

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ВНЕШНЕГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА

Мешкова О.В., Шатина А.В.*

«МИРЭА – Российский технологический университет»

+7 (916) 981-00-67, shatina_av@mail.ru

Проведено исследование влияния гравитационного поля Луны на орбитальное движение высоколетящего ИСЗ в рамках пространственной круговой ограниченной задачи трех тел. Получен гамильтониан задачи в переменных Делоне, произведено усреднение его по быстрым угловым переменным, получена усредненная система уравнений орбитального движения спутника сначала в переменных Делоне, а потом и в безразмерных переменных. Произведен анализ построенных интегральных кривых и фазовых портретов данной системы при различных начальных значениях орбитальных элементов.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли, возмущение от внешнего небесного тела, гамильтониан, система уравнений орбитального движения, фазовый портрет.

Mathematical modeling of the orbital motion of an artificial satellite of the Earth, taking into account the disturbance from an external celestial body. Meshkova O.V., Shatina A.V. MIREA – Russian Technological University.

Investigation of the influence of the gravitational field of the Moon on the orbital motion of a high-flying satellite in the framework of a spatial circular limited three-body problem. The Hamiltonian of the problem in Delaunay variables was obtained, averaged over fast angular variables, and an averaged system of equations for the orbital motion of the satellite was obtained, first in Delaunay variables, and then in dimensionless variables. The analysis of the constructed integral graphs and phase portraits of this system at different initial values of the orbital elements is carried out.

Keywords: Hamiltonian, system of equations of orbital motion. an artificial satellite of the Earth, a disturbance from an external celestial body.

Введение

Орбитальное движение искусственных спутников Земли (ИСЗ) подвержено влиянию различных факторов, таких как: форма Земли, атмосферное сопротивление, солнечная радиация... Однако, одним из наиболее значительных факторов, является взаимодействие с небесными телами – планетами, спутниками, астероидами и другими объектами.

В данной работе будет проведено исследование влияния гравитационного поля Луны на орбитальное движение высоколетящего ИСЗ в рамках пространственной круговой ограниченной задачи трех тел. Будет проведен вывод гамильтониана задачи в переменных Делоне, усреднение его по быстрым угловым переменным, вывод усредненной системы уравнений орбитального движения спутника сначала в переменных Делоне, а потом и в безразмерных переменных. Основные параметры, характеризующие орбиту ИСЗ, включают эксцентриситет e , наклонение орбиты i , долготу перигея g , и т.д. Путем аналитических вычислений и численного интегрирования уравнений движения, становится возможно находить орбитальные параметры ИСЗ в будущем и прошлом. В работе будет проведено интегрирование системы при различных начальных значениях, а также произведен поиск стационарных решений эволюционной системы уравнений относительно e и g , исследование их устойчивости при наклонении орбиты спутника равным $\pi/2$.

Спутники являются важными инструментами для многих отраслей деятельности, в том числе геодезии, геоинформатики, военных целях, навигации, мониторинга климата и т.д. Математическое моделирование орбитального движения позволяет эффективно управлять искусственным спутником Земли, корректировать его отклонение от предполагаемой орбиты и предотвращать столкновение с другими телами в космосе.

Постановка задачи

Рассматривается орбитальное движение ИСЗ в рамках круговой ограниченной задачи трех тел. Спутник моделируем материальной точкой M с массой m . Он движется в гравитационном поле сил двух взаимно тяготеющих тел M_1, M_2 с массами m_1, m_2 . Тела M_1, M_2 также моделируются материальными точками. Считаем, что $m \ll m_2 \ll m_1$. Предполагается, что точки M_1, M_2 движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс O , а тело M не влияет на движение тел M_1, M_2 .

Вводится инерциальная система координат $O\xi\eta\zeta$, ось $O\xi$ которой связана с прямой M_1M_2 в начальный момент времени $t = 0$, и подвижная система координат $Oxyz$, ось Ox которой направлена

вдоль прямой M_1M_2 постоянно. Обозначим через $\mathbf{R}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ – радиус-векторы точек M, M_1, M_2 , задаваемые в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$, а $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радиус-векторы в подвижной системе координат $Oxyz$.

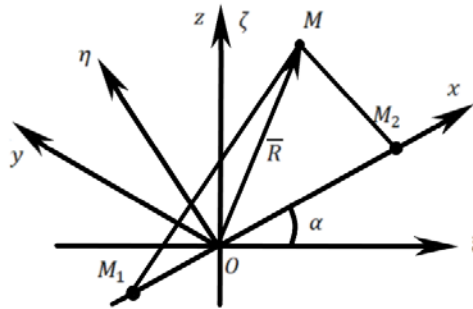


Рисунок 1 – Постановка задачи

В качестве невозмущенной задачи рассмотрим движение точки M в гравитационном поле неподвижного центра O с массой $(m_1 + m_2)$. Положим $M_1M_2 = b$, α – угол между осями Ox и $O\xi$.

Потенциальная энергия для невозмущенной задачи вводится и имеет вид:

$$\Pi_0 = -\frac{fm(m_1 + m_2)}{R}, \quad R = |\mathbf{R}|. \quad (1)$$

где f – универсальная гравитационная постоянная, а R – модуль радиус-вектора точки M .

В случае потенциала Π_0 орбита спутника является кеплеровской. В случае возмущенной задачи общий потенциал Π представляется в виде суммы $\Pi_0 + \Pi_1$, где

$$\Pi_1 = \frac{fm(m_1 + m_2)}{R} - \frac{fmm_1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1|} - \frac{fmm_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2|}. \quad (2)$$

Введём следующие обозначения для элементов орбиты точки M : a – большая полуось эллипса; e – эксцентриситет; i – наклонение орбиты точки M ; h – долгота восходящего узла; g – долгота перицентра π от восходящего узла OX_1 ; ϑ – истинная аномалия.

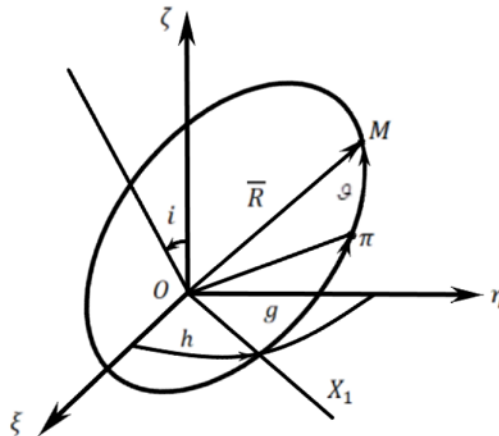


Рисунок 2 – Элементы орбиты точки M

В невозмущенном движении элементы орбиты a , e , i , h , g являются константами, а истинная аномалия ϑ изменяется со временем:

$$\dot{\vartheta} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} n, \quad n = \sqrt{\frac{f(m_1 + m_2)}{a^3}}.$$

В небесной механике, а также в механике космического полета для описания орбитального движения планет и спутников используются переменные Делоне. Их обозначают L , G , H , l , g , h . Здесь

g и h – ранее введенные элементы орбиты, а l – средняя аномалия. Переменные L, G, H связаны с элементами орбиты a, e, i и величиной R следующими равенствами:

$$L = \sqrt{f_0 m^2 a}, \quad G = \sqrt{f_0 m^2 a (1 - e^2)}, \quad H = \sqrt{f_0 m^2 a (1 - e^2)} \cos i, \quad f_0 = f(m_1 + m_2),$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}, \quad \cos i = \frac{H}{G}, \quad a = \frac{L^2}{f_0 m^2}, \quad R = \frac{G^2}{f_0 m^2 (1 + e \cos \vartheta)}. \quad (3)$$

Анализ возмущенного движения

С учетом возмущающей части потенциала Π_1 гамильтониан задачи (полная энергия системы) представится в виде суммы:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_1 = \Pi_1, \quad \mathcal{H}_0 = -\frac{f_0^2 m^3}{2L^2}. \quad (4)$$

Уравнения движения точки M для поставленной задачи запишутся в виде канонических уравнений:

$$\dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l}, \quad \dot{l} = \frac{f_0^2 m^3}{L^3} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L},$$

$$\dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g}, \quad \dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G},$$

$$\dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h}, \quad \dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H}. \quad (5)$$

С учетом того, что расстояние апоцентра орбиты спутника мало по сравнению с расстоянием между центральным телом M_1 и возмущающим телом M_2 , а также при помощи производящей функции многочленов Лежандра, преобразуем потенциал Π_1 . С учетом этого, возмущающая часть гамильтониана \mathcal{H}_1 примет следующий вид:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{f m m_2}{R} + \frac{f m m_1}{R} \left\{ \frac{\mu b}{R} \cos \psi - \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) \frac{\mu^2 b^2}{R^2} \right\} -$$

$$- \frac{f m m_2}{b(1-\mu)} \left\{ 1 + \frac{R}{b(1-\mu)} \cos \psi + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) \frac{R^2}{b^2 (1-\mu)^2} \right\}. \quad (6)$$

где ψ – угол между радиус-векторами точек M и M_2 , b – расстояние между телами M_1 и M_2 , $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. Далее, проведя процедуру усреднения \mathcal{H}_1 по быстрым угловым переменным α и l , получим усредненный гамильтониан в переменных Делоне:

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle_{\alpha, l} = \frac{f f_0 m^3 m_2}{L^2} - \frac{f m m_2}{b(1-\mu)} + \frac{f f_0^3 m^7 m_1 \mu^2 b^2}{8 G^3 L^3} \left(1 - \frac{3 H^2}{G^2} \right) +$$

$$+ \frac{f m_2 (5 L^4 - 3 G^2 L^2)}{16 f_0^2 m^3 b^3 (1-\mu)^3} \left(1 - \frac{3 H^2}{G^2} \right) - \frac{15 f m_2 (L^4 - G^2 L^2)}{16 f_0^2 m^3 b^3 (1-\mu)^3} \left(1 - \frac{H^2}{G^2} \right) \cos 2g. \quad (7)$$

Путем подстановки в систему уравнений (5) выражения для усредненного гамильтониана была получена усредненная система уравнений в переменных Делоне, на основе которой была получена система уравнений, описывающая эволюцию орбитального движения спутника с учётом возмущения от гравитационного поля Луны в безразмерных переменных $a_0 = a/b, e, i, g, h, \vartheta$:

$$a'_0 = 0,$$

$$e' = \frac{15 \mu e \sqrt{1 - e^2} a_0^{3/2}}{8(1-\mu)^3} \sin^2 i \sin 2g,$$

$$i' = -\frac{15 \mu e^2 a_0^{3/2} \sin i \cos i \sin 2g}{8(1-\mu)^3 \sqrt{1 - e^2}},$$

$$\begin{aligned}
l' &= \frac{(1-2\mu)}{a_0^{3/2}} - \frac{3(1-\mu)\mu^2(1-3\cos^2 i)}{8a_0^{7/2}(1-e^2)^{3/2}} + \frac{\mu a_0^{3/2}(7+3e^2)(1-3\cos^2 i)}{8(1-\mu)^3} - \frac{15\mu a_0^{3/2}(1+e^2)}{8(1-\mu)^3} \sin^2 i \cos 2g, \\
g' &= -\frac{3\mu^2(1-\mu)}{8a_0^{7/2}(1-e^2)^2}(1-5\cos^2 i) - \frac{3\mu a_0^{3/2}(1-e^2-5\cos^2 i)}{8(1-\mu)^3\sqrt{1-e^2}} + \frac{15\mu a_0^{3/2} \cos 2g (\sin^2 i - e^2)}{8(1-\mu)^3\sqrt{1-e^2}}, \\
h' &= -\frac{3\mu^2(1-\mu)\cos i}{4a_0^{7/2}(1-e^2)^2} - \frac{3\mu a_0^{3/2} \cos i}{8(1-\mu)^3\sqrt{1-e^2}} (2+3e^2-5e^2 \cos 2g). \quad (8)
\end{aligned}$$

где в качестве безразмерного времени был взят угол альфа между осью $O\xi$ и прямой M_1M_2 :

$$\tau = \alpha = n_0 t, \quad n_0 = \sqrt{f_0 / b^3}.$$

Из первого уравнения системы заметим, что безразмерная большая полуось орбиты не меняется. Также угловая переменная l являлась «быстрой». По этой переменной было проведено усреднение. Поэтому эти две переменные можно исключить из рассмотрения.

Далее, перейдем к новому безразмерному времени и параметру:

$$\tau_1 = \frac{15\mu a_0^{3/2}}{4(1-\mu)^3} \tau = \frac{15\mu}{4(1-\mu)^3} \sqrt{\frac{f_0 a_0^3}{b^3}} t; \quad k = \frac{\mu(1-\mu)^4}{10a_0^5}. \quad (9)$$

Получаем эволюционную систему уравнений 4-го порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{de}{d\tau_1} &= \frac{1}{2} e \sqrt{1-e^2} \sin^2 i \sin 2g, \\
\frac{di}{d\tau_1} &= -\frac{e^2 \sin i \cos i \sin 2g}{2\sqrt{1-e^2}}, \\
\frac{dg}{d\tau_1} &= -\frac{k(1-5\cos^2 i)}{(1-e^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{2}{5}(1-e^2) + \sin^2 g (e^2 - \sin^2 i) \right\}, \\
\frac{dh}{d\tau_1} &= -\frac{k \cos i}{(1-e^2)^2} - \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{1-e^2}{5} + e^2 \sin^2 g \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Заметим, что правые части системы уравнений зависят только от трех переменных: e, i, g и параметра k . Поэтому последнее уравнение отделяется. Система имеет первый интеграл, который записывается в виде:

$$\cos^2 i (1-e^2) = c.$$

Уточним параметры системы уравнений:

$$m_1 = 5,9736 \times 10^{24} \text{ кг} - \text{масса Земли},$$

$$m_2 = 7,349 \times 10^{22} \text{ кг} - \text{масса Луны},$$

$$b = 3,844 \times 10^8 \text{ м} - \text{большая полуось орбиты Луны},$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1,2153 \times 10^{-2},$$

$$a = 42164 \times 10^3 \text{ м} - \text{радиус геостационарной орбиты},$$

$$a_0 = \frac{a}{b} = \frac{4,2164 \times 10^7}{3,844 \times 10^8} = 0,1097.$$

Построение интегральных графиков и фазовых портретов

Возьмем геостационарную орбиту ($k = 72,847$) и построим графики зависимости эксцентриситета e и наклона i от времени τ_1 , задав начальные условия $e_0 = 0,01$, $g_0 = 0$, $h_0 = 0$, $i_0 = 60^\circ, 30^\circ$. При $k \gg 1$ изменение эксцентриситета и наклона имеют колебательный характер. На построенных графиках хорошо прослеживается выполнение соотношения первого интеграла системы. Так, из локального

уменьшения наклонения орбиты i от 1.0472 до 1.04719, следует увеличение $\cos^2 i$. Для сохранения константы C необходимо уменьшение значения $(1-e^2)$, т.е. увеличение эксцентриситета, что и наблюдается на рисунке сверху на данном же промежутке времени. Такая же тенденция обратной зависимости хорошо отражена на другой паре графиков на всем промежутке времени от 0 до 10. Далее заметим, что система допускает решение, при котором $i = \frac{\pi}{2}$. Разберем подробно этот случай.

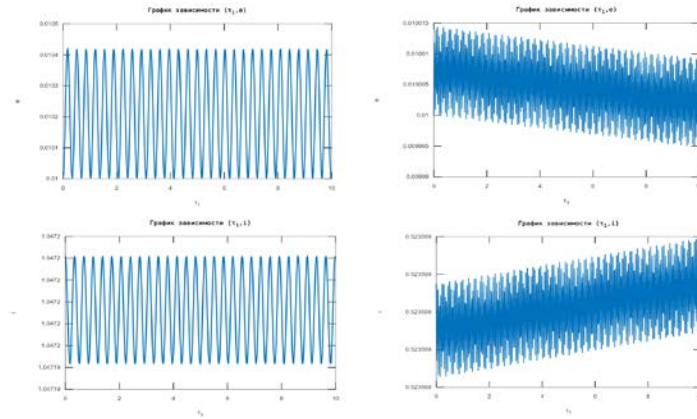


Рисунок 3 – Графики зависимости (τ_1, e) и (τ_1, i) при $i_0 = 60^\circ, 30^\circ$

При $i = \pi/2$ спутники называются полярными. Плоскость орбиты спутника ортогональна плоскости орбиты Луны. Получим систему уравнений 2-го порядка.

$$\begin{cases} \frac{de}{d\tau_1} = \frac{1}{2} e \sqrt{1-e^2} \sin 2g \\ \frac{dg}{d\tau_1} = -\frac{k}{(1-e^2)^2} + \sqrt{1-e^2} \left\{ \frac{2}{5} - \sin^2 g \right\} \end{cases} \quad (11)$$

В ходе исследования были найдены стационарные решения системы (11) при $i = \pi/2$: $(e_*; 0)$ и $(e_*; \pi)$, где $e_* = \sqrt{1 - \left(\frac{5k}{2}\right)^{2/5}}$. Стационарное решение существует при $k < 0.4$. Решения устойчивы, но не асимптотически. Тип особых точек – центр.

Далее построим фазовые портреты (g, e) при $k = 0.22, 0.3, 0.39$, соответствующие высокой околоземной орбите. Если поделить первое уравнение предыдущей системы (11) на второе, то фиолетовая пунктирная линия – это множество точек, в которых знаменатель полученного уравнения обращается в ноль. В этих точках интегральные кривые дифференциального уравнения имеют вертикальные касательные. Черные точки (точки максимума пунктирных кривых) – это стационарные решения системы уравнений. Эти точки являются устойчивыми (центр). При $k = 0.22$ стационарное значение эксцентриситета – это $e_* \approx 0.461185$, при $k = 0.3$ – $e_* \approx 0.329695$, при $k = 0.39$ – $e_* \approx 0.100379$.

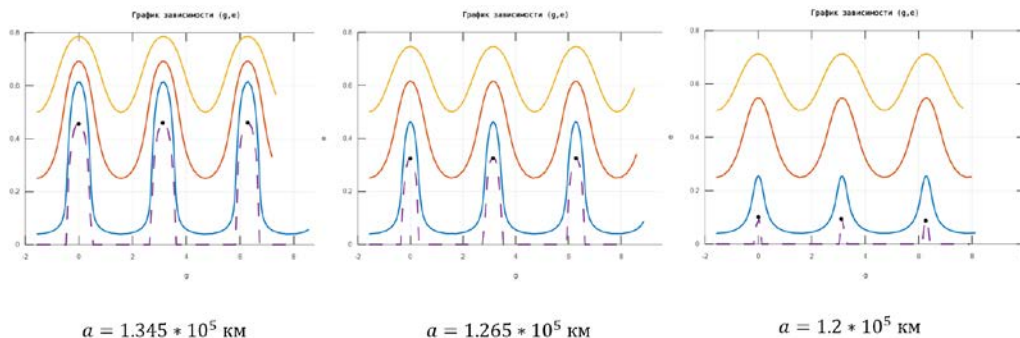


Рисунок 4 – Фазовые портреты (g, e) при $k = 0.22, 0.3, 0.39$

Затем уточним ФП (фазовый портрет) (g, e) при $k = 0.22, 0.3, 0.39$ в окрестностях стационарных точек $(0; e_*)$. На данных графиках, как и в общем случае, прослеживается колебательный характер изменения эксцентриситета. Чем меньше параметр $k \geq 0.22$, тем более вытянутыми оказываются фазовые траектории эллипсов.

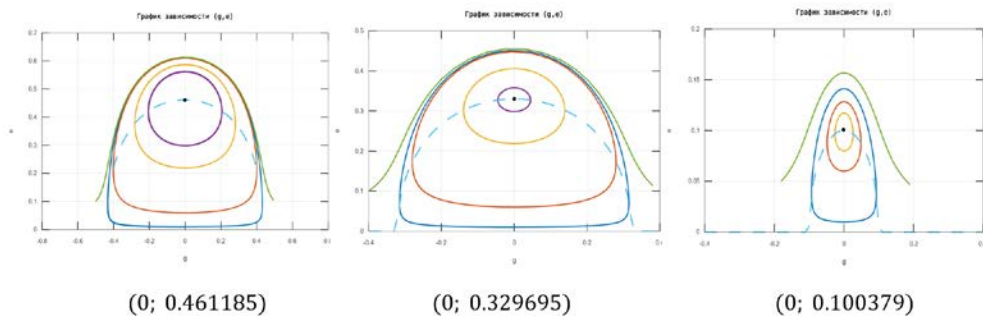


Рисунок 5 – ФП (g, e) при $k = 0.22, 0.3, 0.39$ в окрестностях стационарных точек $(0; e_*)$

Что касается изменения долготы перицентра, то в зависимости от начальных условий его изменение носит либо монотонный характер (вне эллипсов), либо колебательный. На рисунках колебания будут наблюдаться внутри голубых кривых. При этом с увеличением параметра k прослеживается уменьшение максимального диапазона колебаний g : начиная с $(-0.4; 0.4)$ при $k = 0.22$ до $(-0.1; 0.1)$ при $k = 0.39$.

Далее были построены вблизи стационарных решений интегральные кривые (τ_1, e) и (τ_1, g) при $k = 0.3$:

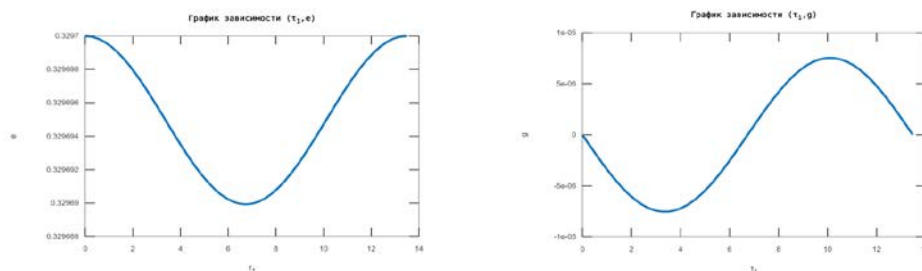
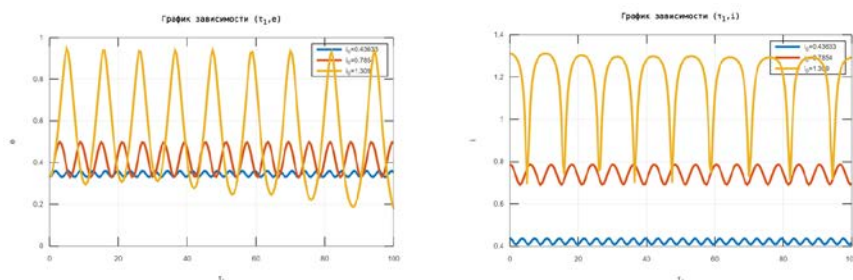


Рисунок 6 – Интегральные кривые (τ_1, e) и (τ_1, g) при $k = 0.3$

Приходим к выводу, общий вид функций $e(\tau_1), g(\tau_1)$ в окрестностях стационарных точек находится в виде линейной комбинации: $C_1 \cos(e_* \sqrt{2} \tau_1) + C_2 \sin(e_* \sqrt{2} \tau_1)$, то есть они являются гармоническими колебаниями. Период колебаний в общем случае равен $\frac{2\pi}{e_* \sqrt{2}} \approx 13.47$.

Рассмотрим теперь не ортогональные орбиты: близкий к экваториальному спутник при $i_0 = 25^\circ$, спутник со средним наклонением при $i_0 = 45^\circ$ и спутник близкий к полярному при $i_0 = 75^\circ$. Возьмем все так же $g_0 = 0$, $e_0 = 0.3297, k = 0.3$, $h_0 = 0$:



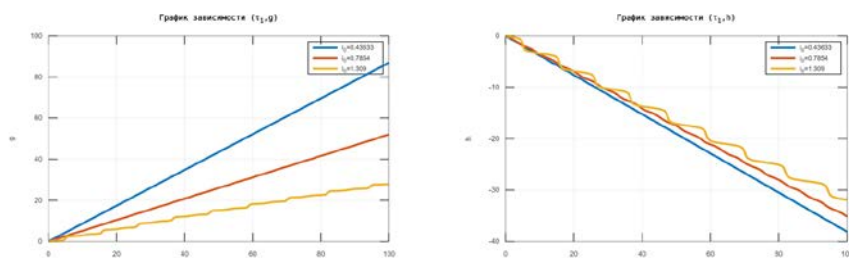


Рисунок 7 – Интегральные кривые системы при $i \neq \pi/2$.

Из анализа данных графиков можно сделать вывод, что увеличение наклона орбиты приводит к увеличению амплитуды колебаний ее эксцентриситета, а, следовательно, и уменьшению радиуса перигея $r_{II} = a_0(1-e)$. Также на фоне общей монотонности долготы перигея можно заметить ее небольшие колебания при $i_0 = 75^\circ$. Постепенно будем увеличивать начальное значение g_0 , $e_0 = 0.3297, h_0 = 0, k = 0.3$:

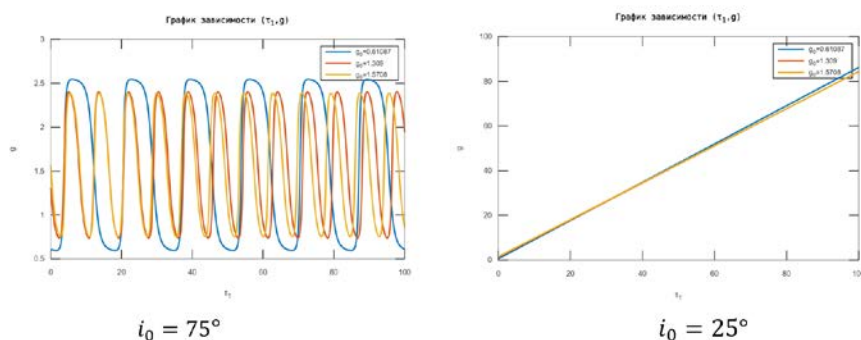


Рисунок 8 – Графики зависимости (τ_1, g) при $g_0 = 35^\circ, 75^\circ, 90^\circ$

При $g_0 \geq 35^\circ$ наблюдаем гармонические колебания долготы. Также можно сделать вывод, что для полярных спутников ($i_0 = 75^\circ$ в примере, $i \neq \pi/2$) наименьший диапазон отклонений долготы перигея замечен при $g_0 = 90^\circ$. Для экваториальных спутников ($i_0 = 25^\circ, e_0 = 0.3297, h_0 = 0, k = 0.3$) изменение начального значения g_0 не приводит к смене характера поведения долготы перигея.

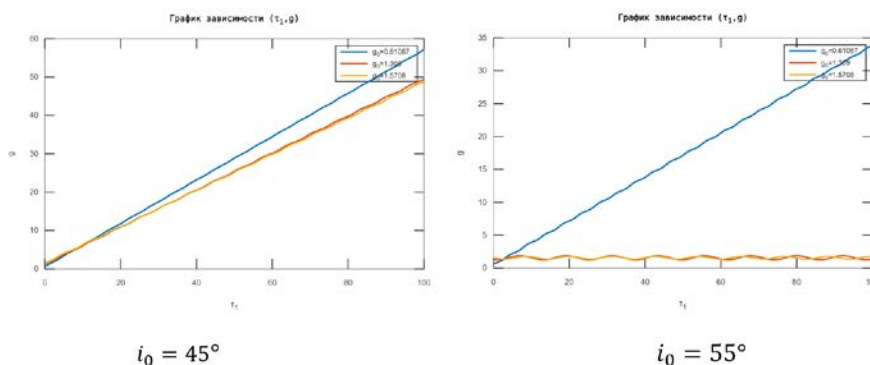


Рисунок 9 – Графики зависимости (τ_1, g) при $g_0 = 35^\circ, 75^\circ, 90^\circ$

Наконец, рассмотрев завершающие рисунки, можно прийти к заключению, что спутники со средним наклоном могут вести себя и как полярные, и как экваториальные спутники, в зависимости от начальных значений самого наклона, эксцентриситета и долготы перигея.

Основные результаты данного исследования были получены в выпускной квалификационной работе [8].

Заключение

В результате проведенного исследования было установлено, что гравитационное поле Луны оказывает заметное влияние на орбитальное движение высоколетящих искусственных спутников Земли. Изменение орбитальных параметров под внешним влиянием может приводить к нестабильности орбиты. В связи с этим, можно заключить, что изучение данной проблематики представляет большой интерес для различных областей науки и техники.

В ходе работы были проанализированы теоретические основы задачи исследования, получена и проинтегрирована эволюционная система орбитального движения спутника в безразмерных переменных, найдены стационарные решения системы при значении наклона орбиты $i = \pi / 2$, построены интегральные кривые зависимости элементов орбиты от времени и фазовые портреты зависимости эксцентриситета e от долготы перицентра от восходящего узла g , а также выявлены некоторые закономерности в изменении параметров системы под влиянием гравитационного поля Луны.

Таким образом, проведенное исследование позволило получить новые знания и понимание о влиянии гравитационного поля Луны на орбитальное движение искусственных спутников Земли. Результаты работы могут быть полезны для совершенствования космических технологий и методов управления орбитальным движением спутников.

Благодарности

Работа проведена в рамках инициативной НИР кафедры высшей математики ИИИ РТУ МИРЭА (№192-ИИИ(ВМ)).

Литература

1. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. – 588 с.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1975. – 800 с.
3. Вильке В.Г. Механика систем материальных точек и твердых тел. М.: Физматлит, 2013. – 268 с.
4. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. - М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 432 с.
5. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: Учеб. пособие. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. — 178 с.
6. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. – 448 с.
7. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. Введение в Octave для инженеров и математиков. – М.: ALT Linux, 2012.
8. Мешкова О.В. Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Земли с учетом возмущения от внешнего небесного тела: выпускная квалификационная работа по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (руководитель Шатина А.В.). М., 2023. 51 с.