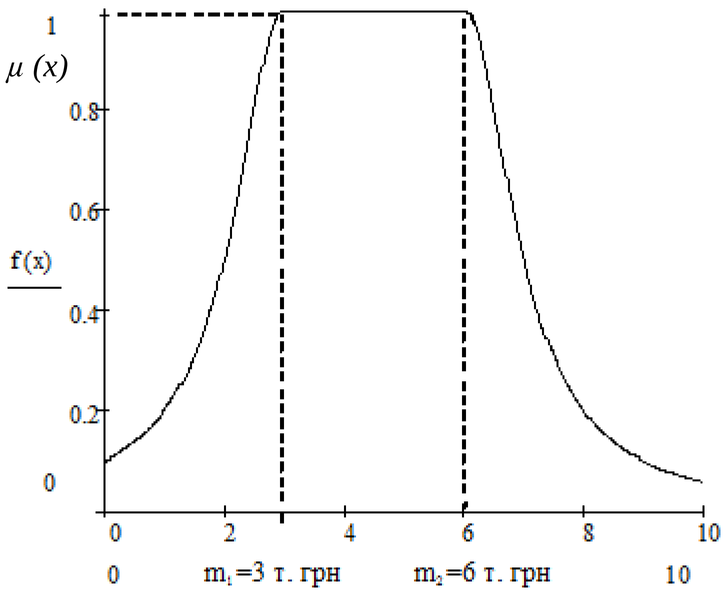

Рис. 3.2. Графік функції належності нечіткого інтервалу $A=(3{,}6,\alpha,\beta)_{LR}$.

4. Трикутні нечіткі числа і трапецієвидні нечіткі інтервали та операції над ними.

При вирішенні практичних завдань нечіткого моделювання найбільше застосування знайшли прості окремі випадки нечітких чисел та інтервалів, що отримали свою назву за виглядом їх функцій належності.

Ці нечіткі числа та інтервали можна розглядати як окремий випадок нечітких чисел та інтервалів (L-R)-типу, якщо в якості відповідних функцій L-типу і R-типу використовувати їх граничні випадки, а саме лінійні функції. При цьому доцільність використання трикутних нечітких чисел і трапецієвидних нечітких інтервалів обумовлюється не лише простотою виконання операцій над ними, але й їх наочною графічною інтерпретацією.

Означення 14. *Трикутним нечітким числом* (скорочено – ТНЧ) називається таке нормальне нечітке число, функція належності якого може бути задана трикутною функцією f_Δ.

В цьому випадку ТНЧ зручно представити у вигляді кортежу з трьох чисел:

$$A_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle_\Delta,$$

де a – *модальне значення* ТНЧ; α і β – *лівий* та *правій коефіцієнти нечіткості* ТНЧ (розкиди).

Оскільки кожна трикутна функція належності є нормальною унімодальною квазіопуклою догори функцією з непорожнім носієм – відкритим інтервалом $(a-\alpha,\ a+\beta)$, то ТНЧ є окремим випадком нечіткого числа (L–R)-типу, тобто її функцію належності можна подати в аналітичному вигляді:

$$\mu_{A_\Delta}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(a-\alpha)}{\alpha}, & \textit{якщо } a-\alpha \le x \le a, \\ \dfrac{a+\beta-x}{\beta}, & \textit{якщо } a \le x \le a+\beta \\ 0, & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

На рис. 4.1 зображено графік функції належності ТНЧ $A_\Delta = \langle 4,\ 3,\ 6 \rangle_\Delta$.

$a1 := 4 \qquad \alpha1 := 3 \qquad \beta1 := 6$

$$F1(x) := 1 + \frac{x - a1}{\alpha1} \qquad F2(x) := \frac{a1 + \beta1 - x}{\beta1}$$

$$\mu(x) := \left| \begin{array}{l} F1(x) \ \text{ if } \ (a1 - \alpha1 \le x \le a1) \\ F2(x) \ \text{ if } \ a1 \le x \le a1 + \beta1 \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

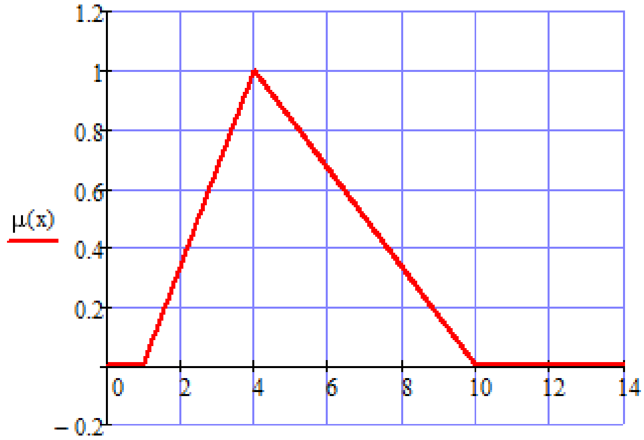

Рис. 4.1. Представлення ТНЧ $A_\Delta = \langle 4,\ 3,\ 6 \rangle_\Delta$ в системі Mathcad.

Означення 15. *Трапецієвидним нечітким інтервалом* (скорочено – ТНІ) називається нормальний нечіткий інтервал, функція належності якого може бути задана трапецієвидною функцією f_T.

В цьому випадку ТНІ зручно представити у вигляді кортежу з чотирьох чисел:

$$A_T = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle_T,$$

де a і b – відповідно *нижнє і верхнє модальні значення* ТНІ; α і β – *лівий* і *правий коефіцієнти нечіткості* ТНІ.

Оскільки кожна трапецієвидна функція належності є нормальною квазіопуклою догори функцією з непорожнім носієм – відкритим інтервалом $(a-\alpha,\ a+\beta)$, то ТНІ є окремим випадком нечіткого інтервалу (L–R)-типу. Очевидно, що трикутне нечітке число A_Δ , є окремим випадком трапецієвидного нечіткого інтервалу $A_T = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle_T$ при $a=b$.

Функція належності ТНІ $A_T = \langle a, b,\ \alpha, \beta \rangle_T$ аналітично подається так:

$$\mu_{A_T}(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{x-a}{\alpha}, & \text{якщо } a-\alpha \le x \le a, \\ 1, & \text{якщо } a \le x \le b \\ 1-\dfrac{x-b}{\beta}, & \text{якщо } b \le x \le b+\beta \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

На рис. 4.2 зображено графік функції належності ТНІ $\langle 4, 6, 2, 1 \rangle_T$, який відповідає "нечіткому інтервалу від 4 до 6".

$$a := 4 \quad b := 6 \quad \alpha := 2 \quad \beta := 1$$

$$F1(x) := 1 + \frac{x-a}{\alpha} \qquad F2(x) := 1 - \frac{(x-b)}{\beta}$$

$$\mu(x) := \left| \begin{array}{l} F1(x) \text{ if } (a-\alpha \le x \le a) \\ 1 \text{ if } a \le x \le b \\ F2(x) \text{ if } b \le x \le b+\beta \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

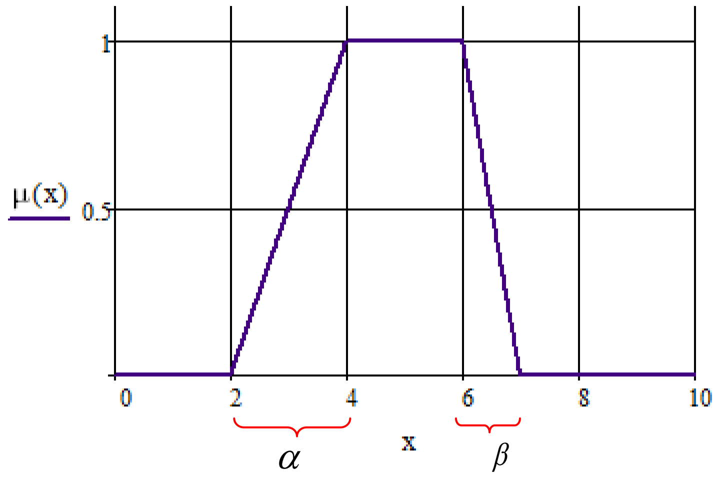

Рис. 4.2. Представлення ТНІ $A_T = \langle 4, 6,\ 2, 1 \rangle_T$ в системі Mathcad.

Розглянемо унарні та бінарні математичні операції над нечіткими числами (інтервалами), у залежності від форми їх подання, зокрема у параметричній формі.

4.1. Операції над нечіткими числа (інтервали), заданими параметрично.

Нехай A_Δ і B_Δ – два довільних трикутних нечітких числа, які задані параметрично у вигляді: $A_\Delta = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_\Delta$ і $B_\Delta = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_\Delta$. Для цих ТНЧ виявляються справедливими аналоги звичайних арифметичних операцій.

Операція *додавання* ТНЧ A_Δ і B_Δ визначається виразами:

$$a = a_1 + a_2, \ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \ \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Операція *віднімання* ТНЧ A_Δ і B_Δ визначається виразами:

$$a = a_1 - a_2, \ \alpha = \alpha_1 + \beta_2, \ \beta = \beta_1 + \alpha_2.$$

Операція *множення* ТНЧ A_Δ і B_Δ визначається виразами:

а) коли $a_1>0$ і $a_2>0$, то: $a = a_1 \cdot a_2, \ \alpha = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1, \ \beta = a_1\beta_2 + a_2\beta_1$;

б) коли $a_1<0$ і $a_2>0$, то: $a = a_1 \cdot a_2, \ \alpha = -a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1, \ \beta = -a_1\beta_2 + a_2\beta_1$;

в) коли $a_1>0$ і $a_2<0$, то: $a = a_1 \cdot a_2, \ \alpha = a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1, \ \beta = a_1\beta_2 - a_2\beta_1$;

г) коли $a_1<0$ і $a_2<0$, то: $a = a_1 \cdot a_2, \ \alpha = -a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1, \ \beta = -a_1\beta_2 - a_2\beta_1$.

Операція *ділення* ТНЧ A_Δ і B_Δ визначається виразами:

$$a = \frac{a_1}{a_2}, \ \alpha = \frac{a_1\beta_2 + a_2\alpha_1}{a_2{}^2}, \ \beta = \frac{a_1\alpha_2 + a_2\beta_1}{a_2{}^2}.$$

Операція *обернення* ТНЧ $A_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle_\Delta$ визначається виразами:

$$a = \frac{1}{a}, \ \alpha = \frac{\beta}{a^2}, \ \beta = \frac{\alpha}{a^2}.$$

Операція знаходження *протилежного* ТНЧ $A_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle_\Delta$ визначається виразом:

$$-A_\Delta = \langle -a, \alpha, \beta \rangle_\Delta.$$

Операція *розширеного максимуму* для ТНЧ $A_\Delta = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_\Delta$ і $B_\Delta = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_\Delta$ визначається через $\max\{A_\Delta, B_\Delta\} = C_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle_\Delta$, де параметри a, α та β результату визначаються виразами:

$$a = \max\{a_1, a_2\},$$
$$\alpha = a - \max\{a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2\},$$
$$\beta = \max\{a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2\} - b.$$

Операція *розширеного мінімуму* ТНЧ $A_\Delta = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_\Delta$ і $B_\Delta = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_\Delta$ визначається через $\min\{A_\Delta, B_\Delta\} = C_\Delta = \langle a, \alpha, \beta \rangle_\Delta$, де параметри a, α та β результату визначаються виразами:

$$a = \min\{a_1, a_2\},$$
$$\alpha = a - \min\{a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2\},$$
$$\beta = \min\{a_1 + \beta_1, a_2 + \beta_2\} - a.$$

Приклад 4.1. Для ТНЧ $A_\Delta = \langle 3, 1, 2 \rangle_\Delta$ і $B_\Delta = \langle 2, 2, 1 \rangle_\Delta$ знайти результати арифметичних операцій додавання, віднімання, множення і ділення:

$$A_\Delta + B_\Delta = \langle 5, 3, 3 \rangle_\Delta,$$
$$A_\Delta - B_\Delta = \langle 1, 2, 4 \rangle_\Delta,$$
$$A_\Delta \cdot B_\Delta = \langle 6, 8, 7 \rangle_\Delta,$$
$$A_\Delta \div B_\Delta = \langle 1.5, 1.25, 2.5 \rangle_\Delta.$$

Нехай A_T і B_T – два довільних трапецієвидних нечітких числа, які задані параметрично у вигляді: $A_T = \langle a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_T$ і $B_T = \langle a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_T$. Для цих ТНІ виявляються справедливими аналоги звичайних арифметичних операцій.

Операція *додавання* ТНІ A_T і B_T визначається виразами:

$$A_T + B_T = C_T = <a,b,\alpha,\beta>_T,$$

де параметри a, b, α та β результату мають вигляд:

$$a = a_1 + a_2,\ b = b_1 + b_2,\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Операція *віднімання* ТНІ A_T і B_T визначається виразами:

$$A_T - B_T = C_T = <a,b,\alpha,\beta>_T,$$

де параметри a, b, α та β результату мають вигляд:

$$a = a_1 - a_2,\ b = b_1 - b_2\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Операція *множення* ТНІ A_T і B_T визначається виразами:

$$A_T \cdot B_T = C_T = <a,b,\alpha,\beta>_T,$$

де параметри a, b, α та β результату мають вигляд:

$$a = a_1 \cdot a_2,\ b = b_1 \cdot b_2, \alpha = |a_1|\alpha_1 + |a_2|\alpha_2,\ \beta = |b_1|\beta_1 + |b_2|\beta_2.$$

Операція *ділення* ТНІ A_T і B_T визначається виразами:

$$A_T \div B_T = C_T = <a,b,\alpha,\beta>_T,$$

де параметри a, b, α та β результату мають вигляд:

$$a = \frac{a_1}{a_2},\ b = \frac{b_1}{b_2},\ \alpha = \frac{a_1\beta_2 + b_2\alpha_1}{b_2^{\ 2}},\ \beta = \frac{b_1\alpha_2 + a_2\beta_1}{a_2^{\ 2}}.$$

Операція *обернення* ТНІ $A_T = \langle a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_T$ визначається виразами:

$$a = \frac{1}{a_1},\ b = \frac{1}{b_1},\ \alpha = \frac{\beta_1}{b_1^{\ 2}},\ \beta = \frac{\alpha_1}{a_1^{\ 2}}.$$

Операція знаходження *протилежного* ТНІ $A_T = \langle a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_T$ визначається виразом:

$$-A_\Delta = \langle -a_1, -b_1, \alpha, \beta \rangle_\Delta.$$

Операція *розширеного максимуму* для ТНІ $A_T = \langle a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_T$ і $B_T = \langle a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_T$ визначається через $\max\{A_T, B_T\} = C_T = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle_T$, де параметри a, b, α та β результату мають вигляд:

$$\begin{aligned} a &= \max\{a_1, a_2\}, \\ b &= \max\{b_1, b_2\}, \\ \alpha &= a - \max\{a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2\}, \\ \beta &= \max\{b_1 + \beta_1, b_2 + \beta_2\} - b. \end{aligned}$$

Операція *розширеного мінімуму* ТНІ $A_T = \langle a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_T$ і $B_T = \langle a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_T$ визначається через $\min\{A_T, B_T\} = C_T = \langle a, b, \alpha, \beta \rangle_T$, де параметри a, b, α та β результату визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} a &= \min\{a_1, a_2\}, \\ b &= \min\{b_1, b_2\}, \\ \alpha &= a - \min\{a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2\}, \\ \beta &= \min\{b_1 + \beta_1, b_2 + \beta_2\} - b. \end{aligned}$$