SPECIAL RELATIVITY

OLESJ V. BILOUS

1. Vectorruimtes

Definitie 1.1. Een vectorruimte V bevat van elke vector $v \in V$ een unieke schaal λv voor elke scalair $\lambda \in \mathbb{R}$. Het bevat ook de unieke som $v+w$ van elk paar vectoren $v, w \in V$.

Axioma 1.1. De vectorsom is associatief.

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

Axioma 1.2. De vectorsom is commutatief.

$$v+w = w+v$$

Axioma 1.3. De vectorschaal is distributief over de vectorsom.

$$\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$$

Axioma 1.4. De vectorschaal is distributief over de scalaire som.

$$(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$$

Axioma 1.5. Er bestaat een unieke nulvector $\mathbf{0}$ die de nulschaal $0v$ is van elke vector $v \in V$.

Axioma 1.6. 1 is de identiteitsschaal: 1v = v.

Theorema 1.1. Een lineaire ruimte is een commutatieve groep over de vectorsom.

Bewijs.

$$\begin{aligned} v + 0v &= (1+0)v \\ v + (-1)v &= (1-1)v \end{aligned}$$

□

Definitie 1.2. Een lineaire combinatie van vectoren is het lineair product van een rij vectoren $\alpha \in V^n$ en een kolom coëfficiënten $v^\alpha \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \alpha v^\alpha &= \sum_i^n v_i^\alpha \alpha_i \\ &= v_1^\alpha \alpha_1 + \ldots + v_n^\alpha \alpha_n \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\alpha \\ \vdots \\ v_n^\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zo is elke lineaire combinatie van vectoren $\alpha \in V^n$ ook een vector $v \in V$.

Definitie 1.3. De schaal λv van een kolom coëfficiënten $v \in \mathbb{R}^n$ is de kolom $w \in \mathbb{R}^n$ met de schalen van de respectieve coëfficiënten.

$$w_i = \lambda v_i$$

Definitie 1.4. De som $u+v$ van coëfficiëntkolommen $u, v \in \mathbb{R}^n$ is de kolom $w \in \mathbb{R}^n$ met de sommen van de respectieve coëfficiënten.

$$w_i = u_i + v_i$$

Theorema 1.2. $\mathbb{R}^n$ is een vectorruimte met nulvector 0_n.

Vandaar dat men een kolom coëfficiënten doorgaans een kolomvector zal noemen. De coëfficiënten heten dan componenten.

Definitie 1.5. De vectorrij $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met n kolomvectoren $A_j \in \mathbb{R}^m$ noemt men een matrix. Componenten van A_j schrijft men als a_{ij}, rijvectoren als A^i.

Definitie 1.6. Transpositie spiegelt een matrix om de diagonaal: $a^T_{ij} = a_{ji}$ voor $a^T \in A^T$.

Gevolg 1.1. Het lineair product van een matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met een kolomvector $v \in \mathbb{R}^n$ is een lineaire combinatie van n kolomvectoren $A_i \in \mathbb{R}^m$.

Gevolg 1.2. Evenwel is vanwege de structuur van de vectorsom elke component van $w = Av$ ook een lineaire combinatie van de componenten van v: $w^T = v^T A^T$.

Gevolg 1.3. Het herhaald lineair product van een vectorrij $\alpha \in V^m$ met de kolomvectoren A_i van de matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vormt een vectorrij $\beta \in V^n$.

Definitie 1.7. Bovenstaande operatie noemen we het herhaald product van α en A.

$$\alpha A = \beta$$

Definitie 1.8. De matrix die een vectorrij op zichzelf afbeeldt noemen we de identiteitsmatrix $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Gevolg 1.4. Het herhaald product van $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ is $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Dit zijn p lineaire combinaties van n kolomvectoren $A_i \in \mathbb{R}^m$ volgens v.

Definitie 1.9. Dit staat ook simpelweg als het matrixproduct bekend.

$$AB = C$$

Gevolg 1.5. Het matrixproduct AB bestaat anderzijds ook uit m lineaire combinaties van n rijvectoren $B^j \in \mathbb{R}^p$, oftewel $AB = B^T A^T$.

Gevolg 1.6. Het matrixproduct is associatief.

Bewijs. De vectorschaal is distributief over de vectorsom en bovendien associatief. Vandaar dat het in ABC niet uitmaakt of een C_i zijn coëfficiënten verdeelt over AB of een $(BC)_j$ de zijne over A. $\square$

Gevolg 1.7. Inverteerbare vierkante matrices zijn commutatief inverteerbaar.

Bewijs. Weze $AA_r^{-1} = I_n$ in $(AA_r^{-1})A = A(A_r^{-1}A)$. Hierbij moet $A_r^{-1}A$ echter ook de identiteitsmatrix zijn. $\square$

Definitie 1.10. De spanruimte $span(\alpha)$ van een vectorrij α bevat alle linaire combinaties van α. Men zegt dat α haar spanruimte voortbrengt.

Gevolg 1.8. Een matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die als vectorrij voortbrengend is voor $\mathbb{R}^m$ is rechts inverteerbaar. Als haar rijvectoren $\mathbb{R}^n$ voortbrengen is ze links inverteerbaar.

Bewijs. De identiteitsmatrices bestaan uit vectoren in de respectieve ruimtes. □

Theorema 1.3. De spanruimte van een vectorrij is een vectorruimte.

Bewijs. Uit $\alpha A = \beta$ en $\beta v^\beta = v$ volgt $\alpha A v^\beta = v$. Hieruit mag blijken dat herhaalde lineaire combinaties de spanruimte niet verlaten. □

Evenwel bestaan er vectorruimtes V waar niet elke vector $v \in V$ een lineaire combinatie van elke vectorrij $\alpha \in V^n$ is.

Definitie 1.11. Een vectorrij α is lineair onafhankelijk of vrij als geen enkele van de vectoren $\alpha_i \in \alpha$ een lineaire combinatie is van de overige $\alpha_{j \neq i} \in \alpha$.

Lemma 1.1. Het lineair product van een vrije vectorrij met een kolomvector is enkel de nulvector $\alpha 0^\alpha = \mathbf{0}$ als de kolomvector dat ook is in zijn respectieve ruimte: $0^\alpha = 0_n$.

Bewijs. $-0^\alpha_i \alpha_i = (\alpha \setminus \{\alpha_i\})\,(0^\alpha \setminus \{0^\alpha_i\})$ □

Gevolg 1.9. Het herhaald product van een vrije vectorrij met een matrix is vrij als de matrix dat ook is. Als het product vrij is, is de matrix dat ook.

Bewijs. Stel dat $\beta = \alpha A$ lineair afhankelijk is voor $\alpha \in V^m$ vrij. Dan is er een $0^\beta \neq 0_n$ waar $\beta 0^\beta = \mathbf{0}$, zodanig dat $A 0^\beta = 0_n$ betekent dat ook A lineair afhankelijk is. Anderzijds is voor $Cc = 0_k$ elke $\gamma C c = \mathbf{0}$. □

Gevolg 1.10. Het product van vrije matrices is vrij. Als het product vrij is, is de rechtermatrix vrij.

Gevolg 1.11. Een vrije vectorrij heeft voor elke vector in zijn spanruimte slechts één kolom coëfficiënten.

Bewijs.

$$\alpha v^{\alpha 1} = \alpha v^{\alpha 2}$$
$$\alpha(v^{\alpha 1} - v^{\alpha 2}) = \mathbf{0}$$

□

Definitie 1.12. Vanwege het unieke karakter van deze coëfficiënten noemen we ze de coördinaten van een vector met betrekking tot de vrije vectorrij.

Definitie 1.13. Een vrije vectorrij staat gekend als de basis van haar spanruimte.

Definitie 1.14. De coördinaten van een alternatieve basis ten aanzien van een oorspronkelijke vormen een matrix. Deze heet een basistransformatie.

Lemma 1.2. Een basispaar van dezelfde vectorruimte $span(\alpha) = span(\beta)$ is wederzijds lineair afhankelijk: $\alpha A = \beta$ en $\alpha = \beta B$.

Theorema 1.4. Als β meer vectoren bevat $|\alpha| < |\beta|$ dan brengt β meer voort $span(\alpha) \subset span(\beta)$ of β is lineair afhankelijk.

Bewijs. We bewijzen eerst het geval waar α vrij is. Het voorgaande volgt daaruit eens we die eis laten vallen.

Elke β_j heeft minstens één definiete coördinaat $b_{ij} \in B$ voor een zekere α_i.

$$\beta_j = b_{ij}\alpha_i + (\alpha \setminus \{\alpha_i\})(B_j \setminus \{b_{ij}\})$$

Hieruit blijkt echter dat ook deze α_i afhangt van $\alpha^{(1)} = (\alpha \cup \beta_j) \setminus \{\alpha_i\}$. Vandaar dat ook $\alpha^{(1)}$ voortbrengend is gezien $\alpha \subseteq span(\alpha^{(1)})$.

Verder waren de coördinaten van β_j uniek, dus β_j kan niet gevormd worden uit $\alpha \setminus \{\alpha_i\}$. Anderzijds draagt ook voor $k \neq i$ de uniciteit van coördinaten over op de combinatie van $(\alpha \cup \beta_j) \setminus \{\alpha_k\}$ tot α_k, waarbij de coördinaat naar α_i definiet blijft. Zo kan ook α_k niet gevormd worden uit $\alpha^{(1)} \setminus \{\alpha_k\} = (\alpha \cup \beta_j) \setminus \{\alpha_k, \alpha_i\}$. Dus is $\alpha^{(1)}$ eveneens vrij.

Daar β vrij en $\alpha^{(m)}$ voortbrengend is heeft β_l telkens $\alpha^{(m)}$-coördinaten buiten $\beta \setminus \{\beta_l\}$ en is deze procedure voor herhaling vatbaar tot we β of α uitputten.

Gebeurt dit tegelijk dan is ook β voortbrengend. Weze $|\beta| < |\alpha|$ dan resten er nog $\alpha_k \in \alpha^{(|\beta|)} \setminus \{\beta\}$ waarvoor $\alpha_k \notin span(\beta)$. Blijft er anderzijds nog enige $\beta_h \notin \alpha^{(|\alpha|)}$ over, dan is deze afhankelijk van $\alpha^{(|\alpha|)} \subset \beta$ en ware β nimmer vrij. □

Gevolg 1.12. Enkel vierkante matrices kunnen commutatief inverteerbaar zijn.

Bewijs. Weze $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ met $m < n$ doch $\mathbb{R}^m$ voortbrengend. Dan kan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ weliswaar I_m vormen uit A, maar B kan $\mathbb{R}^n$ niet voortbrengen om tot I_n te komen. □

Gevolg 1.13. De volgende zijn gelijkwaardig voor vierkante matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
- lineaire onafhankelijkheid
- voortbrenging van $\mathbb{R}^n$
- inverteerbaarheid

Bewijs. Wegens rechtse inversie komt de identiteitsmatrix en daaruit $\mathbb{R}^n$ voort uit de kolomruimte van A maar ook uit de rijruimte van A^{-1}. Daarom is ook de rijruimte van A vrij. □

Theorema 1.5. Basistransformaties vormen een commutatieve groep over de matrixvermenigvuldiging met de identiteitsmatrix als identiteit: $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Definitie 1.15. Men noemt deze de algemene lineaire groep.

Gevolg 1.14. Een basistransformatie is contravariant aan de geïmpliceerde coördinatentransformatie.

Bewijs. Uit $\alpha A = \beta$ en $\alpha v^\alpha = v$ volgt $\beta A^{-1} v^\alpha = v$. □

Nu wensen we een begrip van afstand in te voeren, gekend als de norm $\|v\|$ van een vector $v \in V$.

Hiertoe nemen we een willekeurige basis α van V en schrijven er enkele bijzondere eigenschappen aan toe.

Vooreerst is telkens $\|\alpha_i\| = 1$.

Verder geldt voor elke coördinaat v_i^α van elke vector $\alpha v^\alpha = v$ volgende verhouding, waar α_i^v de coördinaat is van α_i naar v in $(\alpha \setminus \{\alpha_i\}) \cup \{v\}$, gekend als de projectie van α_i op v.

$$\frac{v_i^\alpha}{\|v\|} = \frac{\alpha_i^v}{v_i^\alpha}$$

Dit komt erop neer dat de verhouding tussen een paar zijden van een driehoek onafhankelijk is van schaal. Dat wordt duidelijk wanneer men beschouwt dat het vlak tussen α_i en v mede wordt voortgebracht uit α door een zekere $\alpha_{j\neq i}$, die de richting van de derde zijde levert.

Nu stellen we echter ook dat $\|v\| = \sum_i \alpha_i^v$. Dit is de bepaling van de basis α als rechthoekig, zodat de projecties van de aanliggende zijden van de rechte hoek elkaar wederom raken op de tegenliggende zijde.

2. Special relativity

Axioma 2.1. Linearity

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Axioma 2.2. Scaled kinetic translation

$$z' = \mu(z - vt)$$

Axioma 2.3. Invariance

$$\lambda^2(z^2 - c^2t^2) = ({z'}^2 - c^2{t'}^2)$$