МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА
ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ №2

з навчальної дисципліни
«Алгоритми та методи обчислень»

Тема «Асимптотична складність алгоритмів. Інші нотації»

Студент гр. КІ-24-1, Варакута О.О
Викладач, Сидоренко В. М

Кременчук 2025

Тема. Асимптотична складність алгоритмів. Інші нотації

Мета: набути практичних навичок у розв’язанні задач на оцінку асимптотичної складності алгоритмів у Ω, Θ, o, θ, ω-нотаціях.

Короткі теоретичні відомості

Велике O використовується як асимптотична верхня межа функції. Поряд з верхньою межею можна визначити асимптотичну нижню межу функції. Для цього використовується Ω-нотація («велика омега нотація»).

Ω-нотація

Нехай f і g – дві функції, що відображають натуральні числа на додатні дійсні числа. Тоді $f(n)$ = Ω($g(n)$), якщо ∃ c > 0 та натуральна константа $n0$, така , що $f(n) \geq cg(n)$ для $\forall n \geq n0$. Ми говоримо, що f росте принаймні так само швидко, як g.

Θ -нотація

Нехай f та g – функції натурального аргумента і дійсних значень. Тоді

$f(n)$ = Θ($g(n)$), якщо ∃ дійсні $c1$, $c2$ > 0 та натуральна константа $n0$, така,

що $c1g(n) \leq f(n) \leq c2g(n)$ для $\forall n \geq n0$.Важливо зауважити, що $c1 \leq c2$ та $n0$ = max{$n1$, $n2$} і є константами O() та Ω() відповідно. 16 Еквівалентно, $f(n)$ = Θ($g(n)$), якщо $f(n)$ є одночасно $O(g(n))$ і Ω($g(n)$).

Таким чином, для доведення того, що $f(n)$ = Θ($g(n)$), необхідно роздільно довести, що $f(n) = O(g(n))$ і $f(n)$ = Ω($g(n)$). Ці питання розглянуті вище у цьому і попередньому занятті.

Малі асимптотичні нотації

Визначення. Нехай f і g – дві функції, що відображають натуральні у простір дійсних чисел. Тоді $f(n) = o(g(n))$

(читається як «f є o маленьке від g»), якщо ∃ дійсна константа $c > 0$ і натуральна константа $n0$, така що $f(n) < cg(n)$, для $\forall\ n \geq n0$. Ми говоримо, що f зростає повільніше, ніж g.

Відмінність між O та o нотаціями полягає у тому, що останнє є більш строгим: $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$. Зворотне твердження не є вірним.

Визначення. Нехай f і g – дві функції, що відображають натуральні числа на додатні дійсні числа. Тоді $f(n) = \omega(g(n))$, якщо ∃ $c > 0$ та натуральна константа $n0$, така, що $f(n) > cg(n)$ для $\forall n \geq n0$.

Відмінність між Ω та ω нотаціями полягає у тому, що останнє є більш строгим: $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$. Зворотне твердження не є вірним.

Асимптотичні нотації та межі.

Методи по визначенню констант c та $n0$, розглянуті вище, не єдині. Розглянемо альтернативні підходи на основі меж.

Метод меж

Припустимо, що є дві функції f та g, тоді для порівняння порядку зростання цих функцій потрібно визначити межу $\lim n \to \infty\ f(n)\ g(n)$.

Задачі для самостійного розв'язання

Завдання

5. Розглянемо функції $f(n) = 5n^3 - 10n + 20$ та $g(n) = n^3$.Покажіть, що $f(n) = \Omega(g(n))$.

$f(n) \geq c \cdot g(n),\ \forall\ n \geq n_0$

$5n^3 - 10n + 20 \geq c \cdot n^3$

Розділимо обидві частини на n^3 (для $n > 0$):

$$5 - \frac{10}{n^2} + \frac{20}{n^3} \geq c$$

$h(n)=5-\frac{10}{n^2}+\frac{20}{n^3}$

$h(2)=5-\frac{10}{4}+\frac{20}{8}=5-2,5+2,5=5$

$h(3)=5-\frac{10}{9}+\frac{20}{27}\approx 5-1,11+0,74=4,63$

$h(4)=5-\frac{10}{16}+\frac{20}{64}=5-0,625+0,3125=4,6875$

$h(5)=5-\frac{10}{25}+\frac{20}{125}=5-0,4+0,16=4,76$

$c=5$:

$5-\frac{10}{n^2}+\frac{20}{n^3}\geq 5$

$\frac{-10}{n^2}+\frac{20}{n^3}\geq 0$

$\frac{20}{n^3}\geq\frac{10}{n^2}$

$20\geq 10n$

$n\leq 2$

c = 5 виконується тільки для $n\leq 2$ тому беремо інші варіанти:

c = 4:

$3-n^3-10n+20\geq 4n^3$

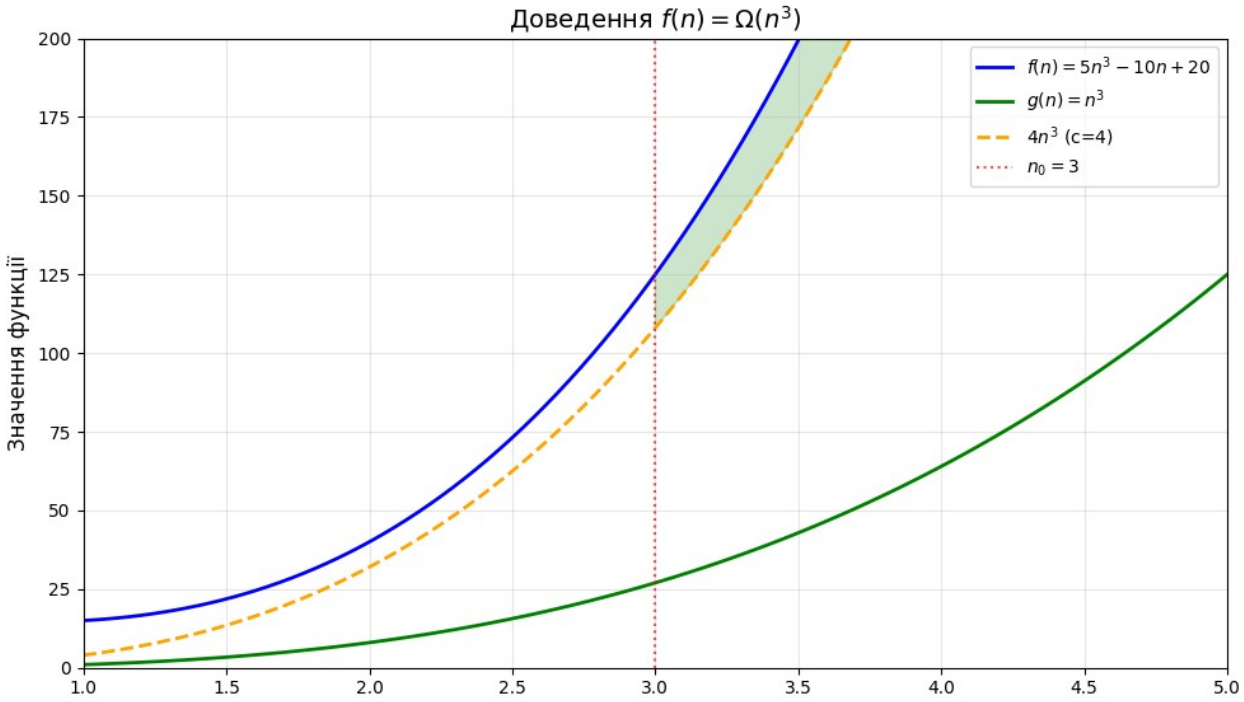
$n^3-10n+20\geq 0$

$n=3:27-30+20=17\geq 0$

$n=4:64-40+20=44\geq 0$

$n=5:125-50+20=95\geq 0$

Відповідь: $f(n)=\Omega(g(n))$ *з* $c=4\, n_0=3$



10. Нехай $f(n) = n^4 + 2n^3 - 5n + 8$ і $g(n) = n^4$. Показати, що $f(n) = O(g(n))$, використовуючи метод меж.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^4+2n^3-5n+8}{n^4}$$

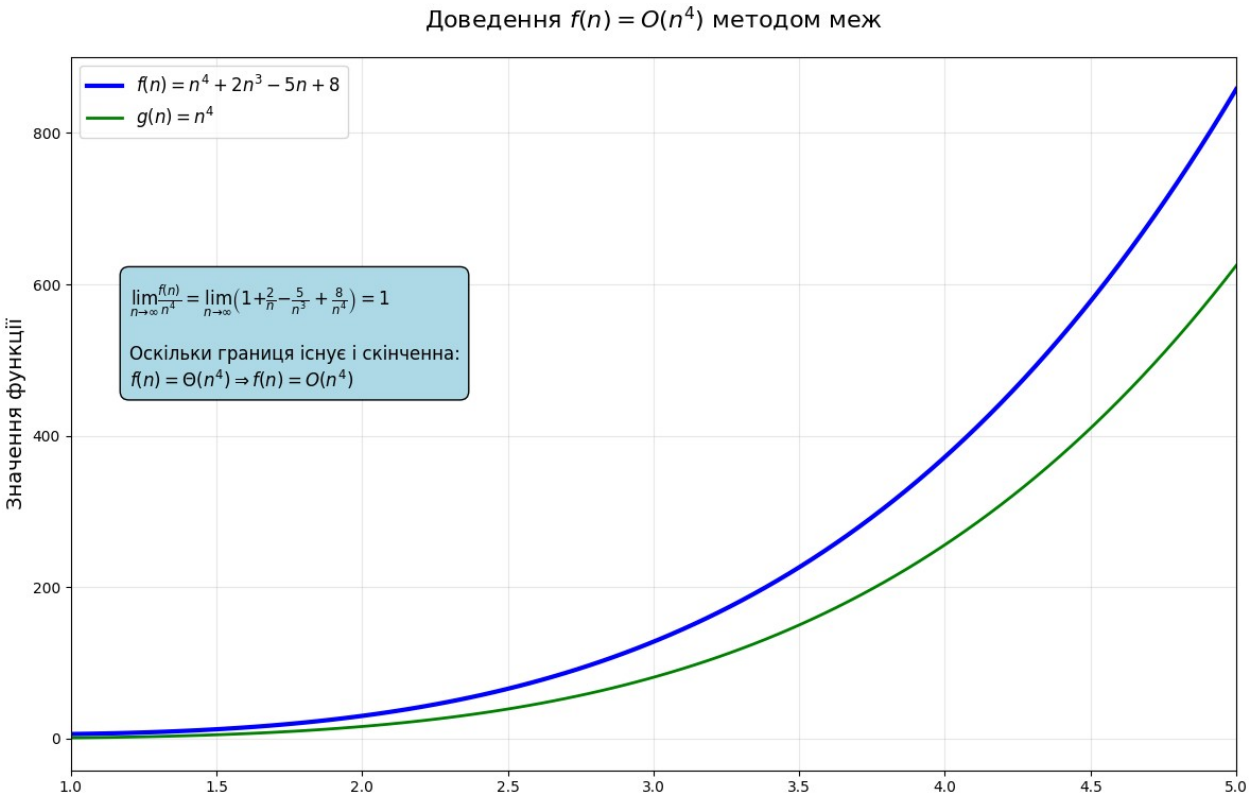
Поділимо чисельник і знаменник на n^4:

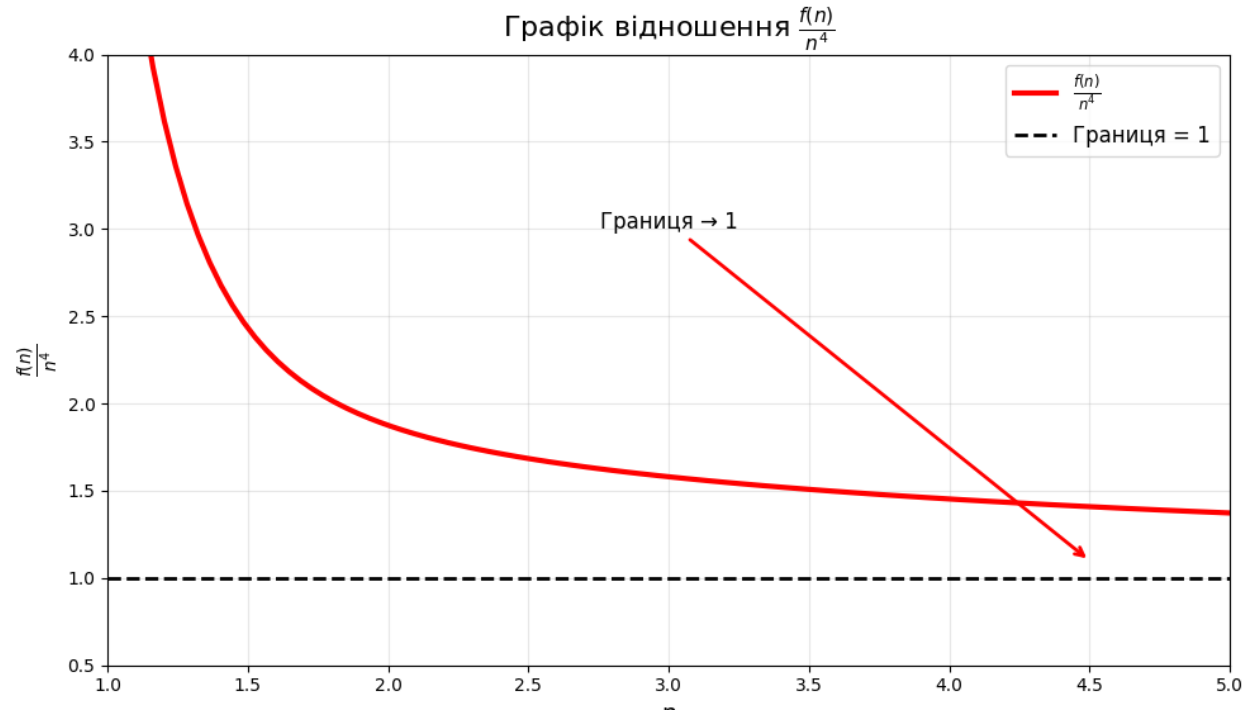
$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{2}{r}-\frac{5}{n^3}+\frac{8}{n^4}\right)=1$$

Оскільки границя існує і дорівнює скінченному додатному числу (1), то за методом меж:

$$f(n)\Theta(g(n)) \Rightarrow f(n)=0(g(n))$$

Відповідь: $f(n)=0(n^4)$





Контрольні питання

1. Що таке асимптотична складність алгоритму?

Асимптотична складність — це оцінка часу роботи або використання пам’яті алгоритму при зростанні розміру вхідних даних до нескінченності. Вона виражається за допомогою асимптотичних нотацій (O, Ω, Θ тощо).

2. Які інші нотації, крім O-нотації, використовуються для вираження асимптотичної складності?

Використовуються такі нотації:

- Ω — нижня асимптотична оцінка,
- Θ — точна асимптотична оцінка,
- *o* — строга верхня оцінка,
- *ω* — строга нижня оцінка.

3. Як визначити асимптотичну складність алгоритму за допомогою символів Θ і Ω?

Щоб визначити асимптотичну складність алгоритму за допомогою символів Θ і Ω треба:

Для Θ-нотації:

1. Знайти функцію T(n) - кількість операцій алгоритму
2. Довести, що існують додатні константи c_1, c_2 та n_0 такі, що для всіх $n \geq n_0$ виконується: $c_1 \cdot g(n) \leq T(n) \leq c_2 \cdot g(n)$
3. Якщо таку функцію g(n) знайдено, складність є Θ(g(n))

Для Ω-нотації:

1. Знайти функцію T(n) - кількість операцій алгоритму
2. Довести, що існують додатні константи c та n_0 такі, що для всіх $n \geq n_0$ виконується: $T(n) \geq c \cdot g(n)$
3. Якщо таку функцію g(n) знайдено, складність є Ω(g(n))

4. Яка різниця між O-нотацією, Θ-нотацією і Ω-нотацією?

O-нотація - визначає верхню межу складності:

$f(n) = O(g(n))$ означає, що $f(n) \leq c \cdot g(n)$ для всіх досить великих n

Ω-нотація - визначає нижню межу складності:

$f(n) = \Omega(g(n))$ означає, що $f(n) \geq c \cdot g(n)$ для всіх досить великих n

Θ-нотація - визначає точну межу складності:

$f(n) = \Theta(g(n))$ означає, що $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ для всіх досить великих n

5. Які основні властивості інших нотацій, таких як o (маленька o), ω

(маленька омега) та *o* (маленька o з верхнім індексом)?

o (маленька o) - строго менше - Асимптотично строга верхня межа

Властивості:

$f(n) = o(g(n))$ означає, що f(n) зростає значно повільніше за g(n)

$\lim[n \to \infty] f(n)/g(n) = 0$

Не включає випадок рівності

ω (маленька омега) - строго більше - Асимптотично строга нижня межа

Властивості:

$f(n) = \omega(g(n))$ означає, що f(n) зростає значно швидше за g(n)

$\lim[n \to \infty] f(n)/g(n) = \infty$

Не включає випадок рівності

ō (м'яка O) - ігнорує логарифмічні множники- нотація, що враховує лише основний порядок зростання

Властивості:

$f(n) = \bar{o}(g(n))$ означає $f(n) = O(g(n) \cdot \log^k n)$ для деякого k

Використовується для спрощення запису складності

Ігнорує поліноміальні та логарифмічні множники