Отчет по лабораторной работе № 4

Модель гармонических колебаний

Лебедева Ольга Андреевна

Содержание

# Цель работы

Построить модели гармонических колебаний, используя Julia и OpenModelica.

# Теоретическое введение

Фазовый портрет - это графическое представление динамики системы в фазовом пространстве, где каждое состояние системы представлено точкой. На графике обычно изображаются значения различных переменных системы в зависимости друг от друга. Фазовый портрет позволяет визуализировать поведение системы со временем и выявить основные характеристики ее динамики, такие как устойчивость, периодичность, предельные циклы и т. д. Фазовые портреты широко используются в различных науках, включая физику, математику, биологию и инженерные науки, для анализа и моделирования динамических систем [1].

Дифференциальные уравнения (ДУ) с правой частью равной нулю, или однородные дифференциальные уравнения, представляют собой уравнения, в которых отсутствует внешнее воздействие или источник изменений. Они описывают системы, в которых изменения зависят только от текущего состояния системы и ее параметров. Решение таких уравнений позволяет определить стационарные состояния системы и проанализировать ее устойчивость к возмущениям. Однородные дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях науки и инженерии для моделирования и анализа различных процессов, таких как колебания, динамика систем управления, теплопроводность и диффузия веществ [2].

Дифференциальные уравнения с правой частью, зависящей от переменных или параметров системы, описывают динамику системы с учетом внешних воздействий или источников изменений. В таких уравнениях правая часть представляет собой функцию времени, переменных системы или других параметров, которая описывает воздействие на систему в каждый момент времени. Решение таких уравнений позволяет моделировать поведение системы в различных условиях и прогнозировать ее развитие во времени. Дифференциальные уравнения с переменной правой частью находят применение в широком спектре областей, включая физику, биологию, экономику, механику и другие науки, где они используются для анализа и моделирования различных процессов и явлений [3].

# Задание

Вариант 17

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы:
2. Колебания гармонического осциллятора c затуханием и без действий внешней силы:
3. Колебания гармонического осциллятора c затуханием и под действием внешней силы:

На интервале t [0; 51] (шаг 0.05) с начальными условиями x0 = 0.5, y0 = 1.

# Выполнение лабораторной работы

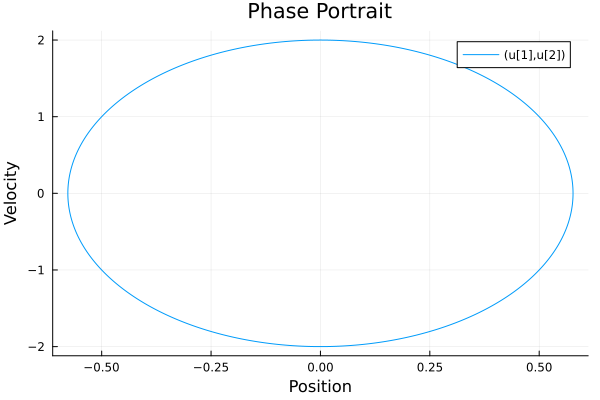
## Julia

Напишем код на Jilia для случая 1: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы.

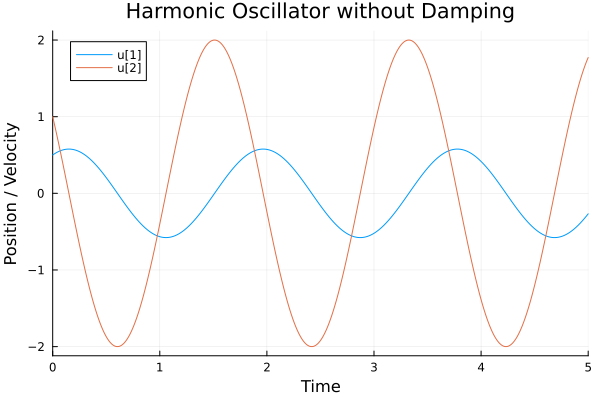
using DifferentialEquations, Plots

function oscillator1!(du, u, p, t)  
 du[1] = u[2]  
 du[2] = -12\*u[1]  
  
u0 = [0.5, 1.0]   
tspan = (0.0, 51.0)   
  
prob1 = ODEProblem(oscillator1!, u0, tspan)  
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)  
  
plot(sol, title = "Harmonic Oscillator without Damping", xlabel = "Time", ylabel = "Position/Velocity")  
savefig("oscillator1\_solution.png")

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения: Cм. [рис. 1](#fig:001), Cм. [рис. 2](#fig:002)



Фазовый портрет. Случай 1.

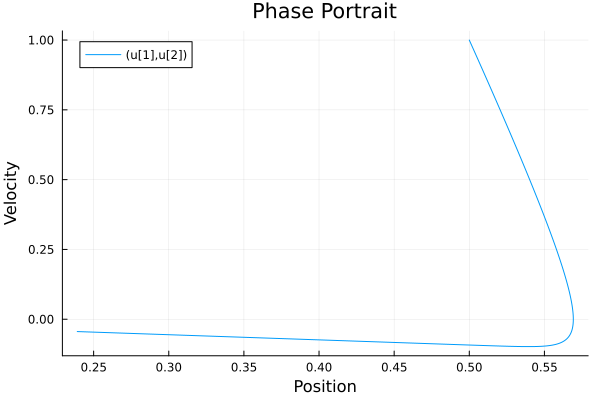


Решение уравнения. Случай 1.

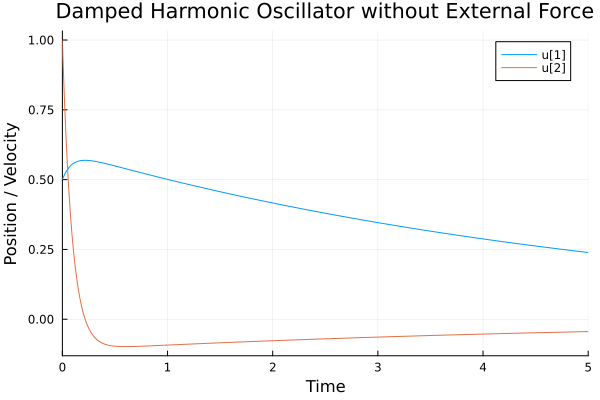
Напишем код на Jilia для случая 2: колебания гармонического осциллятора c затуханием и без действий внешней силы.

using DifferentialEquations, Plots  
  
function oscillator2!(du, u, p, t)  
 du[1] = u[2]  
 du[2] = -2\*u[1] - 11\*u[2]  
end  
  
u0 = [0.5, 1.0]  
tspan = (0.0, 5.0)  
  
prob2 = ODEProblem(oscillator2!, u0, tspan)  
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)  
  
plot(sol2, title="Damped Harmonic Oscillator without External Force", xlabel="Time", ylabel="Position / Velocity")  
savefig("oscillator2\_solution.png")  
  
plot(sol2, vars=(1,2), title="Phase Portrait", xlabel="Position", ylabel="Velocity")  
savefig("oscillator2\_phase\_portrait.png")

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения: Cм. [рис. 3](#fig:003), Cм. [рис. 4](#fig:004)



Фазовый портрет. Случай 2.

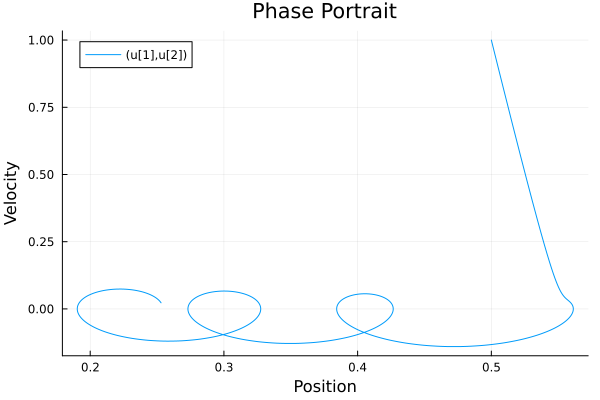


Решение уравнения. Случай 2.

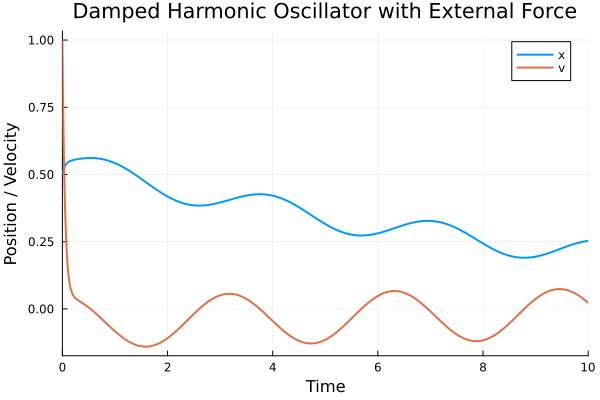
Напишем код на Jilia для случая 3: колебания гармонического осциллятора c затуханием и под действием внешней силы.

using DifferentialEquations, Plots  
  
function forced\_damped\_oscillator!(dx, x, params, t)  
 dx[1] = x[2]  
 dx[2] = 2\*cos(2\*t) - 2\*x[1] - 21\*x[2]  
end  
  
x0 = [0.5, 1.0] # Начальные условия для смещения и скорости  
tspan = (0.0, 10.0) # Диапазон времени  
  
prob = ODEProblem(forced\_damped\_oscillator!, x0, tspan)  
sol = solve(prob)

Запустим код при помощи командной строки и получим два изображения: Cм. [рис. 5](#fig:005), Cм. [рис. 6](#fig:006)



Фазовый портрет. Случай 3.



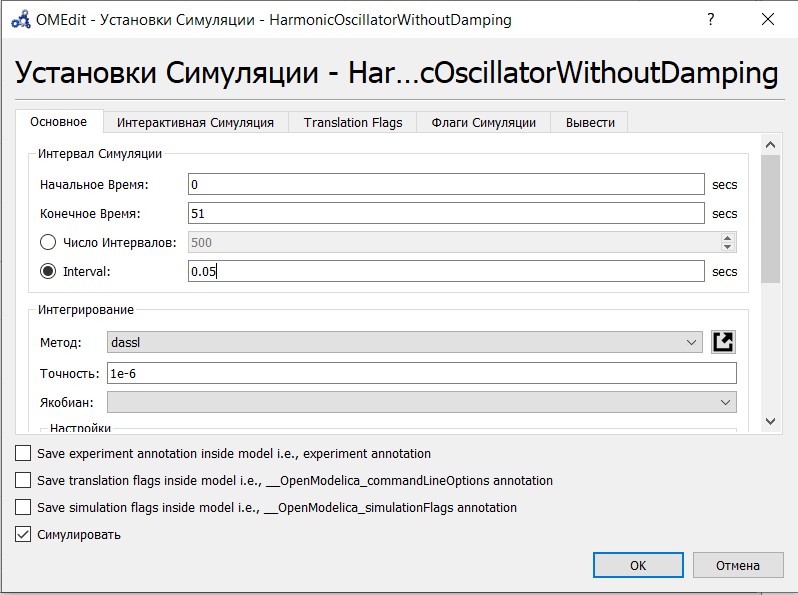
Решение уравнения. Случай 3.

## OpenModelica

Напишем код на OpenModelica для случая 1: колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы.

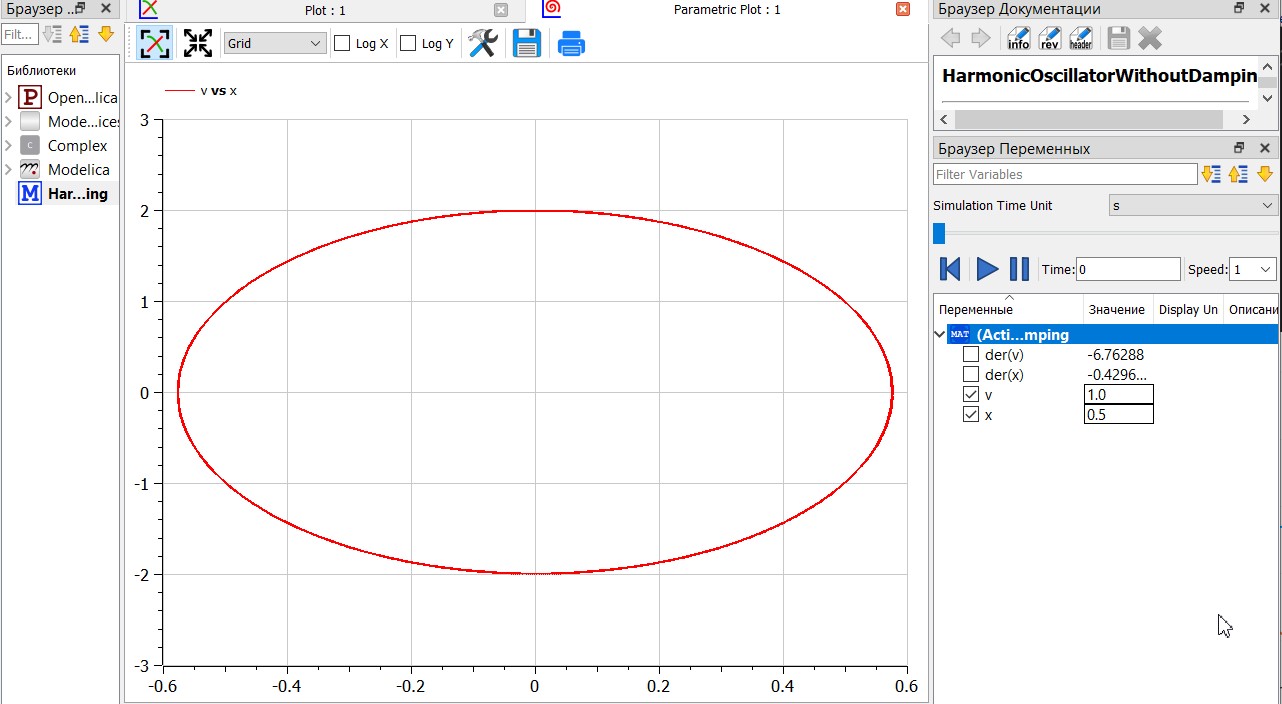
model HarmonicOscillatorWithoutDamping  
 Real x(start = 0.5);  
 Real y(start = 1.0);  
equation  
 der(x) = v;  
 der(v) = -12\*x   
end HarmonicOscillatorWithoutDamping;

Запустим код при помощи кнопок “проверить модель” -> “установки симуляции” -> “симулировать”. Не забываем в найстройках указать заданные нам ачальные условияю Cм. [рис. 7](#fig:007)

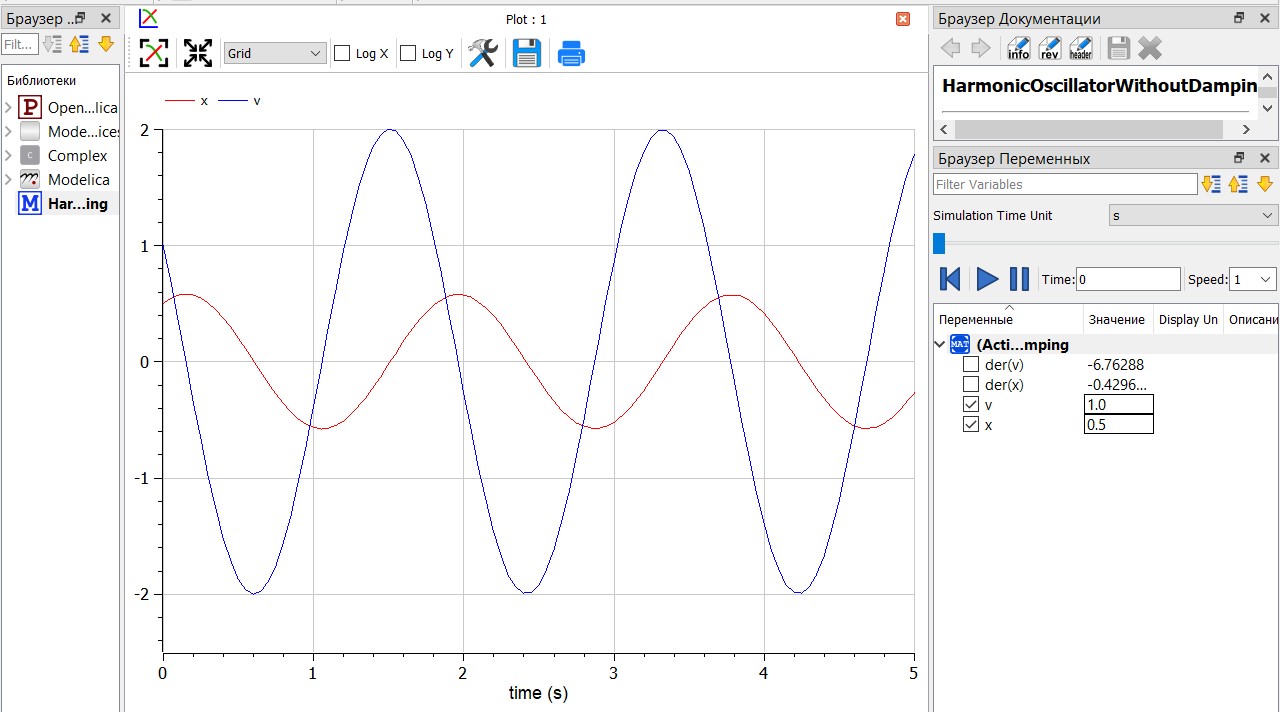


Установка начальных параметров

Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: Cм. [рис. 8](#fig:008), Cм. [рис. 9](#fig:009)



Фазовый портрет. Случай 1.

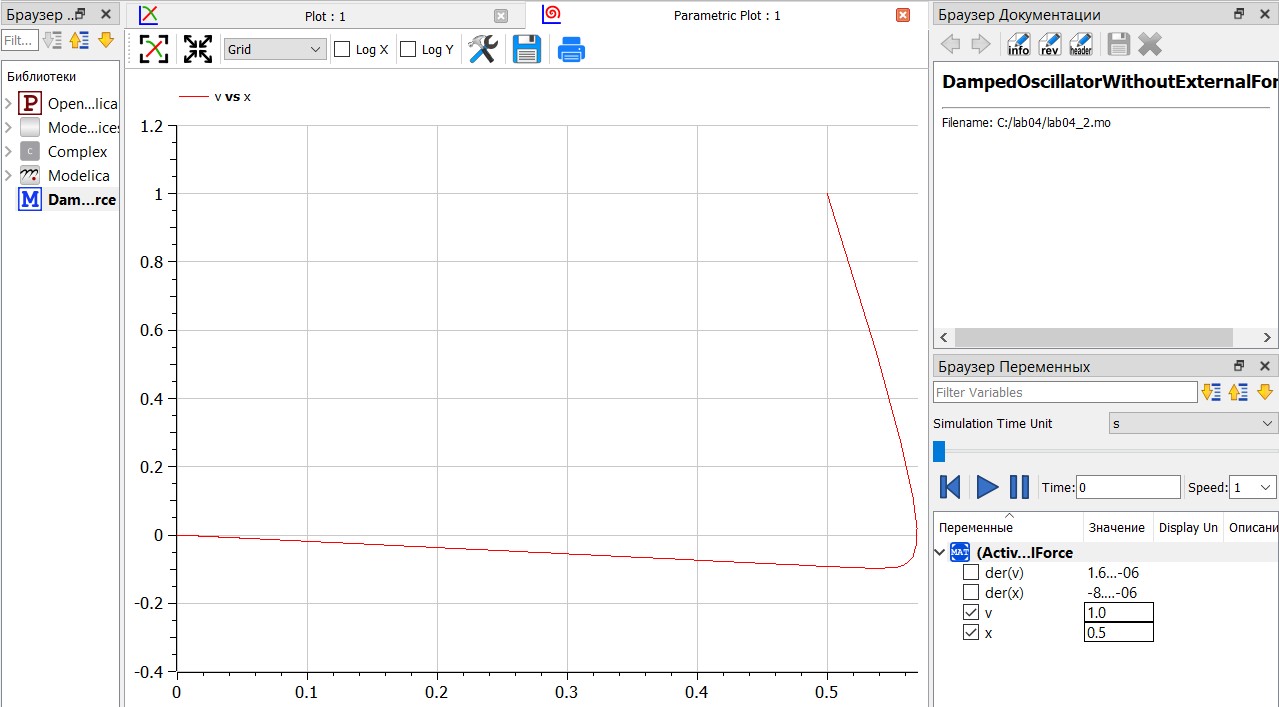


Решение уравнения. Случай 1.

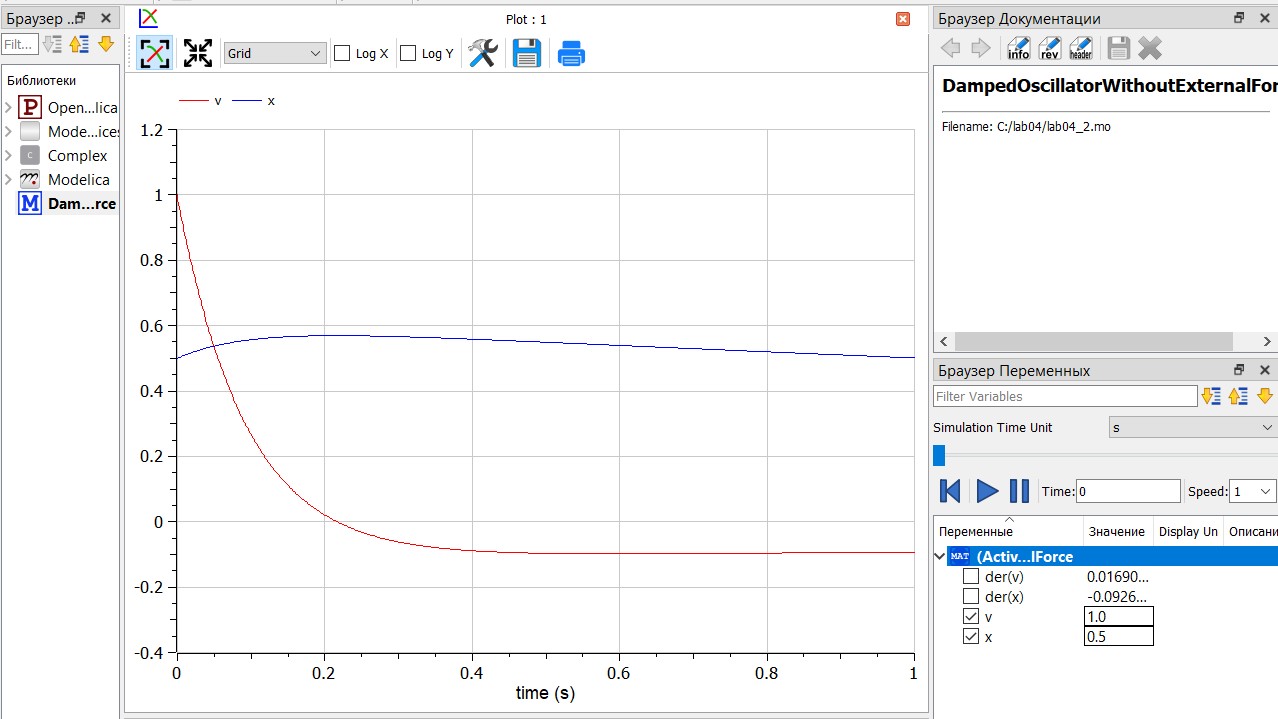
Напишем код для случая 2: колебания гармонического осциллятора c затуханием и без действий внешней силы. .

model DampedOscillatorWithoutExternalForce  
Real x(start=0.5);   
Real v(start=1.0);   
initial equation  
equation  
der(x) = v;   
der(v) = -2\*x - 11\*v;   
end DampedOscillatorWithoutExternalForce;

Запустим код. Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: Cм. [рис. 10](#fig:010), Cм. [рис. 11](#fig:011)



Фазовый портрет. Случай 2.

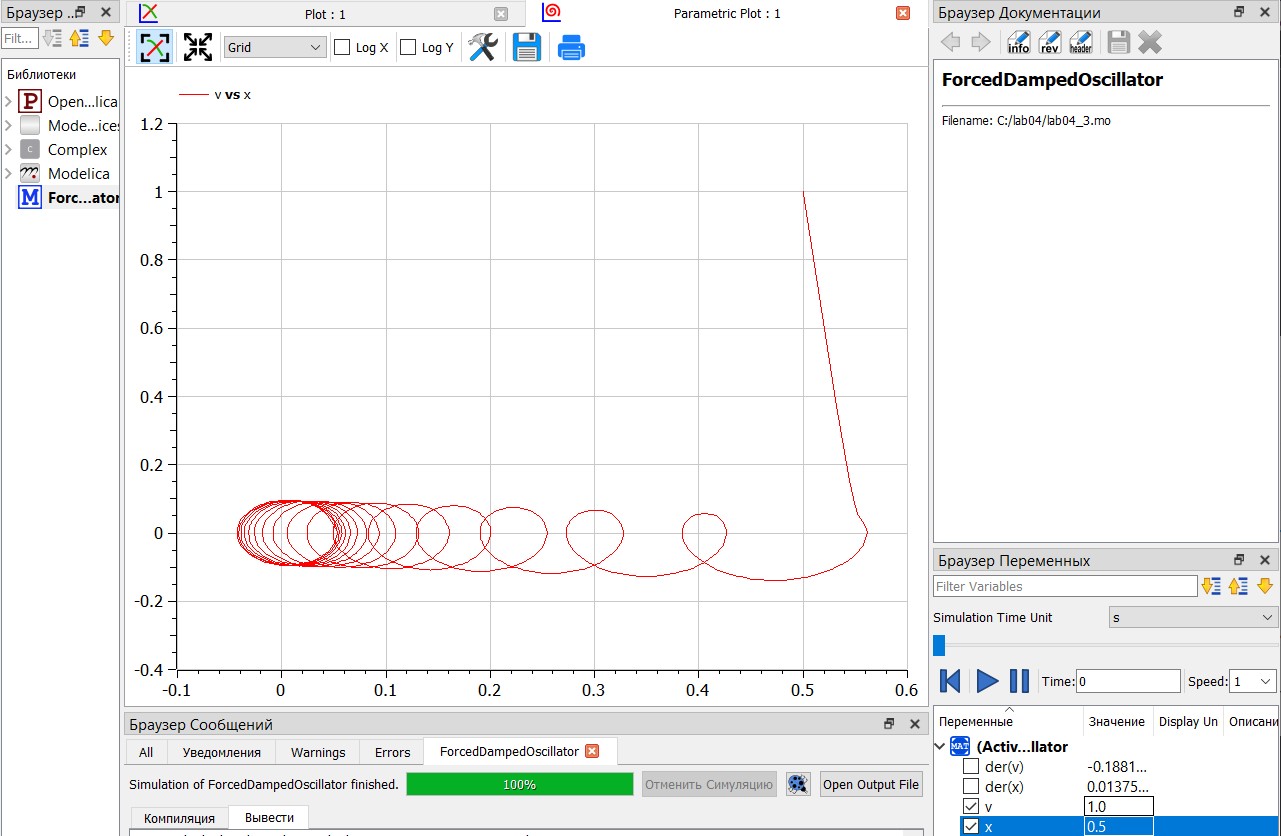


Решение уравнения. Случай 2.

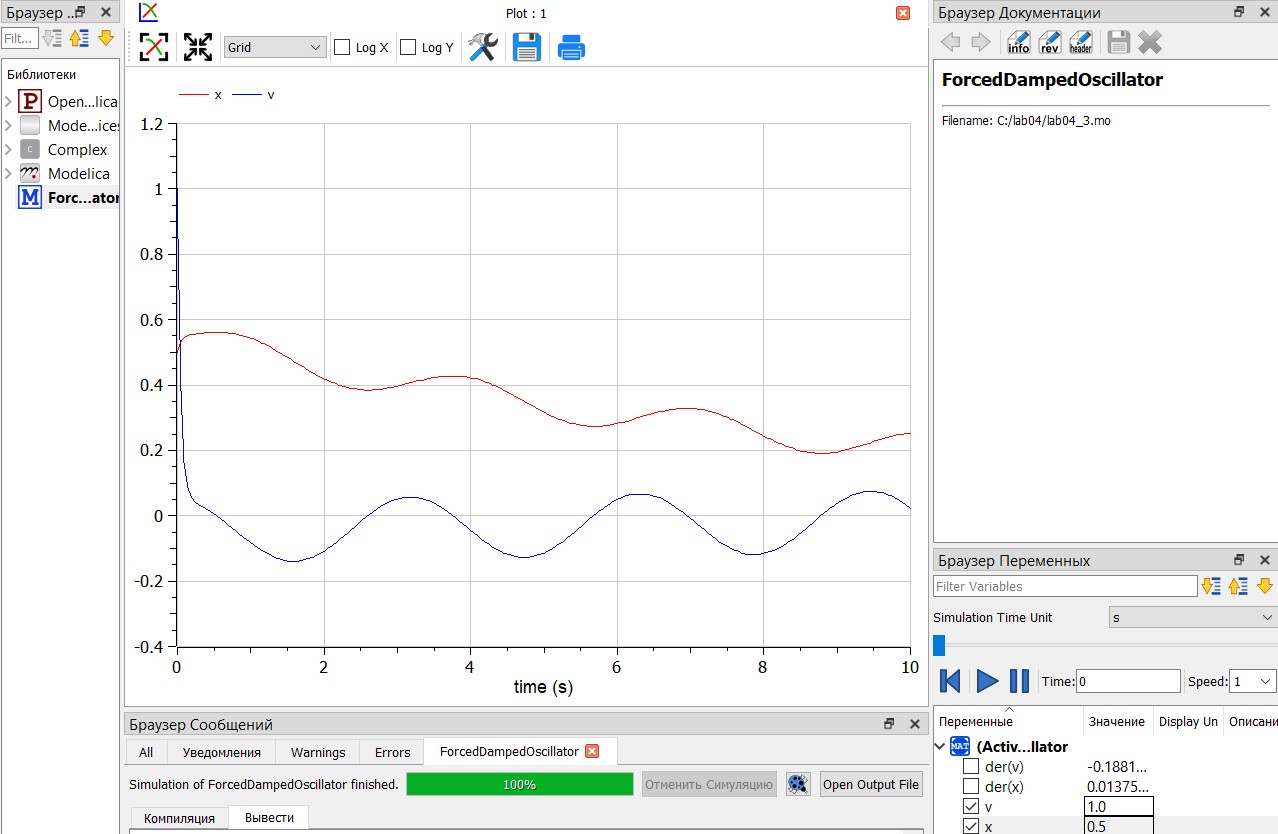
Напишем код на OpenModelica для случая 3: колебания гармонического осциллятора c затуханием и под действием внешней силы. .

model ForcedDampedOscillator  
Real x(start=0.5);   
Real v(start=1.0);   
equation  
der(x) = v;  
der(v) = 2\*cos(2\*time) - 2\*x - 21\*v;   
end ForcedDampedOscillator;

Запустим код. Нажимаем галочки x и v для отображения графиков: Cм. [рис. 12](#fig:012), Cм. [рис. 13](#fig:013)



Фазовый портрет. Случай 2.



Решение уравнения. Случай 2.

# Заключение

Реализовали модели для гармонических колебаний. Построили графики фазовых портретов и решения дифференциальных уравнений.

# Ответы на вопросы

### Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Простейшая модель гармонических колебаний описывается дифференциальным уравнением:

где ( x ) — смещение от положения равновесия, ( ) — циклическая частота колебаний.

### Дайте определение осциллятора

Осциллятор — это физическая система, способная совершать колебания около положения статического равновесия при отсутствии или при наличии затухания.

### Запишите модель математического маятника

Модель математического маятника описывается уравнением:

где — угол отклонения маятника от вертикали, ( g ) — ускорение свободного падения, ( l ) — длина нити.

### Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Для перехода от дифференциального уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка используют метод введения дополнительной переменной: 1. Пусть у нас есть уравнение второго порядка

2. Введем новую переменную

3. Теперь у нас есть система:

Эта система состоит из двух дифференциальных уравнений первого порядка.

### Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет — совокупность всех фазовых траекторий динамической системы в фазовом пространстве, отображающая поведение системы в целом.

Фазовая траектория — кривая в фазовом пространстве, которая соответствует одному конкретному движению системы, проходящему через различные фазовые состояния во времени.

# Библиографическая справка

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[3] Документация по модели боевых действий: http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/crm\_2020\_1/2020\_01\_14.pdf