LINEAIRE ALGEBRA

OLESJ V. BILOUS

1. Vectorruimtes

Definitie 1.1. Een vectorruimte V bevat van elke vector $v \in V$ een unieke schaal λv voor elke scalair $\lambda \in \mathbb{R}$. Het bevat ook de unieke som $v+w$ van elk paar vectoren $v, w \in V$.

Axioma 1.1. De vectorschaal is associatief.

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$$

Axioma 1.2. Er bestaat een unieke nulvector $\mathbf{0}$ die de nulschaal $0v$ is van elke vector $v \in V$.

Axioma 1.3. 1 is de identiteitsschaal: 1v = v.

Axioma 1.4. De vectorsom is associatief.

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

Axioma 1.5. De vectorsom is commutatief.

$$v+w = w+v$$

Axioma 1.6. De vectorschaal is distributief over de vectorsom.

$$\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$$

Axioma 1.7. De vectorschaal is distributief over de scalaire som.

$$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$$

Stelling 1.1. Een lineaire ruimte is een commutatieve groep over de vectorsom.

Bewijs. $v + (-1)v = (1-1)v$ $\square$

Definitie 1.2. Een lineaire combinatie van vectoren is het lineair product van een rij vectoren $\alpha \in V^n$ en een kolom coëfficiënten $v^\alpha \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \alpha v^\alpha &= \sum_i^n v_i^\alpha \alpha_i \\ &= v_1^\alpha \alpha_1 + \ldots + v_n^\alpha \alpha_n \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\alpha \\ \vdots \\ v_n^\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zo is elke lineaire combinatie van vectoren $\alpha \in V^n$ ook een vector $v \in V$.

Definitie 1.3. De schaal λv van een kolom coëfficiënten $v \in \mathbb{R}^n$ is de kolom $w \in \mathbb{R}^n$ met de schalen van de respectieve coëfficiënten.

$$w_i = \lambda v_i$$

Definitie 1.4. De som $u+v$ van coëfficiëntkolommen $u, v \in \mathbb{R}^n$ is de kolom $w \in \mathbb{R}^n$ met de sommen van de respectieve coëfficiënten.

$$w_i = u_i + v_i$$

Stelling 1.2. $\mathbb{R}^n$ is een vectorruimte met nulvector 0_n.

Vandaar dat men een kolom coëfficiënten doorgaans een kolomvector zal noemen. De coëfficiënten heten dan componenten.

Definitie 1.5. De vectorrij $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met n kolomvectoren $A_j \in \mathbb{R}^m$ noemt men een matrix. Componenten van A_j schrijft men als a_{ij}, rijvectoren als A^i.

Definitie 1.6. Transpositie spiegelt een matrix om de diagonaal: $a^T_{ij} = a_{ji}$ voor $a^T \in A^T$.

Gevolg 1.1. Het lineair product van een matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met een kolomvector $v \in \mathbb{R}^n$ is een lineaire combinatie van n kolomvectoren $A_i \in \mathbb{R}^m$.

Gevolg 1.2. Evenwel is vanwege de structuur van de kolomvectorsom elke component van $w = Av$ ook een lineaire combinatie van de componenten van v: $w^T = v^T A^T$.

Gevolg 1.3. Het herhaald lineair product van een vectorrij $\alpha \in V^m$ met de kolomvectoren A_i van de matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vormt een vectorrij $\beta \in V^n$.

Definitie 1.7. Bovenstaande operatie noemen we het herhaald product van α en A.

$$\alpha A = \beta$$

Definitie 1.8. De matrix die een vectorrij op zichzelf afbeeldt noemen we de identiteitsmatrix $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Gevolg 1.4. Het herhaald product van $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ is $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Dit zijn p lineaire combinaties van n kolomvectoren $A_i \in \mathbb{R}^m$ volgens v.

Definitie 1.9. Dit staat ook simpelweg als het matrixproduct bekend.

$$AB = C$$

Gevolg 1.5. Het matrixproduct AB bestaat anderzijds ook uit m lineaire combinaties van n rijvectoren $B^j \in \mathbb{R}^p$, oftewel $(AB)^T = B^T A^T$.

Gevolg 1.6. Het matrixproduct is associatief.

Bewijs. De vectorschaal is distributief over de vectorsom en bovendien associatief. Vandaar dat het in ABC niet uitmaakt of een C_i zijn coëfficiënten verdeelt over AB of een $(BC)_j$ de zijne over A. $\square$

Gevolg 1.7. Inverteerbare vierkante matrices zijn commutatief inverteerbaar.

Bewijs. Weze $AA_r^{-1} = I_n$ in $(AA_r^{-1})A = A(A_r^{-1}A)$. Hierbij moet $A_r^{-1}A$ echter ook dezelfde identiteitsmatrix I_n zijn. $\square$

Definitie 1.10. De spanruimte $span(\alpha)$ van een vectorrij α bevat alle linaire combinaties van α. Men zegt dat α haar spanruimte voortbrengt.

Gevolg 1.8. Een matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die als vectorrij voortbrengend is voor $\mathbb{R}^m$ is rechts inverteerbaar. Als haar rijvectoren $\mathbb{R}^n$ voortbrengen is ze links inverteerbaar.

Bewijs. De identiteitsmatrices bestaan uit vectoren in de respectieve ruimtes. $\square$

Stelling 1.3. De spanruimte van een vectorrij is een vectorruimte.

Bewijs. Uit $\alpha A = \beta$ en $\beta v^\beta = v$ volgt $\alpha A v^\beta = v$. Hieruit mag blijken dat herhaalde lineaire combinaties de spanruimte niet verlaten. $\square$

2. Vrije ruimtes

Evenwel bestaan er vectorruimtes V waar niet elke vector $v \in V$ een lineaire combinatie van elke vectorrij $\alpha \in V^n$ is.

Definitie 2.1. Een vectorrij α is lineair onafhankelijk of vrij als geen enkele van de vectoren $\alpha_i \in \alpha$ een lineaire combinatie is van de overige $\alpha_{j\neq i} \in \alpha$.

Lemma 2.1. Het lineair product van een vrije vectorrij met een kolomvector is enkel de nulvector $\alpha 0^\alpha = \mathbf{0}$ als de kolomvector dat ook is in zijn respectieve ruimte: $0^\alpha = 0_n$.

Bewijs. $-0^\alpha_i \alpha_i = (\alpha \setminus \{\alpha\}_i)\,(0^\alpha \setminus \{0\}^\alpha_i)$ $\square$

Gevolg 2.1. Het herhaald product van een vrije vectorrij met een matrix is vrij als de matrix dat ook is. Als het product vrij is, is de matrix dat ook.

Bewijs. Stel dat $\beta = \alpha A$ lineair afhankelijk is voor $\alpha \in V^m$ vrij. Dan is er een $0^\beta \neq 0_n$ waar $\beta 0^\beta = \mathbf{0}$, zodanig dat $A0^\beta = 0_n$ betekent dat ook A lineair afhankelijk is. Anderzijds is voor $Cc = 0_k$ elke $\gamma Cc = \mathbf{0}$. $\square$

Gevolg 2.2. Het product van vrije matrices is vrij. Als het product vrij is, is de rechtermatrix vrij.

Gevolg 2.3. Een vrije vectorrij heeft voor elke vector in zijn spanruimte slechts één kolom coëfficiënten.

Bewijs.

$$\alpha v^{\alpha 1} = \alpha v^{\alpha 2}$$
$$\alpha(v^{\alpha 1} - v^{\alpha 2}) = \mathbf{0}$$

$\square$

Definitie 2.2. Vanwege het unieke karakter van deze coëfficiënten noemen we ze de coördinaten van een vector met betrekking tot de vrije vectorrij.

Definitie 2.3. Een vrije vectorrij staat gekend als de basis van haar spanruimte.

Definitie 2.4. De coördinaten van een alternatieve basis ten aanzien van een oorspronkelijke vormen een matrix. Deze heet een basistransformatie.

Stelling 2.1. Als β vrij wordt voortgebracht $span(\beta) \subseteq span(\alpha)$ uit α dan bevat β ten hoogste een gelijk aantal vectoren $|\beta| \leq |\alpha|$. Als $|\beta| = |\alpha|$ dan is β voortbrengend $span(\beta) = span(\alpha)$.

Bewijs. Elke β_j heeft minstens één definiete coördinaat $b_{ij} \in B$ voor een zekere α_i.

$$\beta_j = b_{ij}\alpha_i + (\alpha \setminus \{\alpha\}_i)(B_j \setminus \{b\}_{ij})$$

Hieruit blijkt echter dat ook deze α_i afhangt van $\alpha^{(1)} = (\alpha \setminus \{\alpha\}_i) \cup \beta_j$. Vandaar dat ook $\alpha^{(1)}$ voortbrengend is gezien $\alpha \subseteq span(\alpha^{(1)})$.

Daar β vrij en $\alpha^{(m)}$ voortbrengend is heeft β_k telkens $\alpha^{(m)}$-coördinaten buiten $\beta \setminus \{\beta\}_k$ en is deze procedure voor herhaling vatbaar tot we α uitputten. Blijft er nog enige $\beta_l \notin \alpha^{(|\alpha|)}$ over, dan is deze afhankelijk van $\alpha^{(|\alpha|)} \subset \beta$ en ware β nimmer vrij. Geldt evenwel $\alpha^{(|\alpha|)} = \beta$ dan is β voortbrengend. □

Gevolg 2.4. Elk basispaar dat dezelfde ruimte voortbrengt $span(\alpha) = span(\beta)$ heeft gelijke orde.

Gevolg 2.5. Een vectorrij van lagere orde dan een basis is niet voortbrengend voor de spanruimte van de basis.

Gevolg 2.6. Enkel vierkante matrices kunnen commutatief inverteerbaar zijn.

Bewijs. Weze $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met $m < n$ doch $\mathbb{R}^m$ voortbrengend. Dan kan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ weliswaar I_m vormen uit A, maar A kan $\mathbb{R}^n$ niet voortbrengen uit B om tot I_n te komen. □

Gevolg 2.7. De volgende zijn gelijkwaardig voor vierkante matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
- lineaire onafhankelijkheid
- voortbrenging van $\mathbb{R}^n$
- inverteerbaarheid

Stelling 2.2. Basistransformaties vormen een groep over de matrixvermenigvuldiging met de identiteitsmatrix als identiteit: $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Definitie 2.5. Men noemt deze de algemene lineaire groep.

Gevolg 2.8. Een basistransformatie is contravariant aan de geïmpliceerde coördinatentransformatie.

Bewijs. Uit $\alpha A = \beta$ en $\alpha v^\alpha = v$ volgt $\beta A^{-1} v^\alpha = v$. □

3. Genormeerde ruimtes

Nu wensen we een begrip van afstand in te voeren, gekend als de norm $\|v\|$ van een vector $v \in V$. Hiertoe nemen we een willekeurige basis α van V en schrijven er enkele bijzondere eigenschappen aan toe.

Axioma 3.1. Vooreerst is telkens $\|\alpha_i\| = 1$.

Axioma 3.2. Vervolgens is de schaal associatief met de norm: $\|\lambda v\| = \lambda\|v\|$.

Gevolg 3.1. Hieruit mag blijken dat er voor elke $v \in V$ een vector $v_e = \|v\|^{-1} v$ waarvan de norm $\|e\| = 1$.

Beschouw een vrij paar vectoren v, w dat een derde vector c voortbrengt zodat $c = c^v v + c^w w$.

Definitie 3.1. We noemen $c^v v$ de parallele projectie van c op de richting van v volgens de richting van w geschreven $c^v v = proj_w(c, v)$.

Stel voortaan $a = proj_w(c, v)$.

Gevolg 3.2. Merk op dat $\|a\|$ de coördinaat is van c naar a_e in het basispaar a_e, w. Vandaar dat we a ook de component van c naar a^e langs w noemen.

Evenwel kunnen we nu ook volgende vectoren beschouwen, $c' = \|a\|c_e$ en $a' = \|c\|a_e$. Hierbij spiegelen we de driehoek gevormd door a, c om de bissectrice en voltooien die met $b' = c' - a'$.

Definitie 3.2. Evenwel wensen wij nu a volgens b' te projecteren op c, hetgeen we de terugkerende projectie van c naar v langs w noemen $reproj_w(c, v) = proj_{b'}(a, c)$.

Blijkt evenwel dat projecties langs b' coördinaten naar a^e op c^e schalen met een factor van $\frac{\|a\|}{\|c\|}$.

Gevolg 3.3.

$$\|reproj_w(c, v)\| = \frac{\|proj_w(c, v)\|^2}{\|c\|}$$

Definitie 3.3. Weze $\|c\| = \|reproj_w(c, v)\| + \|reproj_v(c, w)\|$ dan noemt men v en w onderling rechthoekig $v \perp w$.

De projecties van de aanliggende componenten raken elkaar wederom op de tegenliggende zijde.

Axioma 3.3. De vectoren van de gekozen basis α zijn onderling rechthoekig.

Definitie 3.4. Samen met de bepaling dat de basisvectoren eenheidsvectoren zijn heet dit een orthonormale basis.

Definitie 3.5. Gegeven een orthonormale basis bepaalt een vrij paar vectoren v, w in beide projectiezinnen een rechte hoek om langs te projecteren. Vandaar dat men spreekt van een rechthoekige projectie $proj_\perp(v, w)$.

Definitie 3.6. Het scalair product van vectoren $v \cdot w$ is gedefinieerd als het lineair product $(v^\alpha)^T w^\alpha$ van een rijvector coördinaten en een coördinaatvector.

Gevolg 3.4. De rechthoekige projectie van v op w is het scalair product mits schaalcorrectie voor de norm $proj_\perp(v, w) = \|w\|^{-1} v \cdot w$.

Bewijs. De coördinaat v_i^α is de norm van de component van v naar de basisvector α_i. Evenwel schaalt de overeenkomstige component van de vector waar we op projecteren met een factor van $\|w\|^{-1} w_i^\alpha$ in de terugkerende projectie. □

Gevolg 3.5. De norm van een vector is de wortel van het scalair product met zichzelf $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$.

4. Special relativity

Axioma 4.1. Linearity

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Axioma 4.2. Scaled kinetic translation

$$z' = \mu(z - vt)$$

Axioma 4.3. Invariance

$$\lambda^2(z^2 - c^2t^2) = ({z'}^2 - c^2{t'}^2)$$