ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ ТА ЛАБОРАТОРНА РОБОТА З ТЕМИ № 1
Моделювання основних логічних операцій

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними поняттями математичної логіки, навчитись будувати складні висловлювання за допомогою логічних операцій та знаходити їхні істинностні значення таблицями істинності, використовувати закони алгебри логіки, освоїти методи доведень.

1.1. Основні поняття математичної логіки. Логічні операції

Просте висловлювання (атомарна формула, атом) – це розповідне речення, про яке можна сказати, що воно *істинне* (T або 1) або *хибне* (F або 0), але не те й інше водночас.

Складне висловлювання – це висловлювання, побудоване з простих за допомогою *логічних операцій* (*логічних зв'язок*). Найчастіше вживаними операціями є 6: **заперечення** (читають «**не»,** позначають $\neg$, $\bar{\ }$**), кон'юнкція** (читають **«і»,** позначають $\wedge$), **диз'юнкція** (читають «**або»,** позначають $\vee$)**, імплікація** (читають «**якщо ..., то»,** позначають $\Rightarrow$), **альтернативне «або»** (читають «**додавання за модулем 2»,** позначають $\oplus$)**, еквівалентність** (читають «**тоді і лише тоді**», позначають $\Leftrightarrow$).

Запереченням довільного висловлювання P називають таке висловлювання $\neg P$, істиносне значення якого строго протилежне значенню P. **Кон'юнкцією** або **логічним множенням** двох висловлювань P та Q називають складне висловлювання $P \wedge Q$, яке набуває істинного значення тільки в тому випадку, коли істинні *обидві* його складові. **Диз'юнкцією** або **логічним додаванням** двох висловлювань P та Q називають складне висловлювання $P \vee Q$, яке набуває істинного значення в тому випадку, коли істинною є *хоча б одна* його складова. **Імплікацією** двох висловлювань P та Q називають умовне висловлювання «**якщо *P*, то *Q***» **(**$P \Rightarrow Q$**),** яке прийнято вважати хибним тільки в тому випадку, коли *передумова* (*антецедент*) ***P*** *істинна*, а *висновок* (*консеквент*) ***Q*** *хибний*. У будь-якому іншому випадку його вважають істинним. **Альтернативним "або"** двох висловлювань P та Q називають складне висловлювання $P \oplus Q$, яке набуває істинного значення тоді і лише тоді, коли P та Q мають *різні* логічні значення, і є хибним в протилежному випадку. **Еквіваленцією**

двох висловлювань P та Q називають складне висловлювання $P \Leftrightarrow Q$, яке набуває істинного значення тоді і лише тоді, коли P та Q мають *однакові* логічні значення, і є хибним в протилежному випадку**,** тобто *логічно еквівалентні* складні висловлювання – це висловлювання, які набувають однакових значень істинності *на будь-якому* наборі істиносних значень своїх складових.

Тавтологія – формула, що виконується у всіх інтерпретаціях (тотожно істинна формула). **Протиріччя** – формула, що не виконується у жодній інтерпретації (тотожно хибна формула). Формулу називають **нейтральною**, якщо вона не є ні тавтологією, ні протиріччям (для неї існує принаймні один набір пропозиційних змінних, на якому вона приймає значення T, і принаймні один набір, на якому вона приймає значення F). **Виконана формула** – це формула, що не є протиріччям (інакше кажучи, вона принаймні на одному наборі пропозиційних змінних набуває значення T).

1.2. Закони логіки висловлювань

A	B
Закони асоціативності	
$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$
Закони комутативності	
$P \vee Q = Q \vee P$	$P \wedge Q = Q \wedge P$
Закони ідемпотентності	
$P \vee P = P$	$P \wedge P = P$
Закони дистрибутивності	
$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Закони доповнення	
закон виключення третього: $P \vee (\overline{P}) = \mathrm{T}$	закон протиріччя: $P \wedge (\overline{P}) = \mathrm{F}$
закон подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$	
Закони де Моргана	
$\overline{(P \vee Q)} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$	$\overline{(P \wedge Q)} = \overline{P} \vee \overline{Q}$
Закони поглинання	
$(P \vee Q) \wedge P = P$	$(P \wedge Q) \vee P = P$

Співвідношення для сталих (закони тотожності та домінування)	
$P \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$	$P \wedge \mathrm{T} = P$ (тот)
$P \vee \mathrm{F} = P$ (тот)	$P \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$

1.3. Логіка першого ступеня. Предикати і квантори. Закони логіки першого ступеня

Предикат – це твердження, яке містить змінні та приймає значення істини чи фальші залежно від значень змінних; ***n*-місний предикат** – це предикат, що містить n змінних $x_1,..., x_n$.

Квантор - логічний оператор, що перетворює будь-який предикат на предикат меншої місності, зв'язуючи деякі змінні початкового предиката. Вживаються два квантори: узагальнення (універсальний) (позначається $\forall$) та приналежності (екзистенціальний) (позначається $\exists$). Для будь-якого предиката $P(x)$ вирази $\forall x P(x)$та $\exists x P(x)$ читаються як «всі x мають властивість $P(x)$» та «існує (бодай один) x, що має властивість $P(x)$» відповідно.

Перехід від $P(x)$ до $\forall x\ P(x)$ або $\exists x\ P(x)$ називають *зв'язуванням* предметної змінної x, а саму змінну x – *зв'язаною (заквантованою)*. Незв'язану змінну називають *вільною*. У виразах $\forall x\ P(x)$ або $\exists x\ P(x)$ предикат належить області дії відповідного квантора. Формулу, що не містить вільних змінних, називають *замкненою*.

Якщо $D=\{a_1,..., a_n\}$ – скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатись *логічними еквівалентностями*

$$\forall x\ P(x)= P(a_1) \wedge ... \wedge P(a_n) \text{ та } \exists x\ P(x)= P(a_1) \vee ... \vee P(a_n).$$

Обчислення предикатів, у якому квантори можуть зв'язувати лише предметні змінні, але не можуть зв'язувати предикати, називають обчисленням *першого порядку*. Обчислення, у яких квантори можуть зв'язувати не лише предметні змінні, але й предикати, функціональні символи чи інші множини об'єктів, називають обчисленнями *вищих порядків*.

Основні закони логіки першого ступеня (логіки предикатів):

1. $\neg(\forall x P(x)) = \exists x(\neg P(x))$, $\forall x P(x) = \neg\exists x(\neg P(x))$.
2. $\neg(\exists x P(x)) = \forall x(\neg P(x))$, $\exists x P(x)) = \neg\forall x(\neg P(x))$.
3. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$.

4. $\exists x(P(x)\vee Q(x))= \exists xP(x)\vee \exists xQ(x)$

5. $\forall x(P(x)\wedge Q)= \forall xP(x)\wedge Q$.

6. $\forall x(P(x)\vee Q)= \forall xP(x)\vee Q$

7. $\exists x(P(x)\wedge Q)=\exists xP(x)\wedge Q$.

8. $\exists x(P(x)\vee Q)=\exists xP(x)\vee Q$.

9. $\forall x\forall yP(x,y)=\forall y\forall xP(x,y)$.

10. $\exists x\exists yP(x,y)=\exists y\exists xP(x,y)$.

11. $\forall xP(x)=\forall tP(t)$, $\exists xP(x)=\exists tP(t)$.

12. $\forall xP=P$, $\exists xP=P$.

Випереджена нормальна форма – формула, записана у вигляді $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_nM$, де кожне Q_ix_i (i = 1,2,...,n) – це $\forall x_i$ або $\exists x_i$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1x_1...Q_nx_n$ називають префіксом, а M – *матрицею формули*, записаної у випередженій нормальній формі.

1.4. Методи доведень

При доведенні теорем застосовують логічну аргументацію. Доведення в інформатиці – невід'ємна частина перевірки коректності алгоритмів. Необхідність доведення виникає, коли нам потрібно встановити істинність висловлювання виду ($P\Rightarrow Q$). Існує декілька стандартних типів доведень.

1. **Пряме міркування.** Допускаємо, що висловлювання P істинне і показуємо справедливість Q. Такий спосіб доведення виключає ситуацію, коли P істинне, а Q хибне, оскільки саме в цьому і лише в цьому випадку імплікація $P\Rightarrow Q$ набуває хибного значення (див. табл. 1.1).
2. **Обернене міркування.** Допускаємо, що висловлювання Q хибне і показуємо помилковість P. Фактично прямим способом перевіряємо істинність імплікації ($\neg Q\Rightarrow\neg P$), що згідно з прикладом 1.5 (правилом контрапозиції) логічно еквівалентне істинності вихідного твердження ($P\Rightarrow Q$).
3. Метод **«від протилежного»**. У допущенні, що висловлювання P істинне, а Q хибне, використовуючи аргументоване міркування, одержимо протиріччя. Цей спосіб заснований на тому, що імплікація ($P\Rightarrow Q$) набуває хибного значення лише тоді, коли P істинне, а Q хибне.
4. ***Принцип математичної індукції*** – це така **теорема**:

Теорема. Нехай P(n) – предикат, визначений для всіх натуральних n. Допустимо, що

1) *P(1) істинне і*
2) $\forall\ k \geq 1$ *імплікація* $(P(k) \Rightarrow P(k+1))$ *є вірною.*

Тоді P(n) істинне при будь-якому натуральному n.

1.5. Розв’язування задач

1. Нехай P, Q і R – визначені таким чином висловлювання:

   P : я помираю від спеки;

   Q : моя склянка порожня;

   R : зараз 3-я година.

   Запишіть кожне з таких висловлювань як логічний вираз, що містить P, Q і R:

   а) я помираю від спеки і моя склянка не порожня;

   б) зараз 3-я година, і я помираю від спеки;

   в) якщо зараз 3-я година, то я помираю від спеки;

   г) якщо я помираю від спеки, то моя склянка порожня;

   д) якщо я не помираю від спеки, то моя склянка не порожня.

   Розв’язання.

   а) $P \wedge (\neg Q)$; б) $R \wedge P$; в) $R \Rightarrow P$; г) $P \Rightarrow Q$; д) $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

2. Позначимо через P висловлювання «троянди червоні», а через Q – «фіалки сині». Запишіть як логічний вираз кожне з таких висловлювань:

   а) якщо троянди не червоні, то фіалки не сині;

   б) троянди червоні або фіалки не сині;

   в) або троянди червоні, або фіалки сині (але не одночасно).

   Використовуючи таблиці істинності, доведіть логічну еквівалентність висловлювань а) і б).

   Розв’язання.

   а) $(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$; б) $P \vee (\neg Q)$; в) $(P \oplus Q)$.

   Таблиця істинності буде такою:

Таблиця 1.1

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \vee (\neg Q))$	$(\neg P) \Rightarrow (\neg Q)$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T

F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

Оскільки два останні стовпці таблиці ідентичні, висловлювання а) і б) є логічно еквівалентними.

3. Покажіть, що висловлювання $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ логічно еквівалентне висловлюванню $((\neg P) \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

   Розв'язання.

   Таблиця істинності буде такою:

Таблиця 1.2

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$(\neg P) \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$	$((\neg P) \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F	F

Ми бачимо, що останні два стовпці ідентичні. Це означає, що висловлювання

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \text{ та } ((\neg P) \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

є логічно еквівалентними.

4. За допомогою таблиць істинності знайдіть тавтології серед таких висловлювань:

   а) $\neg (P \wedge (\neg P))$;

   б) $P \Rightarrow (\neg P)$;

   в) $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$.

   Розв'язання.

   Таблиці істинності висловлювань а), б) та в) наведені відповідно в табл. 1.3 та табл. 1.4:

Таблиця 1.3

P	$\neg P$	$P \wedge (\neg P)$	$\neg(P \wedge (\neg P))$	$P \Rightarrow \neg P$
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T

Таблиця 1.4

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

З них випливає, що висловлювання а) і в) – тавтології.

5. Побудовою таблиць істинності з'ясувати, чи є протиріччям висловлювання $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \overline{R})$.

Розв'язання.

Позначимо $S = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \wedge R), U = (P \Rightarrow \overline{R})$

Таблиця 1.5

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \wedge R$	S	$\overline{R}$	U	$S \Leftrightarrow U$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	T	F	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	F	T	F
F	F	F	T	F	F	T	T	F

Висловлювання не є протиріччям.

6. Методом відшукання контрприкладу перевірте, чи є тавтологією висловлювання $((P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$.

Розв'язання.

Припускаємо, що формула не є тавтологією. Оскільки остання операція, яка виконується, є імплікація, то формула є хибною, коли передумова (її ліва частина) є істинною, а висновок (права частина) хибним:

$$((P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) = T, \tag{1.1}$$

$$R = \mathrm{F}. \tag{1.2}$$

Підставляємо значення $R = \mathrm{F}$ (1.2) у рівність (1.1):

$$((P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow F) \wedge (Q \Rightarrow F)) = T$$

Значення T отримаємо, якщо одночасно $(P \vee Q) = T, (P \Rightarrow F) = T, (Q \Rightarrow F) = T$. Дві останні рівності виконуються лише при $P=F$, $Q=F$, але тоді не виконується перша, бо $(F \vee F) = F$.

Ми отримали значення F, яке суперечить припущенню (1.1). Отже, задана формула не може набувати значення F ні при яких значеннях атомів, тобто є тавтологією.

7. Еквівалентними перетвореннями перевірити, чи є тавтологією висловлювання:
   а) $(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \Rightarrow Q)$;
   б) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow P$.

Розв'язання.

а) $(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \Rightarrow Q) = (\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q) = (\neg P \vee P \vee Q) = T \vee Q = T$; тавтологія;

б) Спростимо ліву частину

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow \neg Q) = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg Q) = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q) =$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee F = (\neg P \wedge \neg Q).$$

Позбудемося еквівалентності:

$$(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P = ((\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q)) =$$
$$= (\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg P \wedge \neg Q)) = ((P \vee Q) \vee P) \wedge (\neg P) =$$
$$= (P \vee Q) \wedge (\neg P) = (P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) = F \vee (Q \wedge \neg P) = (Q \wedge \neg P);$$

не тавтологія.

8. Використовуючи комбінований спосіб, визначити, чи є тавтологіями формули:
   а) $(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \wedge P)$;
   б) $P \wedge (\neg P \wedge P) \vee (P \vee \neg P)$.

Розв'язання.

а) $(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \wedge P) = (\neg P \vee Q) \vee F = (\neg P \vee Q)$;

Складемо таблицю істинності для отриманої формули, беручи до уваги лише можливе значення змінної P (табл. 1.6):

Таблиця 1.6

P	Підстановка P та спрощення за законами логіки (де Моргана, тотожності та домінування)	Результат
T	$\neg T \vee Q = F \vee Q = Q$	Q
F	$\neg F \vee Q = T \vee Q = T$	T

Отже, вказана формула не є тавтологією. ▲

б) $P \wedge (\neg P \wedge P) \vee (P \vee \neg P) = (P \wedge F \vee T) = F \vee T = T$; тавтологія.

9. Позначимо через x слово «кішка», а через $P(x)$ предикат «у x є вуса». Запишіть кожне з висловлювань у символьній формі:

а) вуса є у всіх кішок;

б) знайдеться кішка без вусів;

в) не буває кішок з вусами.

Запишіть заперечення б) у символьній формі, а заперечення висловлювання в) як символами, так і словами.

Розв'язання.

а) $\forall x\, P(x)$; б) $\exists x\, \neg P(x)$; в) $\forall x\, \neg P(x)$.

Заперечення висловлювання б) у символьній формі має вигляд: $\forall x\, P(x)$, тобто висловлювання а) є запереченням висловлювання б).

Заперечення висловлювання в) має вигляд: $\exists x\, P(x)$. Його слід читати так: знайдеться кішка з вусами.

10. Нехай $P(x)$ означає «x є висока», а $Q(x)$ – «x є товста», де x – будь-яка людина. Прочитайте висловлювання:

$$\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)).$$

Запишіть формулами такі твердження та знайдіть серед них заперечення даному:

а) знайдеться хтось низький і товстий;

б) нема нікого високого і худого;

в) знайдеться хтось низький або худий.

Розв'язання.

Висловлювання $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$ читаємо так: будь-яка людина є високою і товстою.

а) $\exists x\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$, б) $\forall x\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$, в) $\exists x\, (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$.

Заперечення заданого висловлювання сформульовано в п. в).

11. Предикат $Q(x, y)$ означає $x=x-y$. Предметною областю кожної змінної є множина цілих чисел. Знайти значення істинності висловлювань:

а) $Q(1, 1)$; б) $Q(2, 0)$; в) $\forall y Q(2, y)$; г) $\exists x Q(x, y)$.

Розв'язання.

а) $Q(1, 1)$: 1=1-1 T;

б) $Q(2, 0)$: 2=2-0 T;

в) $\forall y Q(2, y)$: $\forall y$ $2=2-y$ F;

г) $\exists x Q(x, 2)$: $\exists x$ $x=x-2$ F.

12. Предметною областю кожної змінної $P(x, y)$ є множина $\{1, 2, 3\}$. Записати висловлювання за допомогою логічних зв'язок кон'юнкції та диз'юнкції:

а) $\exists x P(x, 3)$; б) $\forall y P(1, y)$; в) $\exists x \forall y P(x, y)$.

Розв'язання.

а) $\exists x P(x, 3)=P(1, 3) \vee P(2, 3) \vee P(3, 3)$;

б) $\forall y P(1, y)=P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge P(1, 3)$;

в) $\exists x \forall y P(x, y)=(P(1, 1) \wedge P(1, 2) \wedge P(1, 3)) \vee (P(2, 1) \wedge P(2, 2) \wedge P(2, 3)) \vee$

$(P(3, 1) \wedge P(3, 2) \wedge P(3, 3))$.

13. Змінні x та y набувають значень з множини $\{0, 1, 2\}$. Записати формулу, еквівалентну до висловлювання, без використання кванторів:

$\forall x \exists y\, P(x) \wedge Q(y)$.

Розв'язання.

$\forall x \exists y P(x) \wedge Q(y)=\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)=(P(0) \wedge (Q(0) \vee Q(1) \vee Q(2)) \wedge (P(1) \wedge (Q(0) \vee Q(1) \vee Q(2)) \wedge (P(2) \wedge (Q(0) \vee Q(1) \vee Q(2))$.

14. Побудувати випереджені нормальні форми для таких формул:

а) $\forall x(\neg\exists y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)))$;

б) $\neg\forall x(R(x) \wedge \exists y Q(x, y))$,

в) $\neg(P \Rightarrow \exists x R(x))$;

г) $\exists x \overline{R(x)} \vee \forall x Q(x, y)$.

Розв’язання.

а) $\forall x(\neg\exists y(P(x,y)\Rightarrow Q(x,y)))=\forall x(\neg(\neg\exists y(P(x,y))\vee Q(x,y))))=$
$\forall x(\forall y\neg P(x,y)\vee Q(x,y))=\forall x\forall y(\neg P(x,y)\vee Q(x,y))$.

б) $\neg\forall x(R(x)\wedge\exists yQ(x,y))=\neg\forall x\ (R(x)\wedge\exists yQ(x,y))=\neg\forall x(\exists yQ(x,y)\wedge R(x))=$
$=\exists x\ \neg(\exists y(Q(x,y)\wedge R(x_1)))=\exists x\ \forall y\overline{(Q(x,y)\wedge R(x))}=\exists x\ \forall y(\neg Q(x,y)\vee\neg R(x\ ))$.

в)
$$\neg(P\Rightarrow\exists xR(x))=\neg(\neg P\vee\exists xR(x))=\neg\neg P\wedge\neg(\exists xR(x))=P\wedge\forall x\overline{R(x)}=\forall x(P\wedge\overline{R(x)}).$$

г) $\exists x\overline{R(x)}\vee\forall xQ(x,y)=\exists x\overline{R(x\ )}\vee\forall xQ(x,y)=\exists x\forall x(\overline{R(x)}\vee Q(x,y))$.

15.а) Прямим міркуванням доведіть істинність висловлювання:
n і m – парні числа $\Rightarrow$ $n+m$ – число парне.

б) Дайте обернене доведення висловлювання:
n^2 – парне число $\Rightarrow$ n – парне.

в) Методом «від протилежного» доведіть, що
n + m – непарне число $\Rightarrow$ один з доданків є парним, а інший – непарним.

Розв’язання.

а) Парні числа n і m ми можемо подати у вигляді n=2a і m=2b, де a і b – цілі числа. Отже,

$$n+m=2a+2b=2(a+b),$$

звідки випливає парність суми $n+m$.

б) Якщо n – непарне число, то n=2a+1 для якогось цілого числа a. Знайшовши квадрат a, одержимо:

$$n^2=(2a+1)^2=4a^2+4a+1=2(2a^2+2a)+1,$$

отже, n^2 – непарне число. Тому, якщо n^2 – парне число, то і n – парне.

в) Допустимо, що сума цілих чисел n + m – непарне число, а висновок твердження задачі (один з доданків є парним, а інший – непарним) є хибним.

Заперечення висновку означає, що обидва доданки або парні, або непарні. Розглянемо ці дві можливості окремо.

Якщо n і m – парні числа, то n=2a і m=2b для якихось цілих чисел a і b. Їхня сума

$$n+m=2a+2b=2(a+b)$$

є парною, що суперечить допущенню.

Нехай тепер n і m – непарні числа, тоді їх можна записати у вигляді n=2a+1 і m=2b +1 для якихось цілих чисел a і b. Їхня сума

$$n+m= 2a + 1+2b +1=2(a +b)+2=2(a +b+1)$$

є парним числом. Знову прийшли до суперечності з допущенням.

Отже, заперечення висновку твердження в обох випадках веде до протиріччя. Тому твердження вірне.

16. Доведіть кожне з висловлювань методом математичної індукції:

а) $1+5+9+...+(4n-3)=n(2n-1)$ для всіх натуральних чисел n;

б) $1^2+2^2+...+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$ для всіх натуральних чисел n;

Розв'язання.

а) Позначимо предикат $1+5+9+...+(4n-3)=n(2n-1)$ через $P(n)$.

При $n=1$ ліва частина рівності містить лише 1. Права частина після підстановки $n=1$ теж буде рівною 1:

$$n(2n-1)=1(2\cdot 1-1)=1.$$

Тому висловлювання $P(1)$ є істинним.

Допустимо, що $P(k)$ є істинним при деякому $k \geq 1$:

$$1+5+9+...+(4k-3)=k(2k-1).$$

Нам треба показати, що з такого допущення випливає істинність $P(k+1)$. Тому

$1+...+(4k-3)+(4(k+1)-3)= k(2k-1)+(4k+1)=2k^2+3k+1$– ліва частина;

$(k+1)(2(k+1)-1)=(k+1)(2k+1)=2k^2+3k+1$– права частина.

Оскільки ліва і права частини виразу $P(k+1)$ співпадають, згідно принципу математичної індукції $P(n)$ є істинним для будь-якого $n \geq 1$.

б) Тут $P(n)$ буде позначати предикат:

$$1^2+2^2+...+n^2=n(n+1)(2n+1)/6.$$

Оскільки $1^2=1$ і $n(n+1)(2n+1)/6=1\cdot 2\cdot 3/6=1$ (при $n=1$), то висловлювання $P(1)$ є істинним.

Допустимо, що $P(k)$ є істинним при деякому $k \geq 1$:

$$1^2+2^2+...+k^2=k(k+1)(2k+1)/6,$$

і покажемо, що звідси випливає істинність $P(k+1)$:

$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2= k(k+1)(2k+1)/6+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))=$

$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$ – ліва частина;

$\frac{1}{6}(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$ – права частина.

Оскільки ліва і права частини виразу $P(k+1)$ співпадають, за індукцією робимо висновок, що $P(n)$ є істинним для всіх натуральних чисел $n \geq 1$.

Контрольні запитання до практичних занять та лабораторної роботи з теми № 1

1. Що називають простим і складним висловлюванням? Наведіть приклади простих та складних висловлювань.
2. За допомогою яких логічних операцій будують складні висловлювання?
3. Яка формула є тавтологією?
4. Яка формула є протиріччям?
5. Які є закони логіки висловлювань?
6. Якими способами перевіряють еквівалентність тверджень?
7. Назвіть головну ідею метода відшукання контрприкладу.
8. Що називають предикатом і кванторами? Наведіть приклади предикатів і кванторів.
9. Які змінні називають зв'язаними, а які вільними? Наведіть приклади формул з такими змінними.
10. Які закони логіки першого ступеня ви знаєте?
11. Яку формулу називають випередженою нормальною формою?
12. Перелічіть кроки, за допомогою яких переводять формулу у випереджену нормальну форму.
13. Які методи доведень ви знаєте?
14. У чому полягає принцип математичної індукції?

Завдання до практичних занять та лабораторної роботи з теми № 1

1. Отримати індивідуальний варіант завдань.
2. Розв'язати індивідуальне завдання згідно варіанту з Додатку № 1.
3. Написати на будь-якій відомій студентові мові програмування програму для реалізації вказаних логічних операцій над заданими висловлюваннями відповідно до варіанту з Додатку №2.
4. Оформити звіт про виконану роботу

   Звіт повинен включати:

   4.1. титульний аркуш,
   4.2. тема,
   4.3. мета,
   4.4. теоретичні відомості,
   4.5. завдання варіанту з додатку 1,
   4.6. розв'язок,

4.7. завдання варіанту з додатку 2,
4.8. скрін коду програми з коментарями,
4.9. скрін результату виконання програми,
4.10. висновок про виконання лабораторної та практичної роботи.

5. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи. Лабораторна робота вважається зарахованою, якщо програма протестована разом з викладачем та отримано вірний результат під час аудиторних занять.

Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

1. Автоматичне знаходження істинносних значень (із записом таблиці істинності) складного висловлювання для всіх інтерпретацій простих висловлювань, які входять в нього, для відповідного завдання;
2. Введення вхідних даних вручну:
   - задати кількість простих висловлювань;
   - задати логічні операції, які пов’язують прості висловлювання.
3. Некоректне введення даних.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Додаток № 1 до практичних занять з теми № 1

Варіант № 1

1. Формалізувати речення.
   Я піду додому або залишуся тут і вип'ю чашку чаю, я не піду додому,отже я залишуся і вип'ю чашку чаю.
2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:
   $\left(x \vee y \vee z\right) \to \left(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\right)$;
3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:
   $\big((p \to q) \wedge (\bar{q} \to r)\big) \leftrightarrow (p \to \bar{r})$
4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:
   $((p \vee q \vee s) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \wedge (s \to r)) \to r$;
5. Довести, чи формули еквівалентні:

$p \wedge (q \oplus r)$ та $(p \vee q) \oplus (p \vee r)$;

Варіант № 2

1. Формалізувати речення.

Якщо Олег ляже сьогодні пізно, він буде вранці замучений, якщо він ляже не пізно, то йому здаватиметься, що життя чудове, отже або Олег буде завтра замучений, або йому здаватиметься, що життя прекрасне.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

$$\left(x \vee \overline{y}\right) \Rightarrow \left(\left(y \wedge \overline{z}\right) \Rightarrow \left(x \vee \left(y \Leftrightarrow z\right)\right)\right);$$

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

$$\big((p \vee q) \wedge (q \leftrightarrow r)\big) \to (\bar{p} \vee r)$$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

$$((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r;$$

5. Довести, чи формули еквівалентні:

$p \to (q \wedge r)$ та $(p \wedge q) \to (p \wedge r)$;

Варіант № 3

1. Формалізувати речення.

Заперечення диз'юнкції двох висловлювань еквівалентно кон'юнкції заперечень кожного з цих висловлювань.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

$$\left(\overline{x} \Leftrightarrow \overline{y}\right) \Rightarrow \left(\left(\left(y \Leftrightarrow z\right) \Rightarrow \left(z \Leftrightarrow x\right)\right) \Rightarrow \left(x \vee z\right)\right);$$

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

$$\overline{\big((p \to q) \vee (q \to r)\big)} \wedge (p \vee \bar{r})$$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

$$(((p \wedge q) \to \overline{p}) \wedge ((q \wedge \overline{r}) \to r)) \to (p \to r);$$

5. Довести, чи формули еквівалентні:

$p \to (q \vee r)$ та $(p \to q) \vee (p \to r)$.

Варіант № 4

1. Формалізувати речення.

Якщо 2 – просте число, то це найменше просте число, якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є простим числом; число 1 не є простим числом, отже 2 – просте число.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

$x \Rightarrow ((x \vee y) \vee z)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

$((p \to q) \wedge (\bar{q} \to r)) \vee (p \to \bar{r})$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

$((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s)) \to (r \vee s)$.

5. Довести, чи формули еквівалентні:

$p \oplus (q \wedge r)$ та $(p \oplus q) \wedge (p \oplus q)$.

Варіант № 5

1. Формалізувати речення.

Ігор або втомився, або хворий, якщо він втомився, то він злий; він не злий, отже, він хворий.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

$(x \Leftrightarrow (y \vee z)) \Leftrightarrow \left(x \Leftrightarrow \overline{(y \wedge z)}\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

$\left(\overline{(p \wedge q)} \to (q \leftrightarrow r)\right) \vee \overline{(p \to r)}$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

5. Довести, чи формули еквівалентні:

$(p \to q) \to r$ та $p \to (q \to r)$;

Варіант № 6

1. Формалізувати речення.

Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений; завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, отже, я не одягну тепле пальто.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:
$\left(x \Rightarrow \left(y \Rightarrow z\right)\right) \Rightarrow \left(\left(x \wedge y\right) \Rightarrow z\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:
$\big((p \wedge q) \to (q \leftrightarrow r)\big) \to \overline{(p \vee r)}$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:
$((p \to q) \wedge (q \to q)) \to p$;

5. Довести, чи формули еквівалентні:
$p \to (q \wedge r)$ та $p \vee (q \oplus r)$.

Варіант № 7

1. Формалізувати речення.
Ні Україна, ні Польща не втратили економічної співпраці.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:
$\left(\left(\overline{x} \Leftrightarrow \overline{y}\right) \Leftrightarrow \left(\left(z \Rightarrow \left(x \vee y\right)\right) \Rightarrow \overline{z}\right)\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:
$\big(\overline{(p \vee q)} \wedge \overline{(q \wedge r)}\big) \to (p \vee r)$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:
$((p \to q) \wedge (p \to q)) \to (\overline{p} \to q)$;

5. Довести, чи формули еквівалентні:
$p \leftrightarrow (q \vee r)$ та $p \wedge (q \to r)$.

Варіант № 8

1. Формалізувати речення.
Людину не підкуплять лестощі, якщо розум у людини є.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:
$\left(x \vee \left(y \vee z\right)\right) \Rightarrow \left(\overline{x} \vee \left(\overline{y} \vee \overline{z}\right)\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:
$\overline{\big((p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow r)\big)} \wedge \overline{(p \vee r)}$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

   $((p \to q) \wedge (q \to q)) \to p$;

5. Довести, чи формули еквівалентні:

   $q \wedge (p \to r)$ та $p \to (q \wedge r)$.

Варіант № 9

1. Формалізувати речення.

   Іван прийде на іспит і він або Сергій отримає п’ятірку.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

   $\left(x \Rightarrow (y \wedge z)\right) \Rightarrow \left(x \Rightarrow (y \wedge z)\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

   $\left((p \wedge q) \wedge (\bar{q} \to r)\right) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

   $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)) \to q$;

5. Довести, чи формули еквівалентні:

   $(p \vee \overline{p}) \to (\overline{p} \vee q)$ та $(r \to q) \wedge (p \to r)$.

Варіант № 10

1. Формалізувати речення.

   Якщо не можеш визнати похвали заслуженими, то вважай їх лестощами.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

   $\left(x \Leftrightarrow \overline{(y \wedge z)}\right) \Leftrightarrow \left(x \Leftrightarrow (y \wedge z)\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

   $\left(\overline{(p \wedge q)} \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})\right) \vee \overline{(p \vee r)}$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

$$(((\overline{p} \to \overline{q}) \to p) \wedge ((\neg(p \to q)) \to r)) \to (p \to q).$$

5. Довести, чи формули еквівалентні:

$q \vee r \wedge p$ та $q \to r \vee p$.

Варіант № 11

1. Формалізувати речення.

   Якщо Василь не прийде на іспит, то він не зможе отримати позитивну оцінку

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

   $$\left(x \vee \overline{y}\right) \Rightarrow \left(\left(y \wedge \overline{z}\right) \Rightarrow \left(x \vee y\right)\right);$$

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

   $$\left((p \to q) \wedge \overline{(\bar{q} \to r)}\right) \leftrightarrow (p \to \bar{r})$$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

   $$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

5. Довести, чи формули еквівалентні:

   $(p \wedge q) \to (p \wedge r)$ та $(p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r)$.

Варіант № 12

1. Формалізувати речення.

   Якщо не можеш визнати похвали заслуженими, то вважай їх лестощами.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

   $$\left(\left(x \Leftrightarrow y\right) \Leftrightarrow \left(\left(z \Rightarrow \left(\overline{x} \vee \overline{y}\right)\right) \Rightarrow \overline{z}\right)\right) \Leftrightarrow \left(x \vee y\right);$$

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

   $$\left(\overline{(p \vee q)} \wedge (q \to r)\right) \leftrightarrow (\bar{p} \to r)$$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

   $$((p \to q) \wedge (p \to q)) \to (\overline{p} \to q).$$

5. Довести, чи формули еквівалентні:

   $p \oplus (q \leftrightarrow r)$ та $p \to (q \wedge r)$.

Варіант № 13

1. Формалізувати речення.

   Якщо вчитель і учень присутні на уроці то вони опрацьовують тему.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

   $\left(x \Leftrightarrow y\right) \Rightarrow \left(\left(\left(y \Leftrightarrow z\right) \Rightarrow \left(z \Leftrightarrow x\right)\right) \Rightarrow \left(x \Leftrightarrow z\right)\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

   $\overline{\left(\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow (q \vee r)\right)} \wedge (\bar{p} \vee r)$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

   $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)) \to q$.

5. Довести, чи формули еквівалентні:

   $(p \to q) \wedge (p \to r)$ та $(r \wedge q) \vee (q \to r)$.

Варіант № 14

1. Формалізувати речення.

   Сашко працює, якщо він втомився, то він відпочиває; якщо він не відпочиває, то він хворий виконує простішу роботу.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:

   $\left(\left(x \Rightarrow y\right) \wedge \left(y \Rightarrow z\right)\right) \Rightarrow \left(x \Rightarrow z\right)$;

3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:

   $\left(\overline{(p \to q)} \leftrightarrow (\bar{q} \to r)\right) \to (p \vee \bar{r})$

4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:

   $((p \to q) \wedge (q \to q)) \to p$.

5. Довести, чи формули еквівалентні:

   $(r \wedge q) \vee (q \to r)$ та $(p \leftrightarrow r) \to (p \wedge r)$.

Варіант № 15

1. Формалізувати речення.

   Якщо не можеш зробити якісно роботу, то вважай що тобі не запропонують вдалу пропозицію.

2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:
$\left(x\wedge\left(y\wedge z\right)\right)\Rightarrow\left(x\vee y\vee z\right)$;
3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:
$\left(\overline{(p \land q)} \lor (\bar{q} \land r)\right) \lor \overline{(\bar{p} \to r)}$
4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:
$(((\overline{p}\to\overline{q})\to p)\wedge((\neg(p\to q))\to r))\to(p\to q)$.
5. Довести, чи формули еквівалентні:
$(\bar{q} \land r) \to p$ та $p\to(q\wedge r)$

Варіант № 16

1. Формалізувати речення.
Ні Микола, ні Василь не отримали призові місця на олімпіаді.
2. Побудувати таблицю істинності для висловлювань:
$\left(x\vee y\right)\Leftrightarrow\left(y\wedge\overline{z}\right)\Leftrightarrow\left(x\vee y\right)$.
3. Побудовою таблиць істинності вияснити чи висловлювання є тавтологіями або суперечностями:
$\overline{\left((p \land q) \to \overline{(q \leftrightarrow r)}\right)} \to \overline{(p \land r)}$
4. За означенням без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень перевірити, чи є тавтологіями висловлювання:
$((p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to s))\to(r\vee s)$.
5. Довести, чи формули еквівалентні:
$p\wedge\overline{q}\to\overline{p}$ та $\overline{(p \land q)} \lor (\bar{q} \land r)$

Додаток № 2 до лабораторної роботи з теми № 1

Реалізувати програмно визначення значень таблиці істиності логічних висловлювань при різних інтерпретаціях, для наступних формул:

1. $\left(x\vee y\vee z\right)\rightarrow\left(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\right)$;
2. $\left(x\vee\overline{y}\right)\Rightarrow\left(\left(y\wedge\overline{z}\right)\Rightarrow\left(x\vee\left(y\Leftrightarrow z\right)\right)\right)$;
3. $\left(\overline{x}\Leftrightarrow\overline{y}\right)\Rightarrow\left(\left(\left(y\Leftrightarrow z\right)\Rightarrow\left(z\Leftrightarrow x\right)\right)\Rightarrow\left(x\vee z\right)\right)$;
4. $x\Rightarrow\left(\left(x\vee y\right)\vee z\right)$;

5. $\left(x \Leftrightarrow (y \vee z)\right) \Leftrightarrow \left(x \Leftrightarrow \overline{(y \wedge z)}\right)$;

6. $\left(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)\right) \Rightarrow \left((x \wedge y) \Rightarrow z\right)$;

7. $\left(\left(\overline{x} \Leftrightarrow \overline{y}\right) \Leftrightarrow \left((z \Rightarrow (x \vee y)) \Rightarrow \overline{z}\right)\right)$;

8. $\left(x \vee (y \vee z)\right) \Rightarrow \left(\overline{x} \vee \left(\overline{y} \vee \overline{z}\right)\right)$;

9. $\left(x \Rightarrow (y \wedge z)\right) \Rightarrow \left(x \Rightarrow (y \wedge z)\right)$;

10. $\left(x \Leftrightarrow \overline{(y \wedge z)}\right) \Leftrightarrow \left(x \Leftrightarrow (y \wedge z)\right)$;

11. $\left(x \vee \overline{y}\right) \Rightarrow \left(\left(y \wedge \overline{z}\right) \Rightarrow (x \vee y)\right)$;

12. $\left(\left(x \Leftrightarrow y\right) \Leftrightarrow \left(\left(z \Rightarrow \left(\overline{x} \vee \overline{y}\right)\right) \Rightarrow \overline{z}\right)\right) \Leftrightarrow (x \vee y)$;

13. $(x \Leftrightarrow y) \Rightarrow \left(\left((y \Leftrightarrow z) \Rightarrow (z \Leftrightarrow x)\right) \Rightarrow (x \Leftrightarrow z)\right)$;

14. $\left((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)\right) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$;

15. $\left(x \wedge (y \wedge z)\right) \Rightarrow (x \vee y \vee z)$;

16. $(x \vee y) \Leftrightarrow \left(y \wedge \overline{z}\right) \Leftrightarrow (x \vee y)$.

ДОДАТОК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота №___

з дисципліни

«Дискретна математика»

Виконав:
студент групи КН-1__
ПІ студента
Викладач:
Мельникова Н.І.

Львів – 201_ р.