МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА
ОСТРОГРАДСЬКОГО
Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ
з навчальної дисципліни
«Алгоритми та методи обчислень»

Тема «Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування»

Студент гр. КІ-24-1, Варакута О.О
Викладач, Сидоренко В. М

Кременчук 2025

Тема: Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Мета: Засвоєння графічного методу розв’язку задачі лінійного програмування.

Хід роботи

Останні дві цифри заліковки 4 7 Варіант 7:

Завдання: Знайти мінімум і максимум цільової функції:
$F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow min, max$

за умов:

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 9x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Перше обмеження: $6x_1 - 5x_2 = 1$

при x_1=0: $-5x_2 = 1\, x2 = \frac{-1}{5}$

При x_2 =0: $6x_1 = 1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{6}$

Оскільки нерівність має вигляд, $6x_1 - 5x_2 \geq 1$ допустима область лежить над цією прямою.

Друге обмеження: $x_1 + 2x_2 = 3$

при x_1= 0: $2x_2 = 3 \rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$

при x_2= 0: $x_1 = 3$

Оскільки: $x_1 + 2x_2 \leq 3$ допустима область лежить під цією прямою.

Третє обмеження: $4x_1 + 9x_2 = 1$

при x_1= 0: $9x_2 = 1 \rightarrow x_2 = \frac{1}{9}$

при x_2= 0: $4x_1 = 1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$

Оскільки: $4x_1 + 9x_2 \geq 1$ допустима область лежить над цією прямою.

Обмеження невід’ємності: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Допустима область розташована у першій координатній чверті.

Знаходження кутових точок області допустимих розв’язків:

Точка A (перетин обмежень 1 і 3):

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 = 1 \end{cases}$$

$$4(6x_1 - 5x_2 = 1)$$

$$24x_1 - 20x_2 = 4$$

$$6(4x_1 + 9x_2 = 1)$$

$$24x_1 + 54x_2 = 6$$

$$(24x_1 + 54x_2) - (24x_1 - 20x_2) = 6 - 4$$

$$74x_2 = 2$$

$$x_2 = \frac{2}{74} = \frac{1}{37}$$

$$6x_1 - 5x_2 = 1$$

$$6x_1 - 5 \cdot \frac{1}{37} = 1$$

$$6x_1 = 1 + \frac{5}{37} = \frac{42}{37}$$

$$x_1 = \frac{42}{37 \cdot 6} = \frac{7}{37}$$

Точка A $\left(\frac{7}{37} \frac{1}{37}\right)$

Точка B (перетин обмеження 3 з віссю):

$$x_2 = 0$$
$$4x_1 = 1$$
$$x_1 = \frac{1}{4}$$

B=$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

Точка C (перетин обмеження 2 з віссю):

$$x_2 = 0$$
$$x_1 + 2 \cdot 0 = 3$$
$$x_1 = 3$$

Точка D (перетин обмежень 1 і 2):

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$x_1 = 1 \; x_2 = 1$

D=(1.1)

Обчислення значень цільової функції у кутових точках:

$F = 5x_1 + 3x_2$

$F_A = 5 \cdot \frac{7}{37} + 3 \cdot \frac{1}{37}$

$F_A = \frac{35}{37} + \frac{3}{37} = \frac{38}{37}$

$F_B = 5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot 0$

$F_B = \frac{5}{4}$

$F_C = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 15$

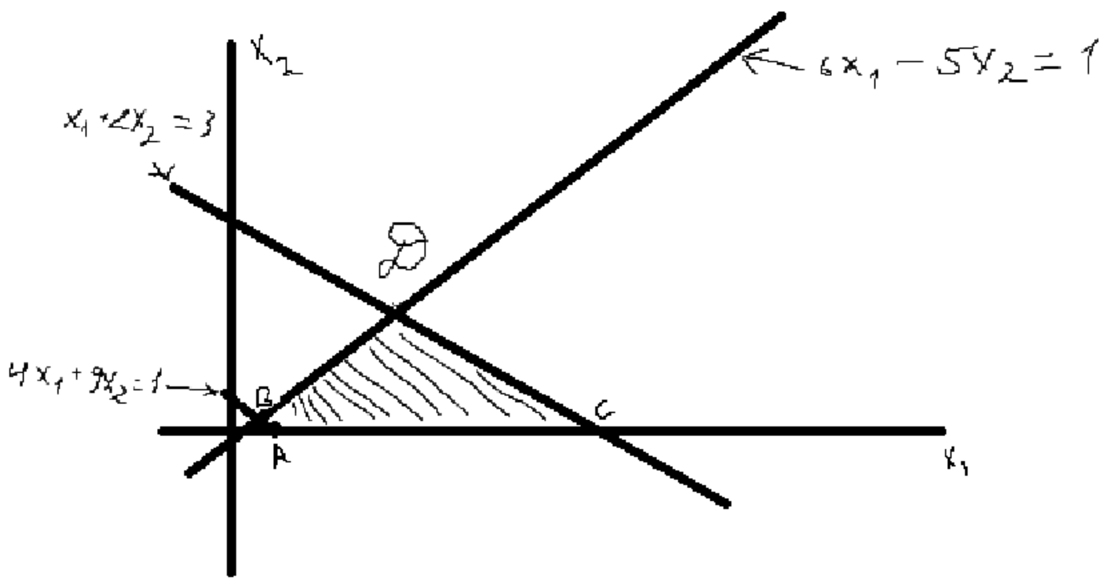
$F_D = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 8$

$F_{min} = \frac{38}{37}$

$(x_1, x_2) = \left(\frac{7}{37}, \frac{1}{37}\right)$

$F_{max} = 15$

$(x_1, x_2) = (3, 0)$



Контрольні питання

1. З якою метою будується вектор С? Яким значенням дорівнюють його координати?

Вектор С (вектор коефіцієнтів цільової функції) будується з метою задання напрямку оптимізації у задачі лінійного програмування.

У задачі лінійного програмування цільова функція має вигляд:

$F(x)=c_1 x_1+c_2 x_2+...+c_n x_n$

Вектор С визначається як: $C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$

Координати вектора С:

координатами вектора С є коефіцієнти при змінних цільової функції; кожна координата показує, наскільки сильно відповідна змінна впливає на значення цільової функції; напрямок вектора С визначає напрямок зростання (або спадання) цільової функції.

Вектор С використовується, зокрема, для геометричної інтерпретації задачі та для знаходження оптимального розв'язку на межі допустимої множини.

2. Надати визначення опуклої множини

Опуклою множиною називається така множина точок, що разом з будь-якими двома своїми точками містить увесь відрізок, який їх з'єднує.

Формально: множина М$\subset$ R^n називається опуклою, якщо для будь-яких точок $x, y \in M$та для будь-якого числа $\lambda \in [0,1]$виконується:

$\lambda_x+(1-\lambda) y \in M$

якщо з'єднати дві довільні точки множини відрізком,

весь цей відрізок повністю належить множині.

У задачах лінійного програмування допустима множина завжди є опуклою, оскільки задається системою лінійних нерівностей

Сформулювати умови існування та відсутності розв'язку задачі лінійного програмування.

Задача лінійного програмування має розв'язок, якщо виконуються такі умови:

1. Допустима множина непорожня, тобто існує хоча б одна точка, що задовольняє всі обмеження.

2. Цільова функція обмежена зверху (для задачі максимізації) або обмежена знизу (для задачі мінімізації) на допустимій множині.

У цьому випадку оптимальний розв’язок досягається в одній з вершин допустимої області.

Чим відрізняється стандартна та канонічна форми постановки задачі лінійного програмування? Де їх застосовують?

Стандартна форма задачі лінійного програмування:

цільова функція — на максимум; усі обмеження мають вигляд нерівностей типу «≤»; усі змінні невід’ємні.

Застосування:
використовується для геометричного розв’язування та аналізу задач.

Канонічна форма задачі лінійного програмування:

усі обмеження записані у вигляді рівностей; вводяться додаткові (штучні) змінні; усі змінні невід’ємні.

Застосування:
канонічна форма використовується для реалізації симплекс-методу, оскільки дозволяє працювати з базисом і таблицями.