Лабораторная работа №6

Решение моделей в непрерывном и дискретном времени

Лебедева О.А.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Цель работы

Основной целью работы является освоение специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Задачи

- Ознакомиться с основными принципами работы пакета DifferentialEquations.jl для решения задач математического моделирования.
- Изучить методы описания и решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка.
- Реализовать модели, описывающие динамику взаимодействия систем, таких как:
    1. Модель Лотки-Вольтерры (жертва-хищник).
    2. Гармонический осциллятор и его вариации.
    3. Конкурентные взаимодействия.
- Построить временные ряды и фазовые портреты для заданных моделей.
- Сравнить аналитические и численные решения для одной из задач.
- Создать анимацию для визуализации динамики фазовых портретов.

Объект исследования: Динамические системы в непрерывном и дискретном времени.

Предмет исследования: Численное поведение решений дифференциальных уравнений, моделирующих различные природные и физические явления.

Условные обозначения и термины

y’, y’’ - первая и вторая производные координаты по времени (скорость и ускорение).

a,b,c,d — параметры взаимодействия в модели Лотки-Вольтерры.

“Фазовый портрет” — графическое представление динамики системы в пространстве фазовых переменных

Техническое оснащение и выбранные методы проведения работы

Программное обеспечение:

Язык программирования Julia. Библиотеки: 1. DifferentialEquations.jl для численного решения задач. 2. Plots.jl для визуализации графиков и построения фазовых портретов. 3. NLsolve.jl для аналитического нахождения точек равновесия.

Методы:

- Численное интегрирование дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.
- Построение временных рядов и фазовых портретов.
- Создание анимации для наглядной визуализации динамических систем.

Julia — высокоуровневый свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. Эффективен также и для написания программ общего назначения[1].

Задание

1. Используя Jupyter Lab, повторите примеры из раздела 6.2.
2. Выполните задания для самостоятельной работы (раздел 6.4).

Задание для самостоятельного выполнения.

Задание См. рис. 1, См. рис. 2

6.4. Задания для самостоятельного выполнения

1. Реализовать и проанализировать модель роста численности изолированной популяции (модель Мальтуса):
$$\dot{x} = ax, \quad a = b - c.$$
где $x(t)$ — численность изолированной популяции в момент времени t, a — коэффициент роста популяции, b — коэффициент рождаемости, c — коэффициент смертности. Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).
2. Реализовать и проанализировать логистическую модель роста популяции, заданную уравнением:
$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right), \quad r > 0, \quad k > 0,$$
r — коэффициент роста популяции, k — потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).
3. Реализовать и проанализировать модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIR-модель):
$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta is, \\ \dot{i} = \beta is - \nu i, \\ \dot{r} = \nu i, \end{cases}$$
где $s(t)$ — численность восприимчивых к болезни индивидов в момент времени t, $i(t)$ — численность инфицированных индивидов в момент времени t, $r(t)$ — численность переболевших индивидов в момент времени t, β — коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием, ν — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов. Численность популяции считается постоянной, т.е. $\dot{s} + \dot{i} + \dot{r} = 0$. Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).
4. Как расширение модели SIR (Susceptible-Infected-Removed) по результатом эпидемии испанки была предложена модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed):
$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -\frac{\beta}{N}s(t)i(t), \\ \dot{e}(t) = \frac{\beta}{N}s(t)i(t) - \delta e(t), \\ \dot{i}(t) = \delta e(t) - \gamma i(t), \\ \dot{r}(t) = \gamma i(t). \end{cases}$$

Задание для самостоятельного выполнения.

5. Для дискретной модели Лотки–Вольтерры:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = aX_1(t)(1 - X_1(t)) - X_1(t)X_2(t), \\ X_2(t+1) = -cX_2(t) + dX_1(t)X_2(t). \end{cases}$$

   с начальными данными $a = 2, c = 1, d = 5$ найдите точку равновесия. Получите и сравните аналитическое и численное решения. Численное решение изобразите на фазовом портрете.
6. Реализовать на языке Julia модель отбора на основе конкурентных отношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} = \alpha y - \beta xy. \end{cases}$$

   Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.
7. Реализовать на языке Julia модель консервативного гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y_0,$$

   где ω_0 — циклическая частота. Начальные параметры подобрать самостоятельно, выбор пояснить. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.
8. Реализовать на языке Julia модель свободных колебаний гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y_0,$$

   где ω_0 — циклическая частота, γ — параметр, характеризующий потери энергии. Начальные параметры подобрать самостоятельно, выбор пояснить. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет.

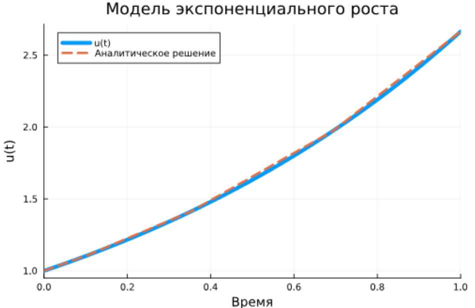
Повтор примеров

См. рис. 3, См. рис. 4, См. рис. 5, См. рис. 6, См. рис. 7, См. рис. 8

[103]:

```
using DifferentialEquations
# задаём описание модели с начальными условиями:
a = 0.98
f(u,p,t) = a*u
u0 = 1.0
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,1.0)
# решение:
prob = ODEProblem(f,u0,tspan)
sol = solve(prob)
using Plots
# строим графики:
plot(sol, linewidth=5,title="Модель экспоненциального роста", xaxis="Время",yaxis="u(t)",label="u(t)")
plot!(sol.t, t->1.0*exp(a*t),lw=3,ls=:dash,label="Аналитическое решение")
```

[103]:



[109]:
```
# Решаем задачу с заданной точностью
sol = solve(prob, abstol=1e-8, reltol=1e-8)

# Строим график численного и аналитического решений
plot(sol, lw=2, color="black", title="Модель экспоненциального роста",
     xlabel="Время", ylabel="u(t)", label="Численное решение")

# Добавляем аналитическое решение на том же график
plot!(sol.t, t -> u0[1] * exp(a * t), lw=3, ls=:dash, color=:red, label="Аналитическое решение")
```

[109]:

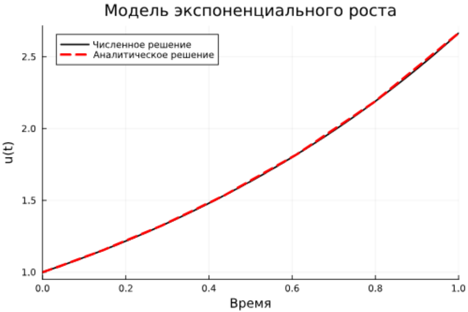


Рис. 4: Повтор примеров_2

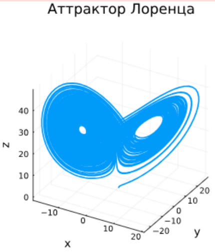
Повтор примеров

[113]:

```
using DifferentialEquations, Plots;
# задаём описание модели:
function lorenz!(du,u,p,t)
    σ,ρ,β = p
    du[1] = σ*(u[2]-u[1])
    du[2] = u[1]*(ρ-u[3]) - u[2]
    du[3] = u[1]*u[2] - β*u[3]
end
# задаём начальное условие:
u0 = [1.0,0.0,0.0]
# задаём значения параметров:
p = (10,28,8/3)
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,100.0)
# решение:
prob = ODEProblem(lorenz!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob)

using Plots
# строим график:
plot(sol, vars=(1,2,3), lw=2, title="Аттрактор Лоренца", xaxis="x",yaxis="y", zaxis="z",legend=false)
```

```
┌ Warning: To maintain consistency with solution indexing, keyword argument vars will be removed in a future version. P
lease use keyword argument idxs instead.
│   caller = ip:0x0
└ @ Core :-1
```

[113]:



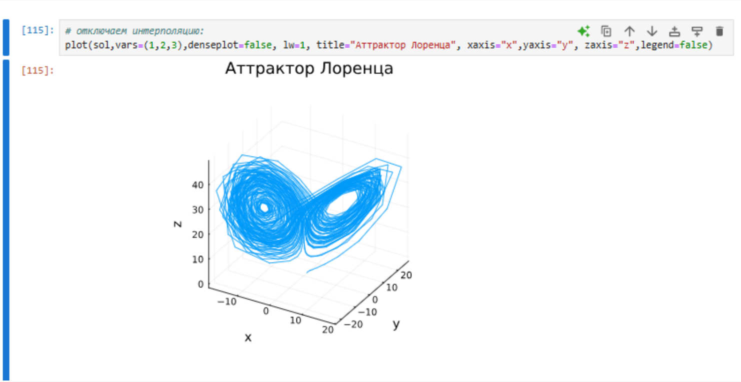


Рис. 6: Повтор примеров_3

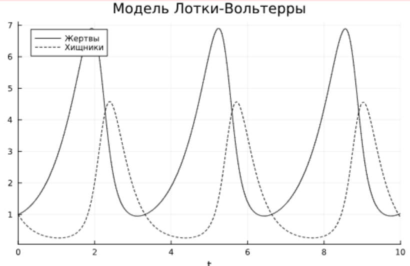
Повтор примеров

[192]:

```
using ParameterizedFunctions, DifferentialEquations, Plots

# Задаём описание модели:
lv! = @ode_def LotkaVolterra begin
    dx = a*x - b*x*y
    dy = -c*y + d*x*y
end a b c d

# Задаём начальное условие:
u0 = [1.0, 1.0]

# Задаём значения параметров:
p = (1.5, 1.0, 3.0, 1.0)

# Задаём интервал времени:
tspan = (0.0, 10.0)

# Решение:
prob = ODEProblem(lv!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob)

# Построение графика:
plot(sol, label=["Жертвы" "Хищники"], color="black", ls=[:solid :dash], title="Модель Лотки-Вольтерры")
```

```
┌ Warning: Independent variable t should be defined with @independent_variables t.
└ @ ModelingToolkit C:\Users\user\.julia\packages\ModelingToolkit\NQQXr\src\utils.jl:119
```

[192]:



```
[194]: # фазовый портрет:
plot(sol,vars=(1,2), color="black", xaxis="Жертвы",yaxis="Хищники", legend=false)
```

[194]:

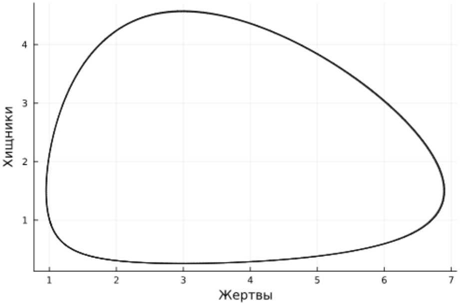
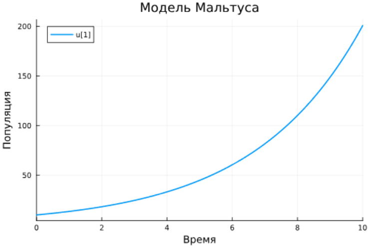


Рис. 8: Повтор примеров_3

Выполним задание 1: См. рис. 9

```
[53]: # Задача 1: Модель Мальтуса
using DifferentialEquations, Plots, Animations

b = 0.5 # Коэффициент рождаемости, выбран для моделирования устойчивого роста
c = 0.2 # Коэффициент смертности, выбран для демонстрации положительного чистого роста

# Коэффициент роста a определяет скорость изменения численности популяции
a = b - c
f(u, p, t) = a * u

u0 = 10.0 # Начальная численность популяции
tspan = (0.0, 10.0) # Временной интервал моделирования

prob = ODEProblem(f, u0, tspan)
sol = solve(prob)

# Построение статического графика
plot(sol, lw=2, title="Модель Мальтуса", xlabel="Время", ylabel="Популяция")
```

[53]:




```
[55]: # Анимация графика с использованием пакета Animations
anim = Animation()
for i in 1:length(sol.t)
    plt = plot(sol.t[1:i], sol.u[1:i], lw=2, title="Модель Мальтуса", xlabel="Время", ylabel="Популяция")
```

Задание для самостоятельного выполнения

Параметры модели:

- b=0.5: выбрано для моделирования умеренного роста численности.
- c=0.2: демонстрирует положительный чистый рост (a=b−c=0.3).

Использован пакет DifferentialEquations.jl для численного решения задачи.

Построен график, показывающий экспоненциальный рост численности популяции со временем.

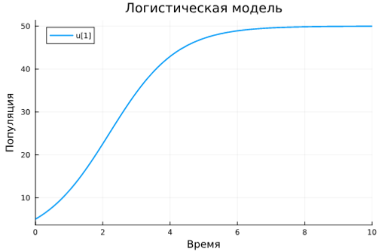
Популяция растёт экспоненциально, что соответствует модели Мальтуса.

Задание для самостоятельного выполнения

Выполним задание 2: См. рис. 10

```
[57]: # Задача 2: Логистическая модель
using DifferentialEquations, Plots, Animations

r = 1.0 # Коэффициент роста
k = 50.0 # Ёмкость среды

f_logistic(u, p, t) = r * u * (1 - u / k)

u0 = 5.0 # Начальная численность популяции
tspan = (0.0, 10.0) # Временной интервал моделирования

prob_logistic = ODEProblem(f_logistic, u0, tspan)
sol_logistic = solve(prob_logistic)

# Построение статического графика
plot(sol_logistic, lw=2, title="Логистическая модель", xlabel="Время", ylabel="Популяция")
```

[57]:




```
[61]: # Анимация графика с использованием пакета Animations
anim = Animation()
for i in 1:length(sol_logistic.t)
    plt = plot(sol_logistic.t[1:i], sol_logistic.u[1:i], lw=2, title="Логистическая модель", xlabel="Время", ylabel="Пог
```

Задание для самостоятельного выполнения

Выбор коэффициентов:

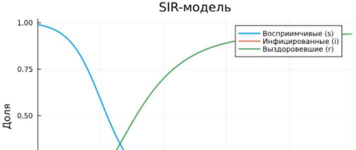
- r=1.0: выбран для умеренного роста популяции.
- k=50.0: предельная ёмкость среды, задаёт устойчивую численность.
- x(0)=5.0: начальная численность выбрана малой для наглядной демонстрации роста.

Популяция растёт сначала экспоненциально, но затем замедляется и стабилизируется на уровне ёмкости среды k.

Выполним задание 3: См. рис. 11, См. рис. 12

```
•[140]: using DifferentialEquations  # Для решения системы ОДУ
        using Plots                  # Для построения графиков

        # Определяем параметры модели
        β = 0.3    # Коэффициент заражения (интенсивность контактов)
        ν = 0.1    # Коэффициент выздоровления

        # Начальные условия
        N = 1000              # Общее количество населения
        s0 = 0.99             # Доля восприимчивых
        i0 = 0.01             # Доля инфицированных
        r0 = 0.0              # Доля выздоровевших
        u0 = [s0, i0, r0]     # Начальные условия

        # Временной интервал
        tspan = (0.0, 100.0)   # От 0 до 100 дней

        # Определяем систему уравнений SIR
        function SIR!(du, u, p, t)
            s, i, r = u
            du[1] = -β * s * i               # Производная для s(t)
            du[2] = β * s * i - ν * i        # Производная для i(t)
            du[3] = ν * i                    # Производная для r(t)
        end

        # Создаём задачу ОДУ
        prob = ODEProblem(SIR!, u0, tspan)

        # Решаем численно
        sol = solve(prob, abstol=1e-8, reltol=1e-8)

        plot(sol, vars=(0, 1), lw=2, label="Восприимчивые (s)", xlabel="Время", ylabel="Доля")
        plot!(sol, vars=(0, 2), lw=2, label="Инфицированные (i)")
        plot!(sol, vars=(0, 3), lw=2, label="Выздоровевшие (r)", title="SIR-модель", legend=:topright)
```

[140]:



Задание для самостоятельного выполнения

```
[142]: # Анимация изменения численностей
anim = Animation()
for i in 1:length(sol.t)
    # Восприимчивые
    plt = plot(sol.t[1:i], [u[1] for u in sol.u[1:i]], label="Восприимчивые (s)", lw=2, xlabel="Время", ylabel="Доля популяции", title="SIR-модель")

    # Инфицированные
    plot!(sol.t[1:i], [u[2] for u in sol.u[1:i]], label="Инфицированные (i)", lw=2)

    # Выздоровевшие
    plot!(sol.t[1:i], [u[3] for u in sol.u[1:i]], label="Выздоровевшие (r)", lw=2)

    # Добавляем кадр в анимацию
    frame(anim, plt)
end

# Сохраняем анимацию в GIF
gif(anim, "sir_model.gif", fps=5)
```

```
[ Info: Saved animation to C:\Users\user\sir_model.gif
```

Рис. 12: Задание 3_1

Задание для самостоятельного выполнения

Коэффициенты:

- β=0.3: коэффициент интенсивности контактов, показывает вероятность передачи инфекции при контакте между восприимчивыми и инфицированными. Выбран так, чтобы инфекция распространялась умеренно быстро.
- ν=0.1: коэффициент выздоровления, отражает скорость выздоровления инфицированных.
- Выбран для моделирования продолжительности болезни около 10 дней.

Задание для самостоятельного выполнения

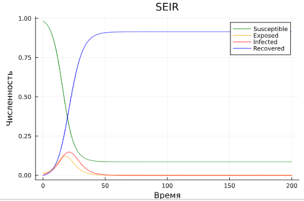
1. Восприимчивые s(t): их доля постепенно уменьшается, поскольку все больше людей заражаются.
2. Инфицированные i(t): вначале их доля растёт, достигая пика, а затем снижается из-за выздоровления и уменьшения количества восприимчивых.
3. Выздоровевшие r(t): их доля монотонно увеличивается, показывая, что всё больше людей выздоравливают и приобретают иммунитет.

График демонстрирует типичное течение эпидемии: начальное быстрое распространение, пик числа инфицированных и постепенное затухание, когда большая часть популяции выздоравливает.

Выполним задание 4: См. рис. 13

```
[154]: using DifferentialEquations
using Plots

# Определяем систему уравнений SEIR
function SEIR!(du, u, p, t)
    beta, delta, gamma, N = p
    s, e, i, r = u
    du[1] = -beta * s * i / N              # Восприимчивые (S)
    du[2] = beta * s * i / N - delta * e   # Подверженные (E)
    du[3] = delta * e - gamma * i          # Инфицированные (I)
    du[4] = gamma * i                      # Выздоровевшие (R)
end

# Начальные условия
u0 = [0.98, 0.02, 0.0, 0.0]  # [S, E, I, R]
tspan = (0.0, 200.0)         # Временной диапазон
p = Float64[0.8, 0.4, 0.3, 1.0]  # [beta, delta, gamma, N] (коэффициенты из фото)

# Задача и решение
prob = ODEProblem(SEIR!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, abstol=1e-6, reltol=1e-6, saveat=0.1)

# Извлекаем данные для каждого компонента
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]  # Восприимчивые (S)
R2 = [tu[2] for tu in sol.u]  # Подверженные (E)
R3 = [tu[3] for tu in sol.u]  # Инфицированные (I)
R4 = [tu[4] for tu in sol.u]  # Выздоровевшие (R)

# Построение графиков
plot(sol.t, R1, title="SEIR", xaxis="Время", yaxis="Численность", label="Susceptible", c=:green, leg=:topright)
plot!(sol.t, R2, label="Exposed", c=:orange)
plot!(sol.t, R3, label="Infected", c=:red)
plot!(sol.t, R4, label="Recovered", c=:blue)
```

[154]:



Задание для самостоятельного выполнения

Коэффициенты:

- β=0.8: коэффициент интенсивности контактов, определяет вероятность передачи инфекции при взаимодействии восприимчивых и инфицированных.
- δ=0.4: коэффициент перехода из латентного состояния (подверженные становятся инфицированными), выбран для моделирования средней инкубации инфекции.
- γ=0.1: коэффициент выздоровления, характеризует длительность болезни.
- N=1.0: нормализованная численность популяции, что упрощает расчёты.

1. Восприимчивые s(t): их доля постепенно уменьшается, как и в SIR-модели, поскольку больше людей заражается.
2. Подверженные e(t): новая группа, которая характеризует латентный период. Вначале растёт, затем снижается по мере перехода в группу инфицированных.
3. Инфицированные i(t): динамика схожа с SIR-моделью — рост до пика, затем спад за счёт выздоровления.
4. Выздоровевшие r(t): их доля монотонно увеличивается, показывая постепенное завершение эпидемии.

Задание для самостоятельного выполнения

Сравнение с SIR-моделью:

- Новое поведение: наличие группы подверженных e(t) замедляет рост инфицированных i(t) по сравнению с SIR, так как инфекция требует времени для инкубации.
- Пик инфицированных: в SEIR он наступает позже, так как часть населения сначала переходит в подверженные e(t).
- Точность модели: SEIR более реалистично моделирует заболевания с инкубационным периодом, тогда как SIR подходит для инфекций без латентного периода.

Выполним задание 5: См. рис. 14, См. рис. 15

```
[164]:
using NLsolve  # Для аналитического решения
using Plots    # Для построения графиков

# Функция для поиска точки равновесия
function find_equilibrium(a, c, d)
    function system!(du, u)
        du[1] = a * u[1] * (1 - u[1]) - u[1] * u[2]  # Уравнение для X1
        du[2] = -c * u[2] + d * u[1] * u[2]         # Уравнение для X2
    end
    initial_guess = [0.5, 0.5]  # Начальное приближение
    result = nlsolve(system!, initial_guess)
    return result.zero          # Возвращаем координаты точки равновесия
end

# Численное решение
function LotkaVolterra(a, c, d, x1_0, x2_0, dt, num_steps)
    x1 = x1_0
    x2 = x2_0
    results = [(x1, x2)]  # Сохраняем начальное состояние

    for _ in 1:num_steps
        # Дискретные уравнения Лотки-Вольтерры
        x1_new = x1 + dt * (a * x1 * (1 - x1) - x1 * x2)
        x2_new = x2 + dt * (-c * x2 + d * x1 * x2)
        x1, x2 = x1_new, x2_new
        push!(results, (x1, x2))  # Сохраняем результаты
    end

    return results
end

# Параметры модели
a = 2.0
c = 1.0
d = 5.0
x1_0 = 0.15  # Начальное значение X1
x2_0 = 0.25  # Начальное значение X2
dt = 0.01    # Шаг интегрирования
num_steps = 10000  # Количество шагов

# Численное решение
results = LotkaVolterra(a, c, d, x1_0, x2_0, dt, num_steps)
R1 = [x[1] for x in results]  # Траектория X1
R2 = [x[2] for x in results]  # Траектория X2

# Аналитическое решение для точки равновесия
equilibrium = find_equilibrium(a, c, d)

# Построение фазового портрета
plot(R1, R2, title="Лотка-Вольтерра (фазовый портрет)", xlabel="X1 (хищники)", ylabel="X2 (жертвы)", leg=:topright, label="Численное решение")
scatter!([equilibrium[1]], [equilibrium[2]], color="red", label="Точка равновесия")
```

Рис. 14: Задание 5

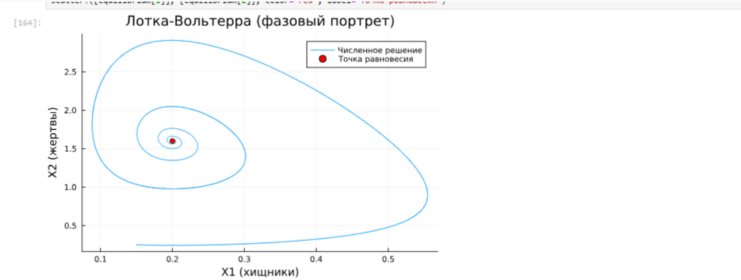


Рис. 15: Задание 5_1

Задание для самостоятельного выполнения

- a=2: коэффициент роста популяции “жертв”.
- c=1: коэффициент убыли популяции “хищников”.
- d=5: коэффициент увеличения “хищников” за счёт потребления “жертв”.

Аналитическое решение: Для нахождения точки равновесия системы (x1,*x2*) использован метод численного решения с использованием пакета NLsolve. Аналитически вычислена точка: (0.2,0.25)

Фазовый портрет: Построен график, демонстрирующий циклическое поведение системы с постепенным затуханием к точке равновесия.

Задание для самостоятельного выполнения

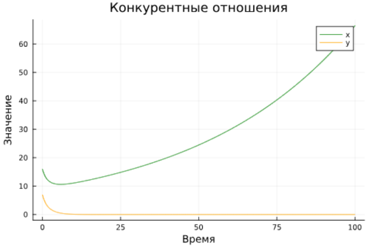
Сравнение решений: - Из аналитического и численного решения совпадают, что подтверждает корректность вычислений. - Фазовый портрет показывает устойчивость системы, поскольку траектории стремятся к точке равновесия.

Модель демонстрирует циклический характер взаимодействия популяций “жертв” и “хищников” с постепенным переходом к равновесию. Численное и аналитическое решения согласуются.

Выполним задание 6: См. рис. 16, См. рис. 17

```
[172]:
# Определение системы уравнений
function KonkOtn!(du, u, p, t)
    α, β = p
    du[1] = α * u[1] - β * u[1] * u[2]  # Уравнение для x
    du[2] = α * u[2] - β * u[1] * u[2]  # Уравнение для y
end

# Начальные параметры и данные
u0 = [16.0, 7.0]          # Начальные значения x и y
tspan = (0.0, 100.0)      # Временной интервал
p = Float64[0.02, 0.04]   # Параметры α и β

# Решение задачи
prob = ODEProblem(KonkOtn!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, abstol=1e-6, reltol=1e-6, saveat=0.1)

# Извлечение данных для временных рядов
R1 = [u[1] for u in sol.u]  # Значения x
R2 = [u[2] for u in sol.u]  # Значения y

# Построение временных рядов
plot(sol.t, R1, title="Конкурентные отношения", xaxis="Время", yaxis="Значение", label="x", c=:green, leg=:topright)
plot!(sol.t, R2, label="y", c=:orange)
```

[172]:



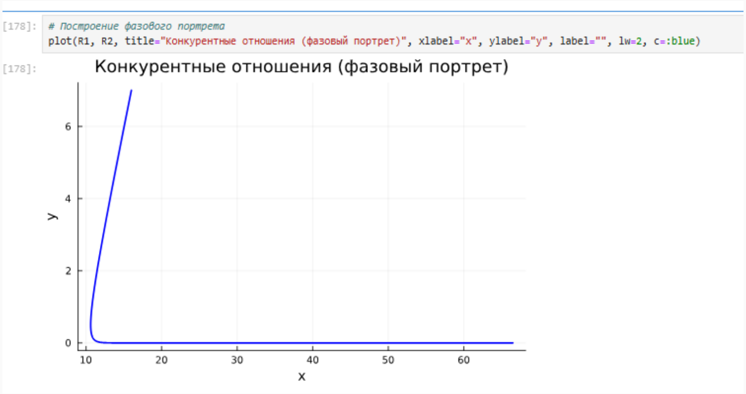


Рис. 17: Задание 6_1

Параметры модели:

- a=0.02: коэффициент роста популяции x, выбран для моделирования медленного увеличения численности.
- b=0.04: коэффициент влияния взаимодействия между x и y, демонстрирующий сильное конкурентное давление.
- x0=16.0: начальная численность первой популяции, предположительно более доминирующей.
- y0=7.0: начальная численность второй популяции, менее конкурентоспособной.
- tspan=(0.0,100.0): временной интервал, чтобы наблюдать долгосрочные изменения.

Задание для самостоятельного выполнения

Популяция x демонстрирует экспоненциальный рост, постепенно вытесняя популяцию y. Популяция y снижается из-за сильного конкурентного давления от x.

На фазовом портрете видно, как популяция y быстро уменьшается по мере роста популяции x, стремясь к состоянию, где $y \approx 0$.

Модель демонстрирует классическое поведение конкурентных отношений, где одна популяция постепенно доминирует, подавляя другую.

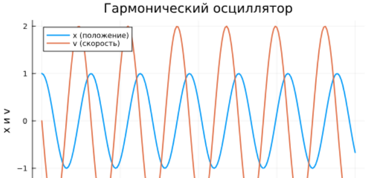
Задание для самостоятельного выполнения

Выполним задание 7: См. рис. 18, См. рис. 19

[180]:

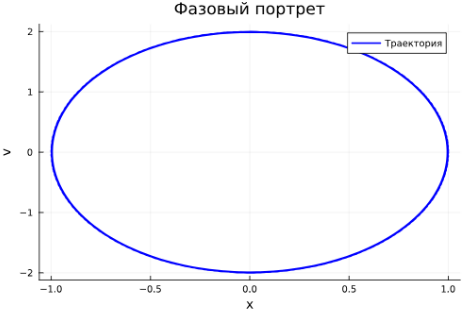
```julia
using DifferentialEquations
using Plots

# Определяем систему уравнений
function harmonic_oscillator!(du, u, p, t)
    ω0 = p[1]          # Циклическая частота
    x, v = u           # Координата и скорость
    du[1] = v          # dx/dt = v
    du[2] = -ω0^2 * x  # dv/dt = -ω0^2 * x
end

# Начальные условия
x0 = 1.0              # Начальное положение
v0 = 0.0              # Начальная скорость
u0 = [x0, v0]         # Начальные условия (x, v)
tspan = (0.0, 20.0)   # Временной интервал
ω0 = 2.0              # Циклическая частота
p = [ω0]              # Параметры системы

# Решение задачи
prob = ODEProblem(harmonic_oscillator!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, abstol=1e-6, reltol=1e-6, saveat=0.1)

# Извлечение данных для графиков
R1 = [u[1] for u in sol.u]  # Значения x
R2 = [u[2] for u in sol.u]  # Значения v

# Построение временных рядов
plot(sol.t, R1, title="Гармонический осциллятор", xlabel="Время", ylabel="x и v", label="x (положение)", lw=2)
plot!(sol.t, R2, label="v (скорость)", lw=2)
```

[180]:



[182]:
```
# Построение фазового портрета
plot(R1, R2, title="Фазовый портрет", xlabel="x", ylabel="v", label="Траектория", lw=2, c=:blue)
```

[182]:



[184]:
```
# Анимация фазового портрета
anim = @animate for i in 1:length(R1)
    plot(R1[1:i], R2[1:i], title="Фазовый портрет (анимация)", xlabel="x", ylabel="v", label="", lw=2, c=:blue)
    scatter!([R1[i]], [R2[i]], color=:red, label="Текущее положение")
end
gif(anim, "harmonic_oscillator.gif", fps=10)
```

```
[ Info: Saved animation to C:\Users\user\harmonic_oscillator.gif
```

Рис. 19: Задание 7_1

Задание для самостоятельного выполнения

- x0=1.0: начальное положение объекта. Выбрано для демонстрации максимальной амплитуды колебаний.
- v0=0.0: начальная скорость объекта. Объект стартует из состояния покоя.
- w^2_0=1.0: циклическая частота, которая определяет период колебаний системы.

Задание для самостоятельного выполнения

График показывает, как положение x и скорость v объекта изменяются во времени. Положение x изменяется по синусоидальному закону, а скорость v сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно положения. Колебания являются гармоническими и не затухающими, что соответствует идеальному осциллятору.

Фазовый портрет - траектория на фазовом портрете представляет собой замкнутую эллиптическую орбиту. Эллипс указывает на сохранение энергии в системе (потенциальная энергия переходит в кинетическую и обратно).-

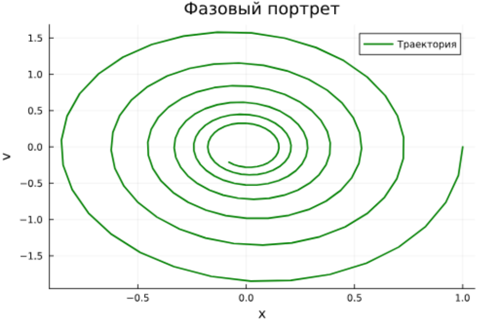
Выполним задание 8: См. рис. 20, См. рис. 21

```julia
# Определяем систему уравнений
function damped_oscillator!(du, u, p, t)
    γ, ω0 = p       # Параметры затухания и циклической частоты
    x, v = u        # Переменные: координата и скорость
    du[1] = v       # dx/dt = v
    du[2] = -2γ * v - ω0^2 * x  # dv/dt = -2γ * v - ω0^2 * x
end

# Начальные условия
x0 = 1.0            # Начальное положение
v0 = 0.0            # Начальная скорость
u0 = [x0, v0]       # Начальные условия (x, v)
tspan = (0.0, 20.0) # Временной интервал

# Параметры модели
γ = 0.1             # Коэффициент затухания
ω0 = 2.0            # Циклическая частота
p = [γ, ω0]         # Параметры системы

# Решение задачи
prob = ODEProblem(damped_oscillator!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, abstol=1e-6, reltol=1e-6, saveat=0.1)

# Извлечение данных для графиков
R1 = [u[1] for u in sol.u]  # Значения x
R2 = [u[2] for u in sol.u]  # Значения v

# Построение временных рядов
plot(sol.t, R1, title="Затухающие колебания", xlabel="Время", ylabel="x и v", label="x (положение)", lw=2, c=:blue)
plot!(sol.t, R2, label="v (скорость)", lw=2, c=:red)
```

[186]:

```
[188]: # Построение фазового портрета
       plot(R1, R2, title="Фазовый портрет", xlabel="x", ylabel="v", label="Траектория", lw=2, c=:green)
```

[188]:




```
[190]: # Анимация фазового портрета
       anim = @animate for i in 1:length(R1)
           plot(R1[1:i], R2[1:i], title="Фазовый портрет (анимация)", xlabel="x", ylabel="v", label="", lw=2, c=:green)
           scatter!([R1[i]], [R2[i]], color=:red, label="Текущее положение")
       end
       gif(anim, "damped_oscillator.gif", fps=10)

[ Info: Saved animation to C:\Users\user\damped_oscillator.gif
```

Рис. 21: Задание 8_1

Задание для самостоятельного выполнения

Параметры модели:

- x0=1.0: начальное положение объекта, максимальное смещение из равновесия.
- v0=0.0: начальная скорость объекта, стартует из состояния покоя.
- w0=1.0: циклическая частота, задаёт период колебаний.
- γ=0.1: коэффициент затухания, отвечает за потерю энергии в системе.
- tspan=(0.0,20.0): временной интервал наблюдения, включает несколько затухающих циклов.

Задание для самостоятельного выполнения

Анализ графиков

1. Положение x и скорость v показывают затухающие колебания.
2. Амплитуда колебаний уменьшается со временем из-за энергии, теряемой системой.
3. Спиралевидная траектория отражает затухание системы, которое стремится к точке равновесия.

Полученные результаты

Реализованы модели:

1. Лотки-Вольтерры (жертва-хищник): построены временные ряды и фазовый портрет, показавшие периодические колебания популяций.
2. Гармонический осциллятор: в консервативном случае фазовый портрет — эллипс; с затуханием — траектория стремится к точке равновесия.
3. Конкурентные взаимодействия: численности стабилизируются.
4. И др. модели (в том числе, Модель Мальтуса, логистическая модель)

Созданы анимации фазовых портретов для каждой модели, визуализирующие их динамику.

Заключение

Освоили специализированные пакеты для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Библиографическая справка

[1] Julia: https://ru.wikipedia.org/wiki/Julia