Отчет по лабораторной работе № 4

Модель гармонических колебаний

Лебедева Ольга Андреевна

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Построить модели гармонических колебаний, используя Julia и OpenModelica.

Теоретическое введение

Фазовый портрет - это графическое представление динамики системы в фазовом пространстве, где каждое состояние системы представлено точкой. На графике обычно изображаются значения различных переменных системы в зависимости друг от друга. Фазовый портрет позволяет визуализировать поведение системы со временем и выявить основные характеристики ее динамики, такие как устойчивость, периодичность, предельные циклы и т. д. Фазовые портреты широко используются в различных науках, включая физику, математику, биологию и инженерные науки, для анализа и моделирования динамических систем [1].

Дифференциальные уравнения (ДУ) с правой частью равной нулю, или однородные дифференциальные уравнения, представляют собой уравнения, в которых отсутствует внешнее воздействие или источник изменений. Они описывают системы, в которых изменения зависят только от текущего состояния системы и ее параметров. Решение таких уравнений позволяет определить стационарные состояния системы и проанализировать ее устойчивость к возмущениям. Однородные дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях науки и инженерии для моделирования и анализа различных процессов, таких как колебания, динамика систем управления, теплопроводность и диффузия веществ [2].

Дифференциальные уравнения с правой частью, зависящей от переменных или параметров системы, описывают динамику системы с учетом внешних воздействий или источников изменений. В таких уравнениях правая часть представляет собой функцию времени, переменных системы или других параметров, которая описывает воздействие на систему в каждый момент времени. Решение таких уравнений позволяет моделировать поведение системы в различных условиях и прогнозировать ее развитие во времени. Дифференциальные уравнения с переменной правой частью находят применение в широком спектре областей, включая физику, биологию, экономику, механику и другие науки, где они используются для анализа и моделирования различных процессов и явлений [3].

Задание

Вариант 17

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы:
$$x'' + 12x = 0$$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы:
$$x'' + 11x' + 2x = 0$$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы:
$$x'' + 11x' + 2x = 2cos(2t)$$

На интервале t [0; 51] (шаг 0.05) с начальными условиями x0 = 0.5, y0 = 1.

Выполнение лабораторной работы

Julia

Напишем код на Jilia для случая 1: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы.

using DifferentialEquations, Plots

```
function oscillator1!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -12*u[1]

u0 = [0.5, 1.0]
tspan = (0.0, 51.0)

prob1 = ODEProblem(oscillator1!, u0, tspan)
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plot(sol, title = "Harmonic Oscillator without Damping", xlabel = "Time", ylabel
savefig("oscillator1_solution.png")
```

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения: См. рис. 1, См. рис. 2

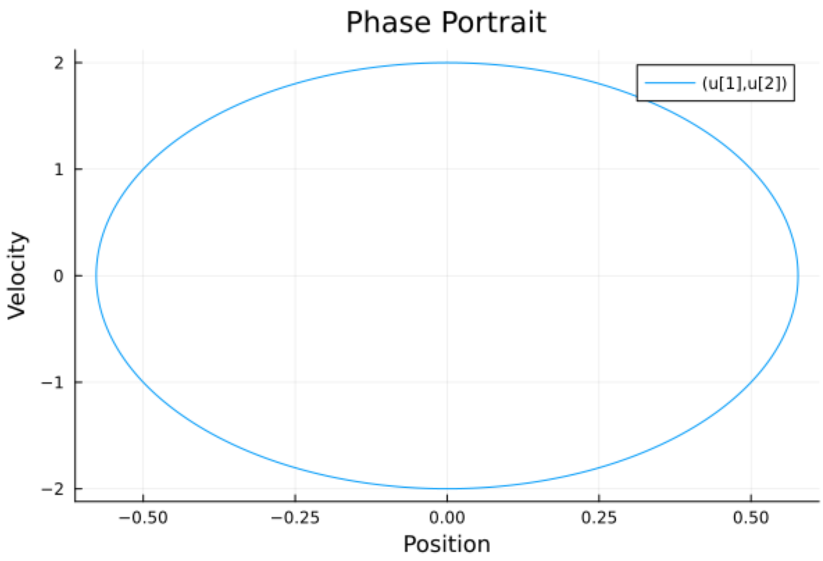

Рис. 1: Фазовый портрет. Случай 1.

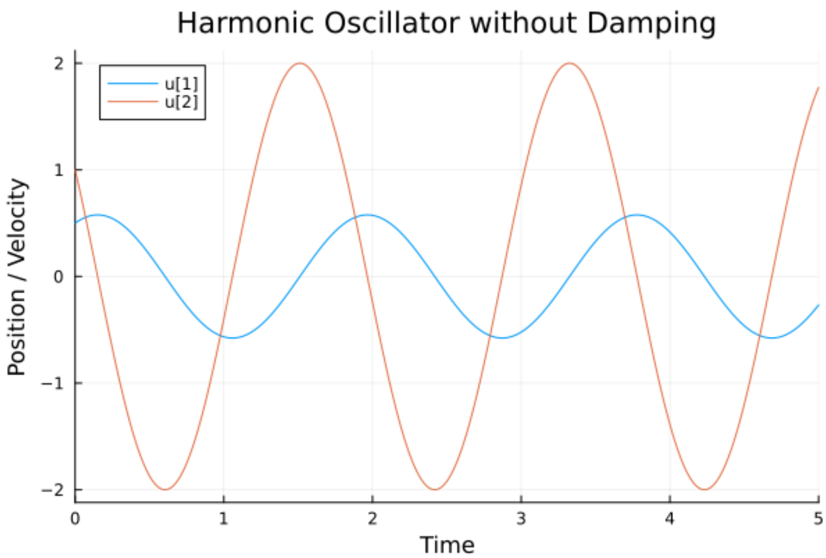

Рис. 2: Решение уравнения. Случай 1.

Напишем код на Jilia для случая 2: колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы.

```
using DifferentialEquations, Plots
```

```
function oscillator2!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -2*u[1] - 11*u[2]
end

u0 = [0.5, 1.0]
tspan = (0.0, 5.0)

prob2 = ODEProblem(oscillator2!, u0, tspan)
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plot(sol2, title="Damped Harmonic Oscillator without External Force", xlabel="Tin
savefig("oscillator2_solution.png")

plot(sol2, vars=(1,2), title="Phase Portrait", xlabel="Position", ylabel="Velocit
savefig("oscillator2_phase_portrait.png")
```

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения: См. рис. 3, См. рис. 4

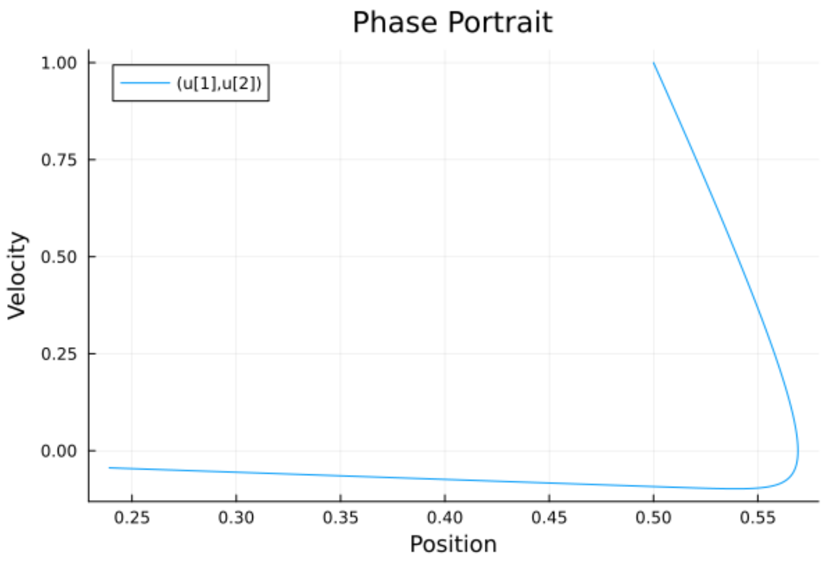

Рис. 3: Фазовый портрет. Случай 2.

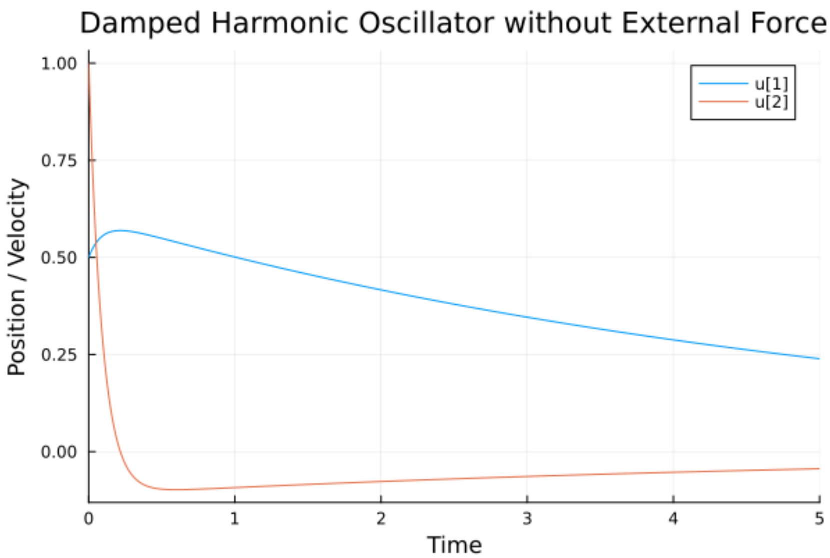

Рис. 4: Решение уравнения. Случай 2.

Напишем код на Jilia для случая 3: колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы.

```
using DifferentialEquations, Plots
```

```
function forced_damped_oscillator!(dx, x, params, t)
    dx[1] = x[2]
    dx[2] = 2*cos(2*t) - 2*x[1] - 21*x[2]
end

x0 = [0.5, 1.0]  # Начальные условия для смещения и скорости
tspan = (0.0, 10.0)  # Диапазон времени

prob = ODEProblem(forced_damped_oscillator!, x0, tspan)
sol = solve(prob)
```

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения: См. рис. 5, См. рис. 6

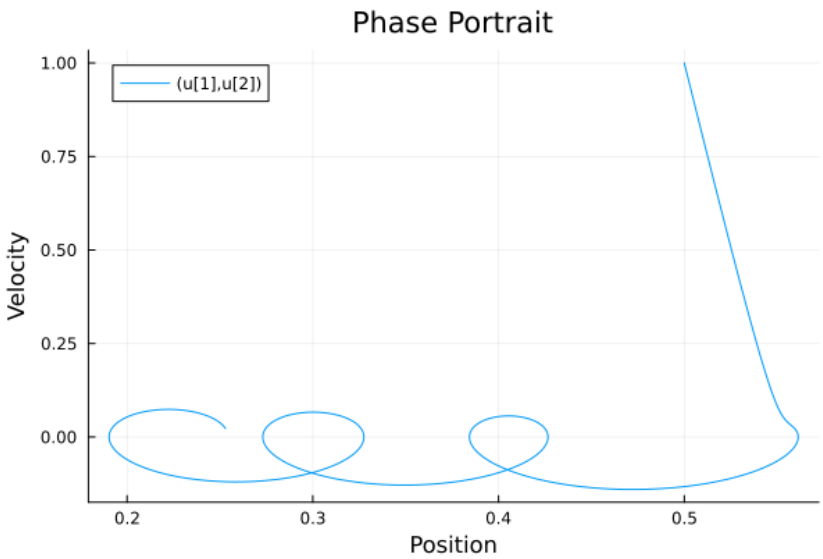

Рис. 5: Фазовый портрет. Случай 3.

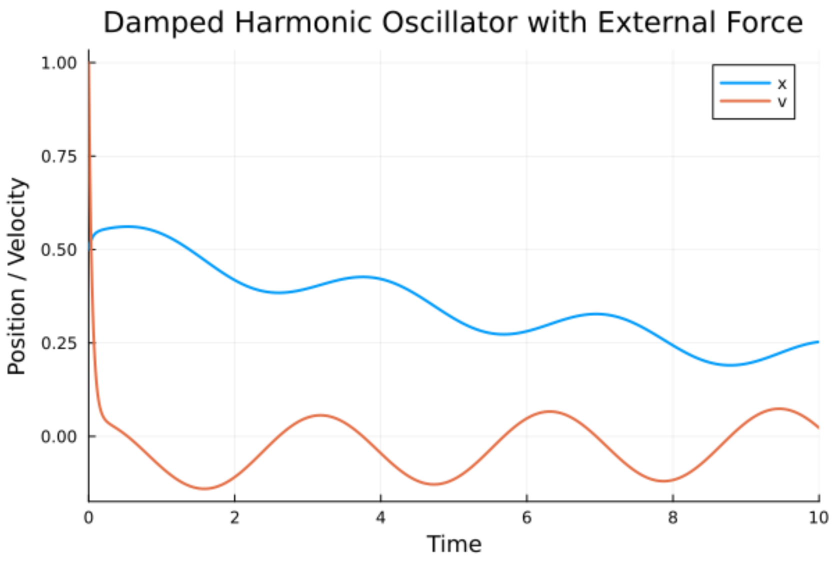

Рис. 6: Решение уравнения. Случай 3.

OpenModelica

Напишем код на OpenModelica для случая 1: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы.

```
model HarmonicOscillatorWithoutDamping
    Real x(start = 0.5);
    Real y(start = 1.0);
equation
    der(x) = v;
    der(v) = -12*x
end HarmonicOscillatorWithoutDamping;
```

Запустим код при помощи кнопок “проверить модель” -> “установки симуляции” -> “симулировать”. Не забываем в найстройках указать заданные нам ачальные условияю См. рис. 7

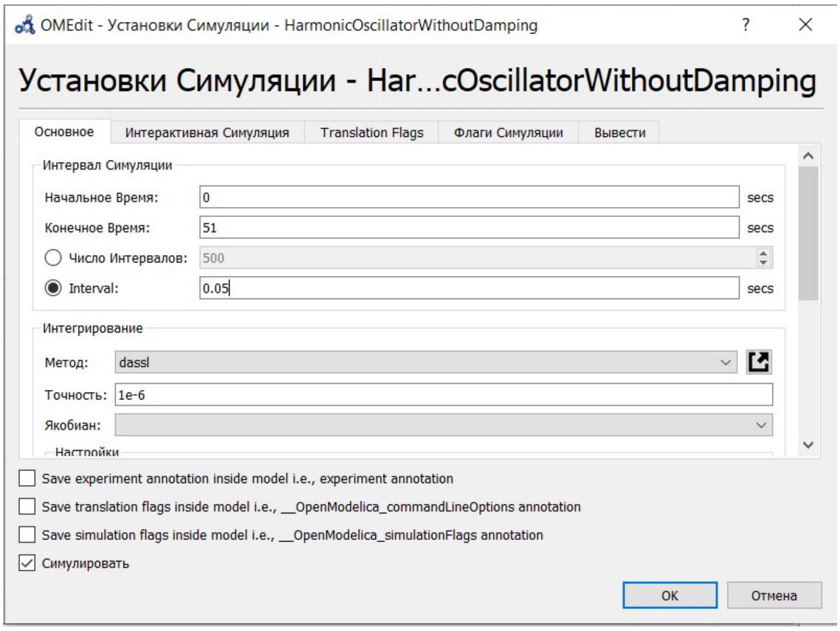

Рис. 7: Установка начальных параметров

Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: См. рис. 8, См. рис. 9

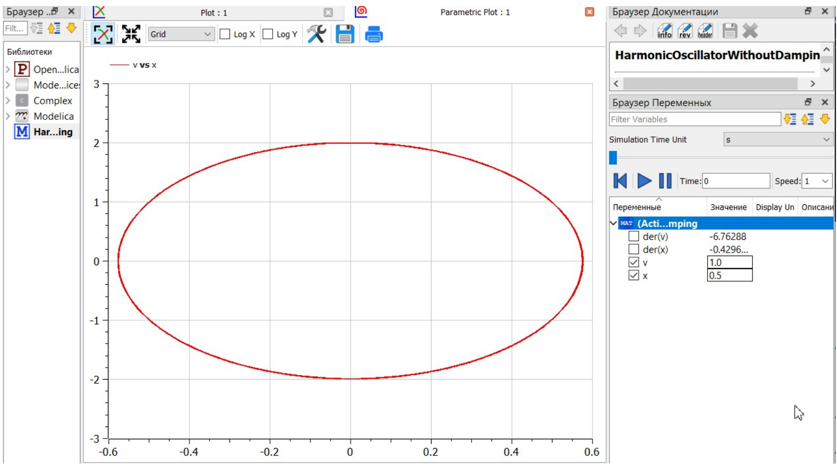

Рис. 8: Фазовый портрет. Случай 1.

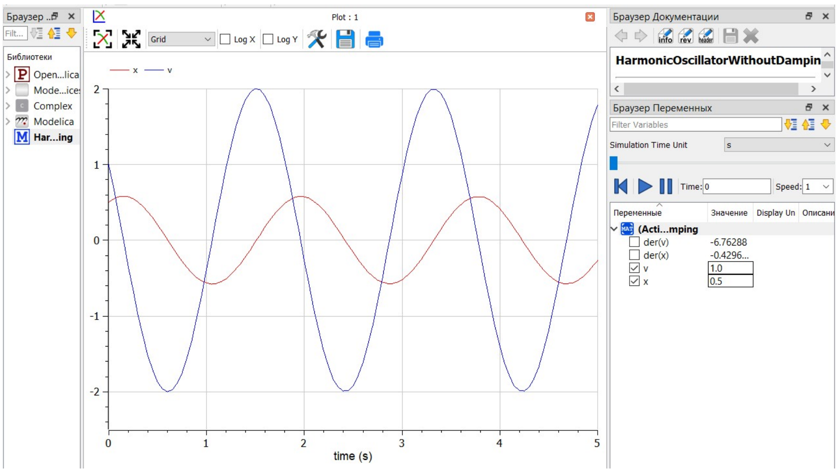

Рис. 9: Решение уравнения. Случай 1.

Напишем код для случая 2: колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. .

```
model DampedOscillatorWithoutExternalForce
Real x(start=0.5);
Real v(start=1.0);
initial equation
equation
der(x) = v;
der(v) = -2*x - 11*v;
end DampedOscillatorWithoutExternalForce;
```

Запустим код. Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: См. рис. 10, См. рис. 11

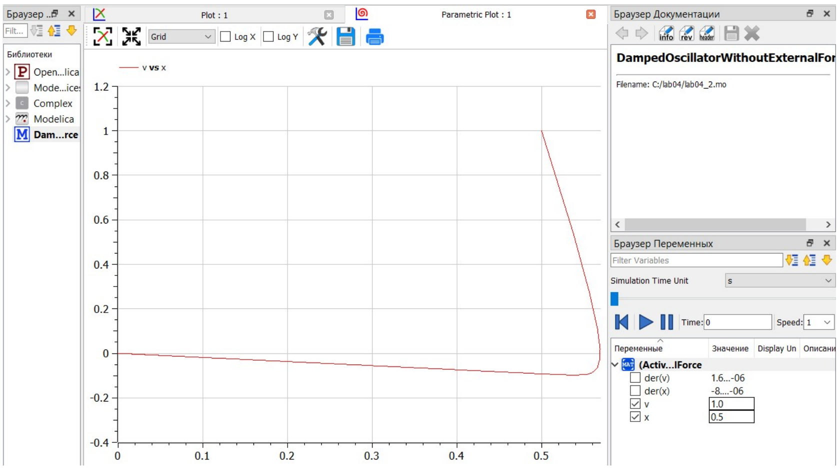

Рис. 10: Фазовый портрет. Случай 2.

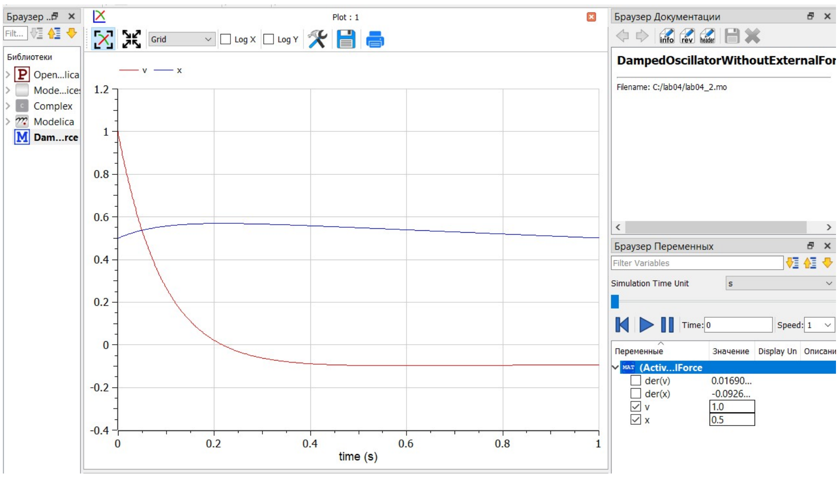

Рис. 11: Решение уравнения. Случай 2.

Напишем код на OpenModelica для случая 3: колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. .

```
model ForcedDampedOscillator
Real x(start=0.5);
Real v(start=1.0);
equation
der(x) = v;
```

```
der(v) = 2*cos(2*time) - 2*x - 21*v;
end ForcedDampedOscillator;
```

Запустим код. Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: См. рис. 12, См. рис. 13

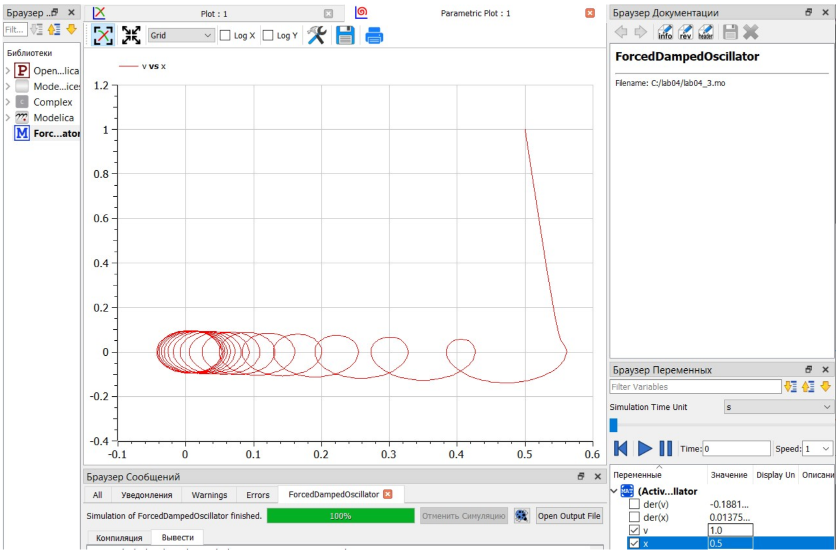

Рис. 12: Фазовый портрет. Случай 2.

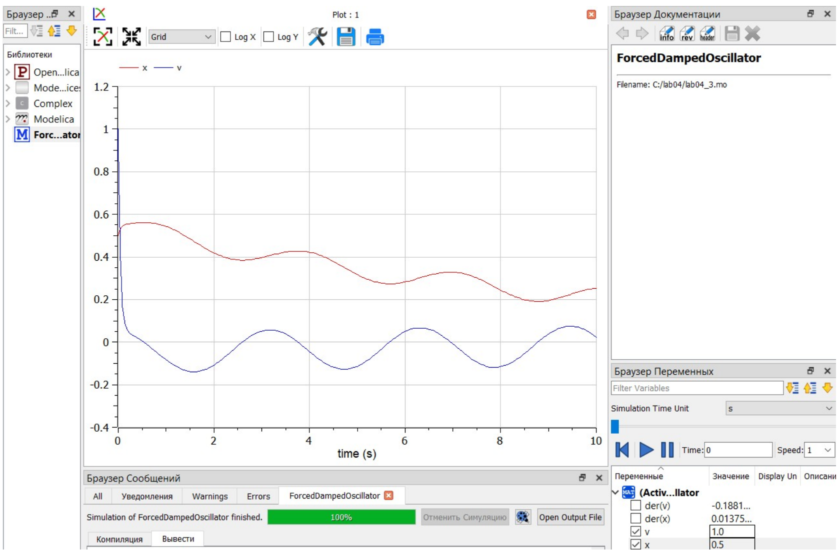

Рис. 13: Решение уравнения. Случай 2.

Заключение

Реализовали модели для гармонических колебаний. Построили графики фазовых портретов и решения дифференциальных уравнений.

Ответы на вопросы

Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Простейшая модель гармонических колебаний описывается дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

где (x) — смещение от положения равновесия, (□) — циклическая частота колебаний.

Дайте определение осциллятора

Осциллятор — это физическая система, способная совершать колебания около положения статического равновесия при отсутствии или при наличии затухания.

Запишите модель математического маятника

Модель математического маятника описывается уравнением:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

где θ — угол отклонения маятника от вертикали, (g) — ускорение свободного падения, (l) — длина нити.

Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Для перехода от дифференциального уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка используют метод введения дополнительной переменной: 1. Пусть у нас есть уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

2. Введем новую переменную

$$v = \dot{x}$$

3. Теперь у нас есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

Эта система состоит из двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет — совокупность всех фазовых траекторий динамической системы в фазовом пространстве, отображающая поведение системы в целом.

Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, которая соответствует одному конкретному движению системы, проходящему через различные фазовые состояния во времени.

Библиографическая справка

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[3] Документация по модели боевых действий: http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/crm_2020_1/2020_