МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ ТА ДВОЇСТИМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт №1 та №2
з дисципліни „Дослідження операцій”
для студентів спеціальності
6. 050103 „Програмна інженерія”

Затверджено
на засіданні кафедри
програмного забезпечення
Протокол № __ від _______ р.

Львів – 2016

Розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом та двоїстим симплекс-методом : Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт №1 та №2 із дисципліни „Дослідження операцій” для студентів спеціальності „Програмна інженерія” / Укл.: Л.М. Журавчак, О.О. Нитребич – Львів: Видавництво Національного університету „Львівська політехніка”, 2016. – 36 с.

Укладачі Л.М. Журавчак, д-р тех. наук, проф.
О.О. Нитребич, канд. тех. наук, асист. кафедри ПЗ

Відповідальний за випуск Федасюк Д.В., д-р тех. наук, проф.

Рецензенти , канд. тех. наук, доц.
, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними поняттями теорії лінійного програмування, навчитись знаходити оптимальні плани задач лінійного програмування графічно, за допомогою симплекс методу і двоїстого симплекс методу.

Вступ

У даний час багато завдань планування та управління в галузях господарства, а також великий обсяг приватних прикладних задач розв'язуються методами математичного програмування. Найкраще розвиненими і вивченими в цій області є методи лінійного програмування. Лінійне програмування – це галузь математичного програмування, який вивчає підходи до побудови математичних моделей оптимізаційних задач, що характеризуються лінійною функцією мети та лінійними залежностями між змінними, та методи їх розв'язування.

Лабораторна робота №1

Розв'язування задачі лінійного програмування з двома змінними графічно та симплекс-методом (СМ)

1. Задача лінійного програмування

Під **задачею** лінійного програмування (ЗЛП) в загальному розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь.

Математичну модель загальної задачі лінійного програмування (ЛП) можна подати в такому вигляді: *знайти такі числові значення змінних* $x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0, \ldots,$ $x_n \geq 0$, *які задовольняють систему лінійних обмежень:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ \ldots \ + \ a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ \ldots \ + \ a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \ \ldots \ + \ a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m, \end{cases}$$

і перетворюють в екстремум (максимум або мінімум) лінійну функцію

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

Цю функцію називають **цільовою функцією** або **функцією мети**, вона моделює поставлену в задачі мету.

Для спрощення можна формулювати задачу лише для максимуму цільової функції. Якщо ж в конкретній задачі треба визначити мінімум функції $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$, то це те саме, що шукати максимум функції $f(x)_1 = -f(x) = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n$.

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max\ (\min) \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m, \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Розв’язати задачу ЛП означає знайти її оптимальний план та обчислити максимальне (мінімальне) значення цільової функції або показати, що оптимального плану не існує.

Під час розв’язку задачі ЛП можливі *три випадки*:

1. Існує оптимальний план (єдиний або нескінченна множина оптимальних планів).
2. Оптимальний план не існує, хоча плани даної задачі існують, але на непустій множині планів цільова функція не обмежена (зверху – в задачі максимізації, знизу – в задачі мінімізації).
3. Оптимального плану не існує, тому що в задачі не існує жодного плану.

Окрім того, існує три форми задачі лінійного програмування:

1. **Загальна задача**, коли система обмежень (1.2) містить хоча б одну нерівність.
2. **Основна задача** – це випадок задачі ЛП, коли всі обмеження системи (1.2) є рівняннями.
3. **Канонічна задача** – це частковий випадок основної задачі у тому розумінні, що система рівнянь (1.2) – канонічна, а цільова функція (1.1) виражена тільки через вільні невідомі.

Система лінійних рівнянь називають **канонічною системою**, якщо вона задовольняє такі дві умови:

1. У кожному рівнянні є одна невідома змінна з коефіцієнтом, що дорівнює 1, яка відсутня у решті рівнянь. Таку невідому називають **базисною**.
2. Вільні члени усіх рівнянь системи (1.2) невід’ємні.

Невідомі змінні, що не є базисними, називають **вільними**.

Якщо в канонічній системі покласти рівними нулю всі вільні змінні, то базисні змінні дорівнюватимуть невід’ємним вільним членам рівнянь. Отриманий таким чином план називається **базисним планом** канонічної задачі.

Для того, щоб загальну задачу привести до основної, потрібно нерівності замінити рівняннями: достатньо ввести невід’ємні *додаткові* невідомі, додавши їх до лівих частинах нерівностей "типу $\le$", вирахувавши з лівих частин нерівностей "типу $\ge$" і приписавши до заданої цільової функції з нульовими коефіцієнтами.

<u>Приклад 1.1.</u> Розглянемо задачу максимізаці функції:

$f = x_1 + 2x_2 \to \max$

з обмеженнями

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 - 5x_2 \le 4 \end{cases},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Зведемо задачу до канонічної форми:

$f = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + x_4 = 4 \end{cases},$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Приклад 1.2. Розглянемо задачу мінімізаці функції:

$f = 2x_1 + 2x_2 \to \min$

з обмеженнями

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 \ge -5 \\ x_1 - 2x_2 \ge -4 \end{cases}.$$

Помножимо на (-1) цільову функцію та зведемо нерівності до рівнянь:

$f = -2x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -4 \end{cases}.$$

Помножимо рівняння на (-1) та отримаємо канонічну задачу:

$f = -2x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -3x_1 - 1x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}.$$

2. Симплекс-метод розв'язування задачі ЛП

Відомим методом розв'язування задачі ЛП є симплекс-метод, що був опублікований Д.Б.Данцигом у 1949 р. Його ідея полягає в *спрямованому* переборі допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до іншого, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функції під час переходу змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Алгоритм розв'язку задачі симплекс-методом:

1. *Зводимо задачу лінійного програмування до канонічного вигляду*. При необхідності переходу від нерівності до рівняння вводимо додаткові змінні.

Після введення додаткових змінних систему рівнянь та лінійну функцію записуємо у вигляді **розширеної системи**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots \ + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max.$$

Слід мати на увазі, що всі компоненти вектора правої частини мають бути невід'ємними.

2. Знаходимо *допустимий базисний розв'язок*. Отриману розширену систему заносимо в першу симплекс-таблицю (СТ-1). Останній рядок таблиці називають **оціночним**. У ньому, окрім значення цільової функції (в першій таблиці рівного 0), вказуємо *критерії оптимальності:* для небазисних змінних коефіцієнти цільової функції з протилежним знаком $-c_j$, для базисних 0. У першому зліва стовпчику таблиці записуємо основні змінні (базис) x_b, а в заголовок таблиці заносимо всі змінні; у другому стовпці – вільні члени розширеної системи b_1, b_2, ..., b_m. Останній стовпець необхідний для оціночних відношень, які використовують під час розрахунку найбільшого можливого значення змінної. У робочу частину таблиці (починаючи з третього стовпця) заносимо коефіцієнти a_{ij} при всіх змінних із розширеної системи.

3. Знайдений опорний план *перевіряємо на виконання критерію оптимальності* – для задачі максимізації на наявність в останньому рядку від'ємних коефіцієнтів. Якщо таких коефіцієнтів немає, то розв'язок оптимальний, досягнуто max $f = c_0$ (в лівому нижньому куті таблиці), основні змінні приймають значення, записані в другому стовпці, а змінні, що не входять в базис, рівні 0, тобто отримуємо *оптимальний базисний розв'язок*.

4. Якщо критерій оптимальності не виконується, то найбільшому по модулю від'ємному коефіцієнту $\Delta_s < 0$ в останньому рядку відповідає **провідний стовпчик** s.

Обчислюємо оціночні відношення для кожного рядка за такими правилами:

1) ∞, якщо $a_{is} \le 0$;

2) 0, якщо $b_i = 0$ і $a_{is} > 0$;

4) $\left|\dfrac{b_i}{a_{is}}\right|$, якщо $a_{is} > 0$.

Визначаємо $\min\limits_{i}\left\{\left|\dfrac{b_i}{a_{is}}\right|\right\}$. Якщо скінченного мінімуму немає, то задача не містить скінченного оптимуму $(f_{\max}=\infty)$. Якщо мінімум існує, то вибираємо рядок q, на якому він досягається (будь-який, якщо їх декілька), та називаємо його **провідним рядком**. На перетині провідних стовпця та рядка знаходиться **головний елемент** a_{qs}.

5. *Переходимо до нового опорного плану*. Базисний розв’язок можна знайти за правилом прямокутника.

Правило прямокутника

Заповнюємо нову симплекс таблицю за правилом:

a) у лівому стовпці записуємо новий базис: замість основної змінної x_q – змінну x_s;
b) на місці головного елемента ставимо 1, у провідному стовпчику всі елементи, окрім головного, прирівнюємо до нуля;
c) новий рядок з номером q отримуємо із старого рядка діленням на головний елемент a_{qs};
d) решта елементів a'_{ij} обчислюються за *правилом прямокутника* (рис. 2.1):

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{is}\,a_{qj}}{a_{qs}},\qquad b'_i=b_i-\frac{a_{is}\,b_q}{a_{qs}}. \tag{2.1}$$

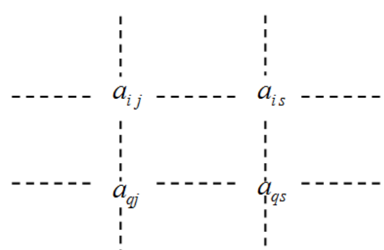

Рис. 2.1. Схема вибору елементів для методу прямокутника

Далі переходимо до п. 3 алгоритму.

Блок-схема алгоритму симплекс-методу наведена на рис. 2.2.

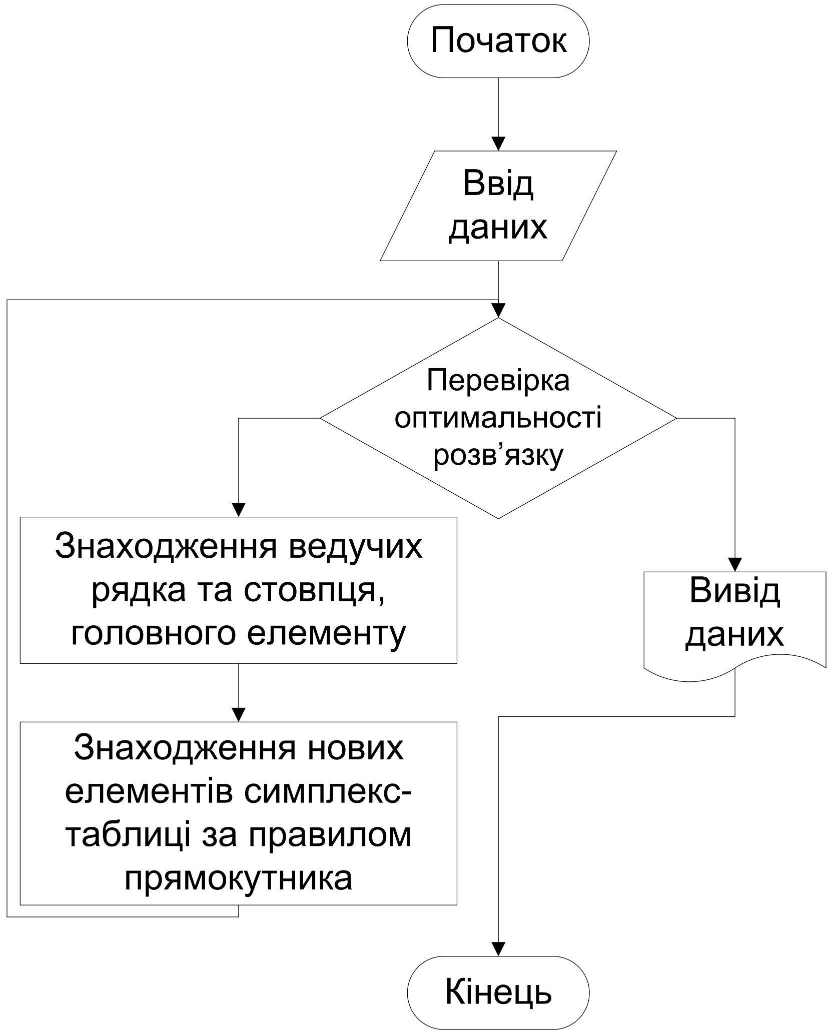

Рис. 2.2 Блок-схема симплекс-методу

3. Приклад розв'язування задачі симплекс-методом

Розв'язати задачу про оптимальне використання ресурсів симплекс-методом.

Для виготовлення чотирьох видів продукції підприємство використовує три типи сировини. Норми витрат ресурсів сировини кожного типу на одиницю продукції, їхня наявність, а також ціна наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Тип ресурсу	*Норми витрат ресурсів на одиницю продукції*				*Наявність Ресурсів*
	A	**B**	**C**	**D**	
1	1	0	2	1	180
2	0	1	3	2	210
3	4	2	0	4	800
Ціна одиниці продукції	9	6	4	7	

Треба визначити, скільки сировини кожного виду потрібно виготовляти підприємству, якщо мета полягає в максимізації прибутку за умови, що збут продукції забезпечений.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 – число одиниць продукції, що відповідають видам *A*, *B*, *C*, *D*, які заплановано виготовляти на підприємстві. Оскільки існують обмеження на розміри витрат ресурсів, то змінні x_1, x_2, x_3, x_4 повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800. \end{cases} \tag{3.1}$$

За змістом задачі змінні задовольняють умовам невід’ємності:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \tag{3.2}$$

Сумарний прибуток від реалізації продукції рівний:

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4. \tag{3.3}$$

Отже, потрібно знайти такий план виробництва продукції $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, що задовольняє систему (3.1) та умови (3.2), при яких функція (3.3) приймає максимальне значення.

Після введення додаткових змінних систему рівнянь та лінійну функцію запишемо у вигляді розширеної системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 180, & (p_1) \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 210, & (p_2) \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_7 = 800, & (p_3) \\ F - 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0. & (f) \end{cases}$$

Додаткові змінні означають кількість відповідного ресурсу, що не використовується під час такого плану виробництва продукції (залишок).

Заповнюємо першу симплекс таблицю (СТ-1), у якій змінні x_5, x_6, x_7 вважаємо базисними (табл. 3.2). Останній рядок заповнюється коефіцієнтами лінійної функції з протилежним знаком (див. п. 2 алгоритму).

Як видно із табл. 3.2, значення всіх основних змінних x_1, x_2, x_3, x_4 рівні нулю, а додаткові змінні приймають свої значення відповідно з обмеженнями задачі. Ці значення змінних відповідають такому "плану", при якому нічого не виготовляється, ресурси не використовуються та значення цільової функції рівне нулю (тобто вартість виробництва продукції відсутня). Такий план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно і з 4-го рядку табл. 3.2, так як в ній існують чотири від’ємні числа: $-9, -6, -4, -7$. Від’ємні числа не тільки свідчать про можливість збільшення загальної вартості продукції, що виготовляється, але й показують, наскільки збільшиться прибуток після введення в план одиниці того чи іншого товару. Так, число – 9 означає, що під час включення в план виробництва одиниці продукції типу *A* забезпечується збільшення загальної вартості товарів, що випускаються на 9 грошових одиниць. Якщо включити в план виробництва по одиниці продукції *B*, *C* або *D*, то загальна вартість виготовлених товарів виросте відповідно на 6, 4 або 7 грошових одиниць. Тому з економічної точки зору найбільш вигідно включати в план виробництва продукцію типу *A*.

Це ж необхідно зробити і на підставі формальної ознаки симплекс-методу. Відповідно до п. 3 алгоритму перевіряємо критерій оптимальності. В останньому рядку є від'ємні коефіцієнти. Вибираємо стовпчик, в якому найменший від'ємний елемент (-9), отже, цей стовпчик буде *провідним* (позначено вертикальною стрілкою).

Відповідно до п. 4 алгоритму, знаходимо оціночні відношення. Для цього ділимо елементи вільних членів на елементи ведучого стовпчика: $180/1=180; 180/0=\infty; 800/4=200$. Вибираємо $\min\{180;\infty;200\}=180$. Отже, перший рядок є *провідним* (позначено горизонтальною стрілкою). На перетині провідних рядка та стовпця стоїть *головний* елемент $a_{11}=1$.

Таблиця 3.2. СТ-1

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночні відношення
		основні				Додаткові			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
→ x_5	180	$\boxed{1}$	0	2	1	1	0	0	180
x_6	210	0	1	3	2	0	1	0	∞
x_7	800	4	2	0	4	0	0	1	200
F	0	– 9	– 6	– 4	– 7	0	0	0	
		↑							

Відповідно до п.5 алгоритму переходимо до нового опорного плану. Будуємо симплекс-таблицю 2 (табл. 3.3.) Новий базисний розв'язок системи знайдемо за правилом прямокутника:

a) у ведучому стовпці всі елементи, окрім головного, прирівнюємо до нуля;
b) перший рядок отримуємо шляхом ділення його елементів на головний елемент: $a_{11}=1$;
c) решта клітинок заповнюємо за правилом прямокутника, використовуючи (2.1). Отримуємо:

$$b_2=210-\frac{0\cdot 180}{1}=210;\ b_3=800-\frac{4\cdot 180}{1}=80;\ b_4=0-\frac{-9\cdot 180}{1}=1620;$$

$$a'_{22}=1-\frac{0\cdot 0}{1}=1;\;\; a'_{23}=3-\frac{0\cdot 2}{1}=3;\;\; a'_{24}=2-\frac{0\cdot 1}{1}=2;\;\; a'_{25}=0-\frac{0\cdot 1}{1}=0;$$

$$a'_{32}=2-\frac{4\cdot 0}{1}=2;\;\; a'_{33}=0-\frac{4\cdot 2}{1}=-8;\;\; a'_{34}=4-\frac{4\cdot 1}{1}=0;\;\; a'_{35}=0-\frac{4\cdot 1}{1}=-4.$$

$$a'_{42}=-6-\frac{-9\cdot 0}{1}=-6;\;\; a'_{43}=-4-\frac{-9\cdot 2}{1}=14;\;\; a'_{44}=-7-\frac{-9\cdot 1}{1}=2;\;\; a'_{45}=0-\frac{-9\cdot 1}{1}=9.$$

Складемо другу симплекс таблицю (табл. 3.3), у лівому стовпці якої замість змінної x_5, що виключається з базису, запишемо нову базисну змінну x_1.

Таблиця 3.3 (СТ-2)

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночні відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	180	1	0	2	1	1	0	0	∞
x_6	210	0	1	3	2	0	1	0	210
x_7	80	0	$\boxed{2}$	– 8	0	– 4	0	1	40
f	1620	0	– 6	14	2	9	0	0	

У СТ-2 в останньому рядку існують від'ємні числа, що свідчить про те, що план не є оптимальним. Аналогічно, можна побудувати СТ-3 (табл. 3.4).

Таблиця 3.4 (СТ-3)

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночне відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	180	1	0	2	1	1	0	0	90
x_6	170	0	0	$\boxed{7}$	2	2	1	–1/2	$24\frac{2}{7}$
x_2	40	0	1	– 4	0	– 2	0	1/2	∞
f	1860	0	0	–10	2	– 3	0	3	

І на цей раз критерій оптимальності не досягнутий: маємо два від'ємні елементи. Для обчислення виберемо як провідний третій стовпчик; визначимо, що другий рядок є провідним, відповідно, a_{25} – головний елемент.

Обчислимо нову симплекс таблицю (табл. 3.5).

Таблиця 3.5 (СТ-4)

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночне відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	$131\frac{3}{7}$	1	0	0	$3/7$	3/7	$-2/7$	1/7	$306\frac{2}{3}$
x_5	$24\frac{2}{7}$	0	0	1	$2/7$	$\boxed{2/7}$	$1/7$	$-1/14$	85
x_2	$137\frac{1}{7}$	0	1	0	$1\frac{1}{7}$	-6/7	$4/7$	$3/14$	∞
f	$2102\frac{6}{7}$	0	0	0	$4\frac{6}{7}$	-1/7	$1\frac{3}{7}$	$2\frac{2}{7}$	

У СТ-4 в останньому рядку існують від'ємні числа, що свідчить про те, що план не є оптимальним. Отже, будуємо СТ-5 (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 (СТ-5)

Базис	Вільний член	Змінні						
		Основні				Додаткові		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	95	1	0	–3/2	0	0	–1/2	1/4
x_5	85	0	0	7/2	1	1	1/2	–1/4
x_2	210	0	1	3	2	0	1	0
$\boldsymbol{f}$	**2115**	0	0	1/2	5	0	3/2	9/4

Перевіримо, чи є даний план оптимальним, чи ні. Для цього розглянемо 4-ий рядок табл. 3.6. У цьому рядку нема від'ємних чисел. Це означає, що знайдений опорний план $X^* = (95, 210, 0, 0, 85, 0, 0)$ є оптимальним та max $f = 2115$.

Відповідно до умови задачі план випуску продукції, що включає виготовлення 95 товарів *A* та 210 товарів *B*, є оптимальним. При такому плані випуску продукції повністю використовується сировина II та III виду і залишається невикористаними 85 одиниць сировини I виду, а вартість виготовленої продукції дорівнює 2115 грошових одиниць.

4. Приклад розв'язування задачі ЛП графічно

Дуже часто задачу ЛП, яка містить лише дві невідомі змінні, розв'язують графічним методом. Графічний метод наочніший і зазвичай простіший для розуміння (хоч займає багато часу, бо вимагає побудови ретельного креслення). Також цей метод дозволяє практично одночасно знайти мінімальний і максимальний розв'язки задачі.

Основними кроками розв'язування задачі ЛП графічним методом є: побудувати область допустимих розв'язків задачі (опуклий багатокутник, який визначається як перетин півплощин, що відповідають нерівностям завдання), побудувати лінію рівня цільової функції, і, нарешті, рухати лінію рівня в потрібному напрямку, поки не досягнемо крайньої точки області – оптимальної точки (або множини точок). При цьому можна знайти єдиний оптимальний розв'язок (точку), безліч (відрізок) або жодного (область порожня або не обмежена у потрібному напрямку).

Розглянемо детальніше графічний метод на прикладі.

Приклад 4.1. Розв'язати задачу ЛП графічним методом:

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \le 50; \text{ (I)} \\ x_2 \le 80; \text{(II)} \\ -3x_1 + 2x_2 \ge -90; \text{ (III)} \\ 4x_1 + x_2 \le 240; \text{(IV)} \\ -3x_1 + x_2 \le 0; \text{(V)} \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Спочатку відкладемо лінії, які отримують з обмежень. Для швидкого будування ліній зручно представити рівняння прямої у відрізках. Наприклад, рівняння $-3x_1 + 2x_2 = -90$ зобразимо у вигляді:

$$\frac{x_1}{30} - \frac{x_2}{-45} = 1.$$

Отже, будуємо пряму, що проходить через точки (30;0) і (0;-45). Вибираємо з утворених внаслідок побудови прямої двох півплощин ту, яка відповідає умовам задачі. У випадку, коли пряма не проходить через точку (0;0), її зручно вибрати за контрольну. Наприклад, контрольна точка (0;0) не задовольняє умову нерівності $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$, тому обираємо півплощину, яка її не містить.

Аналогічно поступаємо з усіма нерівностями: замінюємо їх на рівності, проводимо відповідні прямі та обираємо необхідні півплощини.

$x_1 = 50$; (I)

$x_2 = 80$; (II)

$-3x_1 + 2x_2 = -90$; (III)

$4x_1 + x_2 = 240$; (IV)

$-3x_1 + x_2 = 0$; (V)

У результаті отримаємо багатокутник допустимих розв'язків задачі – перетин усіх півплощин (рис. 4.1). Далі будуємо пряму, що відповідає цільовій функції $2x_1 + 7x_2=0$. Переносимо її паралельно в напрямі вектора (2; 7), який отримуємо з коефіцієнтів при змінних у цій функції. Максимальне значення функції буде в одній або двох вершинах (тоді й на відповідній стороні, що їх сполучає, це означає безліч розв'язків) многокутника, з якою (якими) перетнеться дана пряма.

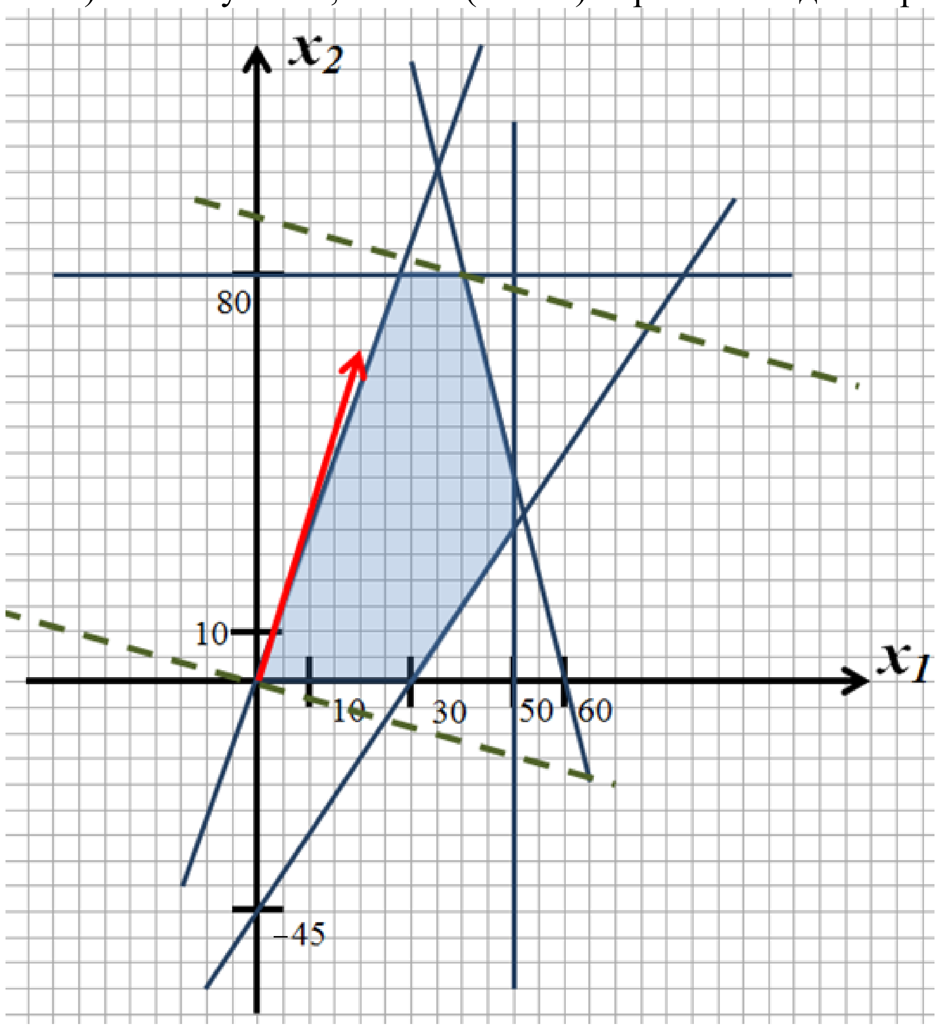

Рис. 4. 1. Графічний метод розв'язання задачі ЛП.

Таким чином ми отримали розв'язок задачі лінійного програмування:
$x_1 = 40$; $x_2 = 80$ (остання точка перетину прямої, що відповідає функції мети, з багатокутником);
$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2 \to \max$;
$f(x_1, x_2) = 2\cdot 40 + 7\cdot 80 = 640$;

Отже, задана функція має в точці (40;80) максимальне значення рівне 640.

Контрольні питання до лабораторної роботи № 1

1. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
2. Що таке цільова функція?
3. Як задачу мінімізації звести до задачі максимізації цільової функції?
4. Який план називається опорним?
5. Що таке допустимий план?
6. Які є три форми задачі ЛП?
7. Яка система називається канонічною?
8. Яка різниця між вільними та базисними змінними?
9. Опишіть алгоритм симлекс-методу.
10. На якій ідеї ґрунтується симплекс-метод?
11. У чому суть правила прямокутників?
12. Який елемент симплекс таблиці називається головним?
13. Як обчислити оціночні відношення для симплекс-таблиці?
14. Що таке провідний рядок (стовпець) симплекс-таблиці?
15. Яка умова закінчення симплекс-методу?
16. Чим відрізняється оптимальний розв’язок задачі ЛП від допустимого?
17. Чи може функція мети задачі ЛП містити нелінійні вирази зі змінних?
18. Чи може задача ЛП мати більше, ніж один, оптимальний розв’язок?
19. Чи може в допустимий розв’язок задачі ЛП входити від’ємна компонента?
20. Опишіть графічний спосіб розв’язування задачі ЛП.

Завдання до лабораторної роботи № 1

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв’язування задачі ЛП та з її допомогою знайти розв’язок (максимальне значення функції та значення змінних, при якому воно досягається) задачі лінійного програмування згідно варіанту з Додатку 1.
3. Розв’язати задачу ЛП з Додатку 2 графічним методом.
4. Оформити звіт про виконану роботу.
5. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до звіту

1. Титульний аркуш.
2. Тема звіту.
3. Мета звіту.

4. Теоретичні відомості (дати відповідь на контрольне запитання у відповідності із номером студента у журналі).

5. Текст програми з коментарями (алгоритм симплекс-методу) до задачі з Додатку 1.

6. Вигляд реалізованої програми.

7. Розв'язання задачі з Додатку 2 графічним методом з описаними усіма послідовними кроками.

8. Висновки.

Вимоги до програми

Програма має передбачати наступні можливості:

1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
    i. Зведення до канонічної форми.
    ii. Вивід усіх СТ.
2. Ввід вхідних даних вручну:
    i. Задати цільову функцію.
    ii. Задати коефіцієнти обмеження на змінні "типу $\leq$".
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Передбачити можливість покрокового відображення побудови симплекс таблиць.
5. Підпис таблиць.
6. Вивід необхідного повідомлення у випадку не існування оптимального плану.

Додаток №1 до лабораторної роботи № 1

1. Для виготовлення залізобетонних конструкцій двох типів P_1 і P_2, вартість яких 25 та 15 ум. од. відповідно, використовують металеві конструкції трьох типів: K_1, K_2 та K_3, запаси яких на виробництві відповідно 40, 65 та 80 ум. од. Для виготовлення конструкції P_1 необхідно 2 ум. од. K_1, 3 ум. од. K_2 і 4 ум. од. K_3, а для виготовлення конструкції P_2 необхідні 1ум. од. K_1, 2 ум. од. K_2 і 2 ум. од. K_3. Скласти план випуску залізобетонних конструкцій, який би забезпечив підприємству максимальний прибуток.

2. Процес виготовлення промислових виробів двох видів P_1 і P_2 складається з послідовної обробки кожного з них на трьох верстатах. Час використання цих верстатів для виробництва даних виробів обмежено 10 год на добу. Час обробки одного виробу (у хвилинах) і прибуток від продажу одного виробу кожного виду вказані в таблиці:

Станок	P_1	P_2	*Обмеження часу*
I	10	5	10
II	6	20	10
III	8	15	10
Прибуток	200	300	

Знайти оптимальні обсяги виробництва виробів кожного виду, що максимізують прибуток.

3. Підприємство виготовляє два види продукції - P_1 і P_2, яка надходить в оптовий продаж. Для виробництва продукції використовуються два види сировини - A і B. Максимально можливі запаси сировини на добу становлять 9 і 13 одиниці відповідно. Витрата сировини на одиницю продукції виду P_1 і виду P_2 дано в таблиці:

Сировина	P_1	P_2	*Запас сировини*
A	2	3	9
B	3	2	13

Оптові ціни одиниці продукції дорівнюють: 3 ум. од. для P_1 і 4 ум. од. для P_2. Яку кількість продукції кожного виду має виробляти підприємство, щоб дохід від її реалізації був максимальним?

4. Підприємство випускає продукцію двох видів: P_1 і P_2. Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрати, ліміти ресурсів і прибуток від одиниці продукції наведені у таблиці:

Ресурси	P_1	P_2	*Об'єм ресурсів*
Обладнання	2	3	30
Сировина	2	1	18
Електроенергія	2	1	20
Прибуток на одиницю продукції	30	20	

Знайти оптимальний план випуску продукції.

5. Для виготовлення двох видів виробів A і B використовується токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Норми витрат часу кожного з типів обладнання на один виріб кожного виду наведено в таблиці. У ній же зазначено загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Тип обладнання	*A*	*B*	*Загальна фонд роб. часу*
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144

Прибуток	14	18	

Знайти план випуску виробів А і В, що забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

6. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів в кількостях, що відповідно дорівнюють 24, 31 і 18 шт. Кожен лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість одержуваних заготовок при кожному способі розкрою наведено в таблиці. У ній же зазначено величину відходів при даному способі розкрою одного листа фанери.

Вид заготовки	*Число заготовок під час розкрою відповідним способом*	
	1 сп.	2 сп.
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина відходів	12	16

Визначити, скільки листів фанери і яким способом слід розкроїти, щоб отримати не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

7. На звірофермі можуть вирощувати лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовують три види кормів. Кількість корму кожного виду, який повинні щодня одержувати лисиці і песці, наведено в таблиці. У ній же зазначено загальну кількість корму кожного виду, який може бути використаний звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця.

Вид корму	*Лисиця*	*Песець*	*Загальна к-сть корму*
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток	16	12	

Визначити, скільки лисиць і песців слід вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

8. При виготовленні двох видів будівельних конструкцій, вартість одиниці кожної із яких відповідно 4 і 3 ум. од., використовують два сорти цементу, запаси яких відповідно 17 і 21 ум. од. Визначити, яку кількість конструкцій кожного виду треба виготовити, щоб сумарний прибуток від реалізації був максимальним, якщо виготовлення одиниці конструкції 1-го типу потребує 1 ум. од. цементу 1-го сорту та 2 ум. од. 2-го сорту, а для виготовлення

одиниці конструкції 2-го типу необхідно 2 ум. од. цементу 1-го сорту та 1 ум. од. 2-го сорту.

9. Підприємство випускає продукцію двох видів: P_1 і P_2. Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрат, обмеження ресурсів і прибуток від одиниці продукції наведені у таблиці.

Ресурси	P_1	P_2	*Об'єм ресурсів*
Обладнання	2	3	31
Сировина	1	1	12
Електроенергія	2	1	20
Прибуток на одиницю продукції	40	25	

Обчислити оптимальний план випуску продукції.

10. Під час годівлі кожна тварина має отримати не менше 9 од. білків, 8 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два види кормів, наведених у таблиці:

Поживні речовини	*Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг*	
	Корм 1	*Корм 2*
Білки	2	6
Вуглеводи	5	4
Протеїн	2	3

Вартість 1 кг корму першого виду - 4 ум. од., друга - 6 ум. од. Необхідно скласти денний раціон поживних речовин, що має мінімальну вартість.

11. Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4. Для її випуску потрібна сировина чотирьох видів A_1, A_2, A_3, A_4, яку завод може щомісячно виділяти в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, необхідної для виготовлення кожного виду продукції, ціна кожного виду продукції, а також лімітоване щомісячне надходження потрібної сировини подано в таблиці.

Сировина	*Щомісячне надходження сировини (ум. од.)*	*Витрати сировини на одиницю кожного виробу*			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одиниці виробу		8	10	12	18

Визначити, яку кількість треба випускати заводу кожного з видів продукції B_1, B_2, B_3, B_4, щоб прибуток від її реалізації був максимальний.

12. Для виготовлення різних виробів А і В використовують три види сировини. Для виготовлення одиниці виробу А треба затратити сировини першого виду 16 кг, сировини другого виду 8 кг, сировини третього виду 5 кг. Для виготовлення одиниці виробу В треба затратити сировини першого виду 4 кг, сировини другого виду 7 кг, сировини третього виду 9 кг. Виробництво забезпечено сировиною першого виду кількістю 784 кг, сировиною другого виду кількістю 552 кг, сировиною третього виду кількістю 567 кг. Витрати людино-годин на виготовлення одиниці готового виробу А дорівнюють 4 люд.-год., а виробу В – 6 люд.-год. Скласти план виготовлення виробів А і В при умові максимального використання працівників для забезпечення зайнятості персоналу.

13. При вирощуванні двох культур А і В використовують 3 види добрива. На вирощування однієї тонни культури А треба затратити добрива першого виду 9 кг, добрива другого виду 7 кг, добрива третього виду 4 кг. На вирощування однієї тонни культури В треба затратити добрива першого виду 5 кг, другого виду 8 кг, третього виду 16 кг. Ферма забезпечена добривами: першого виду кількістю 1431 кг, другого виду – 1224 кг, третього виду – 1328 кг. Обидві культури використовують у вигляді корму на тваринницькій фермі. При цьому кожна тонна культури А дає приріст ваги тварин 3 кг за добу, а культури В – 2 кг за добу. Скласти оптимальний план вирощування культур А і В для забезпечення максимального приросту ваги тварин на фермі.

14. Для виробництва двох видів високопробної нержавіючої сталі А і В використовується три види добавок до руди. Для виробництва 1 т сталі виду А треба затратити 12 кг добавок першого виду, 10 кг добавок другого виду і 3 кг добавок третього виду. Для виробництва 1 т сталі виду В треба затратити добавок першого виду 3 кг, добавок другого виду 5 кг, добавок третього виду 6 кг. Завод забезпечений добавками першого виду кількістю 684 кг, добавками другого виду кількістю 690 кг, третього виду – 558 кг. Обидва види сталі використовуються для виробництва нових різців при модернізації виробництва. Економія металу (за рахунок збільшення строку служби нових різців) при обробці новими різцями зі сталі виду А на 1 тис. виробів складає 6 т, зі сталі виду В – 2 т. Скласти план виробництва сталі видів А і В, який забезпечує максимальну економію металу.

15. Є три виду сировини А, В і С, які використовують для виробництва двох видів продуктів – 1 та 2. У розпорядженні знаходиться 500 одиниць сировини А, 750 одиниць сировини В і 200 одиниць сировини С. Продукт 1 складається з однієї одиниці сировини А і двох одиниць сировини В. Продукт 2 складається із двох одиниць сировини А, однієї одиниці сировини В і однієї одиниці сировини С.

Одиниця продукту 1 дозволяє отримати 4 одиниці нової продукції в суміжному виробництві, а одиниця продукту 2 – 5 одиниць. Скільки одиниць кожного продукту треба випустити, щоб максимально забезпечити суміжне виробництво нової продукції?

Додаток №2 до лабораторної роботи № 1

1. $f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $x_1 + x_2 \le 105$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	2. $f(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
3. $f(x_1,\ x_2) = x_1 + 7x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $x_1 + x_2 \le 105$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	4. $f(x_1,\ x_2) = x_1 + 6x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
5. $f(x_1,\ x_2) = 3x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	6. $f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $x_1 + x_2 \le 105$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
7. $f(x_1,\ x_2) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$;	8. $f(x_1,\ x_2) = 3x_1 + x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$;

$-3x_1+2x_2 \geq -90$; $x_1+x_2 \leq 105$; $-3x_1+x_2 \leq 0$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$-x_1+2x_2 \geq -10$; $-3x_1+x_2 \leq 0$; $-2x_1+x_2 \leq 50$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
9. $f(x_1,\ x_2)=5x_1+4x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \leq 50$; $x_2 \leq 80$; $-x_1+2x_2 \geq -10$; $4x_1+x_2 \leq 240$; $-2x_1+x_2 \leq 50$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	10. $f(x_1,\ x_2)=2x_1+3x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \leq 50$; $x_2 \leq 80$; $x_1+x_2 \leq 105$; $4x_1+x_2 \leq 240$; $-2x_1+x_2 \leq 50$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
11. $f(x_1,\ x_2)=3x_1+5x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \leq 50$; $x_2 \leq 80$; $-3x_1+2x_2 \geq -90$; $-x_1+2x_2 \geq -10$; $x_1+x_2 \leq 105$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	12. $f(x_1,\ x_2)=2x_1+3x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \leq 50$; $x_2 \leq 80$; $-3x_1+2x_2 \geq -90$; $4x_1+x_2 \leq 240$; $-2x_1+x_2 \leq 50$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
13. $f(x_1,\ x_2)=3x_1+2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \leq 50$; $x_2 \leq 80$; $-x_1+2x_2 \geq -10$; $x_1+x_2 \leq 105$; $-3x_1+x_2 \leq 0$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	14. $f(x_1,\ x_2)=3x_1+2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \leq 40$; $x_2 \leq 70$; $-x_1+3x_2 \geq -20$; $x_1+x_2 \leq 90$; $-3x_1+x_2 \leq 0$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
15. $f(x_1,\ x_2)=3x_1+x_2 \to \max$ Обмеження: $x_2 \leq 4$; $x_1+2x_2 \leq 10$; $x_1-x_2 \leq 2$; $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	

Лабораторна робота №2

Двоїстий симплекс-метод. Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач ЛП

Теоретичні відомості

5. Теорія двоїстості у лінійному програмуванні

У математичному програмуванні і, як наслідок, у лінійному програмуванні існує поняття двоїстості, що дозволяє встановити взаємозв'язки для різноманітних методів аналізу математичних моделей.

Кожна задача лінійного програмування пов'язана з іншою, так званою ***двоїстою*** задачею. Наприклад, пряма задача лінійного програмування записується у вигляді:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad (5.1)$$

за умов: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \qquad (5.3)$$

Двоїста задача до даної прямої записується у вигляді:

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min. \qquad (5.4)$$

за умов: $$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (5.5)$$

$$y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad (5.6)$$

Задача (5.4)-(5.6) є двоїстою або спряженою до задачі (5.1)-(5.3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстої є взаємним. По суті мова йде про одну і ту ж задачу, але з різних точок зору. Дійсно, не важко переконатися, що двоїста задача до (5.4)-(5.6) збігається з прямою. Тому кожну з них можна вважати прямою, а іншу – двоїстою. Симетричність двох таких задач очевидна. Як у прямій, так і у двоїстій задачі використовують один набір початкових даних: $b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, $a_{ij} \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, $c_j \left(j = \overline{1,n}\right)$. Крім того, вектор обмежень початкової задачі стає вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі і навпаки, а рядки матриці A (матриці коефіцієнтів при змінних з обмежень прямої задачі) стають стовпцями матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях двоїстої задачі. Кожному обмеженню початкової задачі відповідає змінна двоїстої і навпаки.

6. Правило побудови двоїстої задачі

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести пряму задачу до стандартного виду. Вважають, що задача лінійного програмування подана у **стандартному вигляді**, якщо для відшукання максимального значення цільової функції всі нерівності її системи обмежень приведені до виду «$\le$», а для задачі для відшукання мінімального значення – «$\ge$».

Якщо пряма задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, то двоїста задача утворюється за такими *правилами*:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.
2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.
3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення, то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення, і навпаки.
4. Коефіцієнтами при змінних цільової функції двоїстої задачі є вільними членами системи обмежень прямої задачі.
5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.
6. Матриця $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

Приклад 6.1. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту.

$$F = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \le 8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,5.$$

Пряму задачу зведемо до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція f мінімізується і в системі обмежень є нерівності, то вони мають бути виду «$\ge$». Тому друге обмеження задачі необхідно помножити на (-1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 \ge -8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$

Двоїста задача: $Z = 20y_1 - 8y_2 - 16y_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + 8y_3 \le 1; \\ -4y_1 + y_2 + 7y_3 \le 6; \\ 13y_1 - 5y_2 - y_3 \le -7; \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1; \\ y_1 - y_2 - 9y_3 \le 5. \end{cases}$$
$$y_1 \in \left]-\infty;\infty\right[,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Оскільки перше обмеження початкової задачі є рівнянням, то відповідна йому змінна двоїстої задачі y_1 може набувати як додатного, так і від'ємного значення.

7. Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задачі

Змінні x_i при цільовій функції, що відповідають *оптимальному* розв'язку прямої задачі лінійного програмування, є розв'язком двоїстої задачі.

Приклад 7.1. Пошук розв'язку двоїстої задачі через розв'язок прямої.

Для виготовлення трьох видів виробів А, В, С використовують три різні види сировини. Кожен з видів сировини може бути використаний в кількості, не більшій 180, 210 та 244 кг відповідно. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду та ціна одиниці продукції кожного з видів наведені в таблиці 7.1.

Визначити план випуску продукції, при якому її вартість буде максимальною, та оцінити кожен з видів сировини.

Таблиця 7.1.

Вид сировини	*Норми затрат сировини (кг) на одиницю продукції*

	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції	10	14	12

Для визначення оптимального плану виробництва потрібно розв'язати задачу на максимізацію цільової функції $F=10\,x_1+14\,x_2+12\,x_3$,

при таких умовах: $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3 \le 180, \\ 3x_1+x_2+3x_3 \le 210, \quad x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}. \\ x_1+2x_2+5x_3 \le 244, \end{cases}$

Припишемо до кожного з видів сировини двоїсту оцінку, яка відповідно дорівнює y_1, y_2, y_3 (вартість кожного виду сировини відповідно). Тоді загальна оцінка сировини, яка йде на виготовлення продукції, становитиме: $F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min$.

За умовою задачі y_1, y_2, y_3 повинні задовольняти наступну систему

нерівностей: $\begin{cases} 4y_1+3y_2+y_3 \ge 10, \\ 2y_1+y_2+2y_3 \ge 14, \quad y_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}. \\ y_1+3y_2+5y_3 \ge 12, \end{cases}$

Отримали пару двоїстих задач. Розв'язання прямої задачі дає оптимальний план виготовлення виробів А, В, С, а розв'язання двоїстої – оптимальну систему оцінок сировини, яка використовується для виготовлення цих виробів. Щоб розв'язати ці задачі, необхідно спочатку знайти розв'язок однієї з них. Розв'яжемо, наприклад, пряму задачу (її система обмежень містить лише нерівності виду «$\le$»). Її розв'язання наведено в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2.

Базис	Вільний член	Змінні					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	82	$\frac{19}{8}$	1	0	$\frac{5}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$
x_5	80	$\frac{23}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	1	$-\frac{5}{8}$
x_3	16	$-\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
f	**1340**	$\frac{57}{4}$	0	0	$\frac{23}{4}$	0	$\frac{5}{4}$

З даної таблиці видно, що оптимальним планом виготовлення виробів є той, при якому виготовляють 82 виробів В (x_2) та 16 виробів С(x_3). У цьому випадку залишається невикористаними 80 кг сировини ІІ виду (x_5), а загальна вартість виробів дорівнює f=1340 ум. од.

Залежність між змінними прямої та двоїстої задачі

Основні			Додаткові		
x_1 ↓ y_4	x_2 ↓ y_5	x_3 ↓ y_6	x_4 ↓ y_1	x_5 ↓ y_2	x_6 ↓ y_3

Отже, з таблиці 7.2 видно, що оптимальний розв'язок двоїстої задачі має вигляд: $y_1^* = \dfrac{23}{4}; \; y_2^* = 0; \; y_3^* = \dfrac{5}{4}$.

Обчислюючи мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі $F^*_{\min} = 180 \cdot \dfrac{23}{4} + 210 \cdot 0 + 244 \cdot \dfrac{5}{4} = 1340$, бачимо, що воно співпадає з максимальним значенням цільової функції вихідної задачі.

При підстановці оптимальних двоїстих оцінок в систему обмежень двоїстої задачі матимемо: $\begin{cases} 23 + \dfrac{5}{4} > 10, \\ \dfrac{23}{2} + \dfrac{5}{2} = 14, \\ \dfrac{23}{4} + \dfrac{25}{4} = 12. \end{cases}$

Таким чином, двоїсті оцінки пов'язані з оптимальним планом прямої задачі. Будь-яка зміна вихідних даних прямої задачі може вплинути як на її оптимальний план, так і на систему оптимальних двоїстих оцінок.

8. Приклад розв'язування задачі ЛП двоїстим симплекс-методом

У випадку, коли розширена задача лінійного програмування у системі обмежень «типу ≤» має від'ємні вільні члени, можна використати двоїстий симплекс-метод. Двоїстий симплекс-метод відрізняється від звичайного тим, що потрібно симплекс-таблицю розглядати як «транспоновану».

<u>Приклад 8.1.</u> Розв'язати ЗЛП двоїстим симплекс-методом:

$$f = x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4; \\ -2x_1 + 2x_2 \ge 4; \\ x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Зведемо спочатку усі обмеження до вигляду ”$\le$”:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le -4; \\ 2x_1 - 2x_2 \le -4; \\ x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Зведемо задачу до канонічного вигляду:

$$f(x_1,\ x_2) = -x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -4; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -4; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Оскільки у канонічній задачі є від’ємні вільні члени (розв’язок є *недопустимим*), то її не можна розв’язувати звичайним симплекс-методом. Якщо при цьому він є **оптимальним**, тобто всі критерії оптимальності Δ_j невід’ємні, то можна буде застосувати двоїстий симплекс-метод (ДСМ) для знаходження допустимого розв’язку.

Ітерація 1. Заповнюємо симплекс-таблицю (СТ-1, табл. 8.1) як у звичайному СМ.

Таблиця 8.1.

Базисні змінні	Вільний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	-4	-2	-1	1	0	0
x_4	-4	2	-2	0	1	0
x_5	10	1	1	0	0	1
f	0	1	1	0	0	0

Оскільки всі $\Delta_j \ge 0$, то можна використати ДСМ.

1. *Вибір змінної, що виводиться з базису.*

Вибирають ту змінну, якій відповідає найбільше за модулем від’ємне значення у стовпці вільних членів. Таких змінних дві (x_3=-4, x_4=-4), виведемо, наприклад, змінну x_3. Отже, перший *рядок* буде *провідним*.

2. *Вибір змінної, що вводиться у базис.*

Обчислюємо відношення коефіцієнтів останнього рядка (f-рівняння), взятих зі знаком «-», до відповідних *від'ємних* коефіцієнтів провідного рядка. *Провідним стовпчиком* буде той, у якого вказане відношення буде найменшим (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Базисні змінні	Вільний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	-4	$\boxed{-2}$	-1	1	0	0
x_4	-4	2	-2	0	1	0
x_5	10	1	1	0	0	1
f	0	1	1	0	0	0
Відношення	-	1/2	1	-	-	-

$\theta = min\{1, {}^1/_2\} = {}^1/_2$, тобто введемо до базису змінну x_1.

3. За правилом прямокутника обчислюємо нову симплекс-таблицю.

Таблиця 8.3

Базис	Вільний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	1/2	-1/2	0	0
x_4	-8	0	-3	1	1	0
x_5	8	0	1/2	1/2	0	1
f	2	0	1/2	1/2	0	0

Розв'язок ще є *недопустимим*, адже $x_4 = -8$. Щоб забезпечити умову допустимості за змінну, що виводиться з базису, вибираємо змінну x_4.

Ітерація 2.

Таблиця 8.4

Базис	Вільний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2	1	1/2	-1/2	0	0
x_4	-8	0	$\boxed{-3}$	1	1	0
x_5	8	0	1/2	1/2	0	1
f	-2	0	1/2	1/2	0	0
Відношення	-	-	1/6	-	-	-

$\theta = {}^1/_6$, отже, вводити до базису будемо змінну x_2.

За правилом прямокутника обчислюємо нову симплекс-таблицю.

Таблиця 8.5

Базис	Вільний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	2/3	1	0	-1/3	1/6	0

x_2	$2\frac{2}{3}$	0	1	-1/3	-1/3	0
x_5	$6\frac{2}{3}$	0	0	2/3	1/6	1
f	$-3\frac{1}{3}$	0	0	2/3	1/6	0

У результаті отримано опорний план $X = (2/3,\ 2\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 6\frac{2}{3})$ та $\max(f) = -3\frac{1}{3}$.

Перевіримо, чи є даний опорний план допустимим. Для цього розглянемо 2-ий стовпець табл. 8.5. У ньому нема від'ємних чисел. Це означає, що знайдений опорний план $X^* = (2/3,\ 2\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 22/3)$ є допустимим та $\min(f) = -\max(f) = 2/3 + 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Контрольні питання до лабораторної роботи № 2

1. Чи існує для будь-якої прямої задачі двоїста?
2. Сформулюйте означення двоїстої задачі.
3. Якою є двоїста до двоїстої задачі лінійного програмування?
4. Сформулюйте леми двоїстості.
5. Сформулюйте основні теореми двоїстості.
6. У чому суть доповнюючої нежорсткості?
7. Який алгоритм побудови двоїстої задачі?
8. Який алгоритм розв'язування двоїстої задачі?
9. У чому суть двоїстого симплекс-методу?
10. Яка умова закінчення двоїстого симплекс-методу?
11. Яким є зв'язок між екстремальними значеннями пари двоїстих задач лінійного програмування?

Завдання до лабораторної роботи № 2

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв'язування задачі ЛП двоїстим симплекс-методом та з її допомогою знайти розв'язок (максимальне значення функції та значення змінних, при якому воно досягається) задачі лінійного програмування згідно варіанту з Додатку 3. Для порівняння отриманого розв'язку побудувати двоїсту задачу до заданої і розв'язати її за допомогою симплекс-методу.
3. Оформити звіт про виконану роботу.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до звіту

1. Титульний аркуш.

2. Тема звіту.
3. Мета звіту.
4. Теоретичні відомості (дати відповідь на контрольне запитання у відповідності із номером студента у журналі).
5. Текст програми з коментарями (алгоритм двоїстого симплекс-методу) до задачі з Додатку 3.
6. Вигляд реалізованої програми.
7. Висновки.

Вимоги до програми

Програма має передбачати наступні можливості:

7. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
   i. Зведення до канонічної форми.
   ii. Вивід усіх СТ.
2. Ввід вхідних даних вручну:
   i. Задати цільову функцію.
   ii. Задати коефіцієнти обмеження на змінні “типу $\le$” та “типу $\ge$”.
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Передбачити можливість покрокового відображення побудови симплекс таблиць.
5. Підпис таблиць.
6. Вивід необхідного повідомлення у випадку не існування оптимального плану.

Додаток №3 до лабораторної роботи № 2

1. $f(x_1,x_2)=-5x_1-2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1+2x_2 \ge -90$; $-x_1+2x_2 \ge -10$; $4x_1+x_2 \le 240$; $x_1+x_2 \ge 10$; $x_1+4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	2. $f(x_1,x_2)=-7x_1-2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1+2x_2 \ge -90$; $-x_1+2x_2 \ge -10$; $-3x_1+x_2 \le 0$; $x_1+x_2 \ge 10$; $x_1+4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

3. $f(x_1, x_2) = -7x_1 - 2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	4. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $x_1 + x_2 \le 105$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $4x_1 + x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
5. $f(x_1,\ x_2) = -x_1 - 2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $4x_1 + x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	6. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - 3x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
7. $f(x_1,\ x_2) = -3x_1 - 4x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $x_1 + x_2 \le 105$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	8. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
9. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - 4x_2 \to \max$	10. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - 5x_2 \to \max$

Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $x_1 + x_2 \le 105$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-3x_1 + 2x_2 \ge -90$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 + x_2 \le 105$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
11. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - 4x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	12. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - 4x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
13. $f(x_1,\ x_2) = -2x_1 - 4x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $4x_1 + x_2 \le 240$; $x_1 + x_2 \le 105$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	14. $f(x_1,\ x_2) = -3x_1 - x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$; $x_2 \le 80$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $-2x_1 + x_2 \le 50$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $x_1 + 4x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$
15. $f(x_1,\ x_2) = -3x_1 - 2x_2 \to \max$ Обмеження: $x_1 \le 50$;	.

$x_2 \le 80$; $-x_1 + 2x_2 \ge -10$; $-3x_1 + x_2 \le 0$; $x_1 + x_2 \le 105$; $x_1 + x_2 \ge 10$; $4x_1 + x_2 \ge 20$; $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ – ВІПОЛ, 2000. – 688 с.
2. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 383с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
4. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб.– К.:КНЕУ, 2003. – 452 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ ТА ДВОЇСТИМ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт №1та №2
з дисципліни „ Дослідження операцій"
для студентів спеціальності
„ Програмна інженерія "

Укладачі Журавчак Любов Михайлівна
Нитребич Оксана Олександрівна

Редактор

Комп'ютерне верстання