Курсовая работа по теме «Оценка эквивалентных норм».

Пьянков Александр, группа МЕН–390101

14 июля 2022г.

Содержание

1 Известные сведения

Известно, что в любом конечномерном пространстве (которое изомофрно $\mathbb{R}^n$), любые две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ эквивалентны, т.е.

$$\exists \alpha, \beta > 0 \, \forall x \in X = \mathbb{R}^n : \; \alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1 .$$

Текущая задача состоит в поиске величины

$$C = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$$

и элемента x^*, на котором эта величина достигается.

Ее можно рассматривать как норму функционала $\|\cdot\|_1$ на пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Она достигнется обязательно, т.к. ее можно рассматривать на единичной сфере по $\|\cdot\|_2$:

$$C = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|x\|_1 .$$

Такая сфера в конечномерном пространстве – компакт, а функция $\|\cdot\|_1$ непрерывна, по теореме Вейерштрасса достигнется величина C, причем в силу четности нормы $(\forall \|\cdot\| : \; \|x\| = \|-x\|)$, элементов x^* будет четное число.

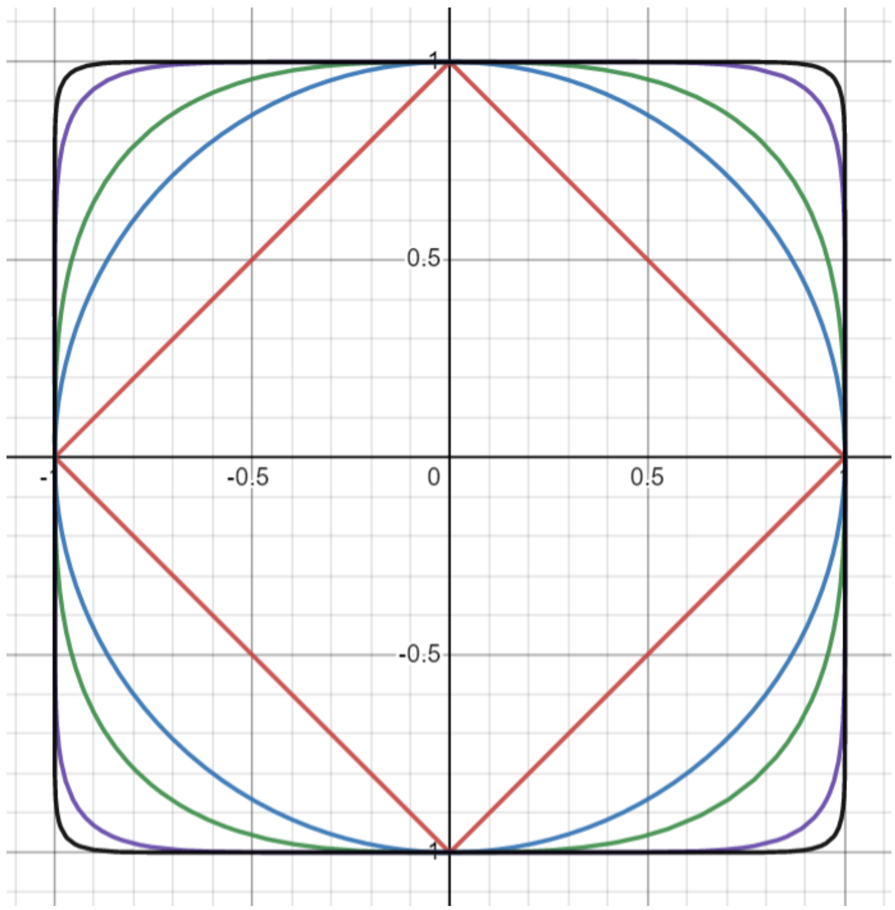
2 Некоторые частные случаи

2.1 p-нормы в пространствах n-мерных векторов

Для любых норм вида $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p}$, $1 \leqslant p < \infty$, величина $C = 1$ и достигается на элементе $x^* = (1, 0, \ldots, 0)$:

$$\|(1, 0, \ldots, 0)\|_p = 1 = \|(1, 0, \ldots, 0)\|_q \ \forall p, q \in [1, \infty),$$

если только $q < p$, т.к. при этом обязательно будет неравенство $\|x\|_p \leqslant \|x\|_q$. (См. [1], с. 42). Это соотношение следует из вложенности единичных шаров норм такого вида – чем больше p, тем больше шар $\|x\|_p = 1$, однако точки, лежащие на осях координат и имеющие единичную норму, будут принадлежать всем единичным шарам, изобразим такое вложение при $n = 2$ и различных p:



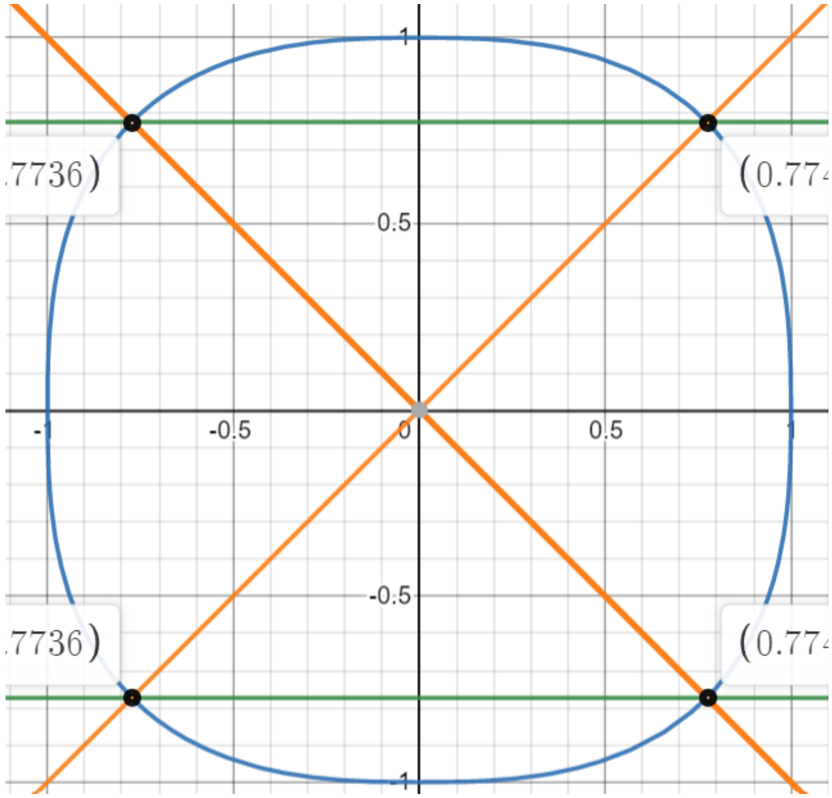
Теперь предположим, что $1 \leqslant p < q < \infty$. Можно преобразовать выражение величины C:

$$C = \sup_{\|x\|_q = 1} \|x\|_p.$$

Рассмотрим единичную сферу по норме с индексом $q : S_q[0, 1] = \{x : \|x\|_q = 1\}$. На ней

$$\exists x^* : \|x^*\|_q = 1,\ C = \|x^*\|_p = \max_{\|x\|_q = 1} \|x\|_p.$$

Рассмотрим точки, у которых модули всех координат равны, таких точек x^* на анализируемой сфере будет 2^n, где n – размерность пространства. Для наглядности покажем изображение при $n = 2$:



Ровно одна из них будет иметь координаты вида $x^* = (a, a, \ldots, a)$, $a > 0$. Найдем a:

$$1 = \left(n(a^q)\right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow a = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \Rightarrow C \geqslant \|x^*\|_p = \left(n^{\frac{-p}{q}} \cdot n\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Теперь оценим C сверху. Согласно неравенству Гельдера,

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \sum_{i=1}^n (|x_i|^p \cdot 1) \leqslant \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n 1^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} =$$

$$= \|x\|_q^p \cdot n^{1-\frac{p}{q}} \Rightarrow \|x\|_p \leqslant \|x\|_q \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Аналогично показываются оценки (и они будут теми же), когда p или q равны ∞.

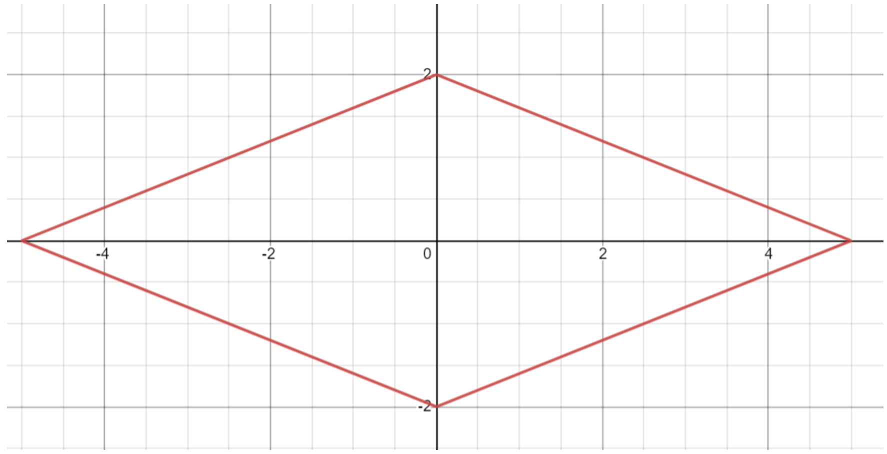
Подводя итог,

$$C = C_{p,q} = \begin{cases} 1 & q \leqslant p; \\ n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} & q > p. \end{cases}$$

$$x^* = x^*_{p,q} = \begin{cases} (1, 0, \ldots, 0) & q \leqslant p; \\ \left(n^{\frac{-1}{q}}, n^{\frac{-1}{q}}, \ldots, n^{\frac{-1}{q}}\right) & q > p. \end{cases}$$

2.2 Ромбические нормы

Пусть пока $n = 2$. Рассмотрим набор положительных чисел $a = (a_1, a_2)$ и ромбическую норму $\|x\|_a = a_1|x_1| + a_2|x_2|$. Единичной сферой по этой норме будет ромб



Возьмем еще один набор положительных чисел $b = (b_1, b_2)$. Пусть элемент $x \in \mathbb{R}^2$ такой, что $\|x\|_b = b_1|x_1| + b_2|x_2| = 1$. Для решения исходной задачи нужно найти максимум величины $\|x\|_a$ и экстремального элемента x^*, на котором он достигается. Имеем

$$\|x\|_a = a_1|x_1| + a_2|x_2| = \frac{a_1}{b_1}(1 - b_2|x_2|) + a_2|x_2| =: f(x_2), \text{ б.о.о., } x_2 \geqslant 0.$$

Найдем производную:

$$f'(x_2) = a_2 - \frac{a_1 b_2}{b_1}.$$

Если она равна нулю, то функция f, она же – норма $\|x\|_a$ не зависит от x при $\|x\|_b = 1$, т.е. ромбы (единичные шары) будут масштабированы относительно точки 0. Тогда искомая величина достигается на любом $x \neq 0$ и равна $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Пусть теперь производная не равна нулю, тогда функция f линейна, следовательно достигает экстремума на концах отрезка ее определения $[0, t]$. Найдем t (x_1 – абсцисса, x_2 – ордината):

$$x_2 = t \Leftrightarrow x_1 = 0,\ b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{b_2}.$$

$$f(0) = \frac{a_1}{b_1},\ f\left(\frac{1}{b_2}\right) = \frac{a_2}{b_2}.$$

В любом случае получили ответ

$$C = \max\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right),$$

при $x_2 \geqslant 0$. Аналогично можно показать, что при $x_2 \leqslant 0$ ответ не изменится в силу симметрии ромба. Экстремальный элемент будет таковым:

$$x^* = \begin{cases} \left(\frac{1}{b_1}, 0\right) & \frac{a_1}{b_1} \geqslant \frac{a_2}{b_2}; \\ \left(0, \frac{1}{b_2}\right) & \frac{a_2}{b_2} \geqslant \frac{a_1}{b_1}. \end{cases}$$

При этом этот же ответ покроет случай пропорциональности ромбов. Если $n > 2$, то ответ будет аналогичен:

$$C = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i}{b_i},\ x^* = \left(0, 0, \ldots, \frac{1}{b_i}, \ldots, 0\right),$$

где i – индекс максимума отношения $\frac{a_i}{b_i}$.

Немного поясним этот ответ. «Вкладывая» всю ненулевую часть элемента в индекс максимума отношения, искомая величина окажется наибольшей, из-за линейной суммы формулы ромбической нормы (без степеней координат, т.е. суммы модулей координат с весами a_i, b_i). То есть нужно полностью «вложиться» в наибольшее отношение этих весов, тогда получится максимальный результат. Упрощенный пример: пусть $m > n > 0$ и нужно подобрать числа $a, b:\ a, b > 0,\ a + b = 1$ такие, что $am + bn$ максимально. Очевидно, что $a = 1$, $b = 0$, т.е. в наибольший вес m полностью вложили все допустимые данные из a, b. Однако при наличии степеней в формуле нормы это не так.

2.3 Прямоугольные нормы

Это нормы вида $\|x\|_a = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(a_i|x_i|),\ a_i > 0,\ a = (a_1, \ldots, a_n)$ – набор чисел. Единичная сфера по этой норме является n-мерным прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, с центром в точке (0,0,...,0). Для двух таких норм $\|x\|_a, \|x\|_b$ найдем искомую величину: пусть $\|x\|_b = 1,\ j$ – индекс, на котором $\|x\|_b = b_j|x_j| = 1 \Rightarrow |x_j| = \frac{1}{b_j},\ \forall i \neq j : |x_i| \leqslant \frac{1}{b_i}$, тогда имеем

$$\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\} : \|x\|_a = a_k|x_k| \leqslant \frac{a_k}{b_k},$$

причем равенство достигнется например при $x^* = \left(0, 0, \ldots, \frac{1}{b_k}, \ldots, 0\right)$, и $C = \|x^*\|_a = \frac{a_k}{b_k}$, где k таково, что

$$\|x^*\|_a = \max_{i=\overline{1,n}}(a_i|x_i^*|) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \frac{a_i}{b_i} = a_k|x_k^*| = \frac{a_k}{b_k}.$$

Оценка для C получилась такой же, что и для ромбических норм, причем можно брать тот же вектор x^*.

3 Оценка на плоскости

Здесь $n = 2$, координаты (x, y). Предположим, что формулы норм $f = \|\cdot\|_1$, $g = \|\cdot\|_2$ – достаточно гладкие функции. Будем рассматривать функцию f на единичной сфере $g(x, y) = \|(x, y)\|_2 = 1$. Задача свелась к нахождению условного экстремума (точнее – максимума) функции многих переменных. Она решается методом множителей Лагранжа.

Условие связи одно: $g(x, y) = 1 \Leftrightarrow \varphi(x, y) = g(x, y) - 1 = 0$, функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot (g(x, y) - 1)$$

Для достижения экстремума необходимо, чтобы $L'_x = L'_y = L'_\lambda = 0$. Подставим:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0; \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0; \\ g(x, y) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

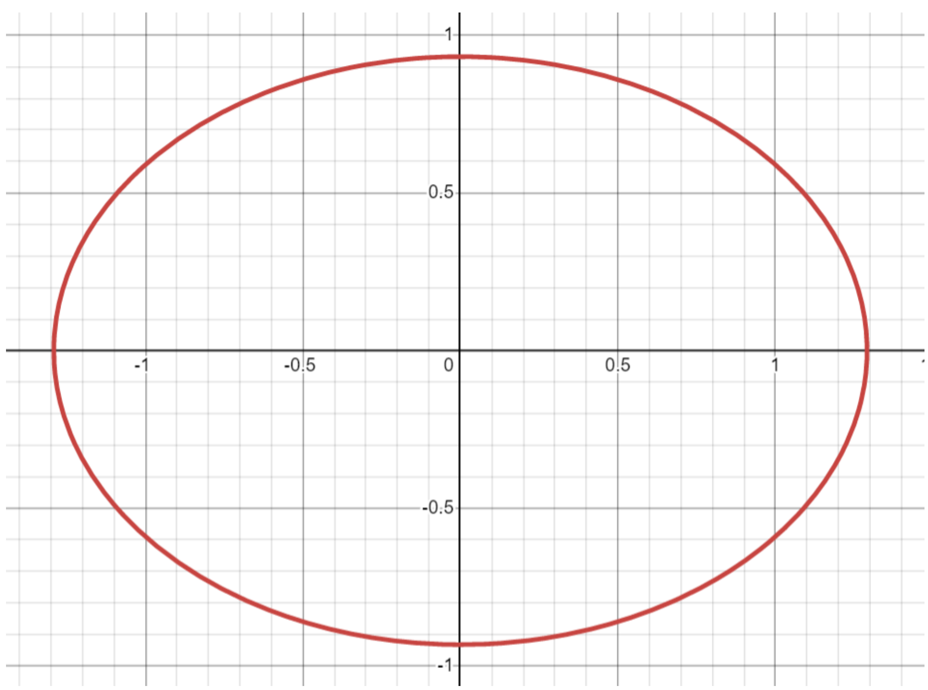
Дальнейшие рассуждения требуют конкретики от функций f, g. Однако можно отметить важный частный случай, в котором частные производные функций-норм не обращаются в 0:

$$-\lambda = \frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y}.$$

То есть точки экстремума характеризуются равенством отношений частных производных функций-норм по одной и той же переменной. Такое свойство экстремальности точек справедливо и для произвольной конечной размерности n пространства.

3.1 Эллиптические нормы

Это нормы вида $\|x\|_a = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i |x_i|^2}$, $\forall i = \overline{1, n} : a_i > 0$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Нарисуем единичную сферу на плоскости для нормы этого типа:



Пусть $f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}$, $g(x, y) = \sqrt{cx^2 + dy^2}$, $a, b, c, d > 0$ - две эллиптические нормы. Подставим их в (1):

$$\begin{cases} \frac{ax}{\sqrt{ax^2+by^2}} + \lambda \left(\frac{cx}{\sqrt{cx^2+dy^2}} \right) = 0; \\ \frac{by}{\sqrt{ax^2+by^2}} + \lambda \left(\frac{dy}{\sqrt{cx^2+dy^2}} \right) = 0; \\ cx^2 + dy^2 = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим 3 случая.

1) $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1/d},\ f(x,y) = \sqrt{b/d}$.

2) $y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1/c},\ f(x,y) = \sqrt{a/c}$.

3) $x \cdot y \neq 0$. Тогда

$$\lambda = \frac{-ax}{cx\sqrt{ax^2+by^2}} = \frac{-by}{dy\sqrt{ax^2+by^2}} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

В таком случае нормы будут пропорциональны, их эллипсы (единичные сферы) – подобны, и искомая величина достигнется в любой ненулевой точке. Она будет равна $C = \sqrt{a/c} = \sqrt{b/d}$.

В итоге, независимо от номера случая, получилось, что

$$C = \max\left(\sqrt{\frac{a}{c}}, \sqrt{\frac{b}{d}}\right);$$

$$\big((x,y)\big)^* = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{c}}, 0\right), & \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{d}; \\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{d}}\right), & \frac{a}{c} < \frac{b}{d}. \end{cases}$$

3.2 Произвольная и евклидова норма

Пусть $f(x,y)$ – произвольная норма на $\mathbb{R}^2$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^2\ \exists f'_x(x,y), f'_y(x,y)$, $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ – евклидова норма. Тогда нас интересуют точки (x,y), в которых $g(x,y)^2 = x^2+y^2 = 1$. Подставим имеющиеся данные в соотношения (1):

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda x = 0; \\ f'_y(x,y) + \lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда, обозначив $f'_x(x,y) = a,\ f'_y(x,y) = b$:

$$x = \frac{-a}{\lambda},\ y = \frac{-b}{\lambda},\ a^2 + b^2 = \lambda^2;$$

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2},\ x = \pm\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \pm\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Всего получилось 4 точки (все возможные комбинации знаков $+$ и $-$ в x, y), причем из соображений симметрии, в двух из них достигнется минимум, в двух других – максимум. Кроме того, экстремумы будут распределены по этим точкам следующим образом:

1) x, y взяты с плюсом – это точка максимума, и во второй точке максимума обе координаты взяты с минусом. Две других комбинации знаков дадут две точки минимума.

2) Точки максимума характеризуются разными знаками координат x, y, минимума – одинаковыми.

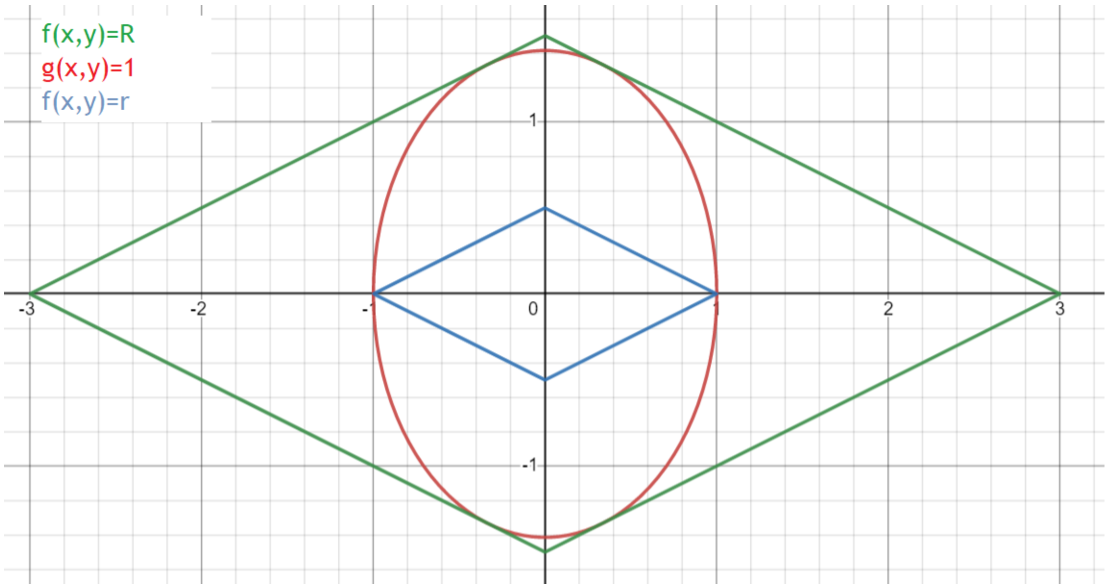
Искомая величина C достигнется в точках максимума.

Полученный вывод можно обобщить и на n-мерное пространство: пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – произвольная норма на $\mathbb{R}^n$, $g(x_1,\ldots,x_n) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ – евклидова норма. Тогда экстремальные точки будут равны

$$x_i = \pm\frac{-a_i}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2}} = \pm\frac{-a_i}{g(a_1,\ldots,a_n)},\ a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1,\ldots,n.$$

3.3 Исследование сфер

Обозначим $S_R(\|\cdot\|)$ – сфера радиуса R нормы $\|\cdot\|$, т.е. множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $\|(x, y)\| = R$. Пусть f, g – две произвольные нормы на $\mathbb{R}^2$, тогда сферы $S_r(f)$, $S_R(f)$, $S_1(g)$ будут выглядеть так:



Экстремальными для отношения $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ являются точки, лежащие на 2-х сферах одновременно, при этом одна сфера должна быть целиком вложена в другую, как на рисунке выше. Более того, если $S_r(f) \subseteq S_1(g)$, то точки, принадлежащие этим сферам будут точками минимума отношения $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, равного r; а при $S_1(g) \subseteq S_R(f)$ соответствующие точки будут являться точками максимума этого отношения, равного R, который является искомой величиной.

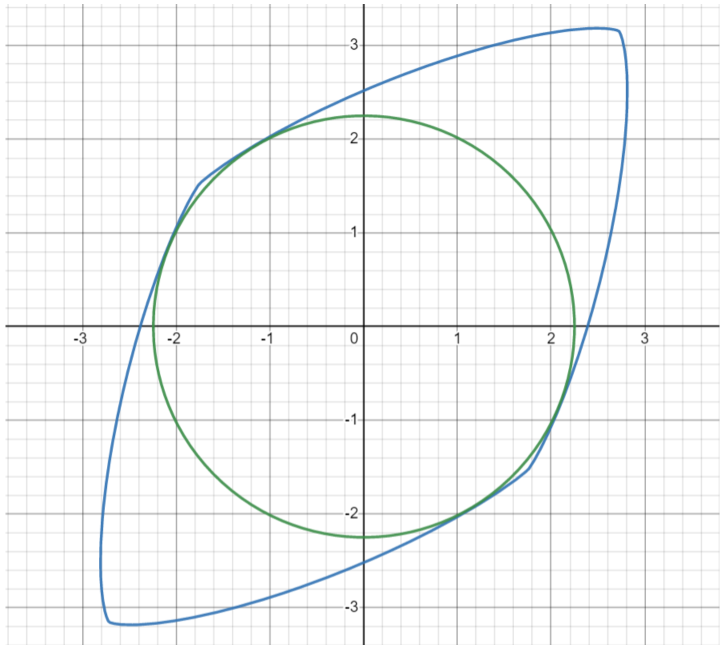
Такое исследование подлежит обобщению на n-мерное пространство: в том случае соотношения между вложенностью сфер и соответствующим экстремумом сохранятся.

3.4 Применение дифференциальной геометрии

Дана норма $f(x, y)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Предположим, что сфера $S_1(f)$ имеет параметризацию

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ t \in [0, T],\ T \text{ – период: } x(T) = x(0),\ y(T) = y(0). \end{cases}$$

Также для гладкости функции f необходимо условие на параметризацию: $|x'(t)| + |y'(t)| > 0$. В точках экстремума отношения f/g, где g – евклидова норма на $\mathbb{R}^2$, параметризованная сфера касается окружности, причем, согласно разделу 3.3, положение окружности внутри кривой соответствует максимуму указанного отношения; снаружи – минимуму. Изобразим случай максимума отношения f/g:



Искомые точки, они же – точки касания двух кривых (окружности и параметризованной сферы), обладают свойством, что нормаль к параметризованной кривой равна нормали к окружности, потому что в этих точках касательная к окружности и сфере $S_1(f)$ общая, следовательно и нормаль тоже общая, или, по крайней мере, эти нормали коллинеарны. Кроме того, поскольку в любой точке окружности касательная ортогональна радиусу, а нормаль по определению ортогональна касательной, то для каждой точки окружности выполняется свойство коллинеарности нормали в этой точке ее радиус-вектору. Направляющий вектор касательной при некотором $t \in [0, T]$ (см. [2], с. 27) задается формулой $(x'(t), y'(t))$, следовательно, нормаль можно задать как $(-y'(t), x'(t))$. Тогда необходимое условие можно записать так:

$$\frac{x(t)}{-y'(t)} = \frac{y(t)}{x'(t)} \Rightarrow x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0. \tag{2}$$

Дальнейшие действия требуют конкретной формулы параметризации (например $x(t) = 0.4\sin t, y(t) = \cos t$), вследствие которой решается нелинейное в общем случае уравнение для поиска t, затем каждый найденный корень t_0 подставляется сначала в параметризацию, потом вычисляется евклидова норма точки $(x(t_0), y(t_0))$. Ответом к поставленной в начале работы задаче является точка минимума евклидовой нормы (ей соответствует один из корней уравнения (2)) и величина, обратная этому минимуму (т.к. требуется найти $\max(f/g)$, при котором $f = 1$).

Таким образом, уравнение (2) характеризует точки экстремума отношения норм, одна из которых – евклидова, а другая имеет параметризацию $x(t)$, $y(t)$, $t \in [0, T]$.

3.5 Две произвольные нормы

Пусть теперь f, g – две произвольные нормы достаточной гладкости. Сделаем невырожденную замену переменных необходимой гладкости, переводящая норму g в евклидову (такая замена существует, т.к. единичный шар по любой норме – замкнутое, поглощающее, ограниченное множество, следовательно между двумя такими множествами существует *гомеоморфизм*, которым является рассматриваемая замена):

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{x}(x, y); \\ \tilde{y} = \tilde{y}(x, y); \\ g(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y)) = \tilde{g}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Тогда норма f также преобразуется: $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y)) = \tilde{f}(x, y)$, но главное, что удалось преобразовать одну норму в евклидову, а этот случай был рассмотрен в предыдущем разделе, т.е. точка экстремума (x, y) отношения $\tilde{f}/\tilde{g}$ характеризуется уравнением $x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$, где t – переменная параметризации единичной сферы нормы $\tilde{f}$. Схема решения следующая: находим корни уравнения (2), подставляем их в параметризацию сферы для нормы $\tilde{f}$, затем вычисляем их евклидову норму (значение функции $\tilde{g}$ в них), выбираем наибольшее и наименьшее из получившихся значений (фиксируя точки $(x(t), y(t)) = (x, y)$ этих экстремумов). Однако получившиеся точки не нужно подставлять в уравнения замены переменных и затем считать от результата замены исходные нормы, т.к. исходные нормы, аргументы которых – замененные переменные, перешли в параметризованную и евклидову нормы, аргументами которых являются незамененные переменные.

В заключении стоит отметить, что рассуждения, приведенные в разделах 3.4, 3.5 также подлежат обобщению на случай n-мерного пространства, но тогда условие коллинеарности нормали радиус-вектору будет выглядеть иначе, поскольку нормаль задается иным способом. Однако рассуждения текущего раздела справедливы для любого конечномерного пространства, замена переменных очевидна:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dots \\ \tilde{x}_n = \tilde{x}_n(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}. \end{cases} \tag{3}$$

4 Общий случай

Рассуждения для некоторых пар норм из раздела 3 обобщаются на этот случай, это было указано после рассмотрения таких пар в 2-мерном пространстве.

4.1 Анализ нормали

Даны две нормы f, g на пространстве $\mathbb{R}^n$ достаточной гладкости. Благодаря выводу из раздела 3.5, достаточно рассмотреть случай, когда одна из норм – евклидова. Пусть ей является норма g для определенности. Для сферы в $\mathbb{R}^n$ справедливо то же свойство, связанное с нормалью, что и для окружности: нормаль, исходящая из точки сферы коллинеарна радиус-вектору этой точки. Согласно заключению в разделе 3.3 справедливы рассуждения относительно вложенности сфер – единичной для нормы f и масштабируемой для нормы g.

Параметризация $n-1$-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$ (коей является сфера для нормы) записывается в неявном виде $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Однако поскольку для точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этой сферы выполнено равенство $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, то $F = f - 1$. Запишем уравнение нормали к поверхности $F = 0$ (по аналогии с [2], с. 28-30), проведенной к точке $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$:

$$\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right)} = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}\left(x^{(0)}\right)} = \ldots = \frac{x_n - x_n^{(0)}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(x^{(0)}\right)}.$$

В знаменателях этих дробей стоят координаты направляющего вектора нормали (т.е. коллинеарного ей). Обозначив $\forall i = \overline{1, n}\ A_i := \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$, свойство точек на сфере представится в виде

$$\frac{A_i}{x_i^{(0)}} = C,\ i = \overline{1, n}.$$

Вывод: искомые точки экстремума отношения норм f/g характеризуются одинаковым отношением частной производной функции f по i-й переменной в этой точке к i-й координате этой точки.

Поясним, что значит необходимая гладкость функций f и g. Поскольку случай, рассмотренный в разделе 3 обобщается здесь, и здесь требуется существование первых производных функции f, а у евклидовой нормы существуют производные любого порядка (кроме точки 0, но через нее не проходит ни одна единичная сфера), то этой гладкостью является однократная дифференцируемость функций f, g и однократная дифференцируемость, отсюда же – непрерывность замены (3).

4.2 Пространство тригонометрических многочленов

Вид тригонометрического многочлена n-го порядка:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Он определен при всех $x \in \mathbb{R}$ и непрерывен на действительной оси, поэтому будем рассматривать тригонометрические многочлены для всех $x \in \mathbb{R}$. Пространство тригонометрических многочленов n-го порядка обозначается $\mathbb{T}_n$, стандартным базисом которого является система функций $\Phi = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\right\}$. На этом пространстве, как и на любом конечномерном линейном, можно задать норму. Наиболее распространенные и используемые из них имеют вид ([3], с. 56-57)

$$\|T_n\|_p = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |T_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geqslant 1.$$

Отметим также норму при $p = \infty$

$$\|T_n\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |T_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |T_n(x)| = \max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} |T_n(x)|.$$

Наибольшее применение, особенно в рядах Фурье, (см. [4], с. 425) имеет норма при $p = 2$:

$$\|T_n\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(T_n(x))^2dx}.$$

По этой норме можно ввести скалярное произведение в пространстве $\mathbb{T}_n$:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

тогда вышеупомянутая система функций Φ будет ортонормальной, т.е.

$$\forall\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi\,(\varphi_1 \neq \varphi_2 \Rightarrow \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle = 0);\ \forall\varphi \in \Phi:\ \langle\varphi, \varphi\rangle = 1.$$

Перейдем к оценке норм $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q;$ для простоты $1 \leqslant p < q < \infty$. Нам предстоит оценить выражение $\frac{\|T_n\|_p}{\|T_n\|_q}$. Для этого воспользуемся интегральным неравенством Гельдера с показателями $\frac{q}{p}$ и $\frac{q}{q-p}$. Оба показателя при наложенных на p и q ограничениях попадают в диапазон от 1 до ∞, что свидетельствует о легитимности применения указанного неравенства.

$$\|T_n\|_p^p = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|^p\cdot 1dx \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|T_n(x)|^{p\cdot\frac{q}{p}}dx\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}1^{\frac{q}{q-p}}dx\right)^{\frac{q-p}{q}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1-\frac{p}{q}}\|T_n\|_q^p\,(2\pi)^{1-\frac{p}{q}}.$$

Получаем следующую оценку:

$$\|T_n\|_p \leqslant \|T_n\|_q \cdot 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Причем равенство достигается например при $T_n(x) \equiv 1$, т.к. $\forall p \in [1, \infty):\ \|1\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$.
Итак, искомая величина C равна $2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, а экстремальный элемент $T_n(x) \equiv 1$. Очевидно, что при $q = \infty$ ответ остается справедливым: $\|T_n\|_p \leqslant \|T_n\|_\infty \cdot 2^{\frac{1}{p}},\ \|1\|_\infty = 1$.

5 Заключение

Оценка отношения двух эквивалентных норм, или любых двух норм в конечномерном пространстве позволяет понять, насколько сильно масштабированы и искажены единичные шары этих норм. Поскольку единичный шар любой нормы в конечномерном пространстве – множество поглощающее, то зафиксировав шар одной нормы и масштабируя другой, можно добиться их внутреннего и внешнего касания, которые будут соответствовать двум противоположным экстремумам отношения этих двух норм, например внутреннее касание соответствует минимуму, внешнее – максимуму. При этом точки касания получившихся шаров будут точками достижения этих экстремумов.

В некоторых случаях, например когда известно, что формулы норм имеют достаточную гладкость, например дифференцируемость, удобно применить ее к исследованию экстремумов и соответствующих им точек. А применяя дифференциальную геометрию конечномерного пространства, можно получить интересный результат: в точках экстремума отношения произвольной нормы к евклидовой вектор-градиент функции, задающей эту произвольную норму, коллинеарен радиус-вектору этой точки.

Список литературы

[1] Зорич В. А. «Математический анализ», часть 2. Издание 9-е, исправленное. — Москва, МЦНМО, 2019. — 676 с.

[2] Игнатьев Ю. Г. «Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве». Учебное пособие, 4-й семестр. — Казань, Казанский университет, 2013. — 204 с.

[3] Тихомиров В. М. «Математическое просвещение». Третья серия, вып. 9. — Москва, МЦНМО, 2005. — 240 с.

[4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа». 7-е издание. — Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.