МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт №7 та №8
з дисципліни „Дослідження операцій”
для студентів спеціальності
6. 050103 „Програмна інженерія”

Затверджено

на засіданні кафедри

програмного забезпечення

Протокол № __ від _______ р.

Львів – 2016

Цілочислові задачі математичного програмування.: Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт №7 та №8 із дисципліни „Дослідження операцій" для студентів спеціальності „Програмна інженерія" / Укл.: Л.М. Журавчак, О.О. Нитребич – Львів: Видавництво Національного університету „Львівська політехніка", 2016. – 23 с.

Укладачі Л.М. Журавчак, д-р тех. наук, проф.
О.О. Нитребич, канд. тех. наук, асист. кафедри ПЗ

Відповідальний за випуск Федасюк Д.В., д-р тех. наук, проф.

Зміст

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними алгоритмами розв'язування цілочислових задач математичного програмування та навчитись розв'язувати матричні ігри з використанням симплекс-методу.

Вступ

Цілочисловим (іноді його називають також дискретним) програмуванням називається розділ математичного програмування, що вивчає екстремальні задачі, в яких на шукані змінні накладається умова цілочисловості, а область допустимих розв'язків скінчена. Величезна кількість економічних завдань носить дискретний, найчастіше цілочисловий характер, що пов'язано, як правило з фізичної неділимістю багатьох елементів обчислення: наприклад, не можна побудувати два з половиною заводи, купити півтора автомобіля і т.д.

Лабораторна робота №7

Розв'язування задачі цілочислового програмування за допомогою методу Гоморі

1. Цілочислові задачі математичного програмування

Під задачею цілочислового лінійного програмування (ЦЛП) розуміють задачу лінійного програмування (ЛП), в якій деякі (а можливо, і всі) змінні повинні набувати цілих значень. Задача ЦЛП називається повністю цілочисловою, якщо всі її змінні належать множині цілих чисел. Для змішаної задачі ЦЛП лише деякі змінні є цілочисловими, а інші можуть приймати довільні (нецілі) значення.

Цілочислові задачі математичного програмування можуть виникати різними шляхами.

1. Існують задачі лінійного програмування, які формально до цілочислових не належать, але при відповідних вихідних даних завжди володіють цілочисловим планом.

2. Поштовхом до вивчення цілочислових задач став розгляд задач лінійного програмування, в яких змінні представляли фізично неподільні величини. Наприклад, завдання про оптимізацію комплексу засобів доставки вантажів, про знаходження мінімального пробігу автомобілів при виконанні заданого плану перевезень, про знаходження мінімальної кількості суден для здійснення даного графіка перевезень і т. п.

3. Іншим важливим поштовхом для побудови теорії цілочислового програмування став новий підхід до деяких екстремальних комбінаторних задач. У них потрібно знайти екстремум цілочислової лінійної функції, заданої на скінченній множині елементів. Такі завдання прийнято називати завданнями з альтернативними змінними. Наприклад, задача комівояжера (мандрівного торговця), задача про оптимальні призначення, задачі теорії розкладу, задачі календарного планування, завдання з додатковими логічними умовами (наприклад, типу «або – або», «якщо – то» і т. д.).

Задачу ЦЛП можна розв'язати, наприклад, як задачу ЛП без урахування умови цілочисловості змінних, а потім округлити отриманий результат. Використання такого підходу вимагає перевірки допустимості отриманого розв'язку. Таким методом часто користуються під час обчислення практичних завдань, особливо коли значення змінних настільки великі, що можна знехтувати помилками заокруглення. Однак при розв'язуванні задач, в яких цілочисельні змінні набувають малих значень, заокруглення може призвести до далекого від істинного оптимуму цілочислового результату. Крім цього, під час розв'язування задач великої розмірності такий метод вимагає занадто багато машинного часу. Наприклад, нехай оптимальний розв'язок відповідної задачі ЛП має вигляд $x_1 = 2{,}4$; $x_2 = 3{,}5$. Для отримання наближеного оптимального розв'язку необхідно розглянути чотири точки (2; 3); (2; 4); (3; 3); (3; 4) і вибрати серед них допустиму точку з найкращими значеннями цільової функції. Якщо в задачі є 10 цілочислових змінних, то необхідно перевірити $2^{10} = 1024$ варіантів цілочислових розв'язків. Але навіть розгляд всіх варіантів не гарантує отримання оптимального цілочислового розв'язку задачі.

На сьогодні існує багато методів розв'язування задач ЦЛП, серед яких найбільш відомим є метод Гоморі, який базується на використанні симплекс-методу повністю цілочислових задач (перший алгоритм Гоморі)

2. Алгоритм Гоморі розв'язування повністю цілочислових задач математичного програмування (перший алгоритм Гоморі)

Основними кроками розв'язування задачі ЦЛП методом Гоморі є:

1. Використовуючи симплекс-метод розв'язування задач ЛП, знаходимо оптимальний розв'язок. Якщо задача розв'язку немає, тоді кінець алгоритму. Якщо розв'язок є цілочисловим, тоді теж кінець алгоритму.
2. Знаходимо в симплекс-таблиці змінну x_l, яка повинна бути цілочислова та для якої значення вільного члена має максимальну дробову частину. Для даної змінної вводимо обмеження:

$$\sum_{j=1}^{k}\{a_{lj}\}x_j \geq \{b_l\},\;\; l = \arg \underset{i \in I_N}{Max\{b_i\}},$$

де $I_N \subseteq \{\overline{1, m_g}\}$ – множина індексів змінних біжучої бази, які повинні бути цілими згідно з умовою задачі і які ними не є;
$card(I_N)$ – розмірність множини, тобто кількість базових змінних на поточному кроці методу (внаслідок формування додаткових обмежень під час розв'язування задачі кількість обмежень та змінних в задачі зростатимуть);
$\{b_l\}$ – *дробова частина числа* b_l, яку означимо так: вибираємо найменше невід'ємне число c таке, що різниця b_l-c буде цілою, наприклад, {2.2}=0.2, {-2.2}=0.8, бо -2.2-0.8=-3.

Дану нерівність зводимо до канонічної:

$$\sum_{j=1}^{k}\{a_{lj}\}x_j - x_{k+1} = \{b_l\}.$$

і, перемноживши ліву і праву частини на (-1), відразу введемо змінну x_{k+1} до бази, порушивши при цьому умову припустимості.

3. Додаємо нове обмеження до задачі. Знаходимо розв'язок задачі з додатковим обмеженням за допомогою двоїстого симплекс-методу.
4. Якщо отриманий розв'язок є цілочисловим, то закінчуємо алгоритм, інакше переходимо до кроку 2.

3. Приклад розв’язування задачі алгоритмом Гоморі

Приклад 3.1. У цеху підприємства вирішено встановити додаткове обладнання, для розміщення якого виділено 19 $м^2$ площі. На придбання обладнання підприємство може витратити 16 млн. грн., при цьому воно може купити обладнання двох видів. Комплект обладнання І виду коштує 4 млн. грн., а ІІ виду – 1 млн. грн. Купівля одного комплекту обладнання І виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 8 од, а одного комплекту обладнання ІІ виду – на 6 од. Знаючи, що для встановлення одного комплекту обладнання І виду потрібно 2 $м^2$ площі, а обладнання ІІ виду – 5 $м^2$ площі, визначити який набір додаткового обладнання дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 комплектів І виду і x_2 комплектів обладнання ІІ виду. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти наступні нерівності:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 19, \\ 4x_1 + x_2 \le 16. \end{cases}$$

Якщо підприємство придбає вказану кількість обладнання, то збільшення випуску продукції буде

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max.$$

Зрозуміло, що змінні x_1 і x_2 повинні бути цілочисловими, тобто

$$\begin{matrix} x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \in Z, \end{matrix}$$ де Z – множина цілих чисел.

Приведемо задачу до канонічного вигляду

$$F - 8x_1 - 6x_2 = 0,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 19, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_1, x_2 \ge 0; \; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Спочатку, використовуючи симплекс-метод розв’яжемо задачу без врахування цілочисловості розв’язку (табл.3.1).

Таблиця 3.1

Базис	Вільний член	Змінні				Оціночні відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	19	2	5	1	0	19/2
x_4	16	4	1	0	1	4
F	0	-8	– 6	0	0	

x_2	22/9	0	1	2/9	-1/9	
x_1	61/18	1	0	-1/18	5/18	
F	376/9	0	0	8/9	14/9	

Всі критерії оптимальності (остання стрічка таблиці) невід'ємні, відповідно знайдено оптимальний розв'язок задачі $F_{\max} = 376/9 = 41\frac{7}{9}$ при плані $(\frac{61}{18};\frac{22}{9};0;0)$.

Серед змінних оптимального розв'язку є нецілі числа. Виберемо рівняння, у якого дробова частина вільного члена найбільша $\left\{\frac{22}{9}\right\} = \frac{4}{9}$; $\left\{\frac{61}{18}\right\} = \frac{7}{18}$. Отже, вибираємо перше рівняння. Воно має вигляд:

$$x_2 + \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4 = \frac{22}{9}.$$

Розраховуємо відповідні значення коефіцієнтів додаткового обмеження (вони всі мають бути додатними):

$$\{a_{21}\} = \{0\} = 0,\ \{a_{22}\} == \{1\} = 0,\ \{a_{23}\} = \{\frac{2}{9}\} = \frac{2}{9},\ \{a_{24}\} = \{-\frac{1}{9}\} = \frac{8}{9}.$$

Формуємо додаткове обмеження:

$$0x_1 + 0x_2 + \frac{2}{9}x_3 + \frac{8}{9}x_4 \geq \frac{4}{9}, \qquad 0x_1 + 0x_2 + \frac{2}{9}x_3 + \frac{8}{9}x_4 - x_5 = \frac{4}{9},$$

$$-0x_1 - 0x_2 - \frac{2}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_4 + x_5 = -\frac{4}{9}.$$

Це рівняння додамо до системи обмежень та розв'яжемо **двоїстим** симплекс-методом задачу з додатковими рядком та стовпчиком для змінної x_5 (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Базис	Віль-ний член	Змінні				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	22/9	0	1	2/9	-1/9	0
x_1	61/18	1	0	-1/18	5/18	0
x_5	-4/9	0	0	-2/9	-8/9	1
F	376/9	0	0	8/9	14/9	0
				-8/9:(-2/9)=4	-14/9:(8/9)=7/4	

x_2	5/2	0	1	¼	0	1/8
x_1	13/4	1	0	-1/8	0	5/16
x_4	1/2	0	0	¼	1	-9/8
F	41	0	0	½	0	7/4

Отримали новий оптимальний розв'язок задачі $F_{\max} = 41$ при плані $(\frac{13}{4}; \frac{5}{22}; 0; \frac{1}{2}; 0)$.

Максимальна дробова частина вільного члена в останній таблиці відповідає першому рядку, тобто рівнянню:

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{8}x_5 = \frac{5}{2}.$$

Відповідно складаємо додаткове обмеження (відтинання):

$\frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{8}x_5 \geq \frac{1}{2}$, та рівняння: $-\frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{8}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$.

Нова таблиця 3.3. матиме вигляд:

Таблиця 3.3

Базис	Вільний член	Змінні					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	5/2	0	1	1/4	0	-1/8	0
x_1	13/4	1	0	-1/8	0	5/16	0
x_4	1/2	0	0	1/4	1	-9/8	0
x_6	-1/2	0	0	-1/4	0	-7/8	1
F	41	0	0	1/2	0	7/4	0
x_2	18/7	0	1	2/7	0	0	-1/7
x_1	43/14	1	0	-3/14	0	0	5/14
x_4	8/7	0	0	4/7	1	0	-9/7
x_5	4/7	0	0	2/7	0	1	-8/7
F	40	0	0	0	0	0	2

Новий оптимальний розв’язок задачі $F_{\max} = 40$ при плані $(\frac{43}{14};\frac{18}{7};0;\frac{8}{7};\frac{4}{7};0)$.

Таким чином робимо ще три відтинання з метою отримання цілочислового розв’язку (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Базис	Вільний член	Змінні					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_8	x_9
x_2	2	0	1	0	0	2	-1
x_1	3	1	0	0	0	-1	1
x_3	3	0	0	1	0	-8	3
x_4	2	0	0	0	1	2	-3
F	36	0	0	0	0	4	2

Отриманий оптимальний цілочисловий план $F_{\max} = 36$ при змінних (3;2;3;2).

За умовами задачі достатньо тільки перших двох цілочислових змінних.

Відповідно до знайденого розв’язку підприємству необхідно купити 3 комплекти I виду обладнання і 2 комплекти II виду, що дасть змогу максимально збільшити випуск продукції до 36 одиниць. Додаткову площу x_3=3 м^2 та отриману економію від грошей x_4=2 млн грн можна використати для додаткової вигоди.

Контрольні питання до лабораторної роботи № 7

1. Що таке задача цілочислового лінійного програмування?
2. Наведіть приклади необхідності використання задач ЦЛП?
3. Які є типи задач ЦЛП?
4. Які є алгоритми розв’язування задач ЦЛП?
5. У чому полягає суть методу Гоморі?
6. Назвіть основні кроки першого алгоритму Гоморі.

Завдання до лабораторної роботи № 7

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв’язування задачі ЦЛП методом Гоморі та з її допомогою знайти розв’язок (максимальне значення функції та значення

цілочислових змінних, при якому воно досягається) згідно варіанту з Додатку 1.

3. Оформити звіт про виконану роботу.

4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до звіту

1. Титульний аркуш.
2. Тема звіту.
3. Мета звіту.
4. Теоретичні відомості (дати відповідь на всі контрольні запитання).
5. Текст програми з коментарями (алгоритм методу Гоморі) до задачі з Додатку 1.
6. Вигляд реалізованої програми.
7. Висновки.

Вимоги до програми

Програма має передбачати наступні можливості:

1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
   i. Зведення до канонічної форми.
   ii. Вивід усіх СТ.
2. Ввід вхідних даних вручну:
   i. Задати цільову функцію.
   ii. Задати коефіцієнти обмеження на змінні “типу ≤” та “типу ≥”.
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Передбачити можливість покрокового відображення побудови симплекс-таблиць.
5. Підпис таблиць.
6. Вивід необхідного повідомлення у випадку неіснування оптимального цілочислового плану.

Додаток №1 до лабораторної роботи № 7

1. $f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	2. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 7; \\ -x_1 + 2x_2 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$

3. $f(x_1,\ x_2) = x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 21; \\ -x_1 + 3x_2 \le 8; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	4. $f(x_1,\ x_2) = 8x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30; \\ 12x_1 + 6x_2 \le 70; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
5. $f(x_1,\ x_2) = 4x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 \le 4; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	6. $f(x_1,\ x_2) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 \le -10; \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3; \\ 2x_1 + 1x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
7. $f(x_1,\ x_2) = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 + 4x_2 \le 11; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13; \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0; x_1, x_2, x_3 \in Z. \end{cases}$	8. $f(x_1,\ x_2) = 8x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
9. $f(x_1,\ x_2) = x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3; \\ x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	10. $f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34; \\ x_2 \le 8; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
11. $f(x_1,\ x_2) = x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 + 2x_2 \le 2; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	12. $f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9; \\ 3x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
13. $f(x_1,\ x_2) = 7x_1 + 3x_2 \to \max$ Обмеження:	14. $f(x_1,\ x_2) = 8x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження:

$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$
15. $f(x_1,\ \ x_2) = x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0; x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$	

Лабораторна робота №8

Ігрові задачі дослідження операцій

4. Теорія ігор

Ситуації, коли дві сторони з різними (іноді протилежними) інтересами повинні дійти до деякого оптимального рішення, причому кожна з них для досягнення своєї мети має можливість діяти різними способами (вибір варіанту дії може здійснюватись залежно від вчинків іншої сторони), називають конфліктними. Математичну модель конфліктної ситуації називають грою. Розділ теорії дослідження операцій, що займається математичними моделями прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту, називається теорією ігор.

Отже, *теорія ігор* – математична теорія конфліктних ситуацій, тобто таких, у яких стикаються інтереси двох або більше сторін, які мають різні цілі.

Теорія ігор вперше була систематично викладена Нейманом і Моргенштерном та оприлюднена лише 1944 року в монографії «Теорія ігор і економічної поведінки», хоча окремі результати були опубліковані ще в 20-х роках. Нині математико-ігрові моделі знаходять своє застосування не тільки в конфліктних ситуаціях, а й у соціально-економічній області, у взаємодії людини з природою, в політиці, в біології, у військовій області та ін.

Гра – це конфліктна ситуація, що регламентована одним правилом, у якій вказані:

- можливі варіанти дій (*стратегії*) учасників (*гравців*);
- кількісний результат гри – ціна гри (виграш або програш), до якої приводить сукупність ходів;
- об’єм інформації кожної сторони про поведінку іншої.

Стратегія гравця – сукупність правил, що визначають вибір дій під час кожного персонального ходу гравця залежно від ситуації, яка склалась в процесі гри.

Завданням кожного гравця є знаходження *оптимальної стратегії*, яка за умови багатократного повторення гри забезпечує йому максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор, класифікація яких проводиться відповідно до вибраного критерію. Наприклад, якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається *парною* (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато гравців, тоді гра є *множинною*. Якщо ж кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра – *скінченна*, в іншому разі – *нескінченна*. Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо *гру з нульовою сумою*. Парна гра з нульовою сумою називається *антагоністичною*. Крім цього, існує поняття матричної гри.

Матрична гра – одноходова скінченна гра з нульовою сумою. Матрична гра є теоретико-ігровою моделлю конфліктної ситуації, в якій суперники для досягнення діаметрально протилежних цілей роблять по одному ходу (вибору, кроку) із скінченної кількості можливих дій. Наприклад, розглянемо два гравці A і B, де кожний гравець вибирає одну із можливих стратегій: позначимо стратегії гравця A – $A_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, стратегії гравця B – $B_j\,(j=\overline{1,n})$. У результаті перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий гравець програє цю величину. Складемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям A_i, а стовпці – стратегіям B_j. Матриця A називається *платіжною*, а також *матрицею гри*.

Із багатьох критеріїв теорії ігор для вибору раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій *мінімаксу-максиміну* (вибір оптимальної стратегії для кожного з гравців ґрунтується на припущенні, що він буде діяти за найгірших для нього умов, тому критерій називається песимістичним). Суть цього критерію полягає у наступному: нехай гравець A вибрав стратегію A_i, тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює $\min a_{ij}$, тобто навіть тоді, якщо гравець B і знав би стратегію гравця A. Передбачаючи таку можливість, гравець A має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$.

Така стратегія гравця A позначається A_{i_0} і має назву *максимінної*, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається *нижньою ціною гри*.

Гравець B, який програє суму у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця A. Стратегія гравця B позначається через B_{j_0} і називається *мінімаксною*, а величина його програшу – *верхньою ціною гри*, тобто $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$.

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Якщо $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon$, тобто, якщо $\alpha = \beta = \upsilon$, то гра називається *грою у чистих стратегіях*. В такому разі виграш гравця A (програш гравця B) називається *значенням гри* і дорівнює елементу матриці $a_{i_0 j_0}$.

Ігри у чистих стратегіях називаються *іграми з сідловою точкою*, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця A (програшу гравця B) і є сідловою точкою. У цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій – максимінної для гравця A та мінімаксної для гравця B.

Приклад 4.1. Знайти оптимальні стратегії гравців і ціну гри для матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо мінімальні елементи кожного рядка $\alpha_1 = \min\{2,10,3,14,5\} = 2$, аналогічно, $\alpha_2 = \min\{8,9,5,6,7\} = 5$, $\alpha_3 = \min\{10,8,4,8,12\} = 4$.

Обчислюємо максимальні елементи кожного стовпця $\beta_1 = 10, \beta_2 = 10, \beta_3 = 5, \beta_4 = 14, \beta_1 = 12$. Нижня ціна гри $\underline{v}$ визначається шляхом максимізації α_i:

$$\underline{v} = \max_i \alpha_i = \max\{2,5,4\} = 5.$$

Верхня ціна гри визначається мінімізацією β_j:

$$\overline{v} = \min_j \beta_j = \min\{10,10,5,14,12\} = 5.$$

Отже, $\overline{v} = \underline{v}$, тому дана гра є грою в чистих стратегіях. Ціна даної гри $v = 5$. Гра, яка визначається матрицею A, має сідлову точку (2, 3). Тобто притримуючись чистої другої стратегії, перший гравець забезпечує собі виграш, не менший 5 ум. од., другий гравець, застосовуючи чисту третю стратегію, програє не більше 5 ум. од. Обидві стратегії i=2 та j=3 є оптимальними для першого та другого гравців.

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять шляхом застосування *змішаних стратегій*, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій.

5. Розв'язування матричних ігор в змішаних стратегіях

Теорема Неймана: кожна скінченна гра має хоча б один оптимальний розв'язок серед змішаних стратегій.

Для того, щоб розв'язати гру в змішаних стратегіях, спочатку потрібно зменшити розмірність платіжної матриці. Адже як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації з життя, мають значну розмірність. Зменшити розмірність матриці можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони є невигідними або повторюють одна одну.

Якщо всі елементи i-го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів j-го рядка (стовпця), то кажуть, що i-та стратегія гравця A (гравця B) є *домінуючою* над j-ою.

Наприклад, гравець A прагне збільшити свій виграш, тому він не буде використовувати стратегії, які свідомо дають йому менші суми. Необхідно залишити домінуючі стратегії і відкинути доміновані – у платіжній матриці відкинути той рядок, елементи якого менші відповідних елементів іншого рядка. Гравець B прагне зменшити свій програш, тому він не буде використовувати стратегії, які свідомо забирають великі суми. Необхідно залишити доміновані стратегії і відкинути домінуючі – у платіжній матриці відкинути той стовпець, елементи якого більші відповідних елементів іншого стовпця.

Коли отримана оптимізована платіжна матриця, перевіряють, чи існує розв'язок в чистих стратегіях. Якщо розв'язок існує, то кінець, інакше формуються дві задачі ЛП (пряма для гравця B та двоїста для гравця A).

Пряма задача ЛП для гравця В:

Максимізувати функцію $Q = \sum_{j=1}^{n} q_j$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le 1; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le 1. \end{cases}$$

$$q_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Двоїста задача ЛП для гравця А:

Мінімізувати функцію $F = \sum_{j=1}^{m} p_j$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}tp_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge 1; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge 1. \end{cases}$$

$$p_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Розв’язавши обидві задачі, шляхом підстановок обчислюємо $v = \dfrac{1}{Q*} = \dfrac{1}{F*}$ – ціну гри; $y_j = v \cdot q_j$ – оптимальну змішану стратегію гравця *B*, $x_i = v \cdot p_i$ – оптимальну змішану стратегію гравця *A*.

Отже, основними кроками розв’язування антагоністичної гри двох осіб є такою:

Крок 1. Обчислюємо нижню та верхню ціни гри. Якщо вони рівні між собою, то гра розв’язана.

Крок 2. Зменшуємо розмірність платіжної матриці.

Крок 3. Формулюємо пару задач ЛП (пряму та двоїсту), розв’язуючи одну з яких, встановлюємо оптимальну мішану стратегію одного з гравців.

Крок 4. Знаходимо розв’язок двоїстої задачі.

Крок 5. Шляхом оберненої підстановки визначаємо оптимальні мішані стратегії для обох гравців.

6. Приклад розв’язування матричної гри в змішаних стратегіях

<u>Приклад 6.1.</u> Розв’язати антагоністичну матричну гру:

$$\begin{array}{cc} & \text{Гравець B} \\ \text{Гравець A} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Визначимо домінуючі стратегії. П'ята стратегія гравця *B* домінує над другою, оскільки всі значення його програшів за будь-яких дій противника є гіршими, ніж за вибору другої стратегії. Тому п'ята стратегія гірша для гравця *B*, ніж друга, і може бути виключена із платіжної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно стратегія B_3 домінує над стратегією B_2. Отже, виключаємо домінуючу стратегію для гравця *B*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Стратегія B_4 домінує над стратегією B_1, тому виключаємо стратегію B_4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі аналізуємо стратегії гравця *A*. Стратегія A_3 домінує над стратегією A_4. Отже, для гравця *A* залишаємо домінуючі стратегії, які принесуть йому більший виграш.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримали оптимізовану платіжну матрицю.

Далі для розв'язування задачі необхідно знайти її нижню та верхню ціни гри. Нижня ціна гри буде дорівнювати: $\underline{v} = \max\{1,1,2\} = 2$. Верхня ціна гри буде рівна $\bar{v} = \min\{3,4\} = 3$. Отже, розв'язку даної задачі не чистих стратегіях не існує. Ціна гри буде лежати в межах: $2 \le v \le 3$. Необхідно розв'язати гру в змішаних стратегіях.

Для цього на основі отриманої платіжної матриці формулюємо дві задачі ЛП:

$$Q = q_1 + q_2 \to \max$$
$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 \le 1; \\ 3q_1 + q_2 \le 1; \\ 2q_1 + 3q_2 \le 1. \end{cases}$$
$$q_i \ge 0.$$

$$F = p_1 + p_2 + p_3 \to \min$$
$$\begin{cases} p_1 + 3p_2 + 2p_3 \ge 1; \\ 4p_1 + p_2 + 3p_3 \ge 1. \end{cases}$$
$$p_i \ge 0.$$

Розв'яжемо пряму задачу ЛП (для гравця *B*) симплекс-методом. Для цього зведемо її до канонічної форми:

$$Q - q_1 - q_2 = 0$$

$$\begin{cases} q_1 + 4q_2 + q_3 = 1; \\ 3q_1 + q_2 + q_4 = 1; \\ 2q_1 + 3q_2 + q_5 = 1. \end{cases}$$

Будуємо першу симплекс-таблицю (табл.6.1). Провідним стовпцем обираємо другий, провідним рядком – перший.

Таблиця 6.1

Базис	Вільний член	Змінні					Оціночні відношення
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
q_3	1	1	4	1	0	0	1/4
q_4	1	3	1	0	1	0	1
q_5	1	2	3	0	0	1	1/3
F	0	-1	-1	0	0	0	

План неоптимальний. Перераховуємо елементи для побудови другої симплекс-таблиці.

Таблиця 6.2

Базис	Вільний член	Змінні					Оціночні відношення
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
q_2	1/4	1/4	1	1/4	0	0	1
q_4	3/4	$2\frac{3}{4}$	0	-1/4	1	0	3/11
q_5	1/4	$1\frac{1}{4}$	0	-3/4	0	1	1/5
F	1/4	-3/4	0	1/4	0	0	

План неоптимальний. Перераховуємо елементи для побудови третьої симплекс-таблиці.

Таблиця 6.3

Базис	Вільний член	Змінні					Оціночні відношення
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
q_2	1/5	0	1	2/5	0	-1/5	1/2
q_4	1/5	0	0	$1\frac{2}{5}$	1	$-2\frac{1}{5}$	1/7
q_1	1/5	1	0	-3/5	0	4/5	
F	2/5	0	0	-1/5	0	3/5	

План неоптимальний. Перераховуємо елементи для побудови четвертої симплекс-таблиці.

Таблиця 6.4

Базис	Вільний член	Змінні					Оціночні відношення
		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
q_2	1/7	0	1	0	-2/7	3/7	
q_3	1/7	0	0	1	5/7	$-1\frac{4}{7}$	
q_1	2/7	1	0	0	3/7	-1/7	
F	3/7	0	0	0	1/7	2/7	

План оптимальний, адже всі значення в рядку F додатні. Розв'язком прямої задачі є:

$$Q^* = \frac{3}{7}; q = (\frac{2}{7}; \frac{1}{7}).$$

З отриманої симплекс-таблиці виписуємо розв'язок для двоїстої задачі:

$$F^* = \frac{3}{7};\ p = (0; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}).$$

Отже, ціна гри $v = \frac{1}{Q^*} = \frac{7}{3}$.

Оптимальною стратегією гравця B є:

$$y = (\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{3}; \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3}) = (\frac{2}{3}; \frac{1}{3}).$$

Оптимальною стратегією гравця A є:

$$x = (0 \cdot \frac{7}{3}; \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3}; \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{3}) = (0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}).$$

Контрольні питання до лабораторної роботи № 8

1. Що називається конфліктною ситуацією?
2. Що таке гра?
3. Що таке хід гри?
4. Дайте визначення платіжної матриці.
5. Сформулюйте принцип мінімаксу.
6. Дайте визначення максимінної та мінімаксної стратегій.
7. Яка гра називається скінченною, парною?
8. Які властивості мають оптимальні стратегії гравців?
9. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
10. У який спосіб здійснюється зведення гри до задачі лінійного програмування?

Завдання лабораторної роботи № 8

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Подати гру, задану матрицею, у вигляді задач ЛП та розв'язати їх:

$$A = \begin{bmatrix} k & 7 & 8 & m \\ 6 & 2 & k & 9 \\ 4 & m & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Тут k – порядковий номер студента у журналі групи, m – номер групи (1, 2, 3, 4, 5).
3. Оформити звіт про роботу, який повинен містити всі ітерації обох алгоритмів та розрахунки з поясненнями, за допомогою яких отримано результат.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до звіту

1. Титульний аркуш.
2. Тема звіту.
3. Мета звіту.
4. Теоретичні відомості (дати відповідь на всі контрольні запитання).
5. Текст програми з коментарями.
6. Вигляд реалізованої програми.
7. Висновки.

Вимоги до програми

Програма має передбачати наступні можливості:

1. Ввід вхідних даних вручну (матриці).
2. Перевірка розв’язку гри в чистих стратегіях.
3. Оптимізація платіжної матриці.
4. Передбачити можливість некоректного введення даних.
5. Передбачити можливість покрокового відображення побудови симплекс таблиць.
6. Підпис таблиць.
7. Вивід необхідного повідомлення у випадку неіснування розв’язку задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ – ВІПОЛ, 2000. – 688 с.
2. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 383с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
4. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб.– К.:КНЕУ, 2003. – 452 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЦІЛОЧИСЕЛЬНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт №7 та №8
з дисципліни „ Дослідження операцій”
для студентів спеціальності
„ Програмна інженерія ”

Укладачі Журавчак Любов Михайлівна
Нитребич Оксана Олександрівна

Редактор

Комп’ютерне верстання