Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра автоматизованих систем управління

Звіт

до лабораторної роботи № 2

з дисципліни *“Моделювання і процесів і смарт-систем”*

на тему: “ Моделювання динамічних систем.”

Виконала: студентка групи ОІ-32
Плисюк Олена

Прийняв:
Мельник Р.В.

Львів - 2025

Мета: Оволодіння методами комп'ютерного моделювання динамічних систем, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Набути навички застосування чисельних методів Рунге-Кутта для розв'язування систем ЗДР.

Хід роботи:

Завдання 1. *Моделювання екологічної системи.*

а) змоделювати екосистему в якій територіальні ресурси розподілені між жертвами та хижаками за наступних вихідних даних

- коефіцієнти взаємодії між видами: $a_{11} = 0.01 \cdot N$, $a_{12} = 0.0001 \cdot N$, $a_{21} = 0.0001 \cdot N$, $a_{22} = 0.04 \cdot N$ (де N – номер варіанту, який є порядковим номером студента у списку його групи);
- вектор початкових умов з початковими значеннями кількості жертв $x = 1000 - 10 \cdot N$ та хижаків $y = 700 - 10 \cdot N$;
- час початку спостереження за системою – $t_0 = 0$, крок інтегрування $h = 0.1$ дня, тривалість спостереження в днях – $T = 150$;

б) методом чисельного інтегрування *Рунге-Кутта* четвертого порядку розв'язати, отриману у попередньому пункті (*а*) систему рівнянь Лотки-Вольтери із вказаними початковими умовами та побудувати графіки залежностей $x(t)$, $y(t)$ і $y(x)$. Для цього написати код відповідної комп'ютерної програми на мові програмування Python.

Моделювання взаємодії двох популяцій: жертв і хижаків, використовуючи систему рівнянь Лотки-Вольтерри.

Для обчислення використовується формула

$$y_{n+1} = y_n + (h/6)\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4),$$

де значення k_1, k_2, k_3, k_4 обчислюються за допомогою формул

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n\,,\,y_n),\\
k_2 &= f(x_n + (h/2),\, y_n + (h/2)\,k_1),\\
k_3 &= f(x_n + (h/2),\, y_n + (h/2)\,k_2),\\
k_4 &= f(x_n + h,\, y_n + h\,k_3).
\end{aligned}$$

Моделювання екологічної системи для мого варіанту:

$$a_{11} = 0.17, \quad a_{12} = 0.0017$$

$$a_{21} = 0.0017, \quad a_{22} = 0.68$$

Початкові умови

$$x(0) = 830, \quad y(0) = 530$$

Часові параметри

$$t_0 = 0, \quad h = 0.1, \quad T = 150$$

Результати:

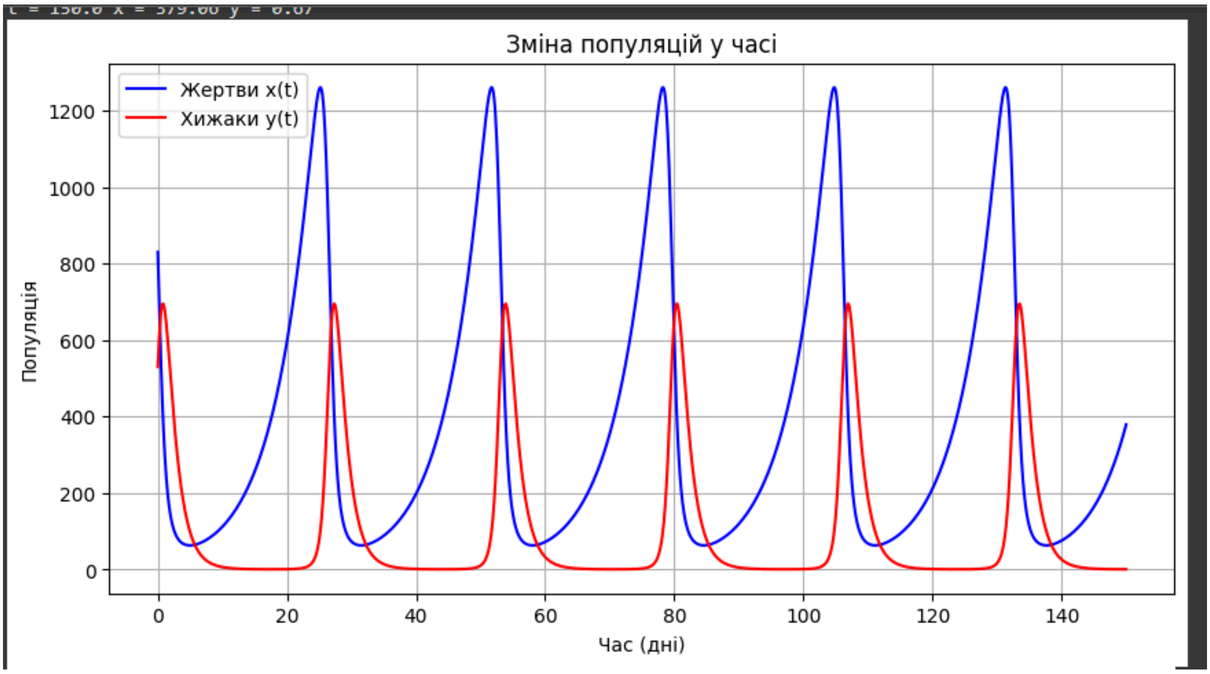

Рис.1 Графік залежностей жертв та хижаків.

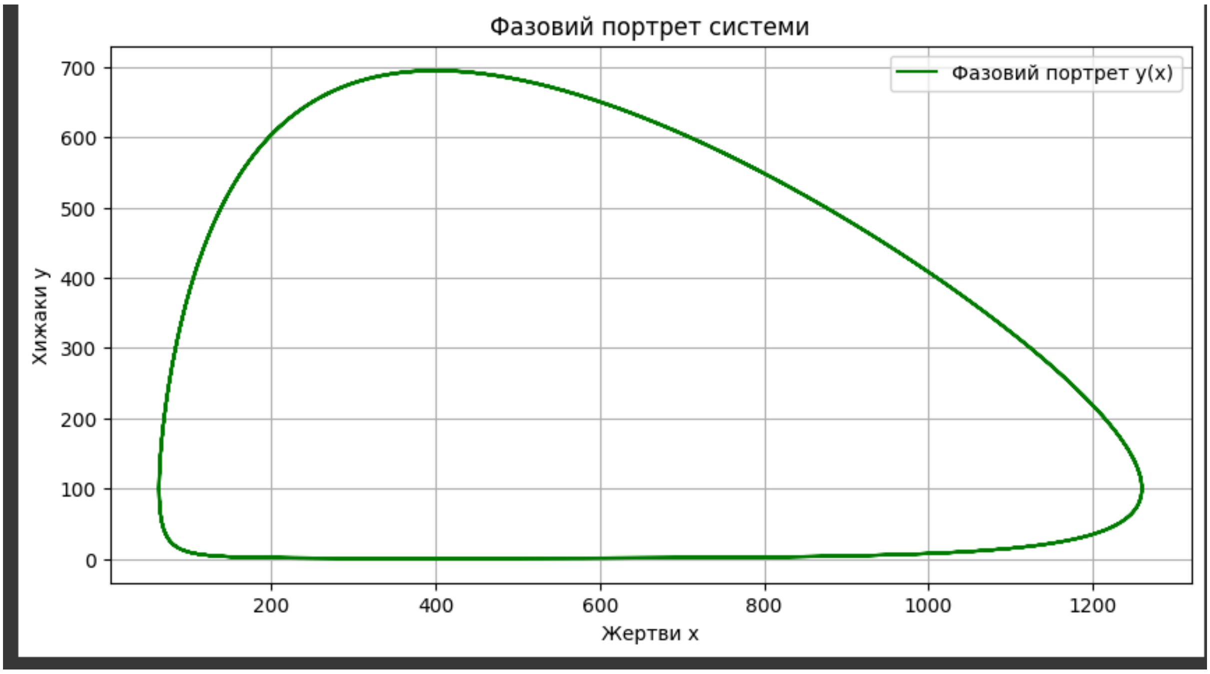

Рис.2 Фазовий портрет системи.

Форма замкненої кривої свідчить про циклічний характер динаміки системи Лотки-Вольтерри.

Спостерігається зростання популяції хижаків при збільшенні кількості жертв, що відповідає природному процесу: більше їжі - зростає популяція хижаків.

Після досягнення максимуму кількості хижаків , популяція жертв скорочується, оскільки їх з’їдають занадто багато.

Коли популяція жертв падає до мінімуму, хижаки починають вимирати через нестачу їжі.

Зменшення хижаків дозволяє жертвам знову розмножуватися, і цикл повторюється.

Завдання 2. *Моделювання процесу розповсюдження епідемії.*

а) змоделювати процес розповсюдження епідемії за наступних вихідних даних

– кількість людей в населеному пункті $H = 1000 - N$, інтенсивність розповсюдження епідемії 1-а людина за день передає інфекцію N здоровим людям $\beta = 25 - N$, кількість днів, необхідних на одужання $\gamma = N$ (де N – номер варіанту, який є порядковим номером студента у списку його групи);

– вектор початкових умов, елементи якого: $x = 900 - N$ – кількість здорових людей, $y = 90 - N$ – кількість хворих, $z = H - x - y$ – кількість людей, які одужали;

– час початку спостереження за системою – $t_0 = 0$, крок інтегрування $h = 0.1$ дня, тривалість спостереження в днях – $T = 40$;

б) методом чисельного інтегрування *Рунге-Кутта* четвертого порядку розв'язати, отриману у попередньому пункті (*а*) систему рівнянь типу (7) із вказаними початковими умовами та побудувати графіки залежностей $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$. Для цього написати код відповідної комп'ютерної програми на мові програмування Python.

Для розв'язку використовується така система:

$$\begin{cases} x' = -\beta/H \cdot xy, \\ y' = \beta/H \cdot xy - 1/\gamma \cdot y, \\ z' = 1/\gamma \cdot y. \end{cases}$$

Моделювання епідемії для мого варіанту:

H=983

$\beta = 8$; $\gamma = 17$

β – інтенсивність зараження; γ – тривалість хвороби.

Початкові умови:

x(0)=883,y(0)=73, z(0)=27

($x(0)$– здорові, $y(0)$ – хворі, $z(0)$ – ті, хто одужав та здобув імунітет)

Часові умови:

$t_0=0, h=0.1, T=40$

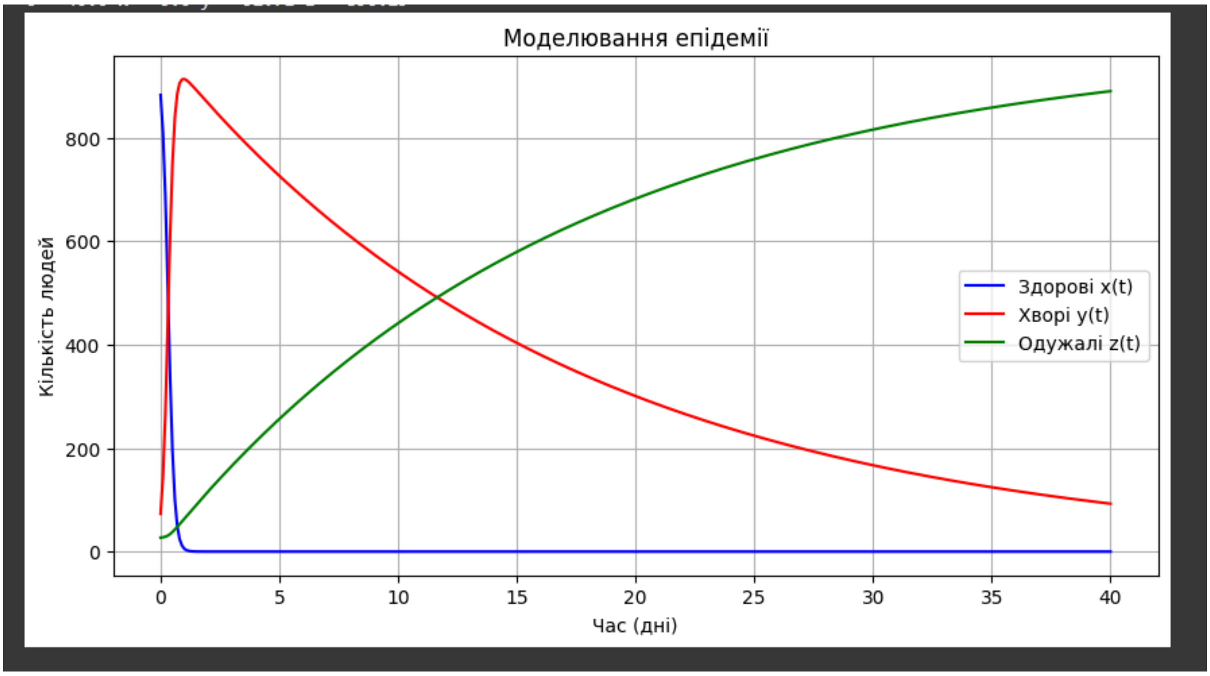

Рис.3 Результат моделювання епідемії.

Дивлячись на результат можна подумати: невже не залишається здорових людей за 40 днів?
З точки зору рівнянь та моїх даних- так, оскільки формула для x\` передбачає те, що рано чи пізно захворіє кожен. Тому, за 40 днів кількість здорових людей сягнула 0, кількість людей, що одужали наблизилась до всього населення, а кількість хворих значно зменшилась.

Висновок: під час виконання лабораторної роботи яї змодельовала дві динамічні системи за допомогою чисельного методу Рунге-Кутта четвертого порядку. Для системи "жертва-хижак" отримала періодичні коливання популяцій, що підтверджує теоретичні передбачення моделі

Лотки-Вольтерри. Для моделі поширення епідемії я виявила, що кількість здорових осіб швидко зменшується, хворих – зростає, а потім зменшується у міру одужання населення. Використання методу Рунге-Кутта дозволило отримати точні наближені розв'язки та графічно зобразити і проаналізувати поведінку досліджуваних систем.

https://github.com/OlenaPlysyuk/LABS_Modelling/blob/main/LAB2.ipynb