МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт №3 та №4
з дисципліни „Дослідження операцій”
для студентів спеціальності
6. 050103 „Програмна інженерія”

Затверджено
на засіданні кафедри
програмного забезпечення
Протокол № __ від _______ р.

Львів – 2016

Розв'язування транспортних задач. : Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт №3 та №4 із дисципліни „Дослідження операцій" для студентів спеціальності „Програмна інженерія" / Укл.: Л.М. Журавчак, О.О. Нитребич – Львів: Видавництво Національного університету „Львівська політехніка", 2015. – 34 с.

Укладачі Л.М. Журавчак, доктор техн. наук, проф. кафедри ПЗ
О.О. Нитребич, канд. техн. наук, асист. кафедри ПЗ

Відповідальний за випуск Федасюк Д.В., д-р тех. наук, проф.

Рецензенти , канд. тех. наук, доц.
, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними поняттями транспортних задач, навчитись знаходити початкові опорні плани (методами північно-західного кута, мінімального елемента та евристичним методом Фойгеля) та оптимальні плани задач за допомогою методу потенціалів, будувати умовно оптимальний розподіл та покращувати його методом диференціальних рент.

Вступ

Транспортна задача – це задача про найбільш економний план перевезень однорідного або взаємозамінного продукту з пунктів виробництва (станцій відправлення) у пункти споживання (станції призначення). Вона є однією з найважливіших задач лінійного програмування і має велику практичну цінність не тільки в сфері транспорту.

У даний час транспортна задача лінійного програмування широко застосовується як в теоретичних розробках, так і в практиці планування різних економічних процесів. Особливо важливе значення вона має під час вирішення питань раціоналізації поставок найважливіших видів промислової і сільськогосподарської продукції, а також оптимального планування вантажопотоків і різних видів транспорту.

Лабораторна робота №3
Розв'язування транспортної задачі ЛП методом потенціалів

1. Транспортна задача

Розглянемо постановку та математичну модель транспортної задачі. Деякий продукт, що міститься на складах у m постачальників A_i у кількості a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) одиниць відповідно, потрібно доставити n споживачам B_j у кількості b_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) одиниць відповідно. Відома вартість c_{ij} перевезень одиниці вантажу від i-го постачальника j-му споживачу.

Потрібно скласти план перевезень, що дозволяє вивезти всі вантажі, повністю задовольнити потреби і має мінімальну вартість, тобто знайти, скільки одиниць вантажу має бути відправлено з i-го пункту постачальника у j-й пункт споживача.

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць вантажу, що заплановані на перевезення від i-го постачальника до j-го споживача. Тоді умову транспортної задачі можна записати у вигляді такої таблиці:

Таблиця 1.1

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Складемо тепер математичну модель транспортної задачі. Якщо від i-го постачальника до j-го споживача заплановано перевезти x_{ij} одиниць товару, то вартість перевезення дорівнює відповідно $c_{ij}x_{ij}$. А вартість усього плану перевезень рівна $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$.

Систему обмежень отримуємо з таких умов завдання:

а) всі вантажі повинні бути вивезені, тобто повинна виконуватись умова $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ (ці рівняння отримуються із рядків табл. 1.1);

б) всі потреби мають бути задоволені, тобто має виконуватись умова $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ (ці рівняння отримуються із стовпців табл. 1.1).

Таким чином, математична модель транспортної задачі має наступний вигляд: знайти значення невідомих, які мінімізують лінійну функцію

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

і задовільняють умовам:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.2}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3}$$

У цій моделі передбачається, що сумарні запаси рівні сумарним потребам, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{1.4}$$

Така модель називається *закритою* моделлю транспортної задачі.

Якщо в моделі транспортної задачі не виконується співвідношення (1.4), то така модель називається *відкритою* моделлю транспортної задачі. Тут може бути два випадки:

а) сумарні запаси перевищують сумарні потреби, тобто має місце $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$;

б) сумарних запасів менше, ніж сумарних потреб, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Відкриту модель завжди можна звести до моделі закритого типу. Для цього у випадку а) вводиться фіктивний споживач B_{n+1}, потреби якого рівні $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а у випадку б) вводиться фіктивний поставщик A_{m+1}, запаси якого рівні $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Вартість перевезення одиниці вантажу до фіктивного споживача і вартість перевезення одиниці вантажу від фіктивного постачальника дорівнюють нулю, оскільки вантаж в обох випадках не перевозиться.

Транспортну задачу застосовують також під час вирішення економічних завдань, які за своїм характером не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу, тому величини можуть мати різний зміст залежно від конкретного завдання. Наприклад, величини c_{ij} можуть означати вартість, відстань, час, продуктивність і т.д.

Як і для інших задач лінійного програмування, процес пошуку оптимального розв’язку транспортної задачі починається із знаходження початкового опорного плану. Розглянемо систему обмежень (1.1) і (1.2) транспортної задачі. Вона містить mn невідомих та $m+n$ рівнянь, пов'язаних між собою співвідношенням (1.4). Якщо додати почленно рівняння окремо підсистеми (1.1) і окремо підсистеми (1.2), то отримаємо два однакових рівняння. У табл. 1.1 таке додавання рівнозначне відповідно почленному додаванню стовпців і почленному додаванню рядків.

Така ситуація свідчить про лінійну залежність системи обмежень. Якщо одне з рівнянь цієї системи відкинути, то система обмежень має містити не більше $m+n-1$ лінійно незалежних рівнянь або стільки ж базисних змінних, відповідно, *невироджений опорний розв'язок транспортної задачі містить* $m+n-1$ додатніх компонент або перевезень.

Якщо умови транспортної задачі та її опорний розв'язок записані у вигляді табл.1.1, то клітини, в яких знаходяться відмінні від нуля перевезення, називаються *заповненими* клітинами, решта – *вільними* клітинами. Зайняті клітини відповідають базисним змінним і для невиродженого опорного розв'язку їхня кількість дорівнює $m+n-1$.

2. Знаходження початкового опорного плану транспортної задачі

2.1. Метод північно-західного кута

Для знаходження початкового опорного розв'язку транспортної задачі зручно скористатися методом північно-західного кута, суть якого полягає в наступному.

Нехай умови транспортної задачі задані в табл. 1.1. Будемо заповнювати цю таблицю, починаючи з лівого верхнього кута, який умовно назвемо «північно-західним кутом». Не враховуючи вартості перевезення одиниці вантажу, починаємо задовольняти потреби першого споживача B_1 за рахунок запасів першого постачальника A_1. Для цього записуємо в лівий нижній кут клітинки A_1B_1 меньше з чисел a_1 і b_1, тобто $x_{11}=\min(a_1,b_1)$.

На першому кроці може бути два випадки. Якщо $a_1>b_1$, то $x_{11}=b_1$ і перший стовпець «закритий», тобто потреба першого споживача задоволена повністю. Це означає, що для решти клітинок першого стовпчика $x_{i1}=0$ $(i=2,\ldots,m)$. Рухаючись далі по першому рядку таблиці, переходимо до задоволення потреб другого споживача B_j за рахунок запасу, що залишився у постачальника A_1. Тут у клітинку A_1B_2 записуємо менше з чисел a_1-b_1 і b_2, тобто $x_{12}=\min(a_1-b_1,b_2)$.

Якщо $(a_1 - b_1) \geq b_2$, то $x_{12} = b_2$, другий стовпчик «закритий», тобто $x_{i2} = 0$ ($i = 2,\ldots,m$), і тепер переходимо до задоволення потреб споживача B_3. Якщо $(a_1 - b_1) < b_2$, то $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$ і перший рядок «закритий», тобто запаси першого постачальника повністю вивезені. Це означає, що для решти клітинок першого рядка $x_{1j} = 0$ ($j = 3,\ldots,n$). У цьому випадку задоволення потреб споживача B_j починаємо тепер за рахунок запас постачальника A_2. Процес аналогічним чином продовжуємо далі.

Якщо ж на першому кроці $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ і перший рядок «закритий», тобто $x_{1j} = 0$ ($j = 2,\ldots,n$), і тепер, рухаючись далі по першому стовпці таблиці, переходимо до задоволення потреб споживача B_1 за рахунок запасів постачальника A_2. Тут у клітинку A_2B_1 записуємо менше з чисел a_2 і $b_1 - a_1$, а саме $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$.

Цей процес продовжується до вичерпання всіх запасів a_i ($i = 1,2,\ldots,m$) та задоволення всіх потреб b_j ($j = 1,2,\ldots,n$). Остання заповнена клітинка буде у *n*-му стовпчику та в *m*-му рядку. Починаючи рух із клитинки A_1B_1 тільки по зайнятих клітинкам, неможливо повернутись не лише до неї, але і в будь-яку іншу зайняту клітинку. Тобто розв’язок, знайдений методом північно-західного кута, є опорним планом розв’язку транспортної задачі.

<u>Приклад 2.1.</u> Знайти початковий опорний розв’язок транспортної задачі, заданої таблицею 2.1, методом північно-західного кута.

Таблиця 2.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Розв’язок даної задачі наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Постачальники	Потреби					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Отриманий розв'язок є невиродженим опорним розв'язком, так як містить точно $m+n-1=8$ заповнених клітинок.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень як суму добутків обсягів перевезень, що стоять у лівому нижньому кутку заповнених клітин, на відповідні вартості перевезення одиниці вантажу в цих же клітинах:

$$Z = 100\cdot 10 + 100\cdot 2 + 150\cdot 7 + 50\cdot 5 + 100\cdot 3 + 50\cdot 2 + 50\cdot 16 +$$
$$+250\cdot 13 = 6950.$$

Початковий опорний розв'язок, знайдений методом північно-західного кута, зазвичай є дуже далеким від оптимального, бо під час його отримання не враховують вартості перевезення одиниці вантажу c_{ij}. Тому в подальших розрахунках буде потрібно багато ітерацій для досягнення оптимального розв'язку.

2.2. Метод мінімального елементу

Суть методу мінімального елементу полягає в тому, що на кожному кроці здійснюється максимально можливе «переміщення» вантажу в клітинку з мінімальною вартістю перевезення одиниці вантажу c_{ij}.

Нехай умови транспортної задачі задані в табл. 1.1. Заповнення таблиці починаємо з клітинки, в якій найменша величина витрат c_{ij}. Запишемо у цю клітинку менше з чисел a_i і b_j. Потім або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю задоволені, або стовпець, що відповідає споживачеві, попит якого повністю задоволений, або і рядок, і стовпець, якщо вивезені запаси постачальника і задоволені потреби споживача, «викреслюють», тобто вони більше не беруть участь в процесі побудови початкового опорного плану. Далі з решти клітинок таблиці знову вибирають клітинку з найменшою величиною витрат і процес розподілу запасів продовжується до тих пір, поки вони всі не будуть вивезені, а всі потреби задоволені .

Приклад 2.2. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої в табл. 2.1, методом мінімального елементу.

Розпочинаємо з клітинки із величиною витрат $c_{14} = \min(c_{ij}) = 1$. Потреби споживача B_4 і запаси постачальника A_1 повністю задоволені, тому перший рядок і четвертий стовпець «викреслюють». Розв'язок даної задачі наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Постачальники	Споживачі					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потреби	200	200	100	100	250	850

Цей розв'язок складається із 7 зайнятих клітинок, а, отже, є виродженим опорним розв'язком.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень:

$$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 7 + 200 \cdot 2 + 150 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4300$$

Ясно, що загальна вартість плану перевезень в прикладі 2.2 значно менша, ніж у прикладі 2.1, отже, він ближчий до оптимального.

2.3 Евристичний метод Фойгеля

Метод Фойгеля досить простий і дозволяє отримати опорний план більш наближений до оптимального розв'язку, ніж у випадку застосування інших методів, розглянутих у п. 2.1, 2.2.

Даний метод полягає в наступному:

1. на кожній ітерації знаходять різниці між двома найменшими тарифами у всіх рядках і стовпцях, записуючи їх у додаткові стовпець і рядок таблиці;
2. знаходять максимальну різницю і заповнюють клітину з мінімальною вартістю в рядку (стовпці), якій відповідає дана різниця.

Приклад 2.3. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої в табл. 2.1, методом Фойгеля.

Таблиця 2.4

Постачальники		Споживачі					Запаси	Різниці по рядках (кроки)						
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		I	II	III	IV	V	VI	VII
A_1		10	7	4	1 50	4 50	100	3	3	3	**3**	0	0	-
A_2		2 200	7	10	6 50	11	250	4	1	**4**	-	-	-	-
A_3		8	5	3	2	2 200	200	0	0	0	0	1	-	-
A_4		11	8 200	12 100	16	13	300	3	**4**	1	1	1	1	**0**
Потреби		200	200	100	100	250	850							
Різниці по стовпцях (кроки)	I	**6**	2	1	1	2								
	II	-	2	1	1	2								
	III	-	-	1	1	2								
	IV	-	-	1	1	2								
	V	-	-	1	-	**2**								
	VI	-	-	8	-	**9**								
	VII	-	-	0	-	**-**								

Цей розв'язок складається із 7 зайнятих клітинок, а, отже, є виродженим опорним розв'язком.

Знайдемо загальну вартість плану перевезень:

$$Z = 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 12 + 50 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 4150.$$

Отже, метод Фойгеля дозволяє отримати ще кращий опорний план перевезень порівняно з методами північно-західного кута та мінімального елемента.

3. Метод потенціалів для знаходження оптимального розa'язку транспортної задачі

За допомогою розглянутих вище методів можна отримати початковий (вироджений або невироджений) опорний план транспортної задачі. Цей опорний план як розв'язок задачі лінійного програмування можна було б довести до оптимального за допомогою симплекс-методу. Однак через громіздкість симплексних таблиць і великого обсягу обчислювальних робіт для отримання оптимального плану транспортної задачі використовують більш прості методи. Найпоширенішим з цих методів вважається метод потенціалів.

За допомогою методу потенціалів після скінченного числа кроків знаходиться оптимальний план транспортної задачі. Для перевірки на оптимальність знайденого на кожному етапі опорного розв'язку кожному постачальнику A_i і кожному споживачу B_j ставляться у відповідність числа u_i та v_j $(i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n)$, які називають відповідно їхніми *потенціалами*. Відношення між цими потенціалами встановлюють за допомогою теореми:

Теорема 1. *Якщо план* $\mathbf{X}^* = (x_{ij}^*)$ *транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідають* $m + n$ *чисел* u_i^* *та* v_j^*, *що задовільняють умови:*

$$u_i^* + v_j^* = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* > 0,$$
$$u_i^* + v_j^* \le c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij}^* = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n).$$

На основі теореми 1 для того, щоб опорний розв'язок транспортної задачі був оптимальним, необхідно виконання таких умов:

а) для кожної зайнятої клітини сума потенціалів повинна дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть в цій клітинці:

$$u_i + v_j = c_{ij} \; ; \qquad (3.1)$$

б) для кожної вільної клітинки сума потенціалів повинна бути менша або рівна вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть в цій клітинці:

$$u_i + v_j \le c_{ij} \; . \qquad (3.2)$$

Якщо хоча б одна вільна клітинка не задовольняє умові (3.2), то знайдений опорний план не є оптимальним і його можна покращити. Для перевірки отриманого плану на оптимальність необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Систему потенціалів можна побудувати тільки для невиродженого опорного плану. Такий план містить $m + n - 1$ зайнятих клітинок, тому для нього можна скласти систему із $m+n-1$ лінійно незалежних рівнянь вигляду (3.1) з $m+n$ невідомими. У цій системі рівнянь на одне менше, ніж невідомих, тому поклавши, що один із потенціалів дорівнює нулю, можна однозначно визначити решту. Потім необхідно перевірити правильність побудови системи потенціалів, для цього потрібно перевірити виконання умов (3.1) для всіх заповнених клітинок.

Якщо опорний план є виродженим, тобто містить менше $m+n-1$ заповнених клітинок, то перед побудовою системи потенціалів вводимо додаткову кількість клітинок з нульовими перевезеннями, щоб отримати $m+n-1$ заповнених. Клітинки, в які уведені нульові перевезення, називають *фіктивно заповненими клітинками*. Оскільки в транспортній задачі потрібно знайти мінімальне значення цільової функції, то доцільно зробити фіктивно заповненими ті клітинки, в яких найменша вартість перевезення.

Після того, як визначені числові значення всіх потенціалів, для всіх вільних клітин обчислюють величини

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}. \tag{3.3}$$

Якщо для всіх i та j $(i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n)$ виконується $\Delta_{ij} \le 0$, то знайдений опорний план буде оптимальним. Якщо, хоча б для одної пари i та j виконується $\Delta_{ij} > 0$, то знайдений опорний план не буде оптимальним, і його замінюють на новий опорний план. Для цього необхідно «завантажити» вільну клітинку $A_k B_l$ (ввести в базис змінну x_{kl}), що задовольняє умові:

$$\Delta_{kl} = \max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij}. \tag{3.4}$$

З цією метою будуємо цикл у вигляді ламаної лінії, починаючи з вільної клітинки $A_k B_l$ і проводячи ланки ламаної вздовж рядків і стовпчиків до заповнених клітинок. У клітинку $A_k B_l$ ставимо знак «+», а в решту вершин циклу – почергово знаки «–» та «+» (при цьому точки самоперетину ламаної не враховуємо – вони не є вершинами циклу).

Вибираємо найменше перевезення з вершин циклу, відзначених «–» (в клітинці $A_r B_s$), позначаємо його через θ і цю величину «переміщуємо» по клітинках циклу, тобто віднімаємо її від об’ємів перевезень в клітинках, відзначених «–», і додаємо до об’єму перевезень у клітинках, відзначених «+». Тоді об’єм перевезень в клітинці $A_k B_l$ дорівнює θ, а в клітинці $A_r B_s$ – нулю. У результаті клітинка $A_r B_s$ стає вільною (якщо після переміщення перевезень в деяких зайнятих клітинках з’являються нульові перевезення, то із цих клітинок тільки одна перетворюється у вільну), а клітинка $A_k B_l$ – зайнятою, і отримуємо новий опорний план. Баланс перевезень не змінився, бо у кожному рядку та стовпчику ми додали і відняли одне й те саме значення.

Для отриманого нового опорного плану знову визначаємо числові значення потенціалів і для вільних клітинок обчислюємо величини вигляду (3.3). Цей процес продовжуємо, поки серед Δ_{ij} не залишиться жодного додатного.

<u>Приклад 3.1.</u> Знайти методом потенціалів оптимальний план транспортної задачі, заданої в табл. 2.1.

Нехай початковий опорний розв'язок (план) даної транспортної задачі знайдено методом мінімального елемента.

Він є виродженим, бо кількість заповнених клітинок рівна 7, а $m+n-1=8$. Тому, враховуючи, що серед вільних клітинок найменшу вартість перевезення одиниці вантажу має A_3B_4, а без використання цієї клітинки неможливо побудувати жодного циклу, то в неї вводимо нульове перевезення (клітинка A_3B_4 вважається фіктивно заповненою). Додамо до таблиці 2.3 по одному рядку і стовпцю для запису потенціалів.

Виберемо рядок, що містить найбільшу кількість заповнених клітинок, тобто рядок A_4, і для нього вважатимемо $u_4=0$. В рядку A_4 три заповнені клітинки A_4B_2, A_4B_3 та A_4B_5 зв'язують потенціал u_4 відповідно з потенціалами v_2, v_3 та v_5. Обчислимо ці потенціали за формулою (3.1): $v_2=c_{42}-u_4=8-0=8$; $v_3=c_{43}-u_4=12-0=12$; $v_5=c_{45}-u_4=13-0=13$. Решта потенціалів неможливо визначити з допомогою потенціалу u_4. Тепер, почергово переглянувши стовпці B_2, B_3 та B_5, за заповненими в них клітинками і відповідними потенціалами v_2, v_3 та v_5 визначимо потенціали $u_2=7-8=-1$ і $u_3=2-13=-11$. Решта потенціалів знайдемо подібним чином і запишемо в табл. 3.1.

Потім для всіх вільних клітинок за формулою (3.3) визначимо знаки Δ_{ij}. Наприклад, для рядка A_1: $\Delta_{11}=-12+3-10=-19$; $\Delta_{12}=-12+8-7=-11$; $\Delta_{13}=-12+12-4=-4$; $\Delta_{15}=-12+13-4=-3$.

Для трьох вільних клітинок Δ_{ij} будуть додатними, тобто $\Delta_{23}=1$, $\Delta_{24}=6$ і $\Delta_{25}=1$. Отже, знайдений опорний план не є оптимальним. При переході до нового опорного плану клітинку, яку треба завантажувати, знову знаходимо з умови (3.4). Тепер такою є клітинка A_2B_4. Далі будуємо цикл з вершинами в ній та заповнених клітинках A_3B_4, A_3B_5, A_4B_5, A_4B_2 і A_2B_2; у клітинку A_2B_4 ставимо знак «+», а в решту вершин циклу – почергово знаки «–» та «+» (табл. 3.2).

Таблиця 3.1

Постачальники	Потреби						Запас
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 13	$v_5 =$ 13	
A_1	$u_1 =$ –12	10	7	4	1 100	4	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	$u_3 =$ –11	8	5	3	2 **0**	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Таблиця 3.2

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 13	$v_5 =$ 13	
A_1	$u_1 =$ –12	10	7	4	1 100	4	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	– 7 50	10	+ 6	11	250
A_3	$u_3 =$ –11	8	5	3	– 2 0	+ 2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	+ 8 150	12 100	16	– 13 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Знаходимо найменше перевезення θ у вершинах цього циклу, відзначених «–» (клітинки A_3B_4, A_4B_5 и A_2B_2): $\theta = \min(0; 50; 50) = 0$. Цю величину віднімаємо від об'ємів перевезень в клітинках зі знаком «–» і додаємо до об'ємів перевезень у клітинках зі знаком «+» (клітинки A_2B_4, A_3B_5 и A_4B_2). Потім змінюємо значення потенціалів (табл. 3.3) і обчислюємо $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{15} = 3$, $\Delta_{23} = 1$ і $\Delta_{25} = 1$.

Таблиця 3.3

Постачальники	Споживачі						Запас
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 7	$v_5 =$ 13	
A_1	$u_1 =$ –6	10	7	4	1 100	4	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	7 50	10	6 0	11	250
A_3	$u_3 =$ –11	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Знайдений опорний план ще не є оптимальним. Будуємо цикл (табл. 3.4), здійснюємо переміщення перевезень у межах його клітинок і знаходимо нові значення потенціалів (табл. 3.5).

Для трьох вільних клітинок Δ_{ij} будуть додатними, а саме $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{23} = 1$ і $\Delta_{33} = 1$. Отже, знайдений опорний план не оптимальний. Продовжуємо далі: будуємо цикл (табл. 3.6), здійснюємо переміщення перевезень у межах його клітинок, обчислюємо нові значення потенціалів за заповненими клітинками і для всіх вільних клітинок за формулою (3.3) визначаємо знаки Δ_{ij}.

Для всіх вільних клітинок Δ_{ij} будуть недодатними. Отже, знайдений опорний план є оптимальним, а його загальна вартість перевезень такою:

$$Z = 50 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 6 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 100 \cdot 12 = 4150$$

Таблиця 3.4

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 7	$v_5 =$ 13	
A_1	$u_1 =$ –6	10	7	4	– 1 100	+ 4	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	– 7 50	10	+ 6 0	11	250
A_3	$u_3 =$ –11	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	+ 8 150	12 100	16	– 13 50	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Таблиця 3.5

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 7	$v_5 =$ 10	
A_1	$u_1 =$ –6	10	7	4	1 50	4 50	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	7 0	10	6 50	11	250
A_3	$u_3 =$ –8	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	8 200	12 100	16	13	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Таблиця 3.6

Постачальники	Споживачі						Запаси
	u_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
v_j		$v_1 =$ 3	$v_2 =$ 8	$v_3 =$ 12	$v_4 =$ 7	$v_5 =$ 10	
A_1	$u_1 =$ –6	10	7	+ 4	– 1 50	4 50	100
A_2	$u_2 =$ –1	2 200	– 7 0	10	+ 6 50	11	250
A_3	$u_3 =$ –8	8	5	3	2	2 200	200
A_4	$u_4 =$ 0	11	+ 8 200	– 12 100	16	13	300
Потреби		200	200	100	100	250	850

Контрольні запитання до лабораторної роботи №3

1. Що таке транспортна задача і яке її призначення?
2. Яка постановка транспортної задачі?
3. Чи можна застосувати до розв'язування транспортних задач симплекс метод? Відповідь обгрунтуйте.
4. У чому полягає математична модель транспортної задачі?
5. Що ви знаєте про закриту модель транспортної задачі?
6. Що таке відкрита модель транспортної задачі і як вона розв'язується?
7. Як визначається опорний план транспортної задачі в таблиці, що таке вільні клітинки і заповнені?
8. У чому суть методу північно-західного кута?
9. У чому суть методу мінімального елемента?
10. З якою метою застосовується метод потенціалів?
11. Що таке потенціали, який зв'язок існує між ними?
12. У чому суть методу потенціалів?
13. Як будується система потенціалів, що називають фіктивно заповненими клітинками?
14. Як переходити до нового опорного плану в методі потенціалів, як будується цикл?
15. Сформулюйте теорему про потенціали. Видозміною якої теореми вона є?

Завдання до лабораторної роботи № 3

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Написати програму розв'язування транспортної задачі методом потенціалів (для пошуку опорного початкового плану реалізувати метод «північно-західного» кута, метод мінімального елемента, евристичний метод Фойгеля) згідно варіанту з Додатку 1.
3. Оформити звіт про виконану роботу.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до звіту

1. Титульний аркуш.
2. Тема звіту.
3. Мета звіту.
4. Теоретичні відомості.

i. Дати відповідь на контрольне запитання у відповідності із номером журналу.

5. Текст програми з коментарями (алгоритм методу потенціалів).
6. Вигляд реалізованої програми.
7. Висновки.

Вимоги до програми

Програма має передбачати наступні можливості:

1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
   i. Пошук опорного плану.
   ii. Пошук оптимального плану методом потенціалів з виводом усіх проміжних таблиць та побудовою циклів.
2. Ввід вхідних даних вручну:
   i. Задати елементи таблиці.
   ii. Пошук опорного плану.
   iii. Пошук оптимального плану методом потенціалів з виводом усіх проміжних таблиць та побудовою циклів.
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Підпис таблиць.
5. Вивід необхідного повідомлення у випадку неіснування оптимального плану.

Лабораторна робота №4

Розв'язування транспортної задачі ЛП методом диференціальних рент

4. Метод «Диференціальних рент» знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі

Цей метод зазвичай викристовується у випадку виродженого опорного плану. Основними його кроками є:

1. Будуємо *умовно оптимальний розподіл*. У кожному зі стовпців знаходимо мінімальні тарифи і обводимо їх колами. Завантажуємо клітинки з обведеними тарифами, враховуючи запаси і потреби відповідних пунктів, тобто записуємо мінімальне число. Якщо цей розподіл задовольняє обмеженням задачі, то він оптимальний – кінець алгоритму.

2. Визначаємо надлишкові та недостатні рядки за правилом:
   - рядок є *недостатнім* (*від'ємним*), якщо запаси відповідного пункту зберігання розподілені повністю, а потреби не задоволені;
   - рядок є *надлишковим* (*додатним*), якщо потреби задоволені і залишився продукт у відповідному пункті зберігання.

   У ситуації, коли нерозподілений залишок у рядку дорівнює 0, дивимось на іншу заповнену клітинку у стовпчику, якщо вона розташована в додатному рядку, то розглядуваний рядок позначаємо +0, інакше -0.

3. Для кожного стовпчика знаходимо *різницю* між обведеним тарифом у *від'ємному* рядку та найближчим (за значенням) до нього тарифом, записаним у *надлишковому* рядку. Якщо обведений тариф знаходиться у *додатному* рядку – різницю **не визначаємо**. Серед різниць знаходимо *найменшу* – **проміжну ренту**.

4. Переходимо до нової таблиці – додаємо до відповідних тарифів, що знаходяться у *від'ємних* рядках, проміжну ренту. Інші елементи не змінюємо.

5. Всі клітинки нової таблиці вважаємо вільними. Заповнюємо клітинки даної таблиці (їх тепер на 1 більше). Оскільки в новій таблиці число клітинок для заповнення є більшим, ніж число стовпчиків, починаємо зі стовпчика (чи рядка), в якому є один обведений тариф; цю клітинку заповнюємо і виключаємо з розгляду даний стовпчик (рядок). Продовжуючи цю процедуру, заповнюємо всі клітинки з колами. Якщо план припустимий, то він оптимальний – кінець, в іншому випадку переходимо до кроку 2.

<u>Приклад 4.1.</u> Знайти оптимальний план методом диференціальних рент для транспортної задачі, заданої в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	11	14	1	1	2	150
A_2	1	13	14	2	10	160
A_3	14	14	1	12	10	220
A_4	11	4	12	14	11	220
Потреби	100	200	120	180	150	750\750

Обчислимо суму потреб (750) та суму усіх запасів (750), отже, задача є закритого типу. У кожному стовпці визначаємо мінімальні ціни перевезення, відразу заповнюючи таблицю відповідними значеннями. Якщо у стовпці є два однакові мінімальні елементи, то заповнюємо один з них, так, щоб умовно оптимальний план був найкращим. У стовпці B_3 (табл. 4.2) заповнюємо клітинку A_3B_3, а не A_1B_3, щоб використати ще мінімальну вартість перевезень у A_1B_4, тобто беремо до уваги ще й мінімальні значення в інших стповцях.

Таблиця 4.2

Постачальники	Споживачі					Запаси	Недостача(-) Надлишок(+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	11	14	1	1 150	2 0	150	-180
A_2	1 100	13	14	2	10	160	+60
A_3	14	14	1 120	12	10	220	+100
A_4	11	4 200	12	14	11	220	+20
Потреби	100	200	120	180	150	750	
Різниця	-	-	-	**1**	8		

Наступним кроком є визначення надлишкових та недостатніх рядків. Наприклад, перший постачальник, використавши всі свої ресурси, неповністю задовольнив споживача B_4 (той недоотримав 30 од. продукції), і зовсім не зодовольнив потреби споживача B_5, отже, перший рядок є недостатнім (-180).

Після цього обчислюємо ренти і визначаємо проміжну (1).

Для побудови нової таблиці 4.3 до всіх тарифів, розташованих у від'ємному рядку, додаємо проміжну ренту (1). У стовпці B_4 з'явилось дві клітинки з однаковим тарифом, спочатку заповнюємо ті, що були в першому плані, щоб не погіршити його, потім нову. Для контролю маємо на увазі, що суми чисел у надлишкових і недостатніх рядках мають бути однаковими по модулю, але з різними знаками, а також те, що вони повинні зменшуватись – ми повинні

Таблиця 4.3

Постачальники	Споживачі					Запаси	Недостача(-) Надлишок(+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	12	15	2	2 120	3 30	150	-120
A_2	1 100	13	14	2 60	10	160	-0
A_3	14	14	1 120	12	10	220	+100
A_4	11	4 200	12	14	11	220	+20
Потреби	100	200	120	180	150	850	
Різниця	10	9	-	10	**7**		

Таблиця 4.4

Постачальники	Споживачі					Запаси	Недостача(-) Надлишок(+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	19	22	9	9 120	10 30	150	-20
A_2	8 100	20	21	9 60	17	160	-0
A_3	14	14	1 120	12	10 100	220	-0
A_4	11	4 200	12	14	11	220	+20
Потреби	100	200	120	180	150	850	
Різниця	-	-	-	3	**1**		

покращувати план, зменшуючи нерозподілені надлишки. Зокрема, у табл. 4.2 ми маємо сумарні надлишок і недостачу рівні +180 і -180, у табл. 4.3 - +120 і -120. Щоб оцінити рядок A_2 дивимось, окрім клітинки A_2B_4, на A_1B_4, бо вона знаходиться у тому ж стовпчику. Оскільки клітинка A_1B_4 є у від'ємному рядку, то і рядок A_2 визначаємо як недостатній -0. Повторюємо алгоритм, допоки в останньому стовпці всі елементи стануть рівними 0.

Таблиця 4.5

Постачальники	Споживачі					Запаси	Недостача(-) Надлишок(+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	20	23	10	10 120	11 30	150	0
A_2	9 100	21	22	10 60	18	160	0
A_3	15	15	2 120	13	11 100	220	0
A_4	11	4 200	12	14	11 20	220	0
Потреби	100	200	120	180	150	850	

Отже, з табл. 4.5 видно, що усі елементи останнього стовпця рівні 0, це означає, що знайдено оптимальний розв'язок:

$$Z = 1\cdot120+4\cdot200+1\cdot120+2\cdot60+1\cdot150+2\cdot60+2\cdot30+10\cdot100+11\cdot20=2570.$$

Примітка: оптимальний план перевезень беремо з останньої таблиці, а вартість перевезень - з першої.

Контрольні запитання до лабораторної роботи №4

1. Поясніть основні кроки алгоритму методу диференціальних рент (ДР).
2. Як визначаються надлишкові рядки у методи ДР?
3. Як визначаються ренти у методі ДР?
4. Що таке проміжна рента і як вона визначається?
5. Як будується нова таблиця у методі диференціальних рент?
6. Порівняйте між собою методи диференціальних рент та потенціалів.
7. Коли завершується алгоритм диференціальних рент?
8. Чи можна використовувати метод диференціальних рент для вироджених задач? Чому?

Завдання до лабораторної роботи № 4

5. Отримати індивідуальний варіант завдання.
6. Написати програму розв'язування транспортної задачі методом потенціалів (для пошуку опорного початкового плану реалізувати метод «північно-західного» кута, метод мінімального елемента, евристичний метод) згідно варіанту з Додатку 1.
7. Оформити звіт про виконану роботу.
8. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до звіту

8. Титульний аркуш.
9. Тема звіту.
10. Мета звіту.
11. Теоретичні відомості.
    i. Дати відповідь на контрольне запитання у відповідності із номером журналу.
12. Текст програми з коментарями (алгоритм методу потенціалів).
13. Вигляд реалізованої програми.
14. Висновки.

Вимоги до програми

Програма має передбачати наступні можливості:

6. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:

i. Пошук оптимального плану методом диференціальних рент з виводом усіх проміжних таблиць та побудовою циклів.

7. Ввід вхідних даних вручну:

   i. Задати елементи таблиці.

   ii. Пошук оптимального плану методом диференціальних рент з виводом усіх проміжних таблиць та побудовою циклів.

8. Передбачити можливість некоректного введення даних.

9. Підпис таблиць.

10. Вивід необхідного повідомлення у випадку не існування оптимального плану.

Додаток 1

Є n пунктів виробництва і m пунктів споживання продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з i-го пункту виробництва в j-й центр споживання c_{ij} наведена в таблицях. Скласти план перевезень щодо постачання необхідної продукції в пункти споживання, який мінімізуватиме сумарні транспортні витрати. Необхідні дані для вашого варіанту взяти з таблиць, наведених нижче.

Варіант 1.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об'єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	5	1,8	6	6	32
B	1	5,1	8	2	42
C	3,5	6	3	3,1	10
D	2,2	4,9	1,3	4	16
E	3	7	8,95	1	10
Потреби	20	38	30	22	

Варіант 2.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об'єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2,3	7	6	8	15
B	2	1,3	1	2,5	55
C	4,9	4	4	1	12
D	2	8	1	4	18
E	3	2,1	1,2	5	17
Потреби	35	37	20	25	

Варіант 3.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об'єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	4,1	6	17
B	5	2,5	2	3	73
C	3	4	3	4,2	52
D	5,1	3	2	7	38
Потреби	37	35	86	22	

Варіант 4.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об'єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	1,7	3	4	6	28
B	5,2	2,6	9,8	3	27
C	3	2	1	4	52
D	6	5	2,5	7	18
Потреби	32	18	60	15	

Варіант 5.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об'єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6	2	4,8	3	20
B	8	4	5	8	30
C	5,5	2	3	7	27
D	5	6	8,2	4	23
E	1,8	9	7	6	30
Потреби	40	30	48	12	

Варіант 6.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,2	1	4,2	5	17
B	2	4	5,1	8	20
C	5	8	3	4	40
D	2	4	9	2	20
E	4	2,75	2	1	23
Потреби	45	30	25	20	

Варіант 7.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	1	3	43
B	2	5	5	6	20
C	2	5	10	4	30
D	3	7	2	6	32
Потреби	18	50	22	35	

Варіант 8.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	9	4	7,4	20
B	2	8	5	1	15
C	7	2,2	1	4	30
D	2,5	6	10	6	40
Потреби	48	10	35	12	

Варіант 9.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,3	8,6	1	5	25
B	2,5	7	5	7	42
C	4	5	11	8	40
D	1	5	4	5	35
Потреби	44	30	26	42	

Варіант 10.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	6,3	8	5	11	12
B	4	11	7	9	24
C	7	3	5	8	32
D	9	5,5	10	1	32
E	5	8	11	5	30
Потреби	60	20	30	20	

Варіант 11.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	7,3	9	3	10	14
B	3	10	5	9	30
C	7	11	3	2	20
D	8	5	9	2	32
E	4,8	9	10	5	16
Потреби	60	14	20	18	

Варіант 12.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4,2	10	5	9	17
B	5	8	5	9	33
C	6	4	4	7,3	20
D	7	5	11	4	12
E	3	11	8	5	20
Потреби	35	22	30	15	

Варіант 13.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва, шт.
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	5,1	8	6	15	310
B	7	12	5	9	145
C	6	9	2	16	202
D	8	3	9	4	180
E	4,5	9	10	5	73
Потреби	530	120	120	140	

Варіант 14.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	2	2	5	7	170
B	5	6,1	2	3	129
C	4	4	3	6,2	115
D	8	2	2	7	240
Потреби	117	140	310	87	

Варіант 15.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	4,1	6	79
B	5	2,5	2	3	73
C	3	4	3	4,2	52
D	5,1	3	2	7	38
Потреби	65	47	92	38	

Варіант 16.

Підприємства	Вартість одиниці продукції				Об’єм виробництва
	Споживачі				
	1	2	3	4	
A	4	2	4,1	6	170
B	5	2,5	2	3	173
C	3	4	3	4,2	252
D	5,1	3	2	7	280
Потреби	250	135	270	220	

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ – ВІПОЛ, 2000. – 688 с.
2. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990. – 383с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання лабораторних робіт №3 та №4
з дисципліни „Дослідження операцій"
для студентів спеціальності
„ Програмна інженерія "

Укладачі Журавчак Любов Михайлівна
Нитребич Оксана Олександрівна

Редактор

Комп'ютерне верстання