МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА
ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ
з навчальної дисципліни
«Алгоритми та методи обчислень»

Тема «Методи одновимірної пошукової оптимізації»

Студент гр. КІ-24-1, Варакута О.О
Викладач, Сидоренко В. М

Кременчук 2025

Тема. Методи одновимірної пошукової оптимізації

Мета: набуття навичок розв'язку задачі нелінійної безумовної одновимірної оптимізації аналітичним і чисельними методами: поділу навпіл, чисел Фібоначчі, золотого перетину.

Хід роботи

Останні дві цифри заліковки 4 7 Варіант 7:

Варіант 7 Метод Фібоначі

$F(x)=(5-x^2)\cdot 7x$

На інтервалі Х $\in[-2,5;-0,5]$

Eps= 0,1

Числа Фібоначчі:

$F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$, $F_7=13$, $F_8=21$

Ітирація 1:

$a0=-2,5, b0=-0,5, L=b0-a0=2$

$$x_1=a_0+\frac{F_6}{F_8}\cdot L=-2,5+\frac{8}{21}\cdot 2=-2,5+0,76919=-1,74$$

$$x_2=a_0+\frac{F_7}{F_8}\cdot L=-2,5+\frac{13}{21}\cdot 2=-2,5+1,2381=-1,26$$

Обчислюємо значення функції:

$F(x_1)\approx F(-1,74)\approx -37,6$

$F(x_2)\approx F(-1,26)\approx -38,9$

$F(x_1)>F(x_2)$

мінімум лежить правіше, беремо новий інтервал:

$[a_1;b_1]=[x_1;b_0]=[-1,74;-0,5]$

Ітерація 2:

$a_1=-1,74, b_1=-0,5, L=b_1-a_1=1,24$

$$x_1=a_1+\frac{F_5}{F_7}\cdot L=-1,74+\frac{5}{13}\cdot 1,24=-1,74+0,4769=-1,26$$

$$x_1=a_1+\frac{F_6}{F_7}\cdot L=-1,74+\frac{8}{13}\cdot 1,24=-1,74+0,7631=-0,98$$

$F(x_1) \approx -38,9$, $F(x_2) \approx -35,1$

$F(x_1) < F(x_2)$

мінімум лівіше, новий інтервал:$[a_2; b_2] = [a_1; x_2] = [-1,74; -0,98]$

Ітерація 3

$a_2 = -1,74, b_2 = -0,5, L = b_2 - a_2 = 0,76$

$$x_1 = a_2 + \frac{F_4}{F_6} \cdot L = -1,74 + \frac{3}{8} \cdot 0,76 = -1,74 + 0{,}285 = -1,46$$

$$x_2 = a_2 + \frac{F_5}{F_6} \cdot L = -1,74 + \frac{5}{8} \cdot 0,76 = -1,74 + 0{,}475 = -1,26$$

$F(x_1) \approx F(-1,46) \approx -38,5$

$F(x_2) \approx F(-1,26) \approx -38,9$

$F(x_1) > F(x_2)$

мінімум лівіше, новий інтервал:

$[a_3; b_3] = [x_1; b_2] = [-1,46; -0,98]$

Ітерація 4

$a_3 = -1,46, b_3 = -0,98, L = b_3 - a_3 = 0,48$

$$x_1 = a_3 + \frac{F_3}{F_5} \cdot L = -1,46 + \frac{2}{5} \cdot 0,48 = -1,46 + 0{,}192 = -1,26$$

$$x_2 = a_3 + \frac{F_4}{F_5} \cdot L = -1,46 + \frac{3}{5} \cdot 0,48 = -1,46 + 0{,}288 = -1,18$$

$F(x_1) \approx F(-1,26) \approx -38,9$

$F(x_2) \approx F(-1,18) \approx -38,2$

$F(x_1) < F(x_2)$

то мінімум лівіше, новий інтервал:

$[a_4; b_4] = [a_3; x_2] = ¿]$

Ітерація 5

$a_4 = -1,46, b_4 = -1,18, L = b_4 - a_4 = 0,28$

$$x_1 = a_4 + \frac{F_2}{F_4} \cdot L = -1,46 + \frac{1}{3} \cdot 0,28 = -1,46 + 0{,}0933 \approx -1,36$$

$$x_2 = a_4 + \frac{F_2}{F_4} \cdot L = -1,46 + \frac{2}{3} \cdot 0,28 = -1,46 + 0{,}1867 = -1,27 \approx -1,26$$

$F(x_1) \approx F(-1,36) \approx -38,8$

$F(x_2) \approx F(-1,26) \approx -38,9$

$F(x_1) > F(x_2)$

то мінімум правіше, новий інтервал:

$[a_5; b_5] = [x_1; b_4] =$ ¿]

Ітерація 6

$a_5 = -1,36,\ b_5 = -1,18,\ L = b_5 - a_5 = 0,18$

Беремо симетричні точки навколо середини щоб не отримати $x_1 = x_2$ після округлення:

$$m = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{-1,36 + (-1,18)}{2} = -1,27$$

Візьмемо маленьке зміщення:δ=0,01

$x_1 = m - \delta = -1,28$

$x_2 = m + \delta = -1,26$

$F(x_1) \approx F(-1,28) \approx -39$

$F(x_2) \approx F(-1,26) \approx -38,9$

$F(x_1) < F(x_2)$

то мінімум лівіше, беремо:

$[a_6; b_6] = [a_5; x_2] =$ ¿]

Ітерація 7

$a_6 = -1,36,\ b_6 = -1,26,\ L = b_6 - a_6 = 0,10$

$m = \frac{a_6 + b_6}{2} = \frac{-1,36 + (-1,26)}{2} = -1,31$

$x_1 = m - \delta = -1,32$

$x_2 = m + \delta = -1,30$

$F(x_1) \approx F(-1,32) \approx -39$

$F(x_2) \approx F(-1,30) \approx -39$

Оскільки значення майже однакові (різниця в межах округлення), залишаємо інтервал навколо середини: $[a_7; b_7] =$ ¿]

Ітерація 8 перевірка точності:

$b_7 - a_7 = -1,36 - (-1,26) = 0,10$

$b_7 - a_7 \leq \varepsilon$

$x_{min} = \frac{a_7 + b_7}{2} = \frac{-1,36 + (-1.26)}{2} = -1,31$

$F_{min} \approx -39$

Таблиця: Розв’язання методом чисел Фібоначчі

k	a	b	x_1	x_2	$F(x_1)$	$F(x_2)$
1	-2,50	-0,50	-1,74	-1,26	-37,6	-38,9
2	-1,74	-0,50	-1,26	-0,98	-38,9	-35,1
3	-1,74	-0,98	-1,46	-1,26	-38,5	-38,9
4	-1,46	-0,98	-1,26	-1,18	-38,9	-38,2
5	-1,46	-1,18	-1,36	-1,26	-38,8	-38,9
6	-1,36	-1,18	-1,32	-1,26	-39,0	-38,9
7	-1,36	-1,26	-1,32	-1,30	-39,0	-39,0
8	-1,36	-1,26	—	—	—	—

Контрольні питання:

1. Сформулювати необхідну і достатню умови існування екстремуму функції однієї змінної.

Нехай функція f(x) визначена в деякому околі точки x_0.

Необхідна умова екстремуму

Якщо функція f(x) має локальний мінімум або максимум у точці x_0 і є диференційовною в цій точці, то $f'(x0) = 0$

Точки, в яких виконується ця умова, називаються стаціонарними.

Якщо в точці x_0:

$f'(x_0) = 0$ і друга похідна існує, то:

Якщо $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 існує локальний мінімум;

Якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці x_0 існує локальний максимум.

2. Як визначають характер стаціонарної точки, якщо друга похідна в ній дорівнює нулю?

Якщо у стаціонарній точці x_0

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0$

то друга похідна не дає інформації про характер цієї точки.

У такому випадку:досліджують знак першої похідної в околі точки x_0; або використовують похідні вищих порядків: якщо перша ненульова похідна парного порядку і додатна — мінімум; якщо перша ненульова похідна парного порядку і від'ємна — максимум; якщо порядок непарний — екстремум відсутній. Також можлива ситуація точки перегину.

3. Чому в точці мінімуму (максимуму) друга похідна функції більше (менше) нуля? Обґрунтувати відповідь.

Друга похідна характеризує кривизну графіка функції**.**

Якщо $f''(x_0)>0$то графік функції є випуклим догори**,** тобто має форму чаші.
У такому випадку точка x_0 є точкою мінімуму.

Якщо $f''(x_0)<0$, то графік є випуклим донизу**,** тобто має форму «дуги».
Тоді точка x_0 є точкою максимуму.

Таким чином, знак другої похідної визначає характер локальної поведінки функції поблизу стаціонарної точки.

4. Який з двох методів, поділу навпіл чи золотого перетину, має найбільшу збіжність? Обґрунтувати відповідь.

Метод **з**олотого перетину має вищу збіжність**,** ніж метод поділу навпіл.

Обґрунтування:

У методі поділу навпіл на кожній ітерації довжина інтервалу зменшується в 2 рази:$L_{k+1}=\frac{1}{2}L_k$

У методі золотого перетину інтервал зменшується у $\varphi \approx 1{,}618$ разів, але одне з обчислень функції використовується повторно, що зменшує загальну кількість обчислень.

Метод золотого перетину:потребує менше обчислень функції; забезпечує швидшу збіжність; є більш ефективним при дорогих обчисленнях функції.