

Отчет по лабораторной работе №2

Задача о погоне

Бармина Ольга Константиновна

2022 Feb 15th

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	7
4	Выполнение лабораторной работы	8
5	Выводы	14
6	Список литературы	15

List of Tables

List of Figures

4.1	рис 1. Вычисление расстояния	9
4.2	рис 2. Вычисление тангенциальной скорости	9
4.3	рис 3. Код программы в первом случае	10
4.4	рис 4. Траектория движения в первом случае	11
4.5	рис 5. Код программы во втором случае	12
4.6	рис 6. Траектория движения во втором случае	13

1 Цель работы

Целью данной работы является построение математической модели для решения задачи о погоне на примере задачи преследование браконьеров береговой охраной.^[1]

2 Задание

В ходе работы необходимо:

1. Провести рассуждения и вывод дифференциальных уравнений, если скорость катера больше скорости лодки в 5.1 раз и расстояние между ними составляет 25 км;
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев;
3. Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

3 Теоретическое введение

Постановка задачи следующая:

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 25 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{(25.01)}v \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ r = \frac{10k}{61} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \theta = -\pi \\ r = \frac{10k}{41} \end{cases}$$

4 Выполнение лабораторной работы

1. Принимает за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_{k0} = 25$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров, а полярная ось проходит через точку нахождения катера береговой охраны.^[2]
3. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $(k - x)/5.1v$ (во втором случае $(k + x)/5.1v$). Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\begin{cases} \theta = 0 \\ r = \frac{10k}{61} \end{cases}$ в первом случае или $\begin{cases} \theta = -\pi \\ r = \frac{10k}{41} \end{cases}$ во втором. Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{10k}{61}$ и $x_1 = \frac{10k}{41}$, задачу будем решать для двух случаев

$$1) x/v = (k-x)/5.1v$$

$$5.1x = k-x$$

$$6.1x = k$$

$$x = k/6.1 = 10k/61$$

$$2) x/v = (k+x)/5.1v$$

$$5.1x = k+x$$

$$4.1x = k$$

$$x = k/4.1 = 10k/41$$

Figure 4.1: рис 1. Вычисление расстояния

4. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v_r = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость - это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус: $v_\tau = r \frac{d\theta}{dt}$. По теореме пифагора получаем, что $r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{(25.01)v}$.

$$3) \underline{v_\tau} = \sqrt{(5.1v)^2 - v^2} = \sqrt{26.01 - 1} * v = \sqrt{25.01} * v$$

Figure 4.2: рис 2. Вычисление тангенциальной скорости

5. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений с двумя начальными условиями. Исключая из

полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{(25.01)}}$$

Решив это уравнение, можно получить траекторию движения катера в полярных координатах.

6. Перейдем к написанию программы в SciLab. Установим начальное расстояние $s = 25$, в функции dr укажем нашу формулу, изменяя константу на 25.01, установим r_0 и $tetha$ как в первой системе начальных условий.

```
*task.sce
1 s=25; // начальное расстояние от лодки до катера
2 fi=3*pi/4;
3 //функция, описывающая движение катера береговой охраны
4 function dr=f(tetha, r)
5 dr=r/sqrt(25.01);
6 endfunction;
7 //начальные условия в случае
8 r0=10*s/61;
9 tetha0=0;
10 tetha=0:0.01:2*pi;
11 r=ode(r0,tetha0,tetha,f);
12 //функция, описывающая движение лодки браконьеров
13 function xt=f2(t)
14 xt=tan(fi)*t;
15 endfunction
16 t=0:1:30;
17 polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траектории движения катера в полярных координатах
18 plot2d(t,f2(t),style = color('red'));
19
```

Figure 4.3: рис 3. Код программы в первом случае

В результате получаем следующий график:

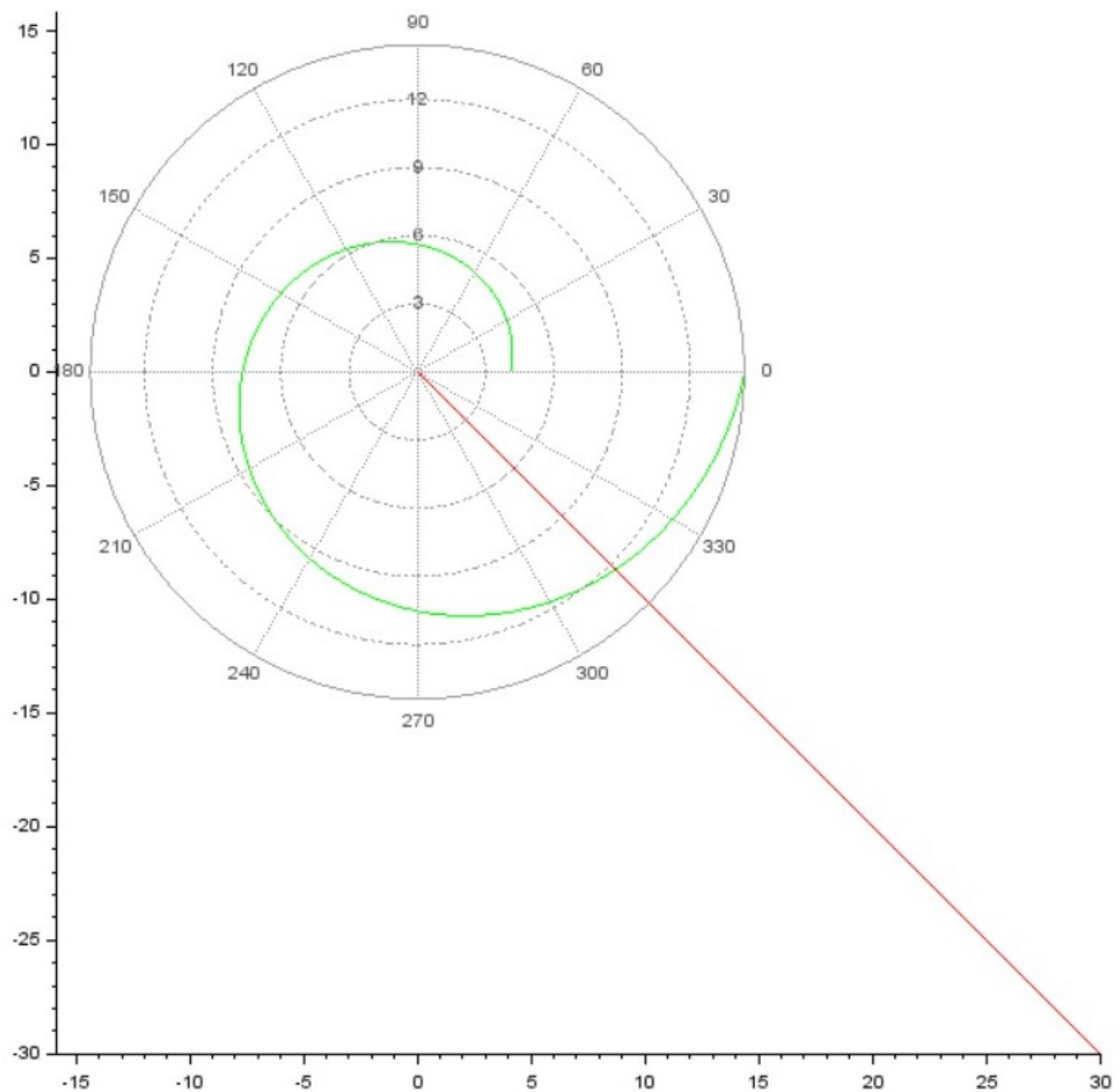


Figure 4.4: рис 4. Траектория движения в первом случае

По графику видно, что траектории лодки и катера пересекутся на расстоянии 8.7 км.

7. Перейдем ко вторым начальным условиям. Для этого установим r_0 и θ_0 как во второй системе начальных условий.

```

*task.sce
1 s=25; // начальное расстояние от лодки до катера
2 fi=3*pi/4;
3 //функция, описывающая движение катера береговой охраны
4 function dr=f(tetha, r)
5 dr=r/sqrt(25.01);
6 endfunction;
7 //начальные условия в случае
8 r0=10*s/41;
9 tetha0=-pi;
10 tetha=0:0.01:2*pi;
11 r=ode(r0,tetha0,tetha,f);
12 //функция, описывающая движение лодки браконьеров
13 function xt=f2(t)
14 xt=tan(fi)*t;
15 endfunction
16 t=0:1:30;
17 polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траектории движения катера в полярных координатах
18 plot2d(t,f2(t),style = color('red'));

```

Figure 4.5: рис 5. Код программы во втором случае

В результате получаем следующий график:

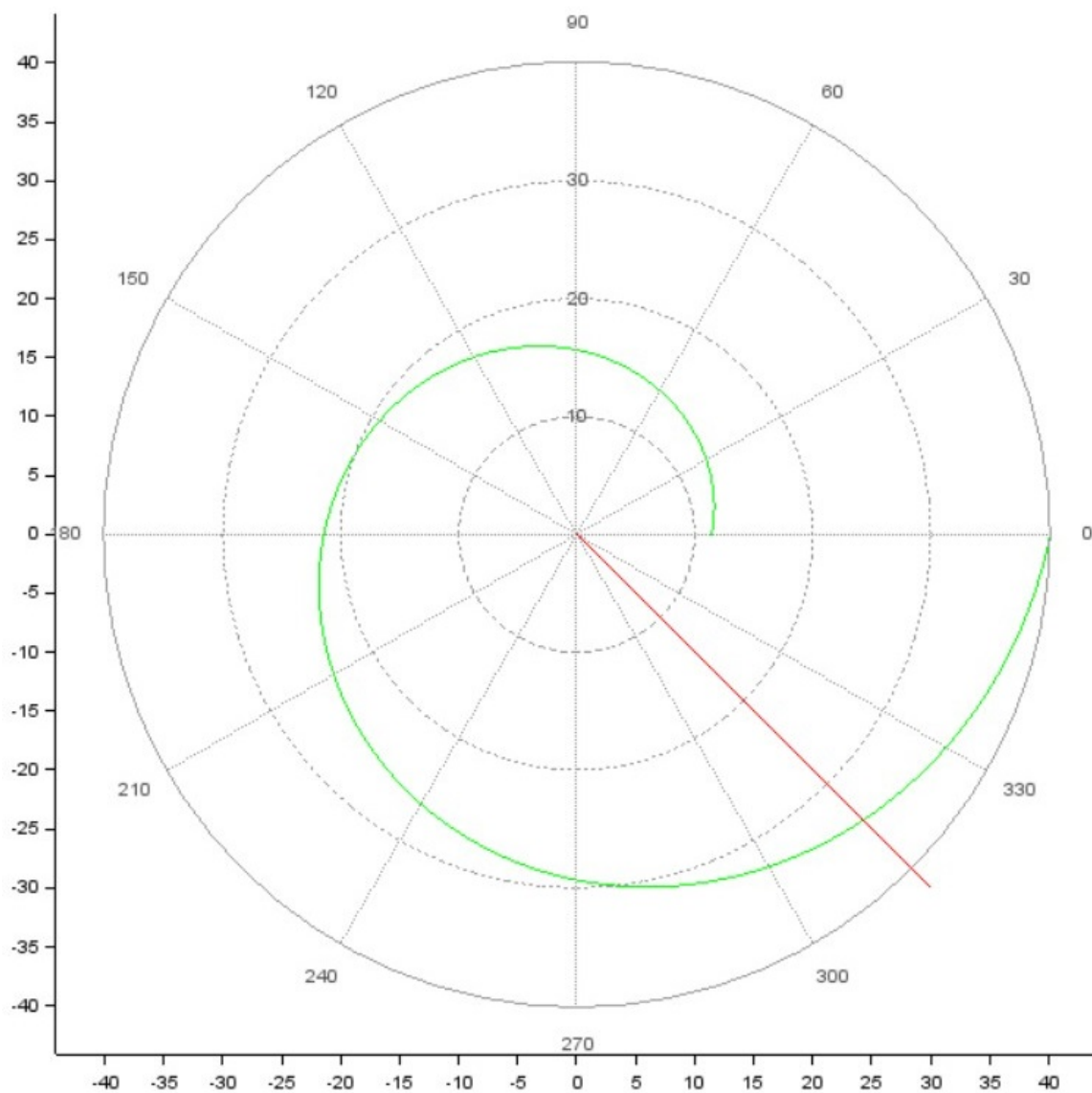


Figure 4.6: рис 6. Траектория движения во втором случае

По графику видно, что траектории лодки и катера пересекутся на расстоянии 24.3 км.

5 Выводы

В ходе работы мы построили математическую модель для решения задачи о погоне на примере задачи преследование браконьеров береговой охраной. Мы вывели дифференциальные уравнения для решения данной задачи, построили график и определили точку пересечения траекторий.

6 Список литературы

- Методические материалы курса
- Wikipedia: Кривая погони ([https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2))