

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра  
Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №2

Выполнила студентка гр.33501/3:Ивашкевич О.А.

Преподаватель: Богач Н.В.

Санкт-Петербург  
2017

# Содержание

<b>1</b>	<b>Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция сигналов</b>	<b>1</b>
1.1	Цель работы . . . . .	1
1.2	Постановка задачи . . . . .	1
1.3	Справочные материалы . . . . .	1
1.4	Теоретические положения . . . . .	1
1.4.1	Периодические сигналы и ряды Фурье . . . . .	1
1.4.2	Синусно-косинусная форма . . . . .	2
1.4.3	Вещественная форма . . . . .	2
1.4.4	Комплексная форма . . . . .	3
1.4.5	Дополнительные сведения . . . . .	4
1.4.6	Преобразование Фурье . . . . .	4
1.4.7	Свойства преобразования Фурье . . . . .	6
1.4.8	Корреляционный анализ сигналов . . . . .	8
1.5	Ход работы . . . . .	10
1.5.1	Прямоугольный импульс . . . . .	10
1.5.2	Симметричный треугольный импульс . . . . .	12
1.5.3	Гармонический сигнал . . . . .	13
1.5.4	Сигнал с меняющейся частотой (chirp) . . . . .	15
1.5.5	Поиск синхропосылки с помощью xcorr . . . . .	16
1.5.6	Поиск синхропосылки с помощью быстрой корреляции . . . . .	19
1.5.7	Сравнение xcorr с быстрой корреляцией . . . . .	21
1.6	Вывод . . . . .	21

## 1 Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция сигналов

### 1.1 Цель работы

Изучить спектр телекоммуникационных сигналов.

### 1.2 Постановка задачи

- Для сигналов, построенных в лабораторной работе №1, выполнить расчет преобразования Фурье, получить спектры.
- Используя функцию корреляции необходимо найти позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получить пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислить корреляцию прямым методом, воспользовавшись алгоритмом быстрой корреляции, сравнить время работы обоих алгоритмов.

### 1.3 Справочные материалы

- А.Б. Сергиенко Цифровая обработка сигналов. Глава 1, сс.25–55, Глава 5, сс. 284–285.
- Быстрая корреляция

## 1.4 Теоретические положения

В качестве базиса для представления радиотехнических сигналов исключительное место занимают гармонические функции. Если какой-либо сигнал представлен в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами, то говорят, что осуществлено *спектральное разложение* этого сигнала. Отдельные гармонические компоненты сигнала, называемые гармониками, образуют его спектр – это графическое представление гармоник на оси частот. В общем случае сигнал представляется различными гармониками.

### 1.4.1 Периодические сигналы и ряды Фурье

Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является *периодический сигнал*  $s(t)$  со следующим свойством:

$$s(t) = s(t \pm nT), n = 1, 2, \dots$$

Здесь  $T$  – периода сигнала.

Известно, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы элементарных гармонических сигналов при помощи *рядов Фурье*. Это возможно, если функция, описывающая сигнал, отвечает *условиям Дирихле*:

1. В пределах периода  $T$  функция имеет конечное число экстремумов.
2. В пределах периода  $T$  функция может иметь конечное количество точек разрыва, причем только первого рода.

Использование ряда Фурье позволяет представить сигналы конечной длительности, однако при этом необходимо установить временной интервал, для которого нужно построить ряд. Тем самым подразумевается периодическое продолжение сигнала за границами рассматриваемого интервала.

В зависимости от конкретной формы базисных функций различают несколько форм записи ряда Фурье.

### 1.4.2 Синусно-косинусная форма

Пусть дан периодический сигнал, описываемый функцией  $s(t)$ . Введем понятие круговой частоты  $\omega = 2\pi/T$ , которая соответствует периоду  $T$  повторения сигнала. Представим функцию на промежутке, соответствующем периоду, в виде суммы ряда гармоник:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)), \quad (1)$$

где *коэффициенты Фурье*  $a_0$ ,  $a_n$  и  $b_n$  определяются формулами

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (2)$$

Таким образом, в общем случае периодический сигнал содержит не зависящую от времени *постоянную составляющую*  $a_0$  и бесконечный набор гармонических колебаний (гармоник) с частотами  $\omega_k = k\omega$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), кратными круговой частоте последовательности. Частота  $\omega_k$  при этом называется  $k$ -й гармоникой сигнала.

Если  $s(t)$  является *четной* функцией, то все  $b_k$  будут равны нулю и в формуле ряда Фурье останутся лишь косинусные слагаемые. Если  $s(t)$  является *нечетной* функцией, равны нулю будут косинусные коэффициенты  $a_k$  и в формуле ряда будут присутствовать только *синусные* слагаемые.

### 1.4.3 Вещественная форма

Каждая гармоника описывается ее амплитудой  $A_k$  и начальной фазой  $\phi_k$ . При этом, коэффициенты ряда Фурье следует записать в виде

$$a_k = A_k \cos(\phi_k), \quad b_k = A_k \sin(\phi_k),$$

так что

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \text{tg}(\phi_k) = b_k/a_k.$$

Подставив эти выражения в (1), получим другую, эквивалентную форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \phi_k), \quad (3)$$

которая удобнее тем, что для каждой  $k$ -й гармоники в формуле не фигурирует два слагаемых – синус и косинус.

Если  $s(t)$  является четной функцией, фазы  $\phi_k$  могут принимать лишь нулевые значения и  $\pi$ , а если  $s(t)$  – функция нечетная, то возможны только значения  $\pm\pi/2$ .

### 1.4.4 Комплексная форма

Используя систему базисных функций, состоящую из экспонент с мнимыми показателями, разложить периодический сигнал на спектр возможно. Тогда Ряд Фурье произвольного периодического сигнала примет вид:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega t}, \quad (4)$$

при этом коэффициенты комплексного ряда Фурье определяются по выражению

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega t} dt. \quad (5)$$

Выражение (4) представляет собой *ряд Фурье в комплексной форме*. Преобразование возможно при помощи *формулы Эйлера*:

$$\cos \phi + j \sin \phi = e^{j\phi}, \quad \cos \phi - j \sin \phi = e^{-j\phi}.$$

Сложив два уравнения, получаем

$$2 \cos \phi = e^{j\phi} + e^{-j\phi}. \quad (6)$$

Применив (6) к вещественной форме ряда Фурье (3), получим суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} (e^{jk\omega t + j\phi} + e^{-jk\omega t - j\phi}).$$

Теперь будем трактовать экспоненты со знаком «минус» в показателе как члены ряда с отрицательными номерами. В рамках этого же общего подхода постоянное слагаемое  $a_0/2$  станет членом ряда с нулевым номером. В результате получается комплексная форма ряда Фурье (4). Т.е. отрицательная частота – понятие не физическое, а математическое, вытекающее из способа представления комплексных чисел.

Если  $s(t)$  – четная функция, то коэффициенты  $\dot{C}_k$  будут чисто *вещественными*, а если  $s(t)$  – нечетная, то коэффициенты ряда окажутся чисто *мнимыми*.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье нередко именуют амплитудным спектром, а совокупность фаз – фазовым диапазоном. Если анализируемый сигнал  $s(t)$  является вещественным, то его спектры обладают симметрией. Спектр сигнала в соответствии с формулой (4) содержит компоненты на отрицательной полуоси частот, причем

$$\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k, A_{-k} = A_k, \phi_{-k} = -\phi_k.$$

#### 1.4.5 Дополнительные сведения

Продолжительность импульсов  $t$  и период их следования  $T$  входят в форму ряда Фурье не аргументировано, а в виде отношения. Данный параметр именуют скважностью очередности импульсов  $q$ :  $q = T/t$ . В иностранной литературе взамен скважности применяется обратная значение, именуемая коэффициентом заполнения (duty cycle) и равная  $t/T$ .

Если  $t_0$  – точка разрыва, то ряд Фурье сходится к значению

$$s'(t_0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} s(t) + \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} s(t) \right). \quad (7)$$

На примыкающих к разрыву участках сумма ряда Фурье выделяет ощутимые вибрации, при этом на графиках Рис. 1 заметно, что амплитуда данных вибраций не убавляется с подъемом количества суммируемых гармоник – вибрации только сжимаются по горизонтали, приближаясь к точке разрыва. Данное явление, свойственное рядам Фурье для всех сигналов с разрывами первого семейства (скачками), величается *результатом Гиббса*. Можно продемонстрировать, что амплитуда первого (наибольшего) выброса составляет приблизительно 9% от величины скачка.

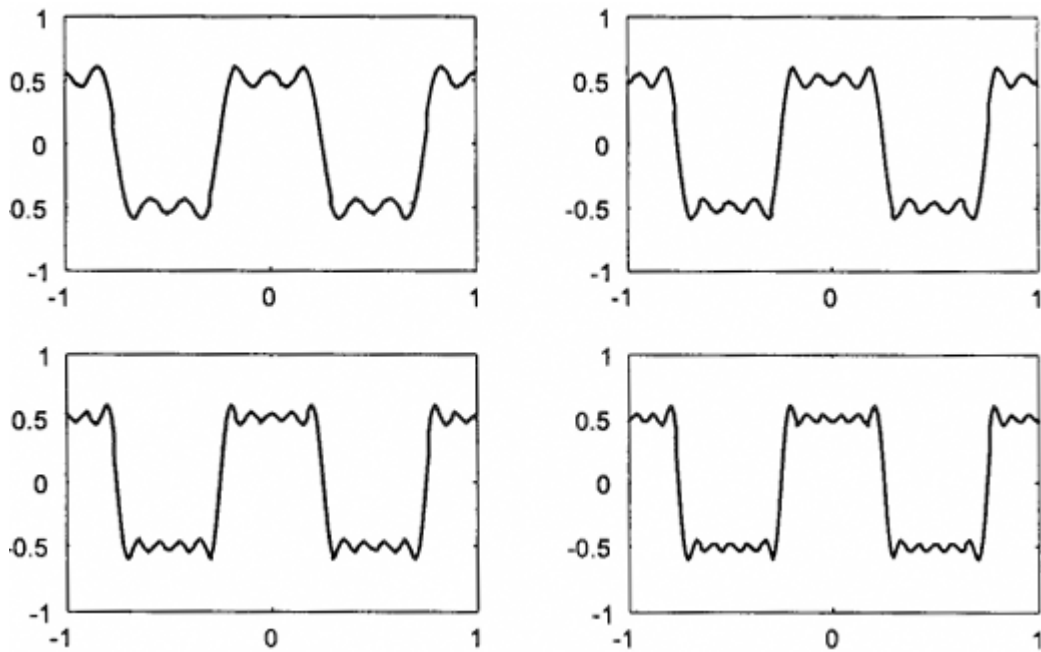


Рис. 1: Промежуточные стадии суммирования ряда Фурье для меандра

#### 1.4.6 Преобразование Фурье

Спектральный анализ – 1 из способов обработки сигналов, который позволяет охарактеризовать частотный состав измеряемого сигнала. Преобразование Фурье считается математической основой, которая связывает временной либо пространственный сигнал (или же некую модель данного сигнала) с его представлением в частотной области.

Для спектрального представления непериодических (импульсных) сигналов  $s(t)$ , данных на конечном промежутке  $(t_1, t_2)$  (Рис. 2), конкретно воспользоваться рядом Фурье невозможно. Для гармонического разложения сигнала в мыслях дополняют его такими же импульсными сигналами до периодического с каким-либо промежутком  $T$  (Рис. 2), при всем этом наполняя промежутки нулевыми значениями.

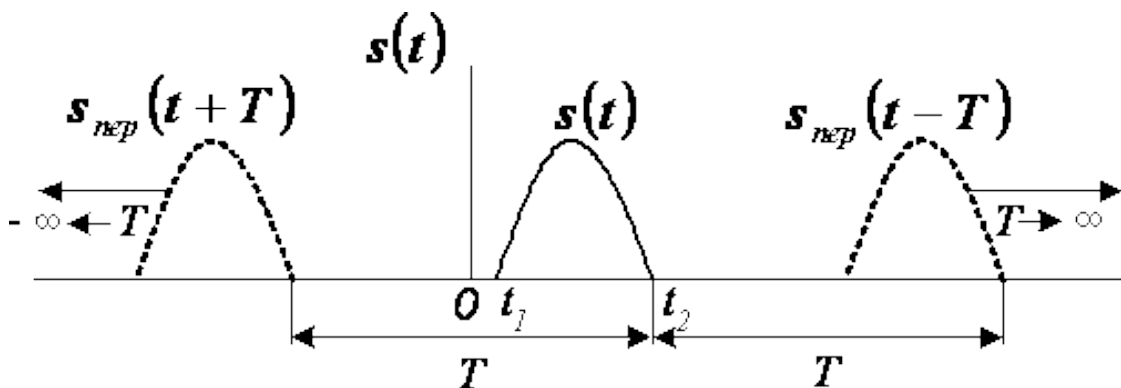


Рис. 2: Импульсный сигнал  $s(t)$  и его периодическое продолжение  $s_{per}(t + kT)$ .

С ростом периода следования импульсов гармоники расположены поближе друг к другу по частоте, а единый уровень спектральных составляющих становится все меньше.

В пределе, при увеличении периода  $T \rightarrow \infty$  все импульсы уйдут вправо и влево в бесконечность и периодическая последовательность вновь будет одиночным импульсом. Хотя взаимное соотношение меж уровнями гармоник останется постоянным и определяется все таким же интегралом (5). В следствии этого при спектральном анализе непериодических сигналов формула для расчета коэффициентов комплексного ряда Фурье модифицируется следующим образом:

- частота перестает быть дискретно меняющейся и становится непрерывным параметром преобразования (то есть  $k\omega$  в формуле (5) заменяется на  $\omega$ );
- удаляется множитель  $1/T$ ;
- результатом вычислений вместо нумерованных коэффициентов ряда  $C_k$  является функция частоты  $S_\omega$  – *спектральная функция* сигнала  $s(t)$ . Иногда ее называют *спектральной плотностью*.

В результате перечисленных модификаций формула (5) превращается в формулу *прямого преобразования Фурье*:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (8)$$

В формуле самого ряда Фурье (4) суммирование заменяется интегрированием (и перед интегралом появляется деление на  $2\pi$ ). Получающееся выражение называется *обратным преобразованием Фурье*:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9)$$

Чтобы преобразование Фурье было применимо, сигнал должен удовлетворять следующим требованиям:

- должны выполняться условия Дирихле;
- сигнал должен быть *абсолютно интегрируемым*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Модуль спектральной функции называется *амплитудным спектром*, а ее аргумент – *фазовым диапазоном*.

Преобразование Фурье взаимно-однозначно, в следствии этого спектральная функция имеет столько-же информации, какое количество и исходный сигнал.

#### 1.4.7 Свойства преобразования Фурье

Под свойствами преобразования Фурье предполагается взаимное соответствие трансформаций сигналов и их спектров.

Далее будем рассматривать два абстрактных сигнала,  $f(t)$  и  $g(t)$ , и считать, что их спектральные функции равны  $\dot{F}(\omega)$  и  $\dot{G}(\omega)$ , а встречающиеся параметры  $\alpha$  и  $\beta$  – константы.

1. **Линейность:** если мы берем какую-то линейную комбинацию функций, то преобразование Фурье этой комбинации будет такой же линейной комбинацией образов Фурье этих функций. Это свойство позволяет сводить сложные функции и их фурье-образы к более простым.

$$\text{Если } s(t) = \alpha f(t) + \beta g(t), \text{ то } \dot{S}(\omega) = \alpha \dot{F}(\omega) + \beta \dot{G}(\omega).$$

2. **Задержка:** независимость амплитудного спектра от сдвига сигнала по времени. Если мы подвинем функцию влево или вправо по оси  $x$ , то поменяется лишь ее фазовый спектр.

$$\text{Если } s(t) = f(t - \tau), \text{ то } \dot{S}(\omega) = \dot{F}(\omega) e^{-j\omega\tau},$$

где  $\tau$  – задержка.

3. **Перемена масштаба оси времени:** растяжение (сжатие) исходной функции по оси времени пропорционально сжимает (растягивает) ее фурье-образ по шкале частот. А именно, спектр сигнала конечной длительности постоянно бесконечно широк и напротив, диапазон конечной ширины всегда соответствует сигналу нелимитированной продолжительности.

$$\text{Если } s(t) = f(\alpha t), \text{ то } \dot{S}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \alpha \neq 0.$$

4. **Дифференцирование сигнала:** спектр производной получается путем умножения исходного сигнала на  $j\omega$  – оператор дифференцирования сигнала в частотной области. При дифференцировании низкие частоты ослабляются, а высокие усиливаются. Фазовый спектр сигнала сдвигается на  $90^\circ$  для положительных частот и на  $-90^\circ$  для отрицательных.

$$\text{Если } s(t) = \frac{df}{dt}, \text{ то } \dot{S}(\omega) = j\omega \dot{F}(\omega). \quad (10)$$

5. **Интегрирование сигнала:** из (10) формально следует, что спектр первообразной

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega}.$$

Таким образом, множитель  $1/(j\omega)$  служит *оператором интегрирования в частотной области*.

Однако формула выше справедлива лишь для сигналов, не содержащих постоянной составляющей, у которых

$$\dot{F}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0.$$

В общем случае результат выглядит следующим образом

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega} + \pi \dot{F}(0) \delta(\omega).$$

Наконец, интегрирование сигнала действует аналогично фильтру нижних частот, ослабляя высокочастотные спектральные составляющие входного сигнала.



6. **Спектр свертки сигналов:** по определению, свертка – это математическая операция, примененная к двум функциям  $f$  и  $g$ , порождающая третью функцию, которая иногда может рассматриваться как модифицированная версия одной из первоначальных:

$$s(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t - t') dt'.$$

Спектр свертки функций равен произведению их спектров:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{F}(\omega) \dot{G}(\omega).$$

Операция свертки коммутативна.

7. **Спектр произведения сигналов** представляет собой свертку спектров, умноженную на  $1/(2\pi)$ :

$$\text{Если } s(t) = f(t)g(t), \text{ то } \dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\tau) \dot{F}(t - \tau) d\tau.$$

8. **Умножение сигнала на гармоническую функцию:** умножим исходный сигнал, спектр которого нам известен, на гармоническую функцию:

$$s(t) = f(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0),$$

тогда получим спектр сигнала:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\phi_0} \dot{F}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\phi_0} \dot{F}(\omega + \omega_0). \quad (11)$$

Спектр «раздвоился» – распался на два слагаемых вдвое меньшего уровня (множитель  $1/2$ ), смещенных на  $\omega_0$  вправо ( $\omega - \omega_0$ ) и влево ( $\omega + \omega_0$ ) по оси частот.

#### 1.4.8 Корреляционный анализ сигналов

Одним из традиционных способов исследования структуры сигналов считается корреляционный анализ, который находит бесчисленные использования в задачах, связанных с передачей информации, радарным обнаружением, системами управления и т.д.. Ковариационные (корреляционные) функции позволяют различные варианты интерпретации. С одной стороны, они позволяют выявлять степень сходства (линейной зависимости) 2-ух сигналов при варьировании сдвига по времени меж ними. В этом случае говорят о обоюдных ковариационных (взаимных корреляционных) функциях. С другой стороны, они применимы для изучения взаимосвязи значений одного и того же случайного процесса в разные моменты времени, что позволяет использовать терминологию автоковариационных (автокорреляционных) функций.

**Взаимная корреляционная функция** (ВКФ; англ. – cross-correlation function, CCF) для двух сигналов  $u(t)$  и  $v(t)$ :

$$\begin{aligned} w(t) &= u(t) \otimes v(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau) v(\tau + t) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau - t) v(\tau) d\tau \quad [\text{подстановка: } \tau \rightarrow \tau - t] \end{aligned}$$

где  $u^*(t)$  – комплексно-сопряженная функция к  $u(t)$ . Аргумент функции  $w(t)$  называется задержкой и соответствует сдвигу фаз, который необходимо осуществить для одного сигнала ( $v$ ) относительно другого ( $u$ ), т.е.  $t$  – задержка  $u$  относительно  $v$ .

ВКФ очень похожа на свертку двух сигналов:

$$\begin{aligned} u(t) \otimes v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau) v(\tau + t) d\tau && [\text{корреляция}] \\ u(t) * v(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau && [\text{свертка}] \end{aligned} \quad (12)$$

Используя определение свертки (12) при подстановке  $\tau \rightarrow \tau - t$ , можно перейти к ВКФ. Пусть  $x(t) = u^*(-t)$ , тогда

$$\begin{aligned} x(t) * v(t) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) v(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau - t) v(\tau) d\tau = u(t) \otimes v(t). \end{aligned}$$

Преобразование Фурье сигнала  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t) e^{j\omega t} dt = \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{j\omega t} dt \right)^* = \dot{U}^*(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом,  $w(t) = x(t) * v(t) \Rightarrow \dot{W}(\omega) = \dot{X}(\omega) \dot{V}(\omega) = \dot{U}^*(\omega) \dot{V}(\omega)$ , т.к. спектр свертки равен произведению их спектров. В итоге можно записать похожую теорему взаимной корреляции:

$$w(t) = u(t) \otimes v(t) = u^*(-t) * v(t) \Leftrightarrow \dot{W}(\omega) = \dot{U}^*(\omega) \dot{V}(\omega). \quad (13)$$

В отличие от свертки, корреляция не ассоциативна и не коммутативна:

$$v(t) \otimes u(t) = v^*(-t) * u(t) = u(t) * v^*(-t) = w^*(-t).$$

Указанная ранее ВКФ используется для сигналов с конечной энергией (energy signals), т.е. для непериодических. ВКФ для двух сигналов с бесконечной энергией (power signals), т.е. для периодических, вычисляется так:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^*(\tau) v(\tau + t) d\tau,$$

однако если  $u$  и  $v$  – периодические с периодом  $T$ , то формула лишается предела.

Известно, что  $|w(t)| \leq \sqrt{E_u E_v}$  для любых  $t$ , где  $E_u$  и  $E_v$  – энергии соответствующих сигналов, вычисляемые по формуле:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt.$$

Можно определить нормализованную ВКФ:

$$z(t) = \frac{u(t) \otimes v(t)}{\sqrt{E_u E_v}},$$

с помощью которой можно измерять взаимную корреляцию в фиксированном масштабе между  $-1$  и  $+1$ . Величина  $z(t)$  известна как *коэффициент взаимной корреляции* и имеет следующие параметры:

1.  $|z(t)| \leq 1$  для всех  $t$ ;
2.  $|z(t_0)| = 1 \Leftrightarrow v(\tau) = \alpha u(\tau - t)$ ,  $\alpha$  – константа.

Иными словами, значение  $+1$  указывает на полное совпадение сигналов,  $0$  – отсутствие корреляции, а  $-1$  – 100%-ная корреляция в противоположном смысле, например, как для сигналов в противофазе.

ВКФ обладает еще несколькими свойствами:

- $w_{uv}(-t) = w_{vu}(t)$ , то есть изменение знака  $t$  равносильно взаимной перестановке сигналов;
- с ростом абсолютного значения  $t$  ВКФ сигналов с конечной энергией затухает:  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} w(t) = 0$ ;
- значение ВКФ при  $t = 0$  ничем не выделяется, а максимум может быть расположен в любом месте оси  $t$ .

**Автокорреляция** – это нахождение корреляции одного сигнала с самим собой. Автокорреляция является частным случаем взаимной корреляции и определяется формулой (для непериодических сигналов):

$$w(t) = u(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau \pm t) u(\tau) d\tau.$$

Автокорреляция при нулевой задержке для непериодического сигнала равно его энергии:

$$w(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(\tau - 0) u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)|^2 d\tau = E_u.$$

Нормализованная автокорреляция:  $z(t) = \frac{u(t) \otimes u(t)}{E_u}$  удовлетворяет свойствам  $z(0) = 1$  и  $|z(t)| \leq 1$  для любого  $t$ . По теореме взаимной корреляции (13),

$$w(t) = u(t) \otimes u(t) \Leftrightarrow \dot{W}(\omega) = \dot{U}^*(\omega) \dot{U}(\omega) = |\dot{U}(\omega)|^2,$$

т.е. преобразование Фурье автокорреляционной функции есть спектральная плотность мощности (energy spectrum).

Автокорреляция для периодических сигналов с периодом  $T$  определяется:

$$w(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau) u(\tau - t) d\tau,$$

тогда при задержке  $t = 0$  получим среднюю мощность сигнала  $P_u$ :

$$w(0) = \frac{1}{T} \int_T u^2(\tau) d\tau = P_u. \quad (14)$$

Значение корреляционной функции при  $t = 0$  для обоих типов сигналов является максимально возможным:  $|w(t)| \leq w(0)$ . Также имеется свойство четности:  $w(t) = w(-t)$ .

Расчет корреляции можно ускорить, используя теорему о корреляции, которая обычно формулируется следующим образом:

$$w(t) = F_D^{-1} \left[ \dot{U}^*(\omega) \dot{V}(\omega) \right], \quad (15)$$

где  $F_D^{-1}$  обозначает обратное преобразование Фурье. Данный подход требует двух дискретных преобразований Фурье (ДПФ) и одного обратного ДПФ, что легче всего сделать, используя алгоритм БПФ. Если число членов в последовательностях достаточно велико, данный метод БПФ дает результат быстрее, чем непосредственный расчет взаимной корреляции.

## 1.5 Ход работы

### 1.5.1 Прямоугольный импульс

Единичный прямоугольный импульс, центрированный относительно начала отсчета времени, с амплитудой  $A$  и длительностью  $T$  можно представить выражением:

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases}$$

Преобразование Фурье прямоугольного импульса:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = AT \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = \\ &= AT \cdot \text{sinc}(\omega T/2). \end{aligned}$$

Пик амплитудного спектра расположен в нуле ( $\omega = 0$ ) со значением, равным  $AT$ . Нули спектра встречаются при значениях, кратных  $2\pi/T$ , т.е.  $(\pm 2\pi/T, \pm 4\pi/T, \pm 8\pi/T, \dots)$ .

Сформировал прямоугольный импульс с единичной амплитудой и длительностью  $T = 0.2$  с помощью встроенной функции – *rectpulse*( $t, w$ ):

```
fs = 500; % частота дискретизации
T = 0.2; % длительность прямоугольного импульса

t = -0.5:1/fs:0.5; % отсчеты времени

x = rectpuls(t, T); % генерация импульса
```

Функция *FFT* в Matlab используется для вычисления дискретного преобразования Фурье (*DFT*). Результат БПФ изображен на Рис. 3. С приведенного графика следует, что пик амплитуды действительно находится при  $\omega = 0$  ( $f = 0$ ) со значением  $AT = 1 \times 0.2 = 0.2$ . Нули спектра расположены при  $f = (\pm 1/T = 5, \pm 2/T = 10, \pm 3/T = 15, \dots)$ , как и ожидалось.

```
L=length(x);
NFFT = 500; % количество линий Фурье спектра
% FFT вместе с FFTshift для отрицательных и полож. частот
```

```

X = fftshift(fft(x,NFFT));
f = fs*(-NFFT/2:NFFT/2-1)/NFFT; % вектор частот

plot(t, x, 'k');
plot(f,abs(X)/(L), 'r');
plot(f, atan2(imag(X),real(X))*180/pi);

```

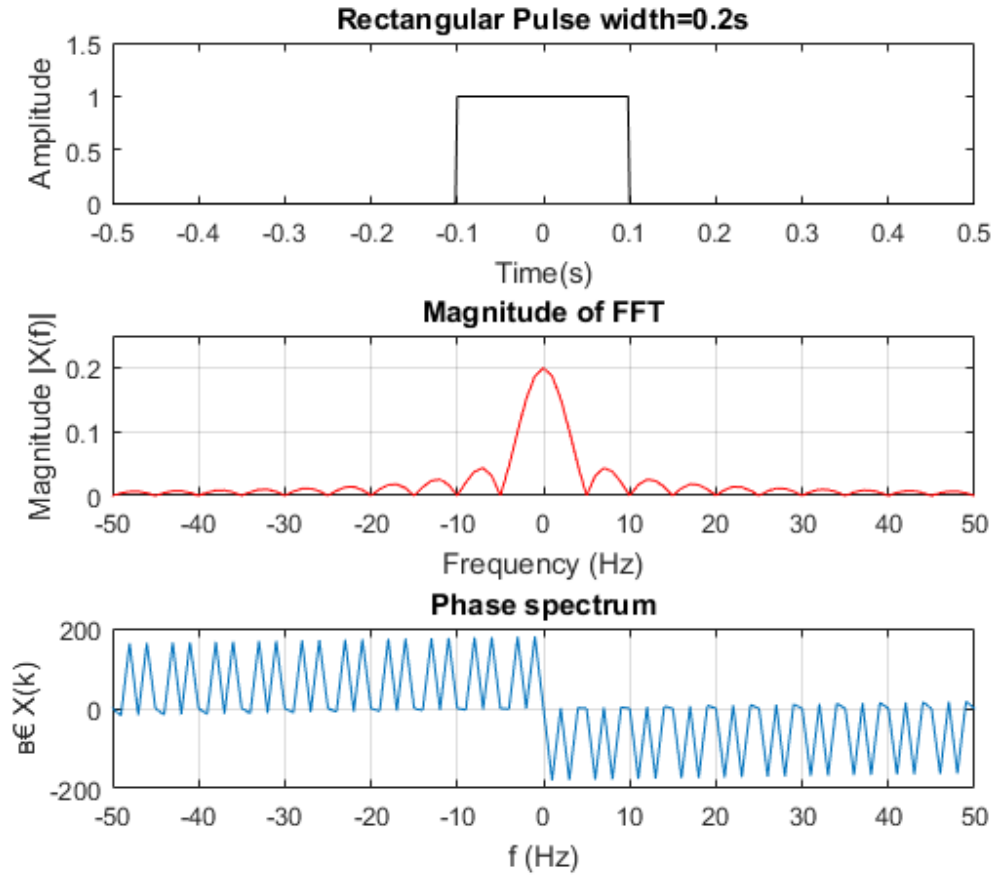


Рис. 3: Прямоугольный импульс и его амплитудный и фазовый спектры.

### 1.5.2 Симметричный треугольный импульс

Симметричный треугольный импульс, центрированный относительно начала отсчета времени, с амплитудой  $A$  и длительностью  $\tau = 2 \cdot T$ , где  $T$  – *эффективная ширина спектра*, можно представить выражением:

$$s(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

Вычислил преобразование Фурье треугольного импульса:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-T}^T A \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-j\omega t} dt = AT \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}.$$

Сформировал треугольный импульс с амплитудой  $A = 2$  и длительностью  $\tau = 2 \cdot T = 2 \cdot 0.1 = 0.2$  с помощью встроенной функции – *trianguls(t, w)*:

```

fs = 500; % частота дискретизации
T = 0.1; % ширина треугольного импульса
t = -0.5:1/fs:0.5; % отсчеты времени
A = 2; % амплитуда
% домножаем T на 2, чтобы получить длительность импульса
x = A*tripuls(t, 2*T); % генерация импульса

```

Далее построил график амплитудного спектра так же, как это было сделано для прямоугольного импульса. Спектр приведен на Рис. 4. Видно, что пик находится при  $\omega = 0$  ( $f = 0$ ) со значением амплитуды  $AT = 2 \times 0.1 = 0.2$ . Нули спектра расположены при значениях, кратных  $\pi/T$  (или, если использовать не круговую частоту, а обычную –  $f = (\pm 1/T = 10, \pm 2/T = 20, \pm 3/T = 30, \dots)$ ).

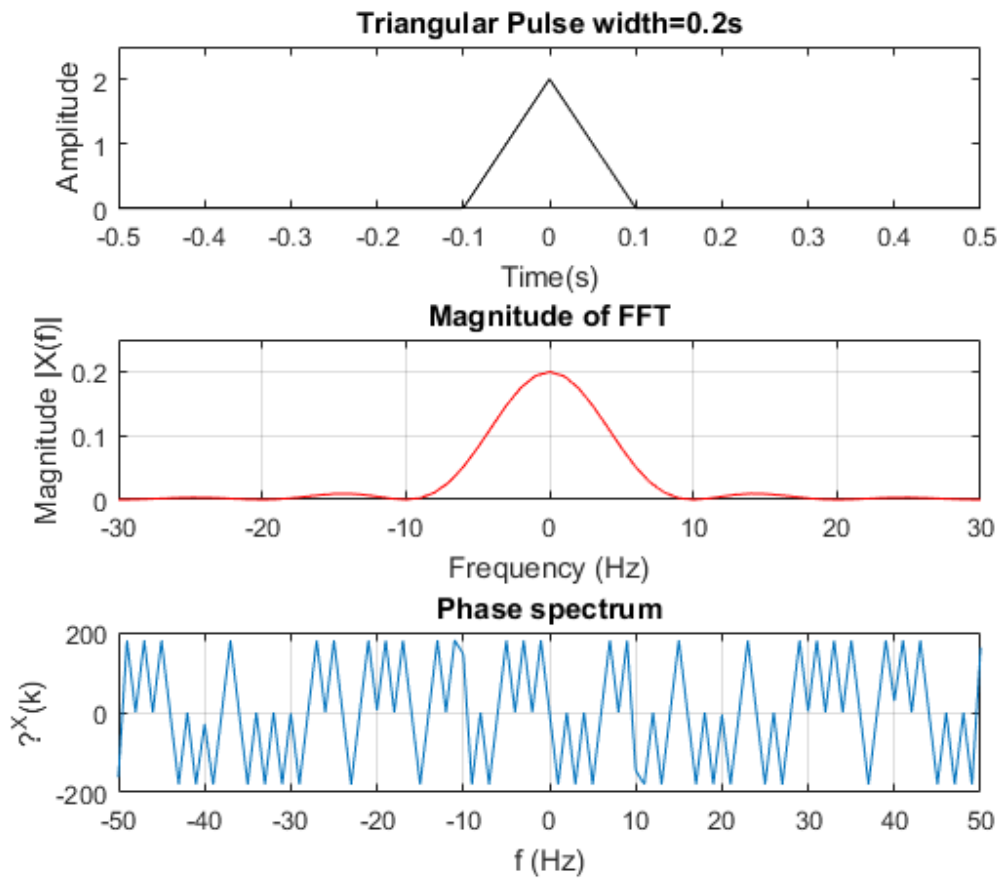


Рис. 4: Треугольный импульс и его амплитудный и фазовый спектры.

### 1.5.3 Гармонический сигнал

Одним из наиболее часто используемых типов детерминированных периодических сигналов является гармоническое колебание, описываемое уравнением  $s(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ , где  $A$  – амплитуда,  $\omega_0$  – частота (круговая),  $\phi_0$  – начальная фаза. Величина  $(\omega_0 t + \phi_0)$  определяет полную фазу сигнала. Таким образом, гармоническое колебание полностью характеризуется тремя параметрами: частотой (или периодом), амплитудой и фазой.

Синтезировал в Matlab гармонический сигнал, повторяющийся 5 периодов, с частотой 10 Гц, амплитудой 1.5 и фазой  $\pi/4$ :

```
f = 10; % частота гарм. сигнала
Fs = 100; % частота дискретизации
Ph = pi/4; % фазовый сдвиг (рад)
nCyl = 5; % чтобы сгенерировать 5 периодов
A = 1.5; % амплитуда

t = 0:1/Fs:nCyl*1/f; % дискр. отсчеты времени

x = A*sin(2*pi*f*t + Ph); % синтез сигнала
```

Рассчитал спектральную функцию гармонического сигнала:

$$\begin{aligned}\dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(\omega_0 t + \phi_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A \frac{e^{j\omega t + j\phi_0} + e^{-j\omega t - j\phi_0}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} e^{j\phi_0} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} e^{-j\phi_0} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \\ &= A\pi e^{j\phi_0} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\phi_0} \delta(\omega + \omega_0).\end{aligned}$$

Результат, как видно из получившегося выражения, представляет собой пару дельта-функций, расположенных на частотах  $\pm\omega_0$ . Множители при них отражают амплитуду и начальную фазу гармонического сигнала. Для сгенерированного сигнала спектр должен содержать две гармоники на частотах  $\pm 10$  Гц с амплитудой  $A/2 = 1.5/2 = 0.75$ . Проверил это, построив амплитудный и фазовый спектры сигнала (Рис. 5):

```
NFFT = 550; % % число линий Фурье спектра
X = fftshift(fft(x,NFFT)); % получаем спектр
fVals = Fs*(-NFFT/2:NFFT/2-1)/NFFT; % вектор частот

plot(t, x, 'k');
plot(fVals, abs(X)/length(x), 'r');
plot(fVals, atan2(imag(X),real(X))*180/pi);
```

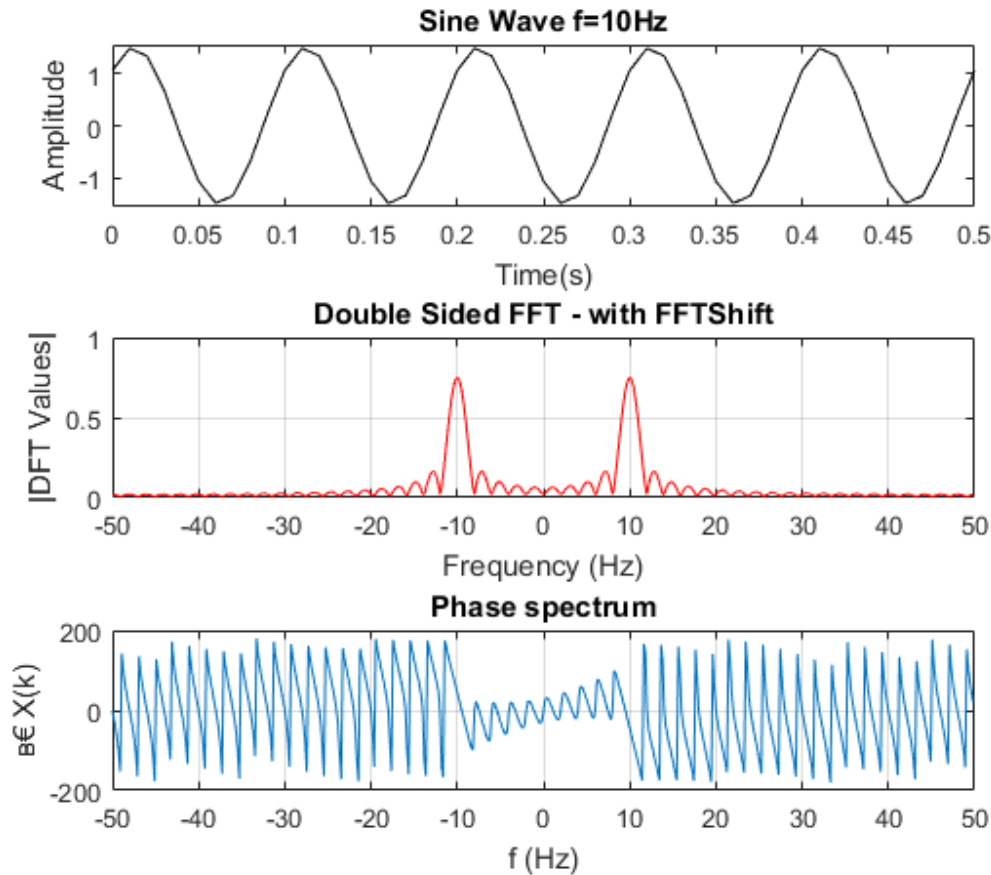


Рис. 5: Гармонический сигнал и его амплитудный и фазовый спектры.

#### 1.5.4 Сигнал с меняющейся частотой (chirp)

Получил сигнал с частотой изменяющейся во времени с помощью функции Matlab *chirp*. Частота chirp сигнала может варьироваться от низких до высоких частот (up-chirp) или от высоких к низким (low-chirp).

Chirp сигналы встречаются всюду, например, частота движения маятника меняется со временем. Доплеровский эффект, радары, сонары, обработка изображений – и там встречаются chirp сигналы.

Линейный chirp сигнал меняет частоту от низкой до высокой или наоборот линейно во времени. Чтобы сгенерировать такой сигнал, можно модифицировать уравнение гармонического сигнала и воспользоваться им:

$$s(t) = A \cos(2\pi f(t)t + \phi_0),$$

$$\text{где } f(t) = \frac{k}{2}t + f_0 \text{ и } k = \frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0}, \quad (16)$$

причем  $f_0, f_1$  – начальная и конечная частоты;  $t_0, t_1$  – первый и последний временной отсчет;  $\phi_0$  – начальная фаза;  $A$  – амплитуда.

Я для создания сигнала воспользовался встроенной в Matlab функцией *chirp*.

`fs = 500; % частота дискретизации`



```

t = 0:1/fs:1; % отсчеты времени

f0 = 1; % начальная частота chirp
f1 = 25; % частота chirp при t = 1 (в конце)
x = chirp(t, f0, 1, f1);

```

График полученного сигнала представлен на Рис. 6. Видно, как частота колебания сигнала меняется от низких значений до высоких линейно во времени. Затем построил амплитудный и фазовый спектры синтезированного chirp сигнала.

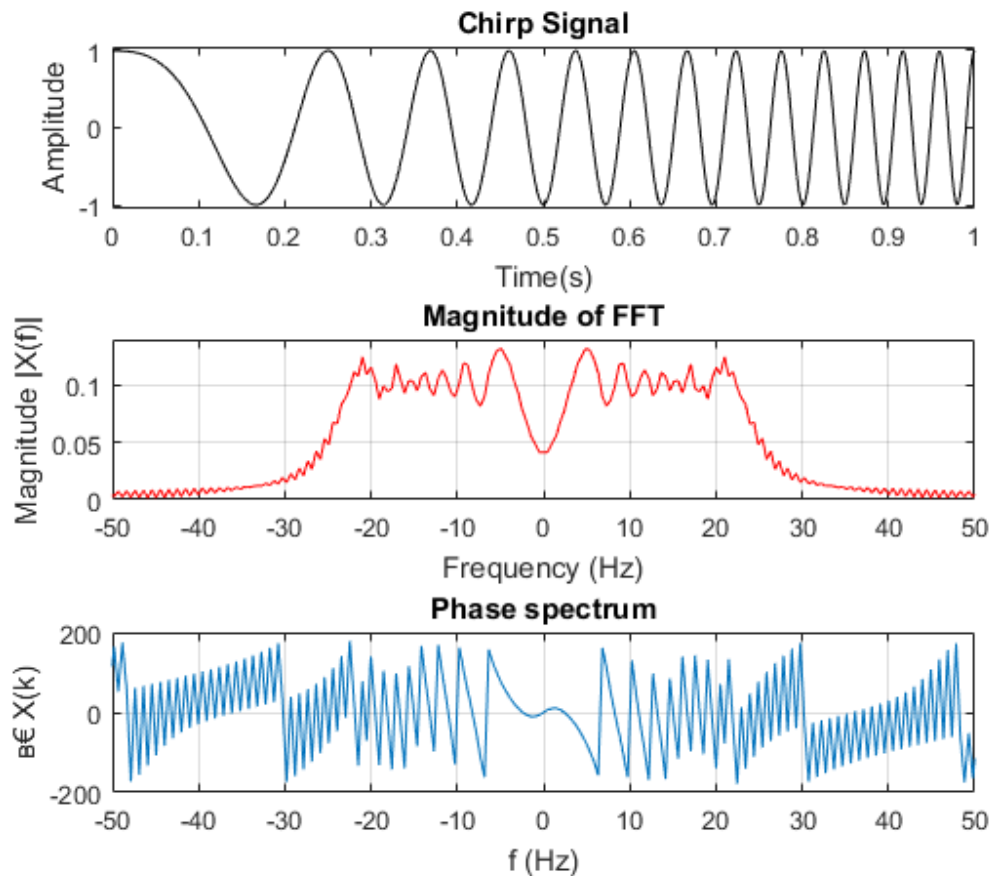


Рис. 6: Chirp сигнал и его амплитудный и фазовый спектры.

### 1.5.5 Поиск синхропосылки с помощью xcorr

Представил сигнал [0001010111000010] в виде последовательности прямоугольных импульсов с частотой 1600 Гц (период  $T = 1/Fs$ ) и коэффициентом заполнения, равным 100%. Для этого увеличил число отсчетов в сигнале в 100 раз с помощью функции *bld\_signal*:

```

function s = bld_signal(x, scale);
s = zeros(1, numel(x)*scale);
k = 1;
for i=1:numel(s)

```

```

    if(i/k > scale)
        k = k + 1;
    end
    s(i) = x(k);
end

```

После такого преобразования сигнал будет иметь 1600 отсчетов. Проделал то же с сигналом синхропосылки [101]:

```

r = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0]; % сигнал
m = [1 0 1]; % синхропосылка (шаблон)
scale = 100; % во сколько "растянуть" сигналы
% e.g. для [1 0], scale=2: [1 1 0 0];
r = bld_signal(r, scale);
m = bld_signal(m, scale);
% пусть частота дискретизации соответствует числу отсчетов
Fs = (numel(r)-1);

```

Графики получившихся сигналов приведены на Рис. 7.

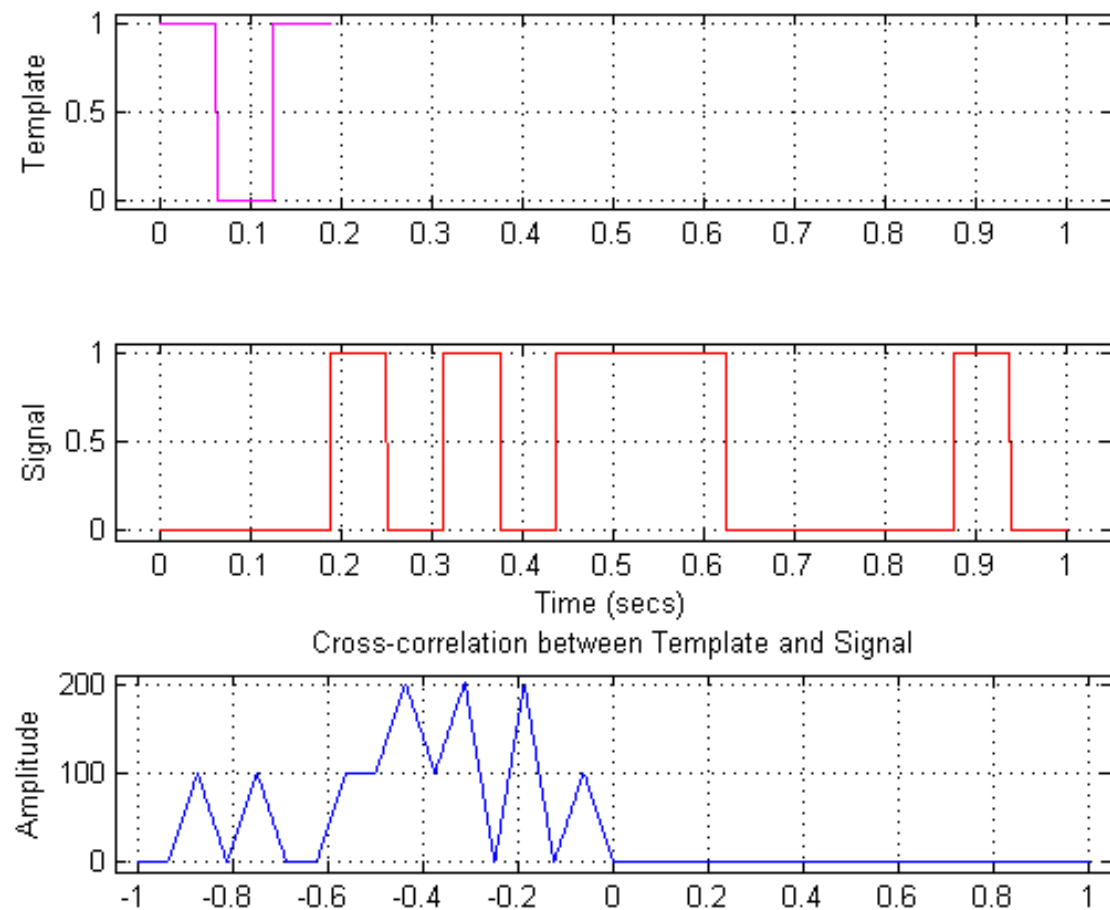


Рис. 7: Синхропосылка и сигнал, а также график их корреляции.

Рассчитал коэффициенты корреляции (вектор  $C$ ) с помощью встроенной в Matlab функции *xcorr*:

```

[C, lag] = xcorr(m, r); % вычисление корреляции

```

На выходе получил вектор задержек *lag* для каждого коэффициента из *C*. И уже возможно вычислить начало синхропосылки. Чтобы достичь желаемого результата необходимо обнаружить пик в *C* (см. Рис. 7). Пиков может быть несколько, хотя необходим последний, т.к. предыдущие имеют все шансы указывать не на синхропосылку, а на сигнал с информацией после нее. В следствии этого поначалу я определил значение максимума в *C*, а потом вычислил позицию последнего встретившегося этого элемента с погрешностью в 5% – в следствии тестов выяснилось, что значения пиков могут незначительно отличаться, а функция *max* находит наибольший из них, что приводит к некорректному результату. Теперь осталось определить задержку:

```
>> Z = max(abs(C)); % поиск наибольшего коэффициента
>> I = find(abs(C-Z) < Z*0.05, 1, 'last');
>> SampleDiff = lag(I) % выводим значение задержки
>> SampleDiff =
    -295
>> timediff = SampleDiff/Fs % переводим в единицы времени
>> timediff =
    -0.1845
```

Выразил задержку как число отсчетов и в единицах времени. Последний пик на графике взаимной корреляции означает, что синхропосылка появляется в сигнале после 0.1845. Иными словами, синхропосылка опережает сигнал на 295 отсчетов, на что указывает *SampleDiff*. Эта информация пригодится для выравнивания сигналов друг относительно друга:

```
if(SampleDiff == 0) SampleDiff = 1; end; % r(0:end) - нельзя
r_al = r(abs(SampleDiff):end); % выравнивание сигнала
```

Результат представлен на Рис. 8.

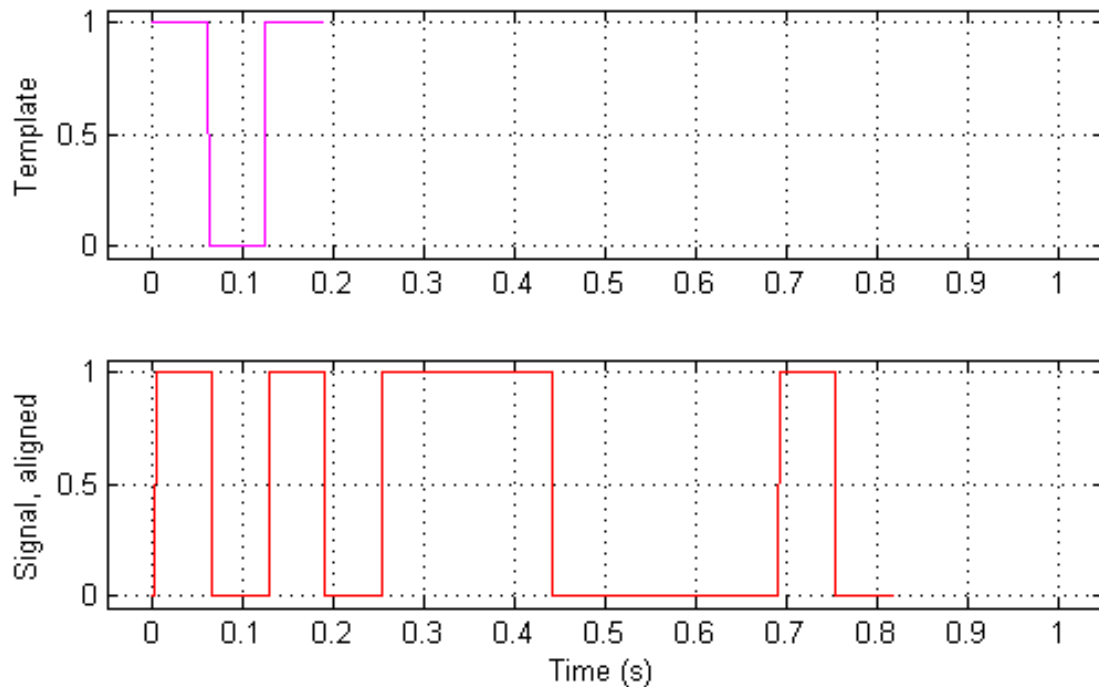


Рис. 8: Синхропосылка и выровненный сигнал.

Теперь несложно определить пакет данных:

```
lm = 8; % длина пакета данных
p = zeros(1, lm); % выделение памяти под пакет с данными
for i=0:lm-1
    % смотрим значение сигнала в середине импульса и
    p(i+1) = r_al(350+i*scale); % пропускаем 3 имп. синхропосылки
end
```

В результате  $p$  равен [01110000].

### 1.5.6 Поиск синхропосылки с помощью быстрой корреляции

Для данной задачи синхропосылка и сигнал были преобразованы так же, как и в предыдущем случае. Их графики можно посмотреть на Рис. 7.

Основное отличие в расчете коэффициентов корреляции. В этот раз сначала сигналы подвергаются быстрому преобразованию Фурье (дискретному), затем перемножаются, после чего произведение передается в функцию обратного дискретного преобразования Фурье:

```
C = ifft(fft(fliplr(r), 2*Fs).*fft(fliplr(m), 2*Fs), 2*Fs);
lag = [-Fs:Fs-1];
```

Отмечу, что синхропосылка и сигнал были представлены в обратном порядке (*fliplr*). Это нужно для того, чтобы график корреляции был идентичен такому на Рис. 7 и чтобы можно было выполнять те же дальнейшие действия. Также был сформирован вектор задержек.

Оставшиеся шаги полностью совпадают с тем, что проделано в случае с использованием *xcorr*: нашел задержку как число отсчетов, выровнял сигналы, показал график, определил посылку.

Продемонстрирую работу быстрой корреляции на примере с сигналом [0101010111000010]:

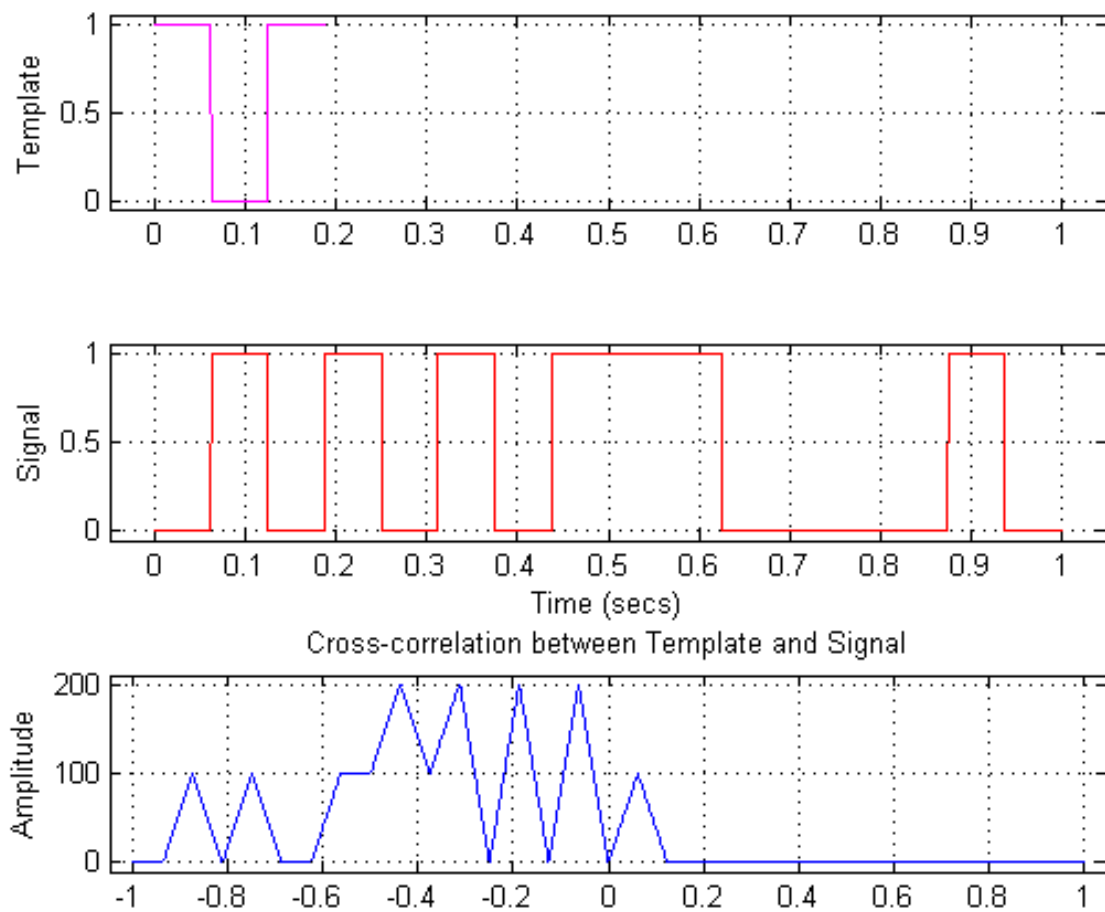


Рис. 9: Синхропосылка и сигнал, а также график их корреляции.

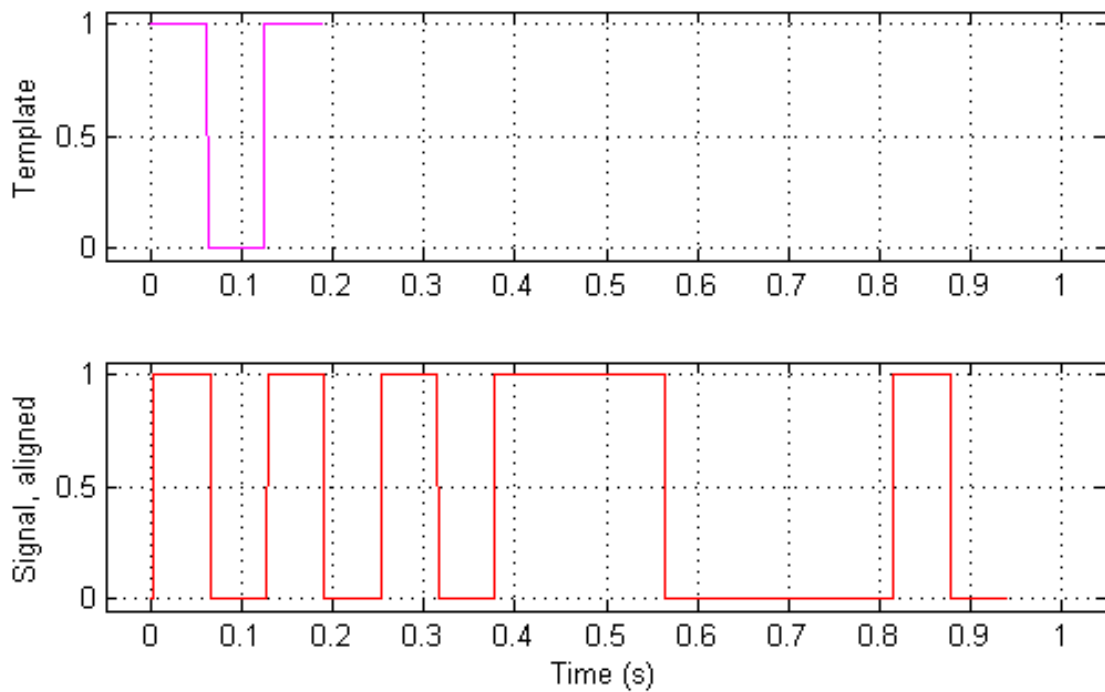


Рис. 10: Синхропосылка и выравненный сигнал.

В результате получена посылка: [01011100].

### 1.5.7 Сравнение *xcorr* с быстрой корреляцией

Для сравнения воспользовался функциями Matlab *tic* и *toc*: первая используется в том месте, откуда следует начать отсчет времени, последняя – там, где нужно завершить счет и вывести результат.

Сравниваться будет только время формирования векторов коэффициентов корреляции и задержек для одинаковых сигналов.

- *xcorr*:

```
tic;  
[C, lag] = xcorr(m, r);  
toc
```

- быстрая корреляция

```
tic;  
C=ifft(fft(fliplr(r),2*Fs).*fft(fliplr(m),2*Fs),2*Fs);  
lag = [-Fs:Fs-1];  
toc
```

В результате трех измерений каждого алгоритма установлено, что быстрая корреляция работает на 0.072 с быстрее, чем *xcorr*: 0.016 с против 0.088 с.

## 1.6 Вывод

Не считая естественного представления сигналов во временной области в анализе сигналов и систем обширно осуществляется частотное представление.

Пусть имеется сигнал в виде комплекта отсчетов его амплитуд, производимых с некоторой частотой дискретизации. В этом виде удобно хранить сигнал и преобразовывать его обратно в непрерывный. Дабы иметь возможность обрабатывать сигнал, к примеру, определить степень сходства имеющегося сигнала с иным, потребуется преобразование представления сигнала в виде отсчетов в его частотный диапазон. Это осуществляется при помощи прямого (дискретного) преобразования Фурье. После этого преобразования сигнал будет представлен в виде коэффициентов, сообразных амплитудам и фазам частот, составляющих данный сигнал. Тогда возможно использовать такие операции обработки сигнала, как «фильтр нижних частот» либо «фильтр верхних частот», которые «вырезают» из сигнала все частоты выше или же ниже какой-либо заданной при помощи обнуления коэффициентов, соответствующие частотам, которые нужно убрать.

Круг областей применения преобразования Фурье существенно шире: обработка растровых изображений, телекоммуникации, исследование и измерение сигналов, радиолокация и так далее. Образцом применения преобразования имеет возможность служить передача данных в цифровой форме по аналоговым линиям телефонной сети (модем). Для передачи данных в цифровой форме, они поначалу преобразуются в некоторый набор частот и передаются по линиям передач, а затем, на приемной стороне производится обратное преобразование и восстанавливаются начальные данные.

Корреляционный анализ позволяет решить часто образующуюся задачу обнаружения 1-го сигнала в другом. В основу корреляционного анализа положено вычисление корреляции, то есть числового значения, описывающего меру связи сигналов на рассматриваемом временном промежутке.