

Лабораторная работа №5. Вероятностные алгоритмы проверки чисел на простоту

Выполнила: Лебедева Ольга Андреевна

РУДН, Москва, Россия

2025

Цель работы

Изучить и реализовать на языке Julia[1] вероятностные методы проверки простоты чисел: тест Ферма[2], тест Соловэя-Штрассена[3], тест Миллера-Рабина[4] и вычисления символа Якоби[5].

Задачи

- 1 Ознакомиться с теоретическими основами вероятностных тестов на простоту.
- 2 Реализовать и протестировать алгоритмы Ферма, Соловея–Штрассена и Миллера–Рабина.
- 3 Изучить вычисление символа Якоби как вспомогательной функции для теста Соловея–Штрассена.
- 4 Сравнить точность и поведение различных тестов на примерах простых и составных чисел.

Объект и предмет исследования

Объект исследования: методы проверки чисел на простоту.

Предмет исследования: вероятностные алгоритмы, основанные на свойствах чисел в модульной арифметике.

Условные обозначения и термины

Простое число – натуральное число больше единицы, имеющее ровно два различных натуральных делителя: 1 и само себя.

Составное число – натуральное число, имеющее более двух делителей.

Модульная арифметика – система вычислений по модулю n , в которой рассматриваются остатки от деления чисел на n .

Вероятностный тест на простоту – алгоритм, который на основе случайно выбираемых параметров определяет, является ли число вероятно простым или точно составным; допускает малую вероятность ошибки в сторону “простое” для некоторых составных чисел.

Символ Якоби (a/n) – обобщение символа Лежандра для нечётного положительного n . Принимает значения -1, 0 или 1 и используется для анализа квадратичных вычетов и в вероятностных тестах на простоту.

Основание теста (a) – целое число, выбираемое в заданном диапазоне (обычно от 2 до $n-2$), используемое в формулах проверок.

$\text{powermod}(a, b, n)$ – возведение числа a в степень b по модулю n с использованием быстрого алгоритма (используется для эффективности и предотвращения переполнения).

Техническое оснащение и выбранные методы проведения работы

Программное обеспечение:

- Язык программирования Julia.
- Среда разработки JupyterLab / VS Code.

Методы:

- Использование модульной арифметики для возведения в степень по модулю.
- Генерация случайных оснований для тестов.
- Проверка выполнения сравнений в модульной системе.
- Многократное повторение тестов для снижения вероятности ошибки.

Теоретическое введение

Проверка чисел на простоту является важной задачей теории чисел и криптографии. Детерминированные методы, такие как деление на все возможные делители до \sqrt{n} требуют слишком больших вычислений для больших чисел. Поэтому в практических системах используются вероятностные тесты, которые позволяют быстро определить, является ли число вероятно простым.

Среди таких тестов выделяются три наиболее известных метода: тест Ферма, тест Соловэя–Штрассена и тест Миллера–Рабина. Они основаны на свойствах чисел в модульной арифметике и используют случайные основания для проверки выполнения определённых сравнений. Ошибка возможна, но вероятность её возникновения стремительно уменьшается с увеличением числа итераций.

Символ Якоби, в свою очередь, является важным элементом при реализации теста Соловэя–Штрассена, поскольку он позволяет связать поведение степени числа с теоретическими свойствами квадратичных вычетов.

Задание

Реализовать на Julia четыре функции:

- 1 Тест Ферма.
- 2 Вычисление символа Якоби.
- 3 Тест Соловэя–Штрассена.
- 4 Тест Миллера–Рабина.

Тест Ферма

Выполним задание 1 с помощью языка Julia:

Проверим результат работы кода: См. рис. 1

```
[23]: function fermat_test(n::Int, k::Int=5)
    if n < 5 || iseven(n)
        return false
    end
    for _ in 1:k
        a = rand(2: n-2)
        if gcd(a, n) != 1
            return false
        end
        if powermod(a, n-1, n) != 1
            return false
        end
    end
    return true
end

for n in [17, 21, 97, 99, 561]
    println("Число $n:")
    println("Ферма: ", fermat_test(n))
    println()
end
```

Число 17:
Ферма: true

Число 21:
Ферма: false

Число 97:
Ферма: true

Число 99:
Ферма: false

Число 561:
Ферма: false

Рис. 1: Тест Ферма

Алгоритм основан на малой теореме Ферма, согласно которой, если число p простое, то для любого целого a , взаимно простого с p , выполняется соотношение $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Проверка заключается в выборе нескольких случайных оснований a из диапазона $2 \leq a \leq n - 2$ и вычислении значения $a^{n-1} \pmod{n}$. Если равенство выполняется для всех выбранных оснований, число считается вероятно простым. Метод обеспечивает простую и быструю проверку свойств числа в модульной арифметике, что делает его удобным для первичной оценки простоты.

Вычисление символа Якоби

Выполним задание 2 с помощью языка Julia и проверим результат работы кода: См. рис. 2

```
function jacobi(a::Int, n::Int)
    if n <= 0 || iseven(n)
        error("n должно быть положительным и нечётным")
    end
    a %= n
    result = 1
    while a != 0
        while iseven(a)
            a = div(a, 2)
            if n % 8 == 3 || n % 8 == 5
                result = -result
            end
        end
        a, n = n, a
        if a%4==3 && n%4 ==3
            result = -result
        end
        a %= n
    end
    return n==1 ? result : 0
end
```

Рис. 2: Вычисление символа Якоби

Вычисление символа Якоби

Символ Якоби (a/n) представляет собой обобщение символа Лежандра и используется для анализа свойств чисел в модульной арифметике. Он принимает значения 1, -1 или 0 и вычисляется на основе ряда правил, включая выделение степеней числа 2 и закон квадратичной взаимности.

Значение символа Якоби позволяет установить связь между степенью числа и его квадратичными вычетами по модулю n . В контексте проверки простоты символ Якоби служит важным элементом, применяемым в teste Соловэя–Штассена.

Тест Соловэя–Штрассена

Выполним задание 3 с помощью языка Julia. Проверим результат работы кода: См. рис. 3

```
function strassen(n::Int, k::Int=5)
    if n < 5 || !iseven(n)
        return false
    end
    for _ in 1:k
        a = rand(2:n-2)
        if gcd(a, n) != 1
            return false
        end
        x = Jacobi(a,n) % n
        y = powermod(a, div(n-1, 2), n)
        println("a = $a, символ Якоби (a/n) = $(Jacobi(a, n)), a^((n-1)/2) mod n = $y")
        if x==0 || y != x
            return false
        end
    end
    return true
end

for n in [17, 21, 57, 99, 561]
    println("Число $n:")
    println("Соловей-Штрассен: ", strassen(n))
end
```

Число 17:
a = 12, символ Якоби (a/n) = -1, a^((n-1)/2) mod n = 16
Соловей-Штрассен: false
Число 21:
a = 4, символ Якоби (a/n) = 1, a^((n-1)/2) mod n = 4
Соловей-Штрассен: false
Число 57:
a = 19, символ Якоби (a/n) = -1, a^((n-1)/2) mod n = 96
Соловей-Штрассен: false
Число 99:
a = 89, символ Якоби (a/n) = 1, a^((n-1)/2) mod n = 89
Соловей-Штрассен: false
Число 561:
a = 463, символ Якоби (a/n) = 1, a^((n-1)/2) mod n = 67
Соловей-Штрассен: false

Рис. 3: Тест Соловэя–Штрассена

Тест Соловэя–Штассена

Тест Соловэя–Штассена объединяет идею теста Ферма и использование символа Якоби для уточнения результатов. Если число n простое, то для любого a , взаимно простого с n , выполняется соотношение $a^{(n-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{n}\right) \pmod{n}$.

Здесь $\left(\frac{a}{n}\right)$ — символ Якоби, вычисляемый поциальному алгоритму. В ходе проверки выбирается несколько случайных оснований a , для которых вычисляются обе части равенства. Если они совпадают, число считается вероятно простым. Метод позволяет уточнить оценку простоты числа и служит развитием идеи теста Ферма, опираясь на более глубокие свойства теории чисел.

Тест Миллера–Рабина

Выполним задание 4 с помощью языка Julia. Проверим результат работы кода: См. рис. 4

```
function miller_rabin(n::Int, k::Int=5)
    if n < 5 || iseven(n)
        return false
    end
    d = n - 1
    s = 0
    while iseven(d)
        d = div(d, 2)
        s += 1
    end
    for _ in 1:k
        a = rand(2:(n-2))
        x = powermod(a, d, n)
        if x == 1 || x == n - 1
            continue
        end
        passed = false
        for _ in 1:(s - 1)
            x = powermod(x, 2, n)
            if x == n - 1
                passed = true
                break
            end
        end
        if !passed
            return false
        end
    end
    return true
end

for n in [17, 21, 97, 99, 561]
    println("Число $n:")
    println("Миллер-Рабин: ", miller_rabin(n))
end
```

```
Число 17:
Миллер-Рабин: true

Число 21:
Миллер-Рабин: false

Число 97:
Миллер-Рабин: true

Число 99:
Миллер-Рабин: false

Число 561:
Миллер-Рабин: false
```

Рис. 4: Тест Миллера–Рабина

Тест Миллера–Рабина

Тест Миллера–Рабина представляет собой один из наиболее надёжных вероятностных методов проверки простоты числа и применяется в криптографических системах. Число $n - 1$ представляется в виде $n - 1 = 2^s \cdot d$, где d — нечётное. Для случайного основания a проверяются условия:

$$a^d \equiv 1 \pmod{n} \text{ или } a^{2^r d} \equiv -1 \pmod{n} \text{ для некоторого } r < s.$$

Если хотя бы одно из этих условий выполняется, число рассматривается как вероятно простое. Тест повторяется несколько раз для разных оснований, что повышает достоверность результата. Благодаря сочетанию эффективности и высокой вероятности правильного решения, метод Миллера–Рабина является практическим стандартом проверки простоты чисел.

Полученные результаты

В ходе лабораторной работы были реализованы четыре алгоритма на языке Julia: тест Ферма, функция вычисления символа Якоби, тест Соловея–Штассена и тест Миллера–Рабина. Для проверки корректности работы были проведены эксперименты на различных типах чисел: простых (17, 97), составных (21, 99) и числе Кармайкла 561.

Результаты показали ожидаемое поведение всех алгоритмов:

- для простых чисел тесты Ферма, Соловея–Штассена и Миллера–Рабина подтвердили их простоту;
- для составных чисел значения корректно определялись как составные;
- число 561, обладающее особыми свойствами, также корректно было классифицировано тестами Соловея–Штассена и Миллера–Рабина.

Таким образом, все реализованные функции отработали корректно, подтвердив как правильность кода, так и теоретические зависимости, заложенные в алгоритмы.

Заключение

В результате выполнения лабораторной работы были изучены и реализованы вероятностные методы проверки чисел на простоту. Алгоритмы Ферма, Соловэя–Штассена и Миллера–Рабина были исследованы как с теоретической, так и с практической точки зрения. Реализация на Julia позволила закрепить навыки работы с модульной арифметикой.

Библиографическая справка

- [1] Julia
- [2] Малая теорема Ферма
- [3] Тест Соловэя–Штрассена
- [4] Тест Миллера–Рабина
- [5] Символ Якоби