Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

19 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление

А разве можно всё упростить, всё обобщить? И вообще, разве по чужому желанию можно обобщать и упрощать?

Джером Дэвид Сэлинджер, "Над пропастью во ржи"

Привет, Путник! Я рад сопровождать тебя в начале твоего долгого и тяжёлого пути к (не) отчислению. Запасись терпениеим. А лучше корвалолом.

1.1. Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

***Определение* 1.1.**

Дробление отрезка $[a, b]$ – это набор точек τ, такой что

$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Ранг (мелкость) дробления – $\max\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = |\tau|$

Оснащение – набор точек, такой что

$\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Пара (τ, ξ) – оснащённое дробление

***Определение* 1.2.**

Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \mapsto R$ и оснащённое дробление (τ, ξ)

$S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$

Какой короткий и классный билет :)

Ну, удачи...

1.2. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 1.1.

$|S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta &:= S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\ dt| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)|\ dt \qquad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < |\omega_f(|\tau|)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|)\ dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1}-x_k) \\
&\leqslant \omega_f(|\tau|)(b-a)
\end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a,b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = \int\limits_a^b f$

Доказательство.

$f \in C([a,b]) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b-a) = 0$

□

***Определение* 1.3.**

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = I$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана

1.3. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. Формула трапеций.

Пример.

$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$

Ограничим $S_n(p)$ сверху: $S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2}(\frac{n}{2})^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{k}{n})^p = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}\ \ f(t) = t^p$

$\xi_k = \frac{k}{n}$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \to \int\limits_0^1 t^p\,dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма.

$f \in C^2[a, b]$. Тогда:

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$

Доказательство.

$\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\,dt = f(t)(t-\gamma)\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\frac{\alpha+\beta}{2})\,dt$

$((t-\alpha)(\beta-t))' = \alpha + \beta - 2t = -2(t-\gamma)$

$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(-\frac{1}{2})((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt =$

$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$ □

Теорема 1.2 (оценка погрешности в ф-ле трапеций)**.**

$f \in C^2[a, b]$ и $\tau-$ дробление. Тогда:

$\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left|\int\limits_a^b f - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2}\right)\right| S \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2}\int\limits_a^b |f''|$$

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)\,dt$$

$$|t - x_{k-1}|\,|x_k - t| \leqslant \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4} \leqslant \frac{|\tau|^2}{4}$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,(t - x_{k-1})(x_k - t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,\frac{|\tau|^2}{4}\,dt = \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

□

1.4. Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).

Теорема 1.3. (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f \in C^2[m, n]$ $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Доказательство.

Подставим в формулу $m = k, n = k+1$. Получим:

$$f(k) + f(k+1) = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} + \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Выразим отсюда $f(k)$:

$$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \frac{f(k)-f(k+1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Просуммируем от m до $n-1$.

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

$$f(n) + \sum_{k=m}^{n-1} f(k) = f(n) + \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt =$$

$$= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1 - \{t\})\,dt$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(k) = ...$

Заметим, что выражение не зависит от k $(f(t+k) = g(t)) \implies$ можно "сдвинуть". Будем считать, что $k = 0$. Тогда $\{t\} = t$.

$$f(0) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt + \frac{f(0)-f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)\cdot t(1-t)\,dt$$

$$\int\limits_0^1 f(t)\,dt - \frac{f(0)+f(1)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t-0)\cdot t(1-t)\,dt$$

Верно по лемме из билета 3: $\alpha = 0, \beta = 1$. □

1.5. Билет 5: Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^{n} k^p$ при различных р. Постоянная Эйлера.

Будем использовать формулу Эйлера-Маклорена

Пример.

1. $S_p(n) := \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$

   Пусть $f(t) = t^p$, тогда $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

   $S_p(n) = \int\limits_1^n t^p\,dt + \frac{1+n^p}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $\int\limits_1^n t^p\,dt = \frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}$

   Случай $-1 < p < 1$

   $0 \leqslant \int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2} = \frac{1}{4}\,\frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4(1-p)}\left(1 - \frac{1}{n^{1-p}}\right) \leqslant \frac{1}{4(1-p)}$

   $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$

   Случай $p > 1$

   $0 \leqslant \int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2} = \frac{n^{p-1}-1}{4(p-1)} = O(n^{p-1})$

2. **Гармонический ряд**

   $H_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

   Пусть $f(t) = \frac{1}{t}$, тогда $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

   По формуле Эйлера-Маклорена

   $H_n = \int\limits_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1+1/n}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $a_n := \int\limits_1^n \frac{1}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt \geqslant a_n \Rightarrow$ это возрастающая последовательность.

   $a_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leqslant \frac{1}{8} \Rightarrow$ предел последовательности существует. $\Rightarrow a := \lim a_n \Rightarrow a_n = a + o(1)$

   $H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1)$ в пределе $\frac{1}{2n}$ сокращается $o(1)$, и все кроме логарифма – постоянная Эйлера-Маскерони.

   $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.5772156649\ldots$

1.6. Билет 6: Формула Стирлинга

Продолжаем примеры для формулы Эйлера-Маклорена

Пример.

3. **Формула Стирлинга**

   Хотим найти $\ln(n!)$

   Пусть $f(t) = \ln t$, тогда $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$

   $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!) = \int\limits_1^n \ln t\, dt + \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n -\frac{1}{t^2} \cdot \{t\}(1-\{t\})\, dt$

   $b_n := \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\, dt \leqslant b_{n+1} \Rightarrow b_n$ возрастает.

   $b_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow b_n$ сходятся. $\Rightarrow b := \lim b_n \Rightarrow b_n = b + o(1)$

   $\ln(n!) = n\ln n + \frac{\ln n}{2} - n - \frac{b}{2} + o(1)$

   $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{-\frac{b}{2}} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{1-b}$, т.к. $e^{o(1)} \to 1$

   Хотим понять, что такое $c := e^{1-b}$.

   $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

   $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{2n}c}{n^{2n}e^{-2n}nc^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2n}}{n \cdot c} = \frac{4^n\sqrt{2}}{\sqrt{n}\cdot c} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}$

   Итого формула Стирлинга:

   $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

1.7. Билет 7: NAME

1.8. Билет 8: NAME

1.9. Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

Теорема 1.4.

$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, b)$

Тогда сходимость $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ равносильна ограниченности сверху первообразной F.

Доказательство.

$F(y) := \int\limits_a^y f$

$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$, $F(a) = 0$ (из утверждения выше)

$F(z) = F(y) + \int\limits_y^z f \geqslant F(y)$, где $\int\limits_y^z f \geqslant 0$ при $y < z \implies F(y)$ монотонно возрастает.

Итого, $F(y)$ имеет предел и монотонно возрастает. Для монотонно возрастающих функция существование предела равносильно ограниченности сверху

□

Следствие.

$f, g \in C[a, b) \;\; 0 \leqslant f \leqslant g$

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство.
$G(y) := \int\limits_a^y g,\ \ F(y) := \int\limits_a^y f \implies F \leqslant G$

1. $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies$ G ограничена сверху $\implies$ F ограничена сверху $\implies$ $\int\limits_a^b f$ сходится.

2. От противного. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится, тогда и $\int\limits_a^b f$ сходится по первому пункту. Противоречие.

□

`Замечание.` 1. Неравенству $f \leqslant g$ достаточно выполнения для аргументов, близких к b.

Доказательство.
$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$
Для второго слагаемого $f \leqslant g$, используем следствие. □

2. Вместо $f \leqslant g$ можно использовать и $f = O(g)$

Доказательство.
$\int\limits_a^b Cg = C\int\limits_a^b g$ – сходится.

□

3. Если $f \geqslant 0$, $f \in C[a, +\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится.

Доказательство.
$f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$

Надо доказать, что $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится.

$\int\limits_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ – сходится.

□

Следствие.
$f, g \geqslant 0\ \ f, g \in C[a, b)$ и $f \sim g$ при $x \to b-$

Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$f \sim g \implies$ найдется такое c, что $\frac{g}{2} \leqslant f \leqslant 2g$ при $x > c$

Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $f \leqslant 2g \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $g \leqslant 2f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.

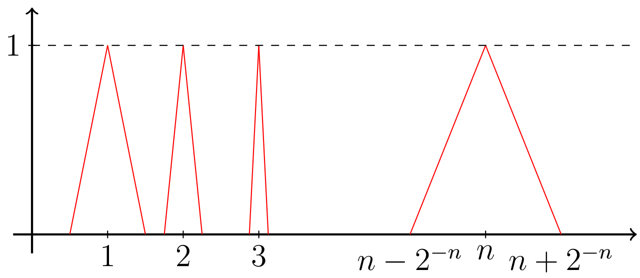
□

Замечание.

$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$

Дана функция, изображенная на графике (спасибо за это Герману). Площади треугольников убывают: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{8}$, $\ldots$, $S_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$



1.10. Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

***Определение* 1.4** (Абсолютная сходимость.).

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 1.5.

Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство.

$0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится $\implies \int\limits_a^b |f|$ сходится $\implies \int\limits_a^b f_\pm$ сходится

$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b (f_+ - f_-) = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_- \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

□

Теорема 1.6 (признак Дирихле).

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists M : \;\; |\int\limits_a^c f| \leqslant M$ при всех $c > a$.

2. g – монотонная функция.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$.

Пусть $F(y) := \int\limits_a^y f$

По условию $|F| \leqslant M$

$\int\limits_a^c fg = \int\limits_a^c F'g = Fg|_a^c - \int\limits_a^c Fg'$

Надо доказать, что существует предел при $c \to +\infty$

Распишем первое слагаемое как: $F(c)g(c) - F(a)g(a)$. Тогда $F(c)g(c) \to 0$ при $c \to +\infty$, так как это произведение бесконечно малой на ограниченную.

Надо доказать, что $\int\limits_a^c Fg'$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходится, то есть, что $\int\limits_a^c |F|{\cdot}|g'|$ сходится.

$\int\limits_a^c |F| \cdot |g'| \leqslant M \int\limits_a^c |g'| = M|\int\limits_a^c g'| = M|\ g|_a^c\ | = M|g(c) - g(a)| \leqslant M|g(a)| \implies \int\limits_a^{+\infty} |F'g|$ сходится.

$\square$

1.11. Билет 11: NAME

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

***Определение* 2.1.**

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, $\triangle$)

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}$: $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}^2$ - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга межту точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французкая железнодорожная метрка: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B$, $A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \impliedby AP, PB > 0.$$
$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A:

$$\rho(A,C)+\rho(C,B)=AC+(CP+PB)=(AC+CP)+PB\geqslant AP+PB=\rho(A,B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A,C)+\rho(C,B)=(AP+PC)+(CP+PB)\geqslant AP+PB=\rho(A,B).$$ □

***Определение* 2.2.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r\in\mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a\in X$ называется $B_r(a)=\{x\in X\mid \rho(a,x)<r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r\in\mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a\in X$ называется $\overline{B}_r(a)=\{x\in X\mid \rho(a,x)\leqslant r\}$.

Свойства.

$B_{r_1}(a)\cap B_{r_2}(a)=B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$

Если $a\neq b$, то $\exists r>0\quad B_r(a)\cap B_r(b)=\varnothing$.

Доказательство.

Возьмём $r=\frac{\rho(a,b)}{2}$.

Пусть $x\in B_r(a)\cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a,x)<\frac{\rho(a,b)}{2}$ и $\rho(x,b)<\frac{\rho(a,b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a,x)+\rho(x,b)<\rho(a,b)$, противоречие с $\triangle$. □

Аналогичная пара свойств есть и у $\overline{B}$.

2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

***Определение* 2.3.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство, $A\subset X$.

Точка $a\in A$ называется внутренней если $\exists r>0\quad B_r(a)\subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int}A$.

***Определение* 2.4.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство, $A\subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство.

1. $\varnothing$, X - открытые множества.
2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

   Доказательство.

   Пусть $\forall\alpha\in I\quad A_\alpha$ - открытое множество. $A:=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. Возьмём точку a, $\exists\beta\in I\quad a\in A_\beta$.

   Так-как A_β открытое, $\exists r>0\quad B_r(a)\subset A_\beta\subset A$. □

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

   Доказательство.
   Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.

   Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.

   Пусть $r = \min\limits_k r_k > 0$.

   Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. □

4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.

   Доказательство.
   Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.

   Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned} y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y,x) < \tilde{r} \\ &\implies \rho(y,x) < r - \rho(x,a) \\ &\implies \rho(y,x) + \rho(x,a) < r \\ &\overset{\triangle}{\implies} \rho(y,a) < r \\ &\implies y \in B_r(a) \end{aligned}$$

□

2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

***Определение* 2.5** (повтор)**.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

Свойства.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A$ - объеденение всех открытых множеств содержащихся в A.

   Доказательство.
   Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое.

   $G \subset \operatorname{Int} A$:

$$\begin{aligned} x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\ &\implies x \in \operatorname{Int} A \end{aligned}$$

   $\operatorname{Int} A \subset G$: $x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\operatorname{Int} A$ - откртое множество

   Доказательство.
   A - объединение открытых множеств, значит открыто. $\square$

4. $\operatorname{Int} A = A \iff A$ - открыто

   Доказательство.
   Необходимость ($\implies$): $\operatorname{Int} A$ открыто.
   Достаточность ($\impliedby$): A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies$ $A = \operatorname{Int} A$. $\square$

5. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$

6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

   Доказательство.
   В сторону $\subset$:

$$\left.\begin{aligned} A \cap B \subset A \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \\ A \cap B \subset B \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B \end{aligned}\right\} \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$$

   В сторону $\supset$:

$$x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \left\{\begin{aligned} x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \operatorname{Int} B \implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{aligned}\right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies$$
$$\implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$$

   $\square$

7. $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

   Доказательство.
   Заметим, что $\operatorname{Int} A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. $\square$

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

***Определение* 2.6.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.
A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. $\varnothing, X$ - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

   $\square$

Так как $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое, значит $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

□

$X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

Доказательство.
Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$ - открыто.

Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing$:

Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x, y) < \tilde{r}$, $\rho(y, a) < r$.

$$\rho(x, a) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

***Определение* 2.7.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Замыкание множества $A \subset X$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Обозначается $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$.

Теорема 2.1.

$$\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Доказательство.
Будем доказывать в виде $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$:

Знаем, что $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ по всем U_α таким, что $U_\alpha \subset (X \setminus A)$ и U_α открыто.

Пусть C - замкнутое множество, такое, что $A \subset C$. Тогда $X \setminus C$ - открытое, и $(X \setminus A) \subset (X \setminus C) \implies \exists \alpha \quad U_\alpha = X \setminus C$.

Аналогично в другую сторону - $\forall \alpha \quad X \setminus U_\alpha$ - замкнутое надмножество A.

Пусть $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$.

$$X \setminus \operatorname{Cl} A = X \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus C_\alpha) = \bigcup_\alpha U_\alpha = \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

□

2.5. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Свойства.

1. $A \subset \operatorname{Cl} A$
2. $\operatorname{Cl} A$ - замкнутое множество

   Доказательство.
   По определению, $\operatorname{Cl} A$ - пересечение замкнутых множетв. $\square$

3. $\operatorname{Cl} A = A \iff A$ замкнуто

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A = \operatorname{Cl} A &\iff X \setminus A = X \setminus \operatorname{Cl} A \\ &\iff X \setminus A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned}$$
$\square$

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \operatorname{Int}(X \setminus B) \subset \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$
$\square$

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} \operatorname{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus (A \cup B) \\ &= X \setminus \operatorname{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\operatorname{Int}(X \setminus A) \cap \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$
$\square$

6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$

   Доказательство.
   $\operatorname{Cl} A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. $\square$

Теорема 2.2.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \operatorname{Cl} A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \varnothing.$$

Доказательство.
Необходимость ($\implies$):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \varnothing$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \operatorname{Cl} A$.

Достаточность ($\impliedby$):

Пусть $a \notin \operatorname{Cl} A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A, такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$. При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \varnothing$. □

Следствие.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множетсво. При этом $A \cap U = \varnothing$.

Тогда $\operatorname{Cl} A \cap U = \varnothing$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Cl} A \cap U &\implies x \in U \\
&\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\
&\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \varnothing \\
&\implies x \notin \operatorname{Cl} A \\
&\implies x \notin \operatorname{Cl} A \cap U
\end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. □

***Определение* 2.8.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центров в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

***Определение* 2.9.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in A$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$.

Множества предельных точек множества A обозначается A'.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} a \in \operatorname{Cl} A &\iff \forall r > 0 \quad B_a(a) \cap A \neq \varnothing \\ &\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \end{aligned}\right. \\ &\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &a \in A' \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

□

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \\ &\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \varnothing \\ &\implies a \in B' \end{aligned}$$

□

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\ B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\ &\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)' \end{aligned}$$

   Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

   Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \varnothing$.

   Заметим, что $\forall 0 < r \leqslant R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \varnothing$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \varnothing$.

   Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing$. Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing.$$

   Значит, $x \in B'$ □

4. $A' \subset A \iff A$ - замкнутое

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \text{ - замкнутое} &\iff A = \operatorname{Cl} A \\ &\iff A = A \cup A' \\ &\iff A' \subset A \end{aligned}$$

□

Теорема 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность ($\leqslant$): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \Longrightarrow a \in A'$. □

2.6. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

***Определение* 2.10.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Тогда пара $\left\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \right\rangle$ называется метрическим подпространством X.

Далее, при разговое о подпростравах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

Теорема 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $\exists G$ открытое в X, такое, что $A = G \cap Y$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\Longrightarrow \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B^Y_{r_a}(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(A) \subset \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) =: G \end{aligned}$$

G - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что $A = G \cap Y$:

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(a) = A.$$

Достаточность ($\Longleftarrow$):

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмём $a \in A$.

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\Longrightarrow \exists r > 0 \quad B^X_r(a) \subset G \\ &\Longrightarrow B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\Longrightarrow B^Y_r(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A \text{ открыто в } Y \end{aligned}$$

□

Теорема 2.5.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\exists F$ замкнутое в X, такое, что $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$F := X \setminus G$, где G - открытое в X такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$ существование которого экивалентно открытости $Y \setminus A \iff$ замкнутости A.

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

□

2.7. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

***Определение* 2.11.**

Нормированным пространством над $\mathbb{R}$ называется пара $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, где X - линейное пространство над $\mathbb{R}$ (далее одно и тоже обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$.

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $(\triangle)$

Пример.

$X = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

Пример.

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}.$$

$$\|x\|_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^n}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in 1, \ldots, d} |x_i|.$$

Пример.

$X = C[a, b]$, $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Доказательство.

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \\ &= |f(x_0)+g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x_0)+|g(x_0)| \\ &\leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \\ &= \|f\|+\|g\|\end{aligned}$$

□

***Определение* 2.12.**

Пусть X - линейное пространство, тогда функция $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x,y,z\in X \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad :$

1. $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=\vec{0}$.
2. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$
3. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
4. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

Замечание.

Аналогичные определения можно дать над $\mathbb{C}$, тогда надо ещё потребовать $\langle x,x\rangle \in\mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

Пример.

$X=\mathbb{R}^d$, $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} x_iy_i$

Пример.

Пусть $w_1,\dots,w_d>0$, тогда

$X=\mathbb{R}^d$, $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} w_ix_iy_i$

Пример.

$X=C[a,b]$, $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$

Свойства.

1. $\langle \lambda x+\mu y,z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$ и $\langle x,\lambda y+\mu z\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \mu\langle x,z\rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$

   Доказательство.

   Пусть $t\in\mathbb{R}$.

   $$\langle x+ty,x+ty\rangle \geqslant 0.$$

   $$\langle x+ty,x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle\,.$$

   Это квадратное уровнение имеет корень только если $x+ty=0$, значит не более одного корня. Его дискриминат $\leqslant 0$:

   $$(2\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \leqslant 0 \implies \langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle\,.$$

   □

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ - норма

Доказательство.

(a) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x\rangle$ и $\sqrt{}$.

(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = \lambda\|x\|$

(c)

$$\begin{aligned}
\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \\
&\overset{\cdot^2}{\iff} \langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\
&\iff \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\iff \langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \\
&\iff \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. □

Свойства.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

Доказательство.

(a) Первое свойство переходит прямо

(b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

(c) $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$ ($\triangle$ для нормы).

□

2. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Доказательство.

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y-x) + x\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

□

2.8. Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

***Определение* 2.13.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

***Определение* 2.14.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$.

E называется ограниченным если $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$.

Свойства.

1. Предел единственнен

   Доказательство.
   Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.

   Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, $a \neq b \implies \varepsilon > 0$, возьмём $N = \max\{N_a, N_b\}$, где N_a, N_b - N из соответствующих определений предела при подстановке ε.

   Тогда, $\rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_N, b) < \varepsilon$.

   Но тогда $\rho(a, b) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$. Противоречие, значит предел единствененн. □

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$

   Доказательство.
   Определения посимвольно совпадают. □

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

   Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = a &\implies \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0\\ &\implies \rho(x_n, a) \text{ - ограниченная последовательность вещественных чисел}\\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R\\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a)\end{aligned}$$ □

4. Если a - предельная точка множества A, то можно выбрать последовательность $x_n \in A$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и $\rho(x_n, a)$ строго монотонно убывает.

   Доказательство.
   По определению предельной точки, $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \neq \varnothing$.

   Пусть $r_1 = 1$, $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}$, $x_n \in \mathring{B}_{r_n}(a)$ - такой x_n всегда можно выбрать, так-как окрестность непуста. Тогда $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$. □

5. $A \subset X$, $x_n \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies a \in A \cup A' = \operatorname{Cl} A$.

Доказательство.
Если $a \notin A$:

Предположим что $a \notin A' \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \mathring{B}_\varepsilon(a) \cap A = \varnothing \implies \nexists x \in A \quad 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

Но, если подставить этот ε в определение предела, то получим что $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $x_N \in A \implies x_N \neq a \implies \rho(x_N, a) > 0$. Противоречие, значит $a \in A'$. □

2.9. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

Теорема 2.6.
Пусть $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\lambda_n \to \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \to 0.$$
$$\|y_n - b\| \to 0.$$

1. $x_n + y_n \to a + b$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\overset{\triangle}{\leqslant} \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\to 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$
□

2. $\lambda_n x_n \to \lambda a$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n (x_n - a) + (\lambda_n - \lambda) a\| \\ &\leqslant \|\lambda_n (x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda) a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\to |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$
□

3. $x_n - y_n \to a - b$

Доказательство.
$-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b$, $x_n + (-y_n) \to a + (-b) = a - b$. □

4. $\|x_n\| \to \|a\|$

   Доказательство.

$$0 \leqslant |\|x\| - \|a\|| \leqslant \|x - a\| \to 0. \qquad \square$$

5. Если задано скалярное произведение и $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, то $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle a, b \rangle$.

   Доказательство.
   Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)\right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4\langle x, y \rangle \\
&= \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

   Теперь:

$$\begin{aligned}
\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle \\
&= \langle x_n, y_n - b \rangle - \langle x_n - a, y_n \rangle \\
&= \frac{1}{4}\left(\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 - \|x_n - a + y_n\|^2 + \|x_n - a - y_n\|^2\right) \\
&\to \frac{1}{4}\left(\|a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|b\|^2\right) = 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

***Определение* 2.15.**
Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(d)})$.

Тогда x_n покоординатно сходится к x_0, если

$$\forall k \in [1, d] \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

Теорема 2.7.
В $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

Доказательство.
Необходимость (норма $\implies$ коорд):

$$\forall k \in [1, d] \quad 0 \leqslant (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leqslant \sum_{j=1}^{d} (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \to 0.$$

Достаточноость (коорд $\implies$ норма)

$$0 \leqslant \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{d} (x_n^{(k)} - x_0^{(k)}) \to 0. \qquad \square$$

2.10. Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$

Тут что-то странное с порядком билетов, рекомендуется сначала прочитать билет 22

***Определение* 2.16.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространоство.

Последовательность x_n называется фундаментальной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма.
Фундаментальная последовательность ограничена

Доказательство.
Подставим $\varepsilon = 1$, получим $\forall n \geqslant N \quad \rho(x_N, x_n) < 1 \implies x_n \in B_1(N)$, пусть

$$r = \max\{1, \max_{k<N}\{\rho(x_N, x_k)\}\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_r(x_N)$. □

TODO: Это все свойства фундаментальной последовательнсоти?

***Определение* 2.17.**
Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Лемма.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Пусть $x_n \in X$ - фундаментальна, а $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant M \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$x_n \text{ - фундаментальна } \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть $L = \max\{N, n_M\}$.

Тогда $\forall n > L \quad \exists k \quad \rho(x_n, a) < \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$.

Значит, $\rho(x_n, a) \to 0 \implies x_n \to a$. □

Следствие.

1. $\mathbb{R}^d$ - полное

   Доказательство.
   Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$ - фундаментальная последовательность.

   Тогда x_n ограничена $\implies \exists x_{n_k}$ - сходящаяся к точке из $\mathbb{R}^d$ подпоследовательность (Больцано-Вейерштрасс из следующего билета), пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$. □

2. K - компакт в $\langle X, \rho\rangle \implies \langle K, \rho\rangle$ - полное.

Доказательство.
K - компакт, $x_n \in K$ - фундаментальна.

$\exists x_{n_k} \in K \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in K.$ □

2.11. Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

***Определение* 2.18.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

Семейство множеств $U_\alpha \subset X$ называется открытым покрытием множества A (покрытием A открытыми множествами), если

1. $A \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$
2. $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$ - открытое.

***Определение* 2.19.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется компактом, если из любого отркытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

Теорема 2.8.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространтсво, $Y \subset X$ - подпространство.

Тогда компактность $K \subset Y$ в Y и в X равносильны.

Доказательство.
$Y \implies X$:

Пусть $G_\alpha \subset X$ - открытое покрытие K в X.

Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ - открытое покрытие K в Y.

Можем выбрать конечное U_{α_k}.

$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k}$ - конечное открытое покрытие.

$X \implies Y$:

Пусть $U_\alpha \subset Y$ - открытое покрытие K в Y.

Тогда $\exists G_\alpha$ открытое в $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha$ - открытое покрытие K в X.

Значит, можем выбрать конечное G_{α_k}. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \subset Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит, U_{α_k} - конечное покрытие K в Y. □

Теорема 2.9.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, K - компакт. Тогда

1. K - замкнуто

   Доказательство.
   Возьмём $a \in X \setminus K$.

   Заметим, что $\forall x \in K \quad B_{\frac{\rho(x,a)}{2}} \cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \varnothing$.

   Возьмём открытое покрытие K: $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$.

   Выберем конечное: $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$.

   Тогда, при $r := \min\limits_k \{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$, $B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a \in \mathrm{Int}(X \setminus K) \implies X \setminus K$ открыто $\implies K$ замкнуто. $\square$

2. K - ограничено

   Доказательство.
   Возьмём $a \in K$.

   Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ - открытое покрытие.

   Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{n_k}(a) = B_r(a)$, $r := \max\limits_k \{n_k\}$. $\square$

Следствие.
Если K - компакт и $\tilde{K} \subset K$ - замкнуто, то $\tilde{K}$ - компакт.

Доказательство.
Пусть U_α - открытое покрытие $\tilde{K}$.

Тогда, если добавить к нему $X \setminus \tilde{K}$ (которое открыто так-как $\tilde{K}$ замкнуто), получится открытое покрытие K. Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \qquad \square.$$

2.12. Билет 23: Теорема о пересечении семейства компак- тов. Следствие о вложенных компактах.

Теорема 2.10.
Пусть K_α - семейство компактов, и для любого конечного набора компактов пересечение непусто.

Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$.

Доказательство.
Предположим $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \varnothing$.

Тогда $\exists \alpha_0 \in I \quad K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I}^{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I}^{\alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_\alpha)$ - получилось открытое покрытие.

Выберем конечное: $K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (X \setminus K_{\alpha_k}) = X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} K_{\alpha_k}$.

Но тогда $\bigcap\limits_{k=0}^{n} K_{\alpha_k} = \varnothing$, противоречие. $\square$

Следствие.

Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3, \dots$ - непустые компакты.

Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \varnothing$.

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов - компакт с максимальным номером $\neq \varnothing$. $\square$

2.13. Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта.

***Определение* 2.20.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется секвенциально компактным, если из любой последовательности точек из K можно выбрать подпоследовательность сходящуюся к точке из K.

Теорема 2.11.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ секвенциально компактно.

Тогда всякое бесконечное множество точек из K имеет хотя-бы одну предельную точку в K.

Доказательство.

Выберем последовательность x_n из этого подмножества, $x_n \in K$, значит можем выбрать сходящуюся подпоследовательность, а сходится она может только к предельной точке. $\square$

Теорема 2.12.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $K \subset X$ - компакт.

Тогда K секвенциально компактно.

Доказательство.

Пусть $x_n \in K$ - последовательность. $D = \{x_n\}$ (множество элементов).

Если D конечно, то какая-то точка встречается в последовательности бесконечное количество раз, выберем подпоследовательность состоящую только из этой точки, она сходится.

Заметим, что в D обязательно есть предельная точка:

Пусть нету. Тогда $D = D \cup \varnothing = D \cup D' = \operatorname{Cl} D \implies D$ замкнуто. Замкнутое подмножество компакт - компакт.

Так-как $\forall n \quad x_n$ не предельная в D, можем выбрать r_n, такие, что $\mathring{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \varnothing \implies B_{r_n}(x_n) \cap D = \{x_n\}$.

Покроем D такими шарами. Каждый шар покрывает ровно одну точку и точек бесконечно $\implies$ нельзя выбрать конечное покрытие. Противоречие.

Значит, $\exists a \in D'$.

Возьмём произвольную точку из последовательности x_{n_1}. Пусть $r_k := \min\{\frac{1}{k}, \min\limits_{n<k}\{x_n\}\}$.

Будем брать x_{n_k} как произвольную точку из $\mathring{B}_{r_{k-1}}(a)$. Так-как он ближе к a чем все предыдущие, $n_k > n_{k-1}$, значит получится подпоследовательность.

При этом, $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k-1} \implies \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. При этом, $D \subset K \implies \operatorname{Cl} D \subset \operatorname{Cl} K = K$. А $a \in D' \subset \operatorname{Cl} D \subset K \implies a \in K$. $\square$

2.14. Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью.

TODO: Не могу найти ни у себя ни у Ани ничего про это.

2.15. Билет 26: ε-сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

TODO: Сети и Хаусдорфа опять не видно не у меня не у Ани.

***Определение* 2.21.**
Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Замкнутый параллелепипед: $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед: $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_d, b_d)$.

Теорема 2.13 (О вложенных параллелепипедах)**.**
Пусть $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ - замкнутые параллелепипеды.

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$.

Доказательство.
Обозначим $P_n =: [a^{(n)}, b^{(n)}]$.

По теореме о вложенных отрезках:

$$\forall k \in [1, n] \quad \exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \quad .$$

Тогда, $c = (\forall n \quad c_1, \ldots, c_d) \in P_n$ □

Теорема 2.14.
Замкнутый куб (замкнутый параллелепипед, все координаты углов которого равны для данного угла) в $\mathbb{R}^d$ - компакт.

Доказательство.
Пусть K - замкнутый куб и U_α - его открытое покрытие. Предположим что выбрать конечное нельзя.

Разобьём K на 2^d кубов, со стороной равной половине стороны K. U_α - открытое покрытие каждого такого куба.

Хотя-бы один маленький куб нельзя будет покрыть конечным покрытием, назовём его K_1, повторим для него, получим последовательность $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$.

По теореме о вложенных параллелепипедах, $\exists c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \quad$.

$\exists \alpha_0 \quad c \in U_{\alpha_0}$, U_{α_0} открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$.

Заметим, что длина ребра $K_n = \frac{l}{2^n} \to 0$ (l - длина ребра K) $\implies$ максимальное расстояние между точками - $\sqrt{d}\frac{l}{2^n} \to 0$ (какой-то факт о евклидовой метрике).

Тогда, $\exists n \quad \sqrt{d}\frac{l}{2^n} < r$. Значит, $\exists n \quad K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$. Но это противоречит тому, что для K_n нельзя выбрать конечное покрытие. Значит K - компакт.

$\square$

Теорема 2.15.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ с евклидовой метрикой. Тогда следующие услвия эквивалентны:

1. K - компакт
2. K - замкнуто и ограничено
3. K секвенциально компактно.

Доказательство.

$1 \implies 2$ и $1 \implies 3$ уже были.

$2 \implies 1$: K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset$ куб. K - замкнутое подмножество компакта $\implies$ K - компакт.

$3 \implies 2$:

Пусть K не замкнуто. Тогда есть предельная точка не в K. Можем выбрать сходящуюся к ней последовательность, но тогда любая подполседовательность сходится к ней $\implies$ не можем выбрать сходящуюся к точке из K. Противоречие $\implies$ K замкнуто.

Пусть K не ограничено $\implies \forall n > 0 \quad K \not\subset B_n(0)$.

Тогда, можем выбрать последовательность вида $x_n \in K \setminus B_n(0)$. Тогда $\rho(0, x_n) \geqslant n$.

Выберем сходящуюся к $a \in K$ подпоследовательность x_{n_k}. Тогда x_{n_k} ограничена, причём ограничивающий шар с центром в a точно существует: $x_{n_k} \in B_r(a) \implies \rho(x_{n_k}, a) < r \overset{\triangle}{\implies} \rho(x_{n_k}, 0) < r + \rho(0, a)$. Противоречине, значит K ограничено. $\square$

Замечание.

$3 \implies 1$ верно для произвольного пространства, но доказательство сложное.

$2 \implies 1$ в общем случае неверно:

Рассмотрим $\mathbb{R}$ с метрикой лентяя. $[0, 1] \subset B_2(0)$, и есть замкнутость.

Но из $\bigcup_{x \in [0,1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$ нельзя выбрать конечное покрытие, так-как каждый шар содержит лишь одну точку.

Теорема 2.16 (Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничено $\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ - замкнуто и ограничено $\implies$ компакт $\implies$ секвенциально компактно $\implies$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$

2.16. Билет 27: Определения предела по Коши и по Гейне. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Критерий Коши.

***Определение* 2.22** (Коши)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда ($f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ - образ функции).

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f(\mathring{B}^X_\delta(a) \cap E) \subset B^Y_\varepsilon(b).$$

Аналогичная формулировка (раскрыть образ):

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\delta(a) \cap E \quad f(x) \in B^Y_\varepsilon(b).$$

И ещё одна аналогичная формулировка (раскрыть шары):

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon).$$

***Определение* 2.23** (Гёйне)**.**
Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall \text{ последовательностей } x_n \in E \setminus \{a\} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Теорема 2.17.
Определения по Коши и по Гёйне эквивалентны.

Доказательство.
Коши $\implies$ Гёйне:

Пусть $x_n \in E \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies \forall\delta > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$.

В частности, у нас δ для ε из Коши. Выберем по нему N.

Тогда $\forall n > N \quad \rho_X(x_n, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), b) < \varepsilon \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Гёйне $\implies$ Коши:

От противного. Пусть δ не существует $\implies \exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta \quad \exists x \in \mathring{B}^X_\delta(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) > \varepsilon$.

В частночти, можем взять $\delta = \frac{1}{n}$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \setminus a \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$, но $\rho_Y(f(x_n, b)) > \varepsilon$. Получается, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. Противоречие с Гёйне.

□

Следствие.
Предел единственнен.

Доказательство.
Пусть предел не единственнен. Тогда по Гёйне у любой последовательности должны быть оба предела, что невозможно так как предел последовательности единственный, а функция от последовательности - последовательность. □

Теорема 2.18.
Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Тогда $\exists r > 0 \quad f|_{B_r(a)\cap E}$ - ограничена.

Доказательство.
Подставим $\varepsilon = \rho_Y(f(a), b) + 1$ в Коши:

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\delta(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) < \rho_Y(f(a), b) + 1.$$

Значит, все значения функции в $B^X_\delta(a) \cap E$ лежиат в $B^Y_{\rho_Y(f(a),b)+1}(b)$. □

Теорема 2.19.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, Y - полное, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда
$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathring{B}^X_\delta(a) \cap E \quad f(x) \in B^Y_\varepsilon(f(y)).$$

Альтернативная формулировка (раскрытие шаров):

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \wedge \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

$$\begin{cases} \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon \\ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(y), b) < \varepsilon \end{cases} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \rho(f(x), b) + \rho(b, f(y)) < 2\varepsilon$$

Достаточность ($\leqslant$):

Возьмём последовательнсоть $x_n \in E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$.

Проверим фундаментальность $f(x_n)$:

Надо:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \rho_Y(f(x_n, f(x_m)).$$

Для данного ε возьмём δ по критерию Коши, и по δ возьмём N такое, что $\forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$. Тогда критерий Коши даёт нам фундаментальность $f(x_n)$. Так-как Y - полное, фундаментальная последовательность будет сходится к точке Y.

Пределы на последовательностях получатся одинаковыми: иначе, можем смешать их, получить сходящуюся к a последовательность которая также даст предел, но тогда у сходящейся последовательности есть подпоследовательности с разными пределами. Противоречие. □

TODO: Нужна-ли арифметика и всё такое? Вроде в билете даже не сказано про «Основные свойства» итд...

2.17. Билет 28: Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

***Определение* 2.24.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$.

f называется непрерывной в точке $a \in E$ если a - изолированная точка (**TODO:** не предельная? Или есть пустая проколотая окрестность в X?), либо $a \in E'$ и $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 2.20.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$, $\langle Z, \rho_Z \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$, $f(E) \subset \tilde{E} \subset Y$, $g : \tilde{E} \mapsto Z$.

Если f непрерывна в $a \in E$, а g непрерывна в $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в a.

Доказательство.

$$f \text{ непрерывна в } a \implies \forall \delta > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\lambda(a) \cap E \quad f(x) \in B^Y_\delta(f(a)) \cap \tilde{E}.$$

$$g \text{ непрерывна в } f(a) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^Y_\delta(f(a)) \cap \tilde{E} \quad g(x) \in B_\varepsilon(g(f(a))).$$

Комбинируем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\lambda(a) \quad g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f \text{ непрерывна в } a.$$

□

Теорема 2.21.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$.

f непрерывна на $X \iff \forall$ открытого $U \subset X$ $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ открыт.

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

Пусть $V = f^{-1}(U)$.

Пусть $a \in V$. Так-как U открыто, $\exists \varepsilon > 0 \quad B^Y_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

По непрерывности $\exists \delta > 0 \quad f(B^X_\delta(a)) \subset B^Y_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

$f(B^X_\delta(a)) \subset U \implies B^X_\delta(a) \subset V \implies a \in \operatorname{Int} V \implies V$ - открытое.

Достаточность ($\impliedby$):

Проверим непрервыность в $a \in X$.

$U := B^Y_\varepsilon(f(a))$ - открытое множество.

Значит, $\exists \delta > 0 \quad B^X_\delta(a) \subset f^{-1}(U) = f^{-1}(B^Y_\varepsilon(f(a)))$

Тоесть, $f(B^X_\delta(a)) \subset B^Y_\varepsilon(f(a))$, а это и есть определение непрерывности в терминах шаров. □

2.18. Билет 29: Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.

Теорема 2.22.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $f(K)$ компакт.

Доказательство.

Возьмём открытое покрытие $f(K)$, назовём его U_α.

Тогда $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ - открытое покрытие K.

Выберем конечное V_{α_k}.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{\alpha_k} \implies f(K) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(V_{\alpha_k}) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$. □

Теорема 2.23 (Вейерштрасса)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $\exists u, v \in K \quad \forall x \in K \quad f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$.

Доказательство.

$f(K)$ - компакт $\implies$ замкнут и ограничен.

Ограничен $\implies \inf f$ и $\sup f$ - конечные.

Предположим что $b := \sup f \notin f(K)$.

Тогда можем взять последовательность $x_n \in f(K)$, $x_n \to b$. Тогда b - предельная точка $f(K)$. $b \in f(K)' \subset \operatorname{Cl} f(K) = f(K)$. Противоречие. Значит $b \in f(K) \implies \exists v \in K \quad f(v) = b$. Аналогично для $\inf f$. $\square$

Теорема 2.24.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывная биекция, X - компакт.

Тогда f^{-1} непрерывна.

Доказательство.

Пусть $g := f^{-1}$.

Пусть $U \subset X$ - открытое множество.

Заметим, что $f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$ (так-как биекция).

$X \setminus U$ - замкнутое подмножество компакт $\implies$ компакт $\implies$ $f(X \setminus U)$ замкнуто $\implies$ $Y \setminus f(X \setminus U)$ - открыто.

$f(U) = g^{-1}(U)$, значит для g прообраз открытого открыт $\implies$ g непрерывно. $\square$

2.19. Билет 30: Равномерная непрерывность отображений. Теорема Кантора для отображений метрических пространств.

***Определение* 2.25.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$.

f называется равномерно непрерывной если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad (\rho_X(x, y) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Лемма.

Если f равномерно непрерывна, то f непрерывна.

Доказательство.

Чтобы показать непрерывность в точке a подставим $x = a$ в определение. $\square$

Теорема 2.25 (Кантора).

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $K \subset X$ - компакт, $f : K \mapsto Y$ - непрерывна.

Тогда f равномерно непрерывна.

Доказательство.

Путь $\exists \varepsilon > 0 \quad$ для которого ни одно δ не подходит. Возьмём $\delta = \frac{1}{n}$.

Так-как δ не подошло, $\forall n \quad \exists x_n, y_n \in K \quad \rho_X(x_n, y_n) < \delta$ и $\rho_Y(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$.

x_n - последовательность из компакта $\implies \exists x_{n_k} \quad$ - сходящаяся подпоследовательность.

Пусть $a := \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k}$.

$\rho(x_{n_k}, a) \to 0$, $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0$.

Тогда, по $\triangle$, $\rho(y_{n_k}, a) \to 0 \implies \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = a$.

По непрерывности, $\exists \lambda > 0 \quad \rho_X(x, a) < \lambda \implies \rho_Y(f(x), a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так-как подпоследовательности сходятся $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \lambda$, $\rho(y_N, a) < \lambda$ (тут нужен только один элемент каждой последовательности).

Тогда, $\rho(f(x_N), f(y_N)) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(f(x_N), a)) + \rho(a, f(y_N)) < \varepsilon$. Противоречие с тем как брали x_n, y_n. Значит f равномерно непрерывна. $\square$

2.20. Билет 31: NAME

2.21. Билет 32: NAME

2.22. Билет 33: NAME

2.23. Билет 34: NAME

2.24. Билет 35: NAME

2.25. Билет 36: NAME

2.26. Билет 37: NAME

2.27. Билет 38: NAME

2.28. Билет 39: NAME

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: NAME

3.2. Билет 41: Критерий Коши. Абсолютная сходимость. Группировка членов ряда. Свойства

Теорема 3.1 (Критерий Коши)**.**

X – полное нормированное пространство.

$\sum a_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n > N \quad \left\| \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \right\| < \varepsilon$

Доказательство.

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$\sum a_n$ – сходится $\iff \exists$ конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

$\iff$ (полнота X) S_n – фундаментальная последовательность

$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \|S_m - S_n\| < \varepsilon$

$\|S_m - S_{n-1}\| = \left\| \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \right\|$ □

***Определение* 3.1** (Абсолютная сходимость)**.**

$x_n \in X$ – нормированное пространство

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ – сходится

Теорема 3.2.

X – полное нормированное пространство

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, то

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится

   Доказательство.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ – сходится $\implies$ (Критерий Коши для $\|x_n\|$) $\forall \varepsilon \quad \exists N \quad m, n \geqslant N \quad \sum\limits_{k=n}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$

   $\varepsilon > \sum\limits_{k=n}^{m} \|x_k\| \geqslant \left\| \sum\limits_{k=n}^{m} x_k \right\|$

   $\implies \forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n, m \geqslant N \quad \left\| \sum\limits_{k=n}^{m} x_k \right\| < \varepsilon$

   $\implies$ (Критерий Коши для x_n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится □

2. $\left\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

Доказательство.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \to \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\| \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \to \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$

$$\implies \left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$

□

***Определение* 3.2** (Группировка членов ряда)**.**
$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + x_6 + (x_7 + x_8) + \ldots$

Замечание.

1. Если исходный ряд сходился, то ряд получившийся после группировки сходится к той же сумме.
2. В обратную сторону верно не всегда

   Пример. $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$

Теорема 3.3 (Когда верно в обратную сторону)**.**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

1. Если $\lim x_n = 0$ и количество слагаемых в каждой группе $\leqslant M$

   Доказательство.
   S_{n_k} – подпоследовательность чатичных сумм $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$

   (группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)

   $$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_k}) + (x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_k+r} + \ldots$$

   $$\|S_{n_k+r} - S\| = \|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_k+r}\| \leqslant$$

   $$\leqslant \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \ldots + \|x_{n_k+r}\|$$

   Выберем K, т.ч. если $k \geqslant K$, то $\|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$

   Выберем N, т.ч. если $n \geqslant N$, то $\|x_n\| < \varepsilon$

   Если выполняется и то, и то, тогда:

   $\|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \ldots + \|x_{n_k+r}\| < \varepsilon(M + 1)$
   Значит $\forall\varepsilon > 0$ мы можем выбрать N_1, т.ч. $\forall n \geqslant N_1 \quad \|S_n - S\| < \varepsilon$ □

2. Для числовых рядов. Если все члены ряда в группе одного знака.

Доказательство.

$S_{n_k} \to S$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k \geqslant K \quad |S_{n_k} - S| < \varepsilon$

$N := n_K$

если $n \geqslant N$:

для некоторого k: $n_k \leqslant n < n_{k+1}$

$S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + ... + x_n$

если в группе все члены $\geqslant 0$, то $S_n \geqslant S_{n_k}$

$S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - ... - x_{n+1}$

$S_{n_{k+1}} \geqslant S_n$

Тогда $|S_n - S| < \varepsilon$

Если в группе отрицательные члены

$S_{n_k} \geqslant S_n \geqslant S_{n_{k+1}}$

Тогда в этом случае тот же вывод

$|S_n - S| < \varepsilon$

□

3.3. Билет 42: ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.

Теорема 3.4.

Если $a_n \geqslant 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff$ частичные суммы ограничены.

Доказательство.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} = S_{n+1}$

т.е. S_n монотонно возрастает.

$\implies$ S_n имеет конечный предел

$\iff$ (свойство монотонно возрастающей последовательности) S_n – ограничена □

Теорема 3.5 (Признак сравнения)**.**

$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\implies$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится $\implies$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – расходится

Доказательство.

1. $A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится

$\implies B_n$ – ограничены

$\implies A_n$ – ограничены

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится

2. От противного.

   Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится

   $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится

   $\implies$ противоречие.

□

Следствие.

$a_n, b_n \geqslant 0$

1. $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится.
2. $a_n \sim b_n \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинакого.

Доказательство.

1. $0 \leqslant a_n \leqslant Cb_n$ и $\sum Cb_n = C \sum b_n$ – сходится

   $\implies$ (предыдущая теорема) $\sum a_n$ – сходится
2. При достаточно больших n: $\frac{b_n}{2} \leqslant a_n \leqslant 2b_n$

   Из $a_n \leqslant 2b_n$: $\sum b_n$ – сходится $\implies \sum a_n$ – сходится

   Из $\frac{b_n}{2} \leqslant a_n$: $\sum a_n$ – сходится $\implies \sum b_n$ – сходится

□

3.4. Билет 43: Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

Теорема 3.6 (признак Коши)**.**

$a_n \geqslant 0$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ начиная с некоторого места, то ряд расходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ начиная с некоторого места, то ряд сходится
3. $q' := \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

   Если $q' < 1$ сходится, то и ряд сходится.

   Если $q' > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

Судя по формулировке билета, первые два пункта доказывать не нужно, но доказательство у них быстрое, так что пусть тоже будет.

1. $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \geqslant 1 \implies a_n \not\to 0$, не выполняется необходимое условие. ‘

2. $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \implies a_n \leqslant q^n$

   Воспользуемся признаком сравнения с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$. Это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

3. (a) $\overline{\lim} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q' > 1 \implies$ найдется подпоследовательность a_{n_k}, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = q' > 1$

   $\implies$ найдется такая окрестность, что при достаточно больших k все $a_{n_k} \in (1, \dots)$ (важно, что промежуток точно больше 1)

   $\implies a_{n_k} > 1$

   $\implies a_n \not\to 0$, ряд расходится

   (b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q' < 1$

   $\implies$ (по определению верхнего предела) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} = q' < 1$

   $\implies$ можно выбрать окрестность $(\dots, \frac{q'+1}{2}) \subset (\dots, 1)$, такую что начиная с некоторого момента все $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}$ попадают в эту окрестность, то есть $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$

   $\implies \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$ при достаточно больших k, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по доказанному в пункте 2.

□

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

Замечание.

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n+1}} = 1$

3.5. Билет 44: Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Теорема 3.7 (признак Даламбера).

$a_n > 0$

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд сходится.
3. Пусть $d^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

   Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \leqslant a_{n+1}$

   $\implies$ начиная с некоторого места члены ряда возрастают, $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ...$

   $\implies a_n \not\to 0 \implies$ ряд расходится
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d \implies a_{n+1} \leqslant d \cdot a_n$ начиная с некоторого места.

   $\implies a_{n+k} \leqslant d^k \cdot a_n$ при всех k

   $\implies$ при всех $k \geqslant n$ $a_k \leqslant d^{k-n} \cdot a_n = d^k \cdot \frac{a_n}{d^n} = d^k \cdot const$

   $\implies a_k = \mathcal{O}(d^k)$

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ – это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ сходится, тогда по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.
3. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1$

   $d := \frac{d^*+1}{2} < 1$

   $\implies$ начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1$

   $\implies$ с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$

   $\implies$ ряд расходится.

□

Замечание.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

По Даламберу.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

По Коши.

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

Теорема 3.8 (Связь между признаками Коши и Даламбера).

$a_n > 0$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d

Доказательство.

Будем рассматривать не сами выражения, а их логарифмы.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \iff \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

Хотим доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d$

Применяем Штольца!

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

□

3.6. Билет 45: NAME

3.7. Билет 46: NAME

3.8. Билет 47: Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка)

Знакочередующийся ряд: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geqslant 0$

Теорема 3.9 (Признак Лейбница).

Если a_n монотонно убывают стремятся к 0, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится. Важно заметить, что условие стремления a_n к 0 важно (см. необходимое условие сходимости ряда). Данный признак можно так же вывести из признака Дирихле. Однако мы хотм произвести так же оценку на сумму знакочередующегося ряда: $S_{2n} \leqslant S_n \leqslant S_{2n+1}$

Доказательство.

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant S_{2n}$ $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$. Получаем, что S с четными номерами растут, а с нечетными - убывают. Значит, мы можем расписать вложенную последовательно сть отрезков: $[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] ... \supset [S_{2n}, S_{2n+1}]$.
Теперь рассмотрим длины отрезков: $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$. Тогда последовательность отрезков стягивается. Тогда применим одноименную теорему: у этих отрезков есть общая точка S, которая является пределом их концов: $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = S$. Получили что частичные суммы сходятся к S, значит исходный ряд тоже сходится к S. Также можно заметить, что неравенство на сумму ряда выполняется, потому что точка S лежит во всех отрезках, в частности в отрезке $[S_{2n}, S_{2n+1}]$

□

Пример.

В качестве примера рассмотрим ряд Лейбница: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
$S_{2n} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n =$ (сложили все дроби и дважды вычли четные), где H_n- гармонический ряд (смотри билет 6). Подставим все в формулу для гармонических чисел: $= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Тогда $S_{2n} \to \ln 2$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
Рассмотрим перестановку ряда Лейбница: $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) + ...$
Будем считать $S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4n} = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n} =$. Последнее выражение в скобках это H_{2n}. Мы только что считали это в предыдущем примере. Получаем: $= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \frac{\ln 2}{2}$

3.9. Билет 48: Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда

***Определение* 3.3.**

Перестановка членов ряда: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция и $\sum a_n$ - исходный ряд. Тогда $\sum a_{\varphi(n)}$ - перестановка члена ряда.

Теорема 3.10.

Если $\sum a_n$ абсолютно сходится к S, то перестановка ряда $\sum a_{\varphi(n)}$ сходится,причем, тоже к S.

Доказательство.

Случай 1 $a_n \geqslant 0$. Также введем обозначение $S' = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$, а $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Тогда мы точно знаем, что $S'_n \geqslant S$, так как в сумме S' встречаются не все слагаемые, а те, которые отсутствуют $\geqslant 0$, поэтому сумму они только увеличивают. Тогда $\lim S'_n = S' \leq S$, то есть $S' \leqslant S$. Так как у нас биекция - мы можем сделать обратную перестановку, от которой сумма ряда не увеличится. Сделаем перестановку туда и обратно и получим, что каждая из них не увеличивает сумму ряда, ну значит эти суммы равны между собой: $S' = S$.
Случай 2: $a_n \in \mathbb{R}$: заведем $a_n(+) = max\{a_n, 0\}$ и $a_n(-) = max\{-a_n, 0\}$. $a_n(+) - a_n(-) = a_n$, $a_n(+) + a_n(-) = |a_n|$ Так как по условию $\sum |a_n|$ сходится абсолютно, то $\sum a_n(\pm)$ сходится. Более того ряды - с неотрицательными слагаемыми, значит, перестановка членов не меняет суммы ряда, значит $\sum a_{\varphi(n)}(\pm) = \sum a_n(\pm)$. Тогда $\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_{\varphi(n)}(+) - \sum a_{\varphi(n)}(-) = \sum a_n(+) - \sum a_n(-) = \sum a_n$

□

Замечание.

1. Если $a_n \geqslant 0$ и ряд расходится, то перестановка ряда так же расходится. Это верно, так как если бы нашлась перестановка, дающая сходящийся ряд, тогда бы обратная перестановка

тоже давала бы сходящийся ряд, а это противоречит тому, что исходный ряд расходится.

2. Другое замечание : если $\sum a_n$ сходится условно, то $\sum a_n(\pm)$ расходятся. Так как $\sum a_n = \sum a_n(+) - \sum a_n(-)$. Если бы один из них сходился, то сходился бы и другой, так как один выражается через другой с помощью $\sum a_n$, который сходящийся. Ну тогда ряд $\sum |a_n| = \sum a_n(+) + \sum a_n(-)$ тоже бы сходился, как сумма сходящихся. Пришли к противоречию.

3.10. Билет 49: Теорема Римана.

Теорема 3.11 (Римана).
$a_n \in \mathbb{R}$ $\sum a_n$ условно сходится.

Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка φ, т.ч. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$. Также существует перестановка φ, для которой ряд не имеет суммы.

Доказательство.
$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – ряды $\sum (a_n)_\pm$, из которых выкинули все нули.

$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – расходятся (т.к. есть условная сходимость), Более того, $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$. При этом $\lim b_n = \lim c_n = 0$ (необходимое условие сходимости для ряда $\sum a_n$).

Пункты $a), b), c)$ доказываются аналогично. Наверное, можно на экзамене расписать только пункт $a)$, а про остальные сказать, что аналогично. Здесь на всякий случай расписаны все три пункта.

a) Пусть $S \in \mathbb{R}$. Будем набирать частичную сумму так, чтобы она поочередно превышала S и наоборот была меньше S. Мы можем это сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1-1} \leqslant S < b_1 + b_2 + ... + b_{n_1}$

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} < S \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1-1}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2-1} \leqslant S < b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2} < S \leqslant$
   $\leqslant b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2-1}$

   И так далее.

   |частичная сумма $- S| \leqslant |$последнего взятого элемента$| \to 0$. Значит частичная сумма построенного ряда $\to S$.

b) Пусть $S = +\infty$. Мы знаем, что $\sum b_n = +\infty$. Поэтому мы можем нашу перестановку получить следующим образом:

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} > 1 \geqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1-1}$ (раз $\sum b_n = +\infty$, то в какой-то момент сумма превысит 1)

   $b_1 + ... + b_{n_1} + c_1$ (добавили элемент из ряда c_n)

   $b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} > 2 \geqslant b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2-1}$

   И так далее.

c) Пусть мы хотим получить перестановку φ, для которой ряд не имеет суммы. Будем набирать суммы так, чтобы она то была больше 1, то меньше -1. Это опять же можно сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1-1} \leqslant 1 < b_1 + b_2 + ... + b_{n_1}$

$b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} < -1 \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1-1}$

$b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2-1} \leqslant 1 < b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2}$

$b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2} < -1 \leqslant$
$\leqslant b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2-1}$

И так далее.

$\square$

3.11. Билет 50: Теорема Коши. Произведение рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

Теорема 3.12 (Коши).

Если ряды $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ – абсолютно сходятся, то ряд, образованный из слагаемых $a_n b_k$ в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна AB

Доказательство.

Сначала немного обозначений:

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_n \ B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$

$\tilde{A}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \ \tilde{B}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|$

$\tilde{A} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| \ \tilde{B} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$

$\tilde{S}_m$ – частичная сумма ряда из $|a_n b_k|$

$\tilde{S}_m \leqslant \sum\limits_{i,j} |a_i b_j| = \sum\limits_{i=1}^{\max i} |a_i| \sum\limits_{j=1}^{\max j} |b_j| \leqslant \tilde{A}\tilde{B} < +\infty$, меньше бесконечности, т.к. ряды абсолютно сходятся.

Частичные суммы $\tilde{S}_m$ ограничены $\implies$ ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала $a_1 b_1$, потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д. Т.е. $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + ...$

TODO: Табличка с квадратиками

S_m – частичная сумма такого ряда

$S_{n^2} = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_j b_k = A_n B_n \to AB$

Пусть $n^2 \leqslant m \leqslant (n+1)^2$

$S_m = S_{n^2} + \sum\limits_{k=1}^{...} a_{n+1} b_k + \sum\limits_{k=n}^{...} a_k b_{n+1}$

$\sum\limits_{k=1}^{n+1} |a_{n+1} b_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_{n+1}| = |a_{n+1}| \tilde{B}_{n+1} + |b_{n+1}| \tilde{A}_n \leqslant |a_{n+1}| \tilde{B} + |b_{n+1}| \tilde{A} \to 0$, т.к. $\lim a_n = \lim b_n = 0$

$\implies S_n \to AB$ $\square$

***Определение* 3.4.**

$\sum a_n$ и $\sum b_n$

Произведением рядов называется ряд $\sum c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + ... + a_n b_1$

Теорема 3.13 (Мертенса)**.**

$\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ сходятся, причем один из них абсолютно, то произведение рядов сходится к AB.

Замечание.

Теорема идет без доказательства, но вот несколько замечаний по поводу нее.

1. Здесь важен порядок, в котором мы складываем $a_i b_j$. В теореме Коши он был не важен, т.к. у обоих рядов была абсолютная сходимость, но здесь у обоих рядов абсолютная сходимость не гарантирована.

2. Просто сходимости рядов не хватает. Пример:
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ умножаем на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
   $c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + ... + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} =$
   $= (-1)^{n-2}(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}})$
   $n-1$ слагаемых
   $\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{n-1}$ (т.к. среднее арифметичкое больше среднего геометрического)
   $|c_{n-1}| \geqslant 1 \implies$ ряд $\sum c_n$ расходится.

3.12. Билет 51: NAME

3.13. Билет 52: NAME

3.14. Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$

Тут под p_n поздразумевается n-ое простое число.

Утверждение 3.14.

Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

Доказательство.

Для начала проведу некие не совсем формальные рассуждения, далее их формализую. Итак, неформальная часть:

$$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

В начале просто несколько иначе переписал член произведения. Затем заметил, что это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда наше исходное произведение переписывается в такое произведение сумм:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

«Раскроем» скобки в этом произведение и получим сумму всеовозможных произведений выражений вида $\frac{1}{p_n^k}$, а именно:

$$\sum \frac{1}{\prod\limits_{k}^{\infty} p_{k=1}^{\alpha_k}}$$

А с алгебры первого модуля нам известно, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде $\prod_{k=1}^{\infty} p_k^k$ и при этом едintвенным образом поэтому наша сумма это в точности это:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Получили гармонический ряд, а он, как известно, расходится. Почему же я написал слово «раскроем» в кавычках? Все потому, что раскрывать бесконечное произведение бесконечных сумм может быть не совсем законно, как минимум не ясно почему законно, поэтому пришло время формализовать всё то, что я напиал выше:

$$P_n := \prod_{t=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_t^k} \geqslant \prod_{t=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_t^k}$$

Раскроем скобки, получим суммы таких слагаемых $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots}$, где все $\alpha_i \leqslant n$, и все $p_i \leqslant n$, что означает, что там точно будут все дроби вида $\frac{1}{i}$, где $i \leqslant n$ (i - натуральное, если вдруг по каким-то причнам это неочевидно). Тогда для P_n имеем следующее неравнество (уже имеем все такие слагаемые, есть еще какие-то сверху, на них забьем):

$$P_n \geqslant \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$$

Заметим, что этот ряд расходится, поэтому и произведение из условия расходится. □

Замечание.

$P_n \geqslant \ln n + \mathcal{O}(1)$

Доказательство.

Мы все прекрасно знаем, что гармонический ряд эквивалентен $\ln n + \gamma + o(1)$. Мы уже показали, что наш ряд больше гармонического ряда, а $\gamma + o(1)$ можно записать в виде $\mathcal{O}(1)$ (потому что постоянная Эйлера и $o(1)$ - какое-то ограниченное выражение). □

Теорема 3.15.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится

Доказательство.

Из расходимости произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n - 1}$ ряд из логарифмов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1}$ тоже расходится. Посмотрим на один такой логарифм:

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{2}{x}$$

Первые два равенства - очевидные, последнее неравенство следует из следующего факта: $\ln(1 - t) \geqslant -2t$ при достаточно маленьких t (не верите - дифференцируйте), поэтому выполняется при достаточно больших x. Значит, первые члены, для которых неравенство не выполняется, можем оценить какой-то константой C (их конечное число), а для остальных по неравенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1} \leqslant C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n - 1} - C \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$$

Получилось, что подперли ряд из $\frac{2}{p_i}$ расходящимся рядом, отсюда следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$. □

Замечание.

На самом деле

$$\ln \frac{x}{x-1} \sim \frac{1}{x}$$

(потому что $-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$), поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_k}{p_k - 1}$$

(теорема Штольца утверждает (гугл в помощь, если что), что если каждое слагаемое (то есть $a_n - a_{n-1}$) эквивалентно, то и суммы (a_n) эквивалентны), то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \ln P_n \geqslant \ln(\ln n + \mathcal{O}(n)) \geqslant \ln \ln n + \mathcal{O}(n)$$

Утверждение 3.16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \sim \ln \ln n$$

Доказательство.

Без доказательства. □

3.15. Билет 54: Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

***Определение* 3.5.**

Пусть $f_n, f \colon E \to \mathbb{R}$ (тут можно и $\mathbb{C}$).

1. Последовательность f_n поточечно сходится к f на множестве E, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in E$.

2. Последовательность f_n равномерно сходится к f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

   Обозначение для равномерной сходимости: $f_n \rightrightarrows f$ (и как-то указывать на каком множестве эта равномерная сходимость: или словами после, или под стрлочками)

Замечание.

Запишем оба определения с помощью кванторов:

1. $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Получается, что в первом случае N зависит **и** от x, **и** от ε, а во втором - **только** от ε.

Замечание.
Из равномерной сходимости следует поточечная к той же функции. Действительно, если есть универсальный номер, зависящий только от ε, то он подходит и для конкретного x.

Пример.
Пусть $E = (0;1) \quad f_n(x) = x^n \quad f(x) = 0$, тогда

f_n поточечно сходится к f (какое-то число из $(0,1)$ в n-ной степени стремится к нулю), однако равномернорной сходимости нет. Условие не выполняется даже для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, поскольку $|x^n - 0| < \frac{1}{2}$ не может выполняться при все $x \in (0;1)$ ни для какого n, поскольку x мы можем сколь угодно близко подвинуть к 1, и x^n будет сколь угодно близко к 1, в частности больше $\frac{1}{2}$. Мораль: из поточечной сходимости равномерная **не** следует.

Теорема 3.17 (Критерий равномерной сходимости)**.**
Пусть $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Доказательство.

"$\Leftarrow$" Запишем правый предел по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

А для супремума верно следующее: $\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, поэтому:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ничего не напоминает? Мне вот определение равномерной сходимости напоминает.

"$\Rightarrow$" Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Синее означает то, что ε является верхней границей для всех $|f_n(x) - f(x)|$, а значит, sup таких разностей будет меньше или равен ε, отсюда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

А это означает то, что sup стремится к нулю при $n \to \infty$ (по определению). □

Следствие.

1. Если $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ при любых $x \in E$ и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, то $f_n \rightrightarrows 0$ на E.

   Доказательство.
   Если разность меньше a_n во всех точках, то $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n \to 0$ при $n \to \infty$ □

2. Если $\exists x_n \in E$ такие, что $f_n(x) - f(x)$ не стремится к нулю, то равномерной сходимости нет.

Доказательство.
Это означает, что $\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| \geqslant |f_n(x)-f(x)| \neq 0$ при $n \to \infty$, а значит, нет стремления к нулю у супремума, критерий равномерной сходимости не выполняется, равномерной сходимости нет. □

Пример.
Пусть $E = (0;1)$ $\quad f_n(x) = x^n \quad f(x) = 0$, возьмем $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, но мы знаем это:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0$$

Раз предел не 0, то равномерной сходимости нет. (Предел может быть только нулем, потому что поточечный предел 0 (иначе пределов было бы несколько, так как равномерная сходимость влекла бы предел к другой функции)). Пример закончился, его явно в билете нет, но пусть будет.

3.16. Билет 55: Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 3.18. (Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей)

Пусть $f_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Тогда f_n равномерно сходится на E к некоторой функции

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.
"$\Longrightarrow$"

Знаем, что $f_n \to f$ на E. Тогда возьмем $\dfrac{\varepsilon}{2}$ вместо ε в определение равномерной сходимости и найдем по нему соотвествующее N.

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| =$

$= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Зафиксируем некоторый произвольный $x \in E$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x)$.

Замечание. Воспоминание из 1 семестра : последовательность x_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

Тогда $f_n(x)$ - фундаментальная последовательность. Тогда по критерию Коши для числовых последовательностей она имеет конечный предел : пусть $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Берем неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и устремим m к ∞. При переходе к пределу потеряется строгость знака $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Перебрав $\forall x \in E$ получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Это и есть определение равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$ на E □

3.17. Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота

***Определение* 3.6.** Пространство $\ell^\infty(E)$.

$$\ell^\infty(E) := \{f : E \mapsto \mathbb{R} \mid \sup_{x\in E}|f(x)| < +\infty\}$$

с нормой $||f||_{\ell^\infty(E)} := \sup\limits_{x\in E}|f(x)|$

Другими словами, нормированное пространство $\ell^\infty(E)$ состоит из ограниченных на E функций.

Замечание. $\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$ действительно норма

1. $||f|| \geqslant 0$ и $||f|| = 0 \iff \sup\limits_{x\in E}|f(x)| \geqslant 0$ и $\sup\limits_{x\in E}|f(x)| = 0 \iff f \equiv 0$
2. $\sup\limits_{x\in E}|\lambda f(x)| = |\lambda| \sup\limits_{x\in E} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$
3. Неравенство треугольника
   $||f + g|| = \sup\limits_{x\in E}|f(x) + g(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in E}(|f(x)| + |g(x)|) \leqslant \sup\limits_{x\in E}|f(x)| + \sup\limits_{x\in E}|g(x)| = ||f|| + ||g||$

В доказательстве нер-ва треугольника пользовались тем, что $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ и $\sup(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$

Замечание. Связь нормы с равномерной сходимостью
$f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f|| = 0 \iff$

f_n сходится к f в пространстве $\ell^\infty(E)$

То есть про равномерную сходимость можно думать как про сходимость в специальном нормированном пространстве.

Теорема 3.19.
$\ell^\infty(E)$ - полное нормированное пространство.

Доказательство.
Надо доказать, что каждая фундаментальная последовательность из ℓ^∞ сходится к элементу этого же пространства.

Пусть f_n фундаментальная последовательность из ℓ^∞. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

Заметим, что $||f_n - f_m|| = \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f_m(x)| \geqslant |f_n(x) - f_m(x)|$ при $x \in E$.

То есть $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$, где $f : E \mapsto \mathbb{R}$ - некоторая функция.

Осталось понять, что $f \in \ell^\infty(E)$, т.е. что f - ограниченная функция.

Подставим $\varepsilon = 1$ в определение равномерной сходимости. Для него найдется N, т.ч. при $n \geqslant N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1$ при всех $x \in E$. Тогда по неравенству треугольника :

$$|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < |f_n(x)| + 1 \leqslant ||f_n|| + 1$$

Но т.к. n - фиксированное число, то $|f(x)|$ не превосходит какого-то фиксированного выражения. Значит f - ограниченная функция. $\square$

3.18. Билет 57: Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса–Зайделя. Пространство $\mathbb{C}(\mathbb{K})$ и его полнота.

Замечание. Момент с лекции: youtu.be
Записи Александра Игоревича с лекции: drive.google

Теорема 3.20.

$f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

И f_n непрерывна в точке $a \in E$, $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

Если a не предельная точка в E, то все функции там непрерывны.

Пусть a – предельная точка множества E.

Тогда надо проверить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$

По определению равномерной сходимости $\exists N\ \forall n > N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$

Зафиксируем $n > N$. Функция f_n непрерывна в точке a.

$\exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x - a| < \delta\ |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$

Если $|x - a| < \delta$ и $x \in E$, то

$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ $\square$

Следствие (теорема Стокса-Зайделя).

$f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f \in C(E)$.

***Определение* 3.7.**

Пусть K – компакт в каком-нибудь метрическом пространстве.

$C(K) := \{f : K \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ \text{непрерывные}\}$

$||f||_{C(K)} := \max\limits_{x\in K} |f(x)|$.

(Максимум и супремум в этом случае одно и то же, т.е. уже проверили, что это норма)

Замечание.

$C(K)$ подпространство $l^\infty(K)$.

Теорема 3.21.

Замкнутое подпространство полного пространства – полное.

Доказательство.

$Y \subset X$ Y – замкнуто.

$\implies \{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в Y.

$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$

$\implies x$ – предельная точка множества Y.

И т.к. Y замкнуто, то $x \in Y$.

$\implies x_n$ сходится к x в пространстве Y. □

Следствие.

$C(K)$ – полное

Доказательство.

Надо доказать, что $C(K)$ замкнуто в $l^\infty(K)$.

Т.е. если $||f_n - f|| \to 0$, где $f_n \in C(K)$, то $f \in C(K)$.

Но это теорема Стокса-Зайделя. □

3.19. Билет 58: Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Замечание. Момент с лекции: youtu.be
Записи Александра Игоревича с лекции: drive.google

***Определение* 3.8.**

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – функциональный ряд

$S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ – частичная сумма.

Если S_n поточечно сходится к S,то ряд поточечно сходится, если $S_n \rightrightarrows S$, то ряд равномерно сходится.

***Определение* 3.9.**

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно

$r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$ – остаток функции ряда.

Теорема 3.22.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff r_n \rightrightarrows 0$ на E.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на $E \iff r_n = S - S_n \rightrightarrows 0$ □

Теорема 3.23 (Критерий Коши).

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

$$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \ |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \epsilon$$

Доказательство.

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\iff$ $S_n \rightrightarrows S$ на E

$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \forall x \in E \ |S_m - S_n| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \ |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$

$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| = |\sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)| = |S_{n+p} - S_n|$ □

Следствие (Необходимое условие сходимости функции ряда).

Если ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, то $u_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство.

Возьмем критерий Коши и $p = 1$.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in E \ |u_{n+1}(x)| < \epsilon$

Это определение равномерной сходимости $u_n \rightrightarrows 0$. □

Замечание.

1. Если $\exists x_n \in E$, для которой $u_n(x_n) \not\to 0$, то $\sum u_n(x)$ не сходится равномерно.
2. Из того, что ряд $\sum u_n(x_n)$ расходится ничего не следует

Пример.

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n}$ – расходится.

3.20. Билет 59: Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры.

Теорема 3.24 (Признак сравнения).

$u_n, v_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\forall x \in E \ |u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится, можно применить признак Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \, \forall p \in \mathbb{N} \, \forall x \in E \text{ выполняется } \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon$$

Из условия теоремы можно записать неравенство на частичные суммы.

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(n) \right| \geqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \geqslant \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right|$$

Получили, что критерий Коши выполняется для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, значит он сходится равномерно.

□

Теорема 3.25 (Признак Вейерштрасса)**.**

$u_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\exists \{a_n\} : |u_n(x)| \leqslant a_n \forall x \in E$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

$v_n(x) := a_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - равномерно сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - равномерно сходится по признаку сравнения. □

Следствие.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ - равномерно сходится, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Воспользуемся признаком сравнения для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ □

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ - равномерно сходится на $\mathbb{R}$

Доказательство.

$\{a_n\} := \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся признаком Вейерштрасса для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ и a_n □

Замечание.

Абсолютная и равномерная сходимости - разные вещи.

1. Ряд сходится абсолютно, но не сходится равномерно.

   Пример.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на $(-1; 1)$

   Доказательство.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n| = \frac{1}{1-|x|}$ - геометрическая прогрессия. Действительно, такой ряд сходится абсолютно.
   По критерию Коши докажем, что равномерной сходимости нет.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \, \exists p \in \mathbb{N} \, \exists \overline{x} \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_n(\overline{x}) \right| \geqslant \varepsilon$$

   При выполнении такого условия равномерной сходимости не будет. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = 0$, $\overline{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. □

2. Ряд сходится равномерно, но не сходится абсолютно.

   Пример.

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится равномерно, но нет абсолютной сходимости.

3. Также бывает, что ряд сходится абсолютно, равномерно, но ряд из модулей не сходится равномерно. Пример в следующем вопросе. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

3.21. Билет 60: Признаки Дирихле и Лейбница для равномерной сходимости

Теорема 3.26 (Признак Дирихле (Дурихле)).

$a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$

1. $|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)| \leqslant K \, \forall n \, \forall x \in E$
2. $b_n \rightrightarrows 0$ на E
3. $\forall x \in E \, b_n(x)$ - монотонны по n

При выполнении этих условий $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ - равномерно сходится на E.

Доказательство.

$A_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$. $|A_n(x)| \leqslant K$, по условию. Воспользуемся преобразованием Абеля (если забыли доказательство - оно в вопросе 46). Его корректность для функциональных рядов можно проверить, повторив обычное доказательсвто с приписанным '(x)'

$$\sum_{k=1}^{n} a_n(x) b_n(x) = A_n(x) b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

- $A_n(x) b_n(x) \rightrightarrows 0$ - как произведение равномерно ограниченной на равномерно стремящуюся к нулю
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ - равномерно сходится. Воспользуемся для доказательства этого факта признаком сравнения.
  $u_k(x) := A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ и $v_n(x) := K|b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ Осталось доказать, что $v_n(x)$ - равномерно сходится. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| \underbrace{=}_{b_n(x) - \text{монотонные}} \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) - b_{n+1}(x)\right|$. Посмотрим на частичные суммы:

  $$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x) - b_{k+1}(x)\right| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \rightrightarrows |b_1(x)|$$

  Докажем последний переход:

  $$||b_1(x) - b_{n+1}(x)| - b_1(x)| \leqslant |b_1(x) - b_{n+1}(x) - b_1(x)| = |b_{n+1}(x)| \underbrace{\rightrightarrows}_{\text{по условию}} 0$$

  Так как частичные суммы равномерно сходятся, то и сам ряд равномерно сходится.

□

Теорема 3.27 (Признак Лейбница).

$b_n : E \mapsto \mathbb{R}$

1. $\forall x \in E \, b_n(x) \geqslant 0$ и монотонны
2. $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на E.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.
$a_n(x) := (-1)^{n-1}$. И воспользуемся признаком Дирихле для $a_n(x)$ и $b_n(x)$. Частичные суммы $a_n(x)$ либо 1, либо 0 $\Rightarrow$ ограничены. □

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ - равномерно сходитя на $(0;1)$

Доказательство.
$\frac{x^n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$, также $\frac{x^n}{n}$ монотонная. Получаем равномерную сходимость ряда по Лейбницу. Также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}|$ - сходится, так как меньше геометрической прогрессии. **НО** такой ряд не сходится равномерно по критерию Коши.

□

3.22. Билет 61: Признак Абеля

Утверждение 3.28 (Признак Абеля)**.**

$$\begin{cases} \sum a_n(x) & \text{равномерно сходится} \\ |b_n(x)| \le K & \forall n, \forall x \\ b_n(x) & \text{монотонны по } n \text{ при фиксированном } x \end{cases} \Longrightarrow \sum a_n b_n - \text{равномерно сходится}$$

Доказательство.
здесь все ряды - **функциональные, просто писать каждый раз x не хочется**
Проверяем условие критерия Коши.
$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}b_{n+k}$ - заменили пределы суммы, перекинув n в индексы.
$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}b_{n+k} = (A_{n+p} - A_n)b_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1}(A_{n+k} - A_n)\cdot(b_{n+k} - b_{n+k+1})$ - применили преобразование Абеля
$|A_{n+p} - A_n||b_{n+p}| \le K|A_{n+p} - A_n| = K|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon K, \forall x \in E, \forall n \ge N$ - критерий Коши для $\sum a_n$
$\sum_{k=1}^{p-1}(A_{n+k} - A_n)(b_{n+k} - b_{n+k+1}) \le \sum_{k=1}^{p-1}|A_{n+k} - A_n||b_{n+k} - b_{n+k+1}| < \varepsilon\sum_{k=1}^{p-1}|b_{n+k} - b_{n+k+1}|$ - т.к. первый модуль меньше ε при $n \ge N$
$\varepsilon\sum_{k=1}^{p-1}|b_{n+k} - b_{n+k+1}| = \varepsilon|\sum_{k=1}^{p-1}(b_{n+k} - b_{n+k+1})| = \varepsilon|b_{n+1} - b_{n+p}| \le \varepsilon(|b_{n+1}| + |b_{n+p}|) \le 2K\varepsilon$
Условие критерия Коши выполняется, значит наш ряд равномерно сходится. □

3.23. Билет 62: Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не сходится равномерно абсолютно. Признак Динни

Пример.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ на $(0,1)$.

Равномерная сходимость: по признаку Лейбница с $b_n(x) = \frac{x^n}{n}$
Абсолютная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$

Но этот ряд не сходится равномерно абсолютно.
Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{10}$

$$\forall n \quad \exists x \in (0,1) \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \geq n(\frac{x^{2n}}{2n}) = \frac{x^{2n}}{2} > \frac{1}{10}$$

Утверждение 3.29.

K - компакт.

$$\begin{cases} u_n \in C(K) & u_n \geq 0 \\ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) & u_n \in C(K) \end{cases}$$

$\implies \sum u_n$ - равномерно сходится.

Доказательство.

помним, все ряды - функциональные
$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n$ - убывают по n при фиксированном x.
$r_n \rightrightarrows 0$?
Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \forall x \in K \quad r_n < \varepsilon$
Пусть такого n не существует. Тогда $\forall n \quad \exists x_n \in K : r_n(x_n) \geq \varepsilon$
x_n - последовательность K. Тогда у неё есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$ (т.к. K - компакт)
Рассмотрим r_m.
$n_k \geq m \implies \varepsilon \leq r_{n_k}(x_{n_k}) \leq r_m(x_{n_k}) \to r_m(x_0) \geq \varepsilon$ - верно при всех m.
Значит, $\sum u_n$ - расходится, что неверно. Значит, наше предположение неверно, и $r_n \rightrightarrows 0$. □

3.24. Билет 63: Теорема о перестановке пределов и о перестановке предела и суммы.

Теорема 3.30 (О перестановке пределов)**.**

$f_n, f : E \mapsto \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ на E, a – предельная точка E, $b_n := \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \in \mathbb{R}$.
Тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и они равны.

Сначала докажем сходимость b_n. Проверим, что b_n фундаментальна.
Доказательство.

По критерию Коши для равномерной сходимости имеем:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m \geq N \ \forall x \in E \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$
Сделаем переход к пределу в неравенстве(устремим $x \to a$, строгое неравенство превратилось в нестрогое), получим:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m \geq N \ |b_n - b_m| \leq \varepsilon$
А это и есть определение фундаментальной последовательности! Значит, b_n фундаментальна. Значит, по критерию Коши для последовательностей имеет конечный предел.

Пусть $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$. Осталось проверить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда автоматически докажем существование и равенство.
Посмотрим на разность $|f(x) - b|$. Творчески оценим её по неравенству треугольника следующим образом:

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)|$$

Заметим, что это верно для любых n. Теперь посмотрим по отдельности на каждое слогаемое в правой части неравенства. По определению предела $\forall n \geq N_1 \ |b_n - b| < \varepsilon$. По определению равномерной сходимости $\forall n \geq N_2 \ \forall x \in E \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем $\max(N_1, N_2)$. Теперь посмотрим на $|f_n(x) - b_n|$. Мы знаем, что $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$(формулировка теоремы). Значит, мы можем сказать, что $|f_n(x) - b_n| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Получили

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

Собирая всё в кучу, получим определение предела:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ если $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < 3\varepsilon$.
Значит, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Что и требовалось доказать.

□

Теорема 3.31 (О перестановке предела и суммы)**.**
$u_n : E \mapsto \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E и $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = b_n$
Тогда $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$ и все эти пределы конечны.

Доказательство.
Посмотрим на частичные суммы $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. Так как сумма конечная, можно написать так: $\lim\limits_{x\to a} S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k := B_n$. Мы также знаем, что $S_n \rightrightarrows S$.
Тогда по предыдущей теореме $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{x\to a} S(x)$. А это как раз то, что нам нужно. □

Следствие.
Если u_n непрерывны в точке a и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке a.

Доказательство.
$\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = u_n(a) =: b_n$(по непрерывности).
По предыдущей теореме $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$, а это и есть непрерывность.

□

3.25. Билет 64: Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности(ряда). Существенность равномерности.

Теорема 3.32 (О перестановке предела и суммы)**.**
$f_n \in C[a, b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.
Тогда $\int\limits_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dt$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^x f_n(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| = \left|\int\limits_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \leq \int\limits_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \leq$$
$$\leq (x - a) \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leq (b - a) \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 0$$

Почему последнее стремится к 0? Потому что была теорема про равномерную сходимость, только в той теореме был супремум. Более того, последнее выражение ещё и от x не зависит, значит

$$\max_x \left| \int\limits_a^x f_n(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt \right| \longrightarrow 0$$

Значит, по той же теореме, где был изначально супремум, получаем равномерную сходимость. Что и требовалось доказать. □

Следствие.

$u_n \in C[a, b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n(t)dt$

Доказательство.

$S_n \rightrightarrows S \Rightarrow \int\limits_a^x S_n \rightrightarrows \int\limits_a^x S$. В то же время $\int\limits_a^x S_n = \int\limits_a^x \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^x u_k(x)$. Мы знаем, что такая сумма интегралов имеет конечный предел, а такая сумма интегралов это просто частичная сумма ряда. Значит, мы знаем, что частичная сумма ряда имеет некоторый предел. Значит, просто сумма ряда это и есть тот самый предел.

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n(t) = \int\limits_a^x S = \int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ □

Замечание.

Поточечной сходимости не хватает

Пример. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0, 1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\int\limits_0^1 f_n(t)dt = \int\limits_0^1 nte^{-nt^2}dt = [s = nt^2] = \frac{1}{2}\int\limits_0^n e^{-s}ds = -\frac{1}{2}e^{-s}|_0^n = \frac{1-e^{-n}}{2} \nrightarrow 0$$

А предельная функция 0. Что-то не то...

3.26. Билет 65: NAME

3.27. Билет 66: NAME

3.28. Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

Теорема 3.33.

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится $\implies$ по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ сходится равномерно. □

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

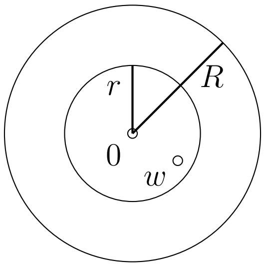
Контрпимер $R = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightrightarrows 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаминатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окресности. Берем r, т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция $\Longrightarrow$ в круге $|z| < r$ сумма непрерывна $\Longrightarrow$ есть непрерывность суммы и в w. В силу произольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



$\square$

Теорема 3.34 (Абеля)**.**

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (нет зависимости от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \quad \Longrightarrow$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. $\square$

Следствие.

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim\limits_{x \to R-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

3.29. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim}\, x_n y_n = \lim x_n \,\overline{\lim}\, y_n$.

Доказательство.

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim}\, y_n, C = \overline{\lim}\, x_n y_n$. (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$, т.ч. $x_{n_k}y_{n_k} \to C$. $\lim x_{n_k}y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$, равенство есть, т.к. существует предел слева и предел x_{n_k}. Из равенства следует, что $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leqslant B \implies C \leqslant AB$.

$\exists m_k$, т.ч. $y_{n_k} \to B$. $\lim x_{m_k}y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k}y_{m_k} = AB \leqslant C$.

Итого равенство. □

Следствие.

Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Домножение на z не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^n$.

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что $R_1 = R_2 = R_3$. □

Теорема 3.35 (Почленное интегрирование степенного ряда)**.**

R – радиус сходимости ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Тогда при $|x-x_0| < R$

$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.

Доказательство.

На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно (теорема из билета 67) $\implies f \in C[x_0, x]$ и можно интегрировать почленно $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$. □

3.30. Билет 69: Комплексная диффернцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

***Определение* 3.10.**

$f : E \mapsto \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathrm{Int} E$. Если существует $k \in \mathbb{C}$, такое что $f(z) = f(z_0) + k(z-z_0) + o(z-z_0)$ при $z \to z_0$, то f – **комплексно-дифференцируема в точке** z_0 и k – **производная** f в точке z_0.

Замечание.

1. $k = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$
2. Существование производной равносильно дифференцированию

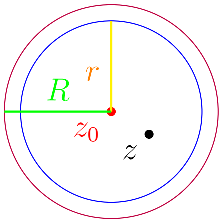
Теорема 3.36.

R – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

Тогда f – бесконечно дифференцируема в круге $|z-z_0| < R$ и

$f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$

Доказательство.



Докажем индукцию по m. Рассмотрим $m = 1$ и $z_0 = 0$ (про z_0 для простоты). Возьмем $|z| < R$ и подберем такое r, что $|z| < r < R$ (картинка выше для пояснения). Возьмем $|w| < r$

$$f'(z) = \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w\to z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n w^n - a_n z^n}{w - z} = \lim_{w\to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})$$

Первое равенство – просто вынесли ряд. Второе – просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по $|w| < r$ последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})| \leqslant |a_n|(|w|^{n-1} + |w|^{n-2}|z| + \dots + |z|^{n-1}) \leqslant |a_n| n r^{n-1}$$

Второе неравенство, так как $|w| < r$ и $z < r$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ сходится, так как у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ радиус сходимости $R > r$. Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w\to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w\to z} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Если применить эту форму m раз, то получим искомую формулу. □

3.31. Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

Теорема 3.37 (единственность разложения функции в степенной ряд)**.**
Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ при $|z - z_0| < R$ – радиус сходимости.

Тогда ряд раскладывается единственным образом, причем коэффициенты в этом ряду будут выглядеть так: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.
По предыдущей теореме:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Подставим $z = z_0$. Тогда все слагаемые кроме первого занулятся и получим:

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m = m! a_m$$

. Отсюда $a_m = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

***Определение* 3.11.**

Ряд Тейлора функции f в точке z_0 называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

***Определение* 3.12.**

Функция называется **аналитической** в точке z_0, если она является суммой своего ряда Тейлора для точки z_0 в окрестности точки z_0.

Ряд Тейлора мы можем писать только, если функция бесконечно дифферинцируема. Но бывают бесконечно дифференцируемые функции, которые не являются аналитическими, например:

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

Идем по индукции ($n \to n+1$), проверяем есть ли формула для разных производных:

База: Для f: $f = P_0 e^{-1/x^2}$, то есть $P_0 \equiv 1$

Переход:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2})' =$$

$$= P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2}\frac{1}{x^3} + P_n'(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} + P_n(x)(-3n)x^{-3n-1}e^{-1/x^2} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}}P_{n+1}(x)$$

Найдем $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$ Докажем по индукции ($n-1 \to n$), что $f^{(n)}(0) = 0$.

Переход:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\infty} e^{-y^2}y^{3n+1}P_n\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$P_n\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[y\to\infty]{} P_n(0)$ – константа

$e^{-y^2}y^{3n+1} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$, так как e^{-y^2} убывает быстрее.

Значит ряд Тейлора равен 0, но функция не 0 в точках $x \neq 0$. Значит функция не аналитическая.

3.32. Билет 71: NAME

3.33. Билет 72: NAME

4. Функции нескольких переменных

4.1. Билет 73: Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент.

***Определение* 4.1.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}^m \quad a \in \operatorname{Int} E, E \subset \mathbb{R}^n$

f - дифференцируема в точке a, если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$,

такое что $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$, где $\dfrac{\alpha(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

Замечание.

Заметим, что в нашем определении все 0 - векторы, ровно как и аргументы.

Например, $h \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(h) \in \mathbb{R}^m$

Замечание.

Несложно убедиться, что данное определение ровно такое же, как и определение,
которое давалось, когда мы говорили про дифференцируемость функции
одной переменной. С той лишь разницей, что тогда вместо T у нас было
просто домножение на константу (тоже линейное отображение, но тривиальное),
а добавкой была $o(||h||)$ (но у нас записано тоже самое, ведь по сути $\alpha(h) = o(||h||)$).
Получается, что дифференцируемость функции от одной переменной,
про которую мы говорили раньше - это частный случай при $n = m = 1$.

***Определение* 4.2.**

T - дифференциал функции f в точке a. Обозначается чаще всего $d_a f$

Замечание.

Если T существует, то оно определено однозначно.

Зафиксируем $h \in R^n$. $f(a+th) = f(a) + T(th) + \alpha(th)$, где $t \in R$

Так как T - линейно, то $T(th) = tT(h)$

$Th = \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t} - \dfrac{\alpha(th)}{t}$ Перейдем к пределу при $t \to 0$

Так можно сделать, потому что $\dfrac{\alpha(th)}{t} \to 0$ при $t \to 0$,

поскольку это записано в определении дифференцируемости функции (фиксированное h).

Тогда получили:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = Th$$

Значит это отображение однозначно.

***Определение* 4.3.**

Матрица линейного оператора T - матрица Якоби функции f в точке a

Обозначается матрица Т: $f'(a)$

Данное обозначение намекает, что эта матрица - некий аналог производной для функции одной переменной

Замечание.

Дифференцируемость функции f в точке a влечет непрерывность f в точке a.

$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$.

Перейдем к пределу при $h \to 0$, получим:

$f(a) + Th + \alpha(h) \to f(a) + 0 + 0 = f(a)$,

так как $\alpha(h)$ при делении на $||h||$ уже будет стремится к 0, здесь же тем более

Получили определение непрерывности

Пример Важный частный случай $m = 1$**.**

Получаем отображение $f : E \mapsto \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$

Мы из вектора сделали число. Это скалярное произведение на какой-то вектор.

Потому что можно представить, что умножаем матрицу на вектор и получаем вектор размера 1.

Откуда получаем, что эта матрица - это строчка размера n.

Ну а это - скалярное произведение.

$f(a+h) = f(a) + \langle v, h\rangle + \alpha(h)$ для некоторого $v \in R^n$

***Определение* 4.4.**

v - градиент функции f в точке a

Обозначается: $\operatorname{grad} f$ или ∇f

4.2. Билет 74: Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений

Разберем несколько примеров дифференцируемых отображений.

Пример.

$f(x) = const = c$

$f(a+h) = f(a)$

$T \equiv 0$, $\alpha \equiv 0$

Пример.

f - линейное отображение

$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + T(h)$

$T = f$, $\alpha \equiv 0$

***Определение* 4.5.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n$

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ $f_k : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ - координатные функции

Теорема 4.1.

Дифференцируемость функции f в точке a равносильна дифференцируемости в точке a

всех ее координатных функций.

Доказательство.

$f : E \mapsto R^m, E \subset \mathbb{R}^n$

1. $\Rightarrow f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$, где $\alpha(h) = o(||h||)$

   Распишем определение в виде векторного равенства:

   $$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \\ \vdots \\ T_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \alpha_2(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix}$$

   Рассмотрим конкретную координату:

   $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$

   $T_k h$ - произведение строки матрицы на вектор, поэтому - линейное отображение (по сути просто скалярное произведение).

   Необходимо показать, что $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

   Достаточно заметить, что так как $||\alpha(h)|| = \sqrt{\sum \alpha_k(h)^2}$, то $|\alpha_k(h)| \leqslant ||\alpha(h)||$

   Но тогда $\dfrac{|\alpha_k(h)|}{||h||} \leqslant \dfrac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$

   Отсюда получаем вывод, что $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$, получается,

   что доказали для всех координатных функций.

2. $\Leftarrow$

   Знаем, что $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$ и $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

   Соберем все это в один вектор, из строчек T получаем матрицу, тогда в результате:

   $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$

   Надо проверить, что $\dfrac{\alpha(h)}{||h||} \to 0$, т. е. $\dfrac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$

   $$\frac{||\alpha(h)||}{||h||} = \frac{\sqrt{\alpha_1(h)^2 + \ldots + \alpha_m(h)^2}}{||h||} = \sqrt{\frac{\alpha_1(h)^2}{||h||^2} + \ldots + \frac{\alpha_m(h)^2}{||h||^2}} \to 0$$

□

Следствие.

Строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций.

Доказательство.

Строки матрицы Якоби - это те самые T_k, которые встречались в доказательстве теоремы.

Тогда можно заметить, что $T_k h = \langle T_k^T, h \rangle$

Отсюда получаем, что строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций. □

4.3. Билет 75: NAME

4.4. Билет 76: NAME

4.5. Билет 77: NAME

4.6. Билет 78: NAME

4.7. Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

Теорема 4.2.

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна и дифференцируема на (a, b). Тогда $\exists c \quad \in (a, b)$, такая что $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\| (b - a)$

Доказательство.

$\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$\varphi(x)$ удовлетворяет условию одномерной теоремы Лагранжа

$\exists c \quad \in (a, b)$, т.ч. $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(c')(b - a) = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a)$

$\varphi'(x) = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle + \langle f(x), (f(b) - f(a))' \rangle = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle$

$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$

$\|f(b) - f(a)\|^2 = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a) \leqslant \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\| (b - a)$ (Коши-Буняковский)

$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|f'(c)\| (b - a)$ □

Замечание. Равенство может никогда не достигаться

$f(x) = (\cos x, \sin x) : [0, 2\Pi] \mapsto \mathbb{R}^2$

$f(0) = (1, 0) = f(2\Pi)$

$f(2\Pi) - f(0) = (0, 0) \implies \|f(2\Pi) - f(0)\| = 0$

$f'(x) = ((\cos x)', (\sin x)') = (-\sin x, \cos x)$

$\|f'(x)\| = 1 \implies \|f'(c)\| (2\Pi - 0) = 2\Pi > \|f(2\Pi) - f(0)\| = 0$

4.8. Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости.

Теорема 4.3.

$f : E \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a \in IntE.$

В окрестности точки a существуют все частные производные и они непрерывны в точке a.

Тогда f дифференцируема в точке a.

Доказательство.

По сути, мы знаем, как должно быть устроено линейное отображение из определения дифференцируемости, т.к. нам известны частные производные (подробнее об этом расписано в билете 76)

$R(h) := f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a) h_k$

Надо доказать, что $\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ при $h \to 0$

Заведем вспомогательные вектора: $b_k = (a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1}, ..., a_n)$, заметим, что тогда получается $b_0 = a, b_n = a + h$

Рассмотрим вспомогательные функции одной переменной $F_k(t) := f(b_{k-1} + th_k e_k)$, здесь e_k - это стандартный вектор

Запишем в координатном виде: $F_k(t) := f(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + th_k, a_{k+1}, ..., a_n)$

Применим одномерную теорему Лагранжа: $\underbrace{F_k(1) - F_k(0)}_{f(b_k)-f(b_{k-1})} = F'_k(\Theta_k) = h_k f'_{x_k}(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1}, ..., a_n) = h_k f'_{x_k}(c_k)$ для некоторой $\Theta_k \in (0, 1)$

Получили, что $f(b_k) - f(b_{k-1}) = h_k f'_{x_k}(c_k)$. Сложим все получившиеся равенства: $f(b_n) - f(b_0) = f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(c_k) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(a) + \sum_{k=1}^n h_k(f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$

Заметим, что $\sum_{k=1}^n h_k(f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$ - формула для остатка $R(h)$

$|R(h)| \leqslant \|h\| \left(\sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}}$(КБШ)

$\iff \frac{R(h)}{\|h\|} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $h \to 0$ по непрерывности частных производных

□

Замечание 1. В формулировке теоремы интересуемся дифференцируемостью скалярной функции, но дифференцируемость векторнозначной функции равносильна дифференцируемости каждой ее координатной функции, которая есть скалярная функция.

Замечание 2. Можно не требовать непрерывность ровно одной из частных производных

Доказательство.

Не требуем непрерывность f'_{x_1} в точке a. Необходимо, чтобы $f'_{x_1}(c_1) - f'_{x_1}(a) \to 0$.

Нас интересует разность $f(b_1) - f(b_0) = f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)$. То есть получили функцию, у которой последние координаты зафиксированы, а первую меняем. Такая функция дифференцируема в точке a_1 по определению частной производной.

$f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) + f'_{x_1}(a_1, ..., a_n)h_1 + o(h_1)$

$f(b_1) - f(b_0) = f'_{x_1}(a)h_1 + o(h_1)$ □

Замечание 3. Дифференцируемость в точке не дает существование част.производных в окрестности и тем более их непрерывность

Пример.

$f(x, y) = x^2 + y^2$, если ровно одно из чисел x или y рационально

$f(x, y) = 0$ иначе

f непрерывна только в точке (0, 0), в остальных точках нет непрерывности ни по какому направлению

Проверим дифференцируемость в (0, 0): $f(h, k) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$

$f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$, верно, т.к. $0 \leqslant f(h, k) \leqslant h^2 + k^2$

4.9. Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство

***Определение* 4.6.**

$f : E \to \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \operatorname{Int} E$

f – непрерывно дифференцируема в точке a, если

f дифференцируема в окрестности точки a и

$d_x f$ непрерывна в точке a ($\|d_x f - d_a f\| \to 0$ при $x \to a$)

Теорема 4.4.

f – непрерывно дифференцируема в точке $a \iff$

все частные производные f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a.

Доказательство.

"$\implies$" Разложим f на координатные функции, рассмотрим одну из них - f_k. Продифференцируем её по какому-то x_j. Рассмотрим модуль разности значений в точках x и a:

$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right|$

для доказательства оценим эту разность сверху чем-то стремящимся к 0.

Так как $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \langle d_x f(e_j), e_k\rangle$, то

$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right| = |\langle d_x f(e_j) - d_a f(e_j), e_k\rangle| \leqslant \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \, \|e_k\| =$

$= \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \leqslant \|d_x f - d_a f\| \, \|e_j\| = \|d_x f - d_a f\| \to 0$

"$\impliedby$"

Рассмотрим $\|d_x f - d_a f\|^2$

Воспользуемся ранее доказаной теоремой, что квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов её коэффициентов:

$\|d_x f - d_a f\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a))^2 \to 0$, так как

из $x \to a$ и непрерывности частных производных следует, что каждое слагаемое стремится к 0, их конечное кол-во, значит, и сумма стремится к 0, поэтому $\|d_x f - d_a f\|^2 \to 0$, а тогда и $\|d_x f - d_a f\| \to 0$ □

4.10. Билет 82: Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в $\mathbb{R}^2$

Определение 4.7.

$f : E \to \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открытое множество.

$\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $\quad f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$

Т.е. сначала фиксируем x_k (как будто параметр), считаем производную по x_j, затем наоборот.

Это частная производная второго порядка, можно писать и большие аналогично.

Пример.

$f(x, y) = x^y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}$

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4-y^4)-4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}f(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$

Но в силу антисимметричности x и y.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$

Теорема 4.5.

$f : E \to \mathbb{R}\ \ E \subset \mathbb{R}^2\ \ (x_0, y_0) \in \operatorname{Int} E$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ещё и непрерывна в ней

Тогда существует и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в точке (x_0, y_0).

Более того $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Доказательство.

Рассмотрим $\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$, где k - некоторое малое число. φ дифф. в окресности точки x_0 (по условию теоремы), поэтому можем применить к ней т. Лагранжа (одномерную):

$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h)\ \ \theta_1 \in (0,1)$

Обозначим $\Delta = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$.

$\Delta = h(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0)) = h(\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0)) =$
$= hk\tilde{\varphi}'(y_0 + \theta_2 k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$

$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

$\psi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$

$\Delta = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

Получили, что

$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

(Последнее – в силу непрерывности этих производных, устремили $h, k \to 0$)

□

***Определение* 4.8.**

$f : D \to \mathbb{R}\ \ R \subset \mathbb{R}^n\ \ D$ – открыто

f – r раз непрерывно дифференцируема $=$ r-гладкая,

если все частичные производные до r-ого порядка существуют и непрерывны.

Обозначение – $C^r(D)$

Теорема 4.6.

$f : D \to \mathbb{R}\ \ D \subset \mathbb{R}^n\ \ D$ – открыто $f \in C^r(D)$

$i_1, i_2, ..., i_r$ – перестановка $j_1, j_2, ..., j_r$
Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}}$

Доказательство.

Предыдущая теорема говорит, что любая транспозиция не меняет частной производной. А значит, можем всегда переставить все в неубывающем порядке индексов. □

4.11. Билет 83: NAME

4.12. Билет 84: NAME

4.13. Билет 85: NAME

4.14. Билет 86: NAME

4.15. Билет 87: Теорема Банаха о сжатии. Следствие. Метод касательных для решения уравнения

Теорема 4.7 (Теорема Банаха о сжатии)**.**

X – полное метрическое пространство. $f : X \mapsto X,\ \ 0 < \lambda < 1$ и $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$.

Тогда существует единственная неподвижная точка, такая что $f(x) = x$.

Доказательство.

- Единственность. От противного. Пусть неподвижных точек две: $\widetilde{x}$ и x. Тогда $\rho(x,\ \widetilde{x}) = \rho(f(x),\ f(\widetilde{x})) \leqslant \lambda\rho(x,\ \widetilde{x})$. Но $\lambda < 1$. Противоречие.

- Существование.

  Возьмем произвольную начальную точку $x_0 \in X$ и $x_{n+1} = f(x_n)$. Докажем, что это фундаментальная последовательность.

  $$\rho(x_n,\ x_{n+k}) = \rho(f(x_{n-1}),\ f(x_{n-1+k})) \leqslant \lambda\rho(x_{n-1},\ x_{n-1+k}) \leqslant ... \leqslant \lambda^n\rho(x_0, x_k)$$

  Попытаемся оценить $\rho(x_0, x_k)$ по неравенству треугольника.

  $\rho(x_0,\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \rho(x_1,\ x_2) + ... + \rho(x_{k-1},\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \lambda\rho(x_0,\ x_1) + ... + \lambda^{k-1}\rho(x_0,\ x_1)$

  А это убывающая геометрическая прогрессия. Тогда,
  $\rho(x_0,\ x_k) < \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Вернемся к $\rho(x_n,\ x_{n+k})$. Теперь мы можем это оценить:

  $$\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda} \longrightarrow 0$$

  Значит, рассматриваемая последовательность фундаментальна. Значит, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n =: x^*$.

  $$f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

  По непрерывности функции f. Откуда непрерывность? Рассмотрим: $\rho(f(x),\ f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$. f это функция, уменьшающая расстояния. Поэтому, если $y \to x$, то $\rho(x,\ y) \to 0$. Тогда и $f(y) \to f(x)$. Значит, x^* и есть неподвижная точка. Что и требовалось доказать.

□

Утверждение 4.8.

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \lambda^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda}$$

Доказательство.
Это следует из $\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Возьмем и устремим k к бесконечности. □

Следствие.
X - полное метрическое пространство, $f, g : X \mapsto X$ - сжатия с коэф. $\lambda \in (0, 1)$. $x = f(x)$ и $y = g(y)$ - неподвижные точки.

Тогда $\rho(x,\ y) \leqslant \frac{\rho(f(x),\ g(x))}{1-\lambda}$

Доказательство.

$$\rho(x,\ y) = \rho(f(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x),\ g(x)) + \rho(g(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x), g(x)) + \lambda\rho(x, y).$$

Добавили и вычли $g(x)$, расскрыли по нер-ву треугольника, оценили расстояние через сжатие, получили то, что нам нужно. □

Пример Метод касательных (метод Ньютона).
$f \in C^2[a, x_0]$, $f'(a) =: \mu > 0$, $f(a) = 0$ и f строго выпукла и строго монотонна. Хотим найти корень функции(быстрее чем бинпоиск).

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} : [a, x_0] \mapsto [a, x_0]$.

Почему она действует в тот же самый отрезок?

Понятно, что $g(x) \leqslant x$, так как из x мы постоянно что-то вычитаем + f f' не отрицаительны. Более того:

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) < f'(x)(x - a), c \in [a, x_0]$$

$f(a) == 0$ + теорема Лагранжа + монотонное убывание производной

Значит, $\frac{f(x)}{f'(x)} < x - a \implies g(x) > a$

Далее докажем, что g - сжатие. Как это можно понять? По теореме Лагранжа. Мы знаем, что разница двух образов есть произведение производной в какой-либо точке t на разницу прообразов. Возьмем производную. Воспользуемся Лагранжем и тем, что производные возрастают. Пусть $M := max(f''(t))$, $t \in [a, x_0]$

$$g'(t) = 1 - \frac{f'(t)f'(t) - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} = \frac{f''(t)f(t)}{(f''(t))^2} < \frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f''(t))^2}$$

$$\frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f''(t))^2} = \frac{f''(t)(t-a)}{f'(t)} \leqslant \frac{f''(t)(t-a)}{\mu} \leqslant \frac{M}{\mu}(t-a) \leqslant \frac{M}{\mu}(x_0 - a) < 1$$

Значит, нужно добавить в условие, что $\frac{M}{\mu} < 1$.

Запустим процесс из предыдущей теоремы о сжатии. Пусть $x_n := g(x_{n-1}) \implies \lim x_n =: x^*$ и x^* - неподвижная точка.

$$x^* = g(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \implies f(x^*) = 0 \iff x^* = a$$

Вот мы и получили способ поиска корня a, причем у нас есть контроль скорости.

Замечание.

Откуда взялась функция g? Пусть y - касательная графика в точке x_0, тогда $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим точку, когда касательная пересечет ось абсцисс, то есть $y = 0$. Тогда $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \implies x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. А это и есть наша функция g.

4.16. Билет 88: Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым

Теорема 4.9 (Оценка на норму обратного отображения)**.**

Если $A : R^n \mapsto R^n$ линейное, $\|Ax\| \geqslant m\|x\|\ \forall x \in R^n$ и $m > 0$, тогда A - обратим и $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$

Доказательство.

Нужно проверить иньективность (точки не склеиваются). Так как A линейно, нужно проверить, что A ничего не переводит в ноль, кроме нуля. То есть доказать, что $Ax = 0 \iff x = 0$.

Если $Ax = 0$, то $\|Ax\| = 0 \geqslant m\|x|\ \implies x = 0$.

Раз точки не склеиваются, значит $\exists A^{-1}$. Осталось оценить ее норму. Пусть $y = A^{-1}x$, тогда...

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leqslant \sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{m\|y\|} = \frac{1}{m}$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 4.10 (Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения)**.**

$f : R^n \mapsto R^m$ дифференцируема в $B_r(a)$ и $\|f'(x)\| \leqslant \alpha \quad \forall x \in B_r(a)$, тогда $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha\|x - y\|$

Доказательство.

$\varphi(t) := \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x)\rangle$.

Воспользуемся линейностью скалярного произведения. Далее применим формулу Лагранжа и возьмем $\xi \in (0, 1)$.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

$$\varphi'(\xi) = \langle ...\rangle' = \langle (f(x + t(y - x)))', f(y) - f(x)\rangle = \langle f'(x + t(y - x))(x + t(y - x))'_t, f(y) - f(x)\rangle =$$

$$= \langle f'(x + t(y - x))(y - x), f(y) - f(x)\rangle$$

Подставим функцию. Оценим скалярное произведение. Замечание: точка $(x + \xi(y - x))$ находится между x и y, а значит живет в шаре $B_r(a)$. Тогда $f'(x + \xi(y - x))$ - это произведение матрицы на вектор.

$$\varphi'(\xi) = \langle f'(x + \xi(y - x), f(y) - f(x))\rangle \leqslant \|f'(x + \xi(y - x))\|\|f(y) - f(x)\| \leqslant \alpha\|y - x\|\|f(y) - f(x)\|$$

Вспомним, откуда мы начинали.

$$\|f(y)-f(x)\|^2=\varphi'(\xi)\leqslant\alpha\|y-x\|\|f(y)-f(x)\|$$

Тогда можно сократить $\|f(y)-f(x)\|$ и теорема будет доказана. □

Теорема 4.11 (Об обратимости оператора близкого к обратимому)**.**
$A : R^n \mapsto R^n$ обратим и $\|B-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда B - обратим, $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|-\|B-A\|}$ и $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|B-A\|}{\|A^{-1}\|^{-1}-\|B-A\|}$

Доказательство.
Воспользуемся неравенством треугольника.

$$\|Bx\|\geqslant\|Ax\|-\|(B-A)x\|\geqslant\frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}-\|B-A\|\|x\|=\|x\|(\frac{1}{\|A^{-1}\|}-\|B-A\|)$$

Откуда взялся предпоследний переход? Заметим, что $\|(B-A)x\| \leqslant \|B-A\|\|x\|$. Так же подметим, что

$$\|A^{-1}\|\|Ax\|\geqslant\|A^{-1}Ax\|=\|x\|\iff\|Ax\|\geqslant\frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

Пусть $m := (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|)$. Тогда $\|Bx\| \geqslant m\|x\|, \forall x \in R^n \implies B$ - обратима и $B^{-1} \leqslant \frac{1}{m}$ по предыдущим теоремам.

Воспользуемся линейностью.

$$B^{-1}=B^{-1}(AA^{-1}-BA^{-1})=B^{-1}(A-B)A^{-1}.$$

$$\|B^{-1}-A^{-1}\|=\|B^{-1}(A-B)A^{-1}\|\leqslant\|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\|\leqslant\frac{\|A-B\|\|A^{-1}\|}{m}$$

Что и требовалось доказать. □

Замечание.
Замечание: самое главное в этой формуле то, что $\|B-A\|$ находится в числителе. Это означает, что при $B \to A$ последовательность обратных будет стремится к обратным. Остальное в этой формуле маловажно.

4.17. Билет 89: NAME

4.18. Билет 90: NAME

4.19. Билет 91: NAME

4.20. Билет 92: NAME

4.21. Билет 93: NAME

4.22. Билет 94: NAME

4.23. Билет 95: NAME

4.24. Билет 96: NAME

4.25. Билет 97: NAME

4.26. Билет 98: NAME

5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME