

Лабораторная работа №4. Модель гармонических колебаний

Выполнила: Лебедева Ольга Андреевна

Преподаватель Кулябов Дмитрий Сергеевич д.ф.-м.н., профессор кафедры теории вероятности и кибербезопасности

2024

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Построить модели гармонических колебаний, используя Julia и OpenModelica.

Фазовый портрет - это графическое представление динамики системы в фазовом пространстве, где каждое состояние системы представлено точкой. На графике обычно изображаются значения различных переменных системы в зависимости друг от друга. Фазовый портрет позволяет визуализировать поведение системы со временем и выявить основные характеристики ее динамики, такие как устойчивость, периодичность, предельные циклы и т. д. Фазовые портреты широко используются в различных науках, включая физику, математику, биологию и инженерные науки, для анализа и моделирования динамических систем [1].

Дифференциальные уравнения (ДУ) с правой частью равной нулю, или однородные дифференциальные уравнения, представляют собой уравнения, в которых отсутствует внешнее воздействие или источник изменений. Они описывают системы, в которых изменения зависят только от текущего состояния системы и ее параметров. Решение таких уравнений позволяет определить стационарные состояния системы и проанализировать ее устойчивость к возмущениям. Однородные дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях науки и инженерии для моделирования и анализа различных

Дифференциальные уравнения с правой частью, зависящей от переменных или параметров системы, описывают динамику системы с учетом внешних воздействий или источников изменений. В таких уравнениях правая часть представляет собой функцию времени, переменных системы или других параметров, которая описывает воздействие на систему в каждый момент времени. Решение таких уравнений позволяет моделировать поведение системы в различных условиях и прогнозировать ее развитие во времени. Дифференциальные уравнения с переменной правой частью находят применение в широком спектре областей, включая физику, биологию, экономику, механику и другие науки, где они используются для анализа и моделирования различных процессов и явлений [2].

Вариант 17

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы:

$$x'' + 12x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы:

$$x'' + 11x' + 2x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы:

$$x'' + 11x' + 2x = 2\cos(2t)$$

На интервале $t [0; 51]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0.5$, $y_0 = 1$.

Напишем код на Julia для случая 1: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы.

```
using DifferentialEquations, Plots
```

```
function oscillator1!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -12*u[1]
```

```
u0 = [0.5, 1.0]
tspan = (0.0, 51.0)
```

```
prob1 = ODEProblem(oscillator1!, u0, tspan)
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)
```

```
plot(sol, title = "Harmonic Oscillator without Damp",
savefig("oscillator1_solution.png"))
```

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения:
См. рис. 1, См. рис. 2

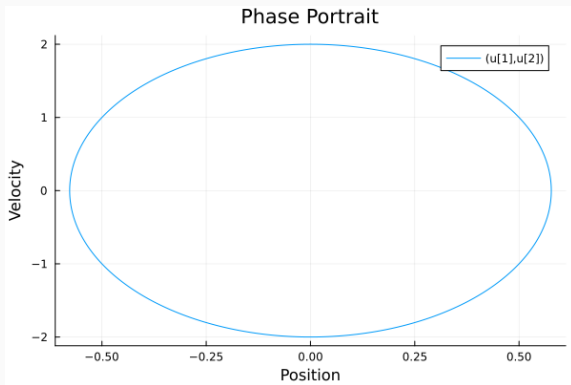


Рис. 1: Фазовый портрет. Случай 1.

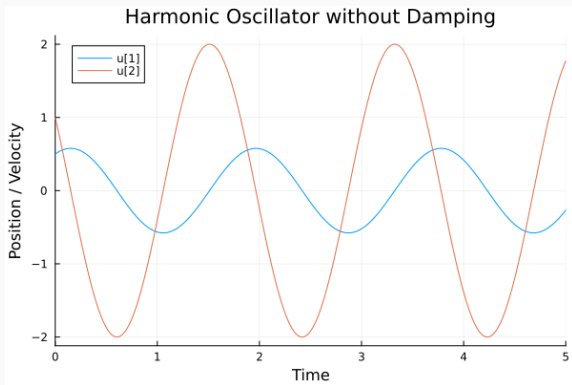


Рис. 2: Решение уравнения. Случай 1.

Напишем код на Jilja для случая 2: колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы.

```
using DifferentialEquations, Plots
```

```
function oscillator2!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -2*u[1] - 11*u[2]
end
```

```
u0 = [0.5, 1.0]
tspan = (0.0, 5.0)
```

```
prob2 = ODEProblem(oscillator2!, u0, tspan)
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)
```

```
plot(sol2, title="Damped Harmonic Oscillator without external force",
savefig("oscillator2_solution.png"))
```

```
plot(sol2, vars=(1,2), title="Phase Portrait", xlabel="u[1]",
savefig("oscillator2 phase portrait.png"))
```

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения:
См. рис. 3, См. рис. 4

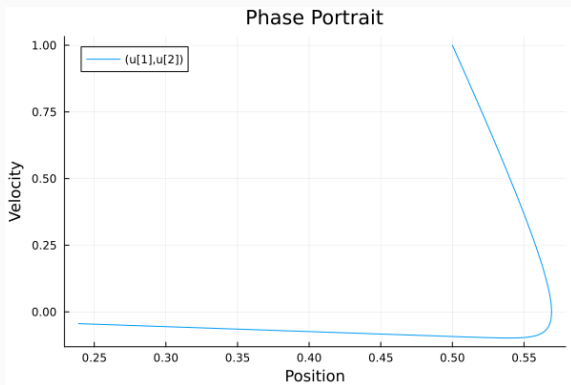


Рис. 3: Фазовый портрет. Случай 2.

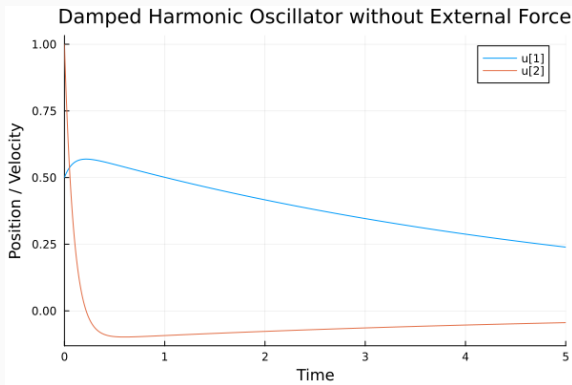


Рис. 4: Решение уравнения. Случай 2.

Напишем код на Jliia для случая 3: колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы.

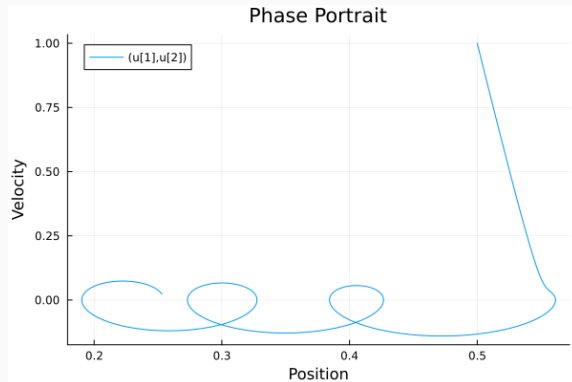
```
using DifferentialEquations, Plots

function forced_damped_oscillator!(dx, x, params, t)
    dx[1] = x[2]
    dx[2] = 2*cos(2*t) - 2*x[1] - 21*x[2]
end

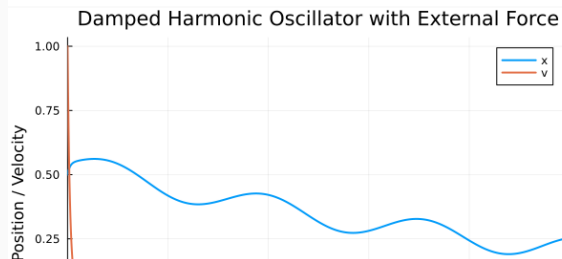
x0 = [0.5, 1.0] # Начальные условия для смещения и скорости
tspan = (0.0, 10.0) # Диапазон времени

prob = ODEProblem(forced_damped_oscillator!, x0, tspan)
sol = solve(prob)
```

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения:
См. рис. 5, См. рис. 6



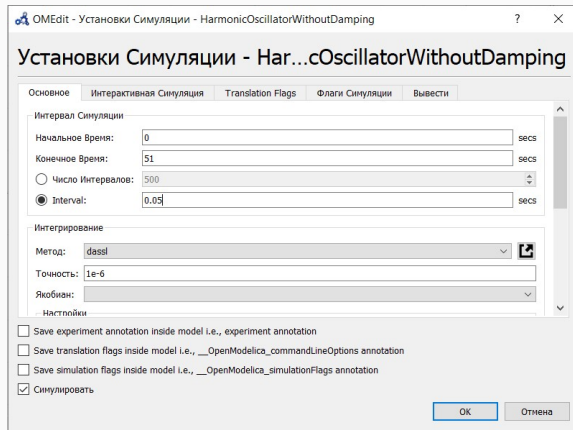
##



Напишем код на OpenModelica для случая 1: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы.

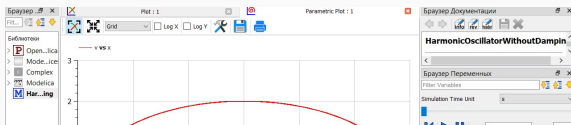
```
model HarmonicOscillatorWithoutDamping
  Real x(start = 0.5);
  Real y(start = 1.0);
equation
  der(x) = v;
  der(v) = -12*x
end HarmonicOscillatorWithoutDamping;
```

Запустим код при помощи кнопок “проверить модель” -> “установки симуляции” -> “симулировать”. Не забываем в настройках указать заданные нам ачальные условияю См. рис. 7



Нажимаем

галочки x и y для отображения графиков: См. рис. 8, См. рис. 9



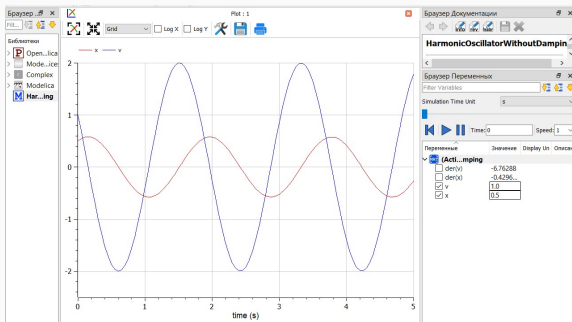
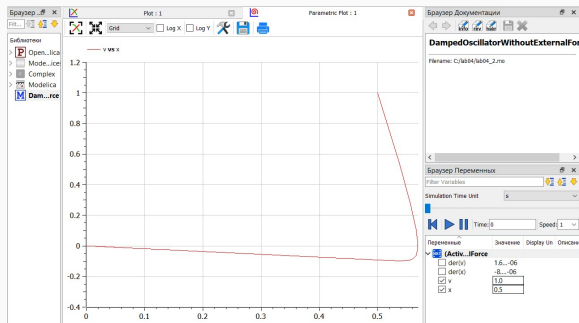


Рис. 6: Решение уравнения. Случай 1.

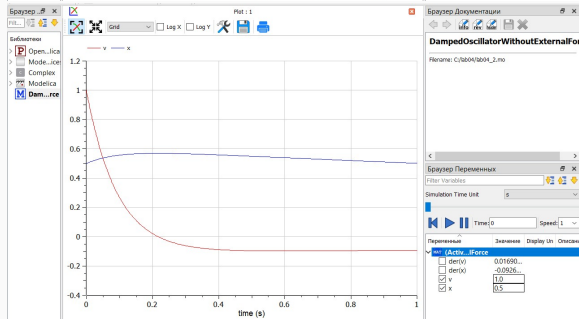
Напишем код для случая 2: колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы.

```
model DampedOscillatorWithoutExternalForce
Real x(start=0.5);
Real v(start=1.0);
initial equation
equation
der(x) = v;
der(v) = -2*x - 11*v;
end DampedOscillatorWithoutExternalForce;
```

Запустим код. Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: См. рис. 10, См. рис. 11

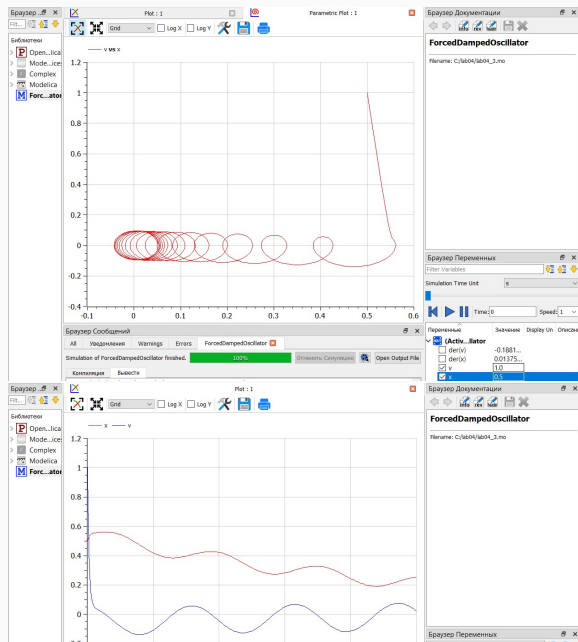


##



Напишем код на

Запустим код. Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: См. рис. 12, См. рис. 13



##

Реализовали модели для гармонических колебаний. Построили графики фазовых портретов и решения дифференциальных уравнений.

[1] Фазовое пространство:

<https://ru.m.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%I>

[2] Дифференциальные уравнения:

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%>