МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра математических методов исследования операций

Отчет

о лабораторной работе №7

по теме: "Решение краевых задач методом пристрелки"

Направление 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Выполнила Матыкина О.В.

Проверила Шабунина З.А.

Воронеж 2022

1 Постановка задачи

В рамках работы необходимо решить краевую задачу для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка методом пристрелки.

Решается система четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = F_1(x,u,v,\omega,z) \\ \dfrac{dv}{dx} = F_2(x,u,v,\omega,z) \\ \dfrac{d\omega}{dx} = F_3(x,u,v,\omega,z) \\ \dfrac{dz}{dx} = F_4(x,u,v,\omega,z) \end{cases}$$
$$x \in [a, b]$$

Граничные условия задаются в виде

$$u(a)=A, z(a)=B, u(b)=C, w(b)=D$$

Требуется решить данную краевую задачу методом пристрелки. Для решения задачи Коши использован метод Рунге-Кутта второго порядка. Для решения возникающей при нахождении пристрелочного параметра системы нелинейных уравнений используется метод Ньютона. Производные функций $\Phi_i(\alpha,\beta)$ вычисляются с помощью вспомогательных задач Коши. Решение системы нелинейных уравнений $\Phi_i(\alpha,\beta)=0, i=1,2$ ведется до тех пор, пока $\Phi_i(\alpha,\beta)\le\varepsilon, i=1,2$.

1.1 Описание параметров.

Входные параметры:

a, b – границы отрезка, на котором ищется решение;

N – число отрезков разбиения;

ε – точность решения нелинейных уравнений;

K – предельное число итераций;

α_0, β_0 – начальные значения пристрелочных параметров;

A, B, C, D – константы краевых условий.

Выходные параметры:

Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающая следующие значения:

Icod = 0 – нет ошибки, решение получено;
Icod = 1 – превышено число итераций;
Icod = 2 – ошибка входных данных.

L – число итераций;

α, β – конечные значения пристрелочных параметров;

Результаты вычислений в таблице:

x	u	Δu	v	Δv	w	Δw	z	Δz

2 Метод решения

Для построения задачи Коши выбирается тот конец отрезка [a,b], на котором вводится большее число краевых условий. Из постановки задачи видно, что на каждом конце заданы по два условия, значит не имеет значения, в каком конце отрезка будут записываться начальные условия. Для простоты выберем левый конец. Тогда для записи задачи Коши на левом конце [a,b] не хватает двух условий. Введем два пристрелочных параметра: α, β . Тогда начальные условия будут иметь вид: $u(a)=A, z(a)=B, v(a)=\alpha, w(a)=\beta$. Таким образом, сформированы начальные условия для задачи Коши.

Интегрируем задачу Коши методом Рунге-Кутта второго порядка по следующим формулам:

$$K1^{(1)}=F1(x_0,u_0,v_0,w_0,z_0)$$

$$K1^{(2)}=F2(x_0,u_0,v_0,w_0,z_0)$$

$$K1^{(3)}=F3(x_0,u_0,v_0,w_0,z_0)$$

$$K1^{(4)}=F4(x_0,u_0,v_0,w_0,z_0)$$

$$K2^{(1)}=F1(x_0+h,u_0+h*K1^{(1)},v_0+h*K1^{(2)},w_0+h*K1^{(3)},z_0+h*K1^{(4)})$$

$$K2^{(2)}=F2(x_0+h,u_0+h*K1^{(1)},v_0+h*K1^{(2)},w_0+h*K1^{(3)},z_0+h*K1^{(4)})$$

$$K2^{(3)}=F3(x_0+h,u_0+h*K1^{(1)},v_0+h*K1^{(2)},w_0+h*K1^{(3)},z_0+h*K1^{(4)})$$

$$K2^{(4)}=F4(x_0+h,u_0+h*K1^{(1)},v_0+h*K1^{(2)},w_0+h*K1^{(3)},z_0+h*K1^{(4)})$$

$$u_1=u_0+0.5*h*(K1^{(1)}+K2^{(1)})$$

$$v_1=v_0+0.5*h*(K1^{(2)}+K2^{(2)})$$

$$w_1=w_0+0.5*h*(K1^{(3)}+K2^{(3)})$$

$$z_1=z_0+0.5*h*(K1^{(4)}+K2^{(4)})$$

Получим значения $u(b,\alpha,\beta), v(b,\alpha,\beta), w(b,\alpha,\beta), z(b,\alpha,\beta)$

Значения пристрелочных параметров могут быть теперь определены из нелинейной системы уравнений

$$\Phi_1(\alpha,\beta)=u(b)-C=0; \Phi_2(\alpha,\beta)=w(b)-D=0$$

Ее можно решать методом Ньютона.

2.1 Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\Phi_1(\alpha,\beta)=0; \Phi_2(\alpha,\beta)=0$$

Итерационный процесс для получения решения строится по формулам:

$$\Phi_j(\alpha_n,\beta_n)+\frac{\partial \Phi_j(\alpha_n,\beta_n)}{\partial \alpha}(\alpha_{(n+1)}-\alpha_n)+\frac{\partial \Phi_j(\alpha_n,\beta_n)}{\partial \beta}(\beta_{(n+1)}-\beta_n)=0, j=1,2$$

Для определения $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \Phi_j}{\partial \beta}$ можно построить две вспомогательные задачи Коши.

2.2 Вспомогательные задачи Коши для нахождения производных

Рассмотрим построение вспомогательной задачи Коши для нахождения производной по α, производная по β находится аналогично.

Продифференцируем по α систему и начальные условия

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = F_1(x,u,v,\omega,z) \\ \frac{dv}{dx} = F_2(x,u,v,\omega,z) \\ \frac{d\omega}{dx} = F_3(x,u,v,\omega,z) \\ \frac{dz}{dx} = F_4(x,u,v,\omega,z) \end{cases}$$

$$u(a)=A, z(a)=B, v(a)=\alpha, w(a)=\beta$$

и поменяем порядок дифференцирования:

$$\begin{cases}
\frac{d}{dx}(\frac{\partial u}{\partial \alpha})=(\frac{\partial F1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}) \\
\frac{d}{dx}(\frac{\partial v}{\partial \alpha})=(\frac{\partial F2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F2}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}) \\
\frac{d}{dx}(\frac{\partial w}{\partial \alpha})=(\frac{\partial F3}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F3}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F3}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}) \\
\frac{d}{dx}(\frac{\partial z}{\partial \alpha})=(\frac{\partial F4}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F4}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F4}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \alpha})+(\frac{\partial F4}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}) \\
u(a)=0, z(a)=0, v(a)=1, w(a)=0
\end{cases}$$

Полученная система – это задача Коши для $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$. Решив ее, мы определим функции $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ на всем отрезке интегрирования, в том числе в последней точке b: $(\frac{\partial u}{\partial \alpha})_{(x=b)}=\frac{\partial \Phi_1(\alpha_n,\beta_n,b)}{\partial \alpha}$, $(\frac{\partial w}{\partial \alpha})_{(x=b)}=\frac{\partial \Phi_2(\alpha_n,\beta_n,b)}{\partial \alpha}$. Эти выражения подставим в формулу метода Ньютона. Необходимо заметить, что вспомогательная задача решается на той же сетке и тем же методом Рунге-Кутта, что и основная. Для нелинейных правых частей производные $\frac{\partial F_i}{\partial u}$, $\frac{\partial F_i}{\partial v}$, $\frac{\partial F_i}{\partial w}$, $\frac{\partial F_i}{\partial z}$, i=1,2,3,4 являются функциями u, v, w и z и вычисляются с использованием значений, найденных при решении основной задачи Коши.

3 Алгоритм

1) Прочитать входные данные.

2) Проверить входные данные

3) Посчитать шаг интегрирования.

4) Решить исходную задачу Коши.

5) Посчитать $\Phi_1(\alpha,\beta),\Phi_2(\alpha,\beta)$

6) Пока $\Phi_1(\alpha,\beta)\geq\varepsilon,\Phi_2(\alpha,\beta)\geq\varepsilon$ и число итераций не превосходит максимального:

а) Увеличить счетчик итераций.

б) Решить две вспомогательные задачи Коши.

в) Пересчитать коэффициенты пристрелки.

г) Перерешать исходную задачу Коши.

д) Пересчитать $\Phi_1(\alpha,\beta),\Phi_2(\alpha,\beta)$

7) Если количество итераций меньше максимального, вывести результаты в файл. Иначе вывести код завершения.

4 Тестирование

Тест №1

Возьмем $u = x^5$

Рассмотрим линейную задачу

$u' = v, v' = w, w' = z, z' = 120x$

В качестве начальных значений пристрелочных параметров укажем их точные значения.

Входные данные:

0; 1

50

0.01

10

0; 0

0; 0; 1; 20

Результат работы программы представлен на следующей странице. Видно, что число итераций L=0, что указывает на то, что пристрелочные параметры не пересчитывались.

IER=0
L=0
alpha=0.0, betta=0.0
Fi1=-0.004, Fi2=-0.008

x	u	delt_u	v	delt_v	w	delt_w	z	delt_z
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.020000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000000	0.000160	0.024000	0.000000
0.040000	0.000000	0.000000	0.000005	0.000008	0.000960	0.000320	0.096000	0.000000
0.060000	0.000000	0.000000	0.000043	0.000022	0.003840	0.000480	0.216000	0.000000
0.080000	0.000002	0.000001	0.000163	0.000042	0.009600	0.000640	0.384000	0.000000
0.100000	0.000007	0.000003	0.000432	0.000068	0.019200	0.000800	0.600000	0.000000
0.120000	0.000020	0.000005	0.000936	0.000101	0.033600	0.000960	0.864000	0.000000
0.140000	0.000045	0.000009	0.001781	0.000140	0.053760	0.001120	1.176000	0.000000
0.160000	0.000091	0.000013	0.003091	0.000186	0.080640	0.001280	1.536000	0.000000
0.180000	0.000169	0.000020	0.005011	0.000238	0.115200	0.001440	1.944000	0.000000
0.200000	0.000293	0.000027	0.007704	0.000296	0.158400	0.001600	2.400000	0.000000
0.220000	0.000478	0.000037	0.011352	0.000361	0.211200	0.001760	2.904000	0.000000
0.240000	0.000748	0.000049	0.016157	0.000432	0.274560	0.001920	3.456000	0.000000
0.260000	0.001126	0.000062	0.022339	0.000510	0.349440	0.002080	4.056000	0.000000
0.280000	0.001642	0.000079	0.030139	0.000594	0.436800	0.002240	4.704000	0.000000
0.300000	0.002333	0.000097	0.039816	0.000684	0.537600	0.002400	5.400000	0.000000
0.320000	0.003236	0.000119	0.051648	0.000781	0.652800	0.002560	6.144000	0.000000
0.340000	0.004400	0.000144	0.065933	0.000884	0.783360	0.002720	6.936000	0.000000
0.360000	0.005875	0.000171	0.082987	0.000994	0.930240	0.002880	7.776000	0.000000
0.380000	0.007721	0.000203	0.103147	0.001110	1.094400	0.003040	8.664000	0.000000
0.400000	0.010003	0.000237	0.126768	0.001232	1.276800	0.003200	9.600000	0.000000
0.420000	0.012794	0.000276	0.154224	0.001361	1.478400	0.003360	10.584000	0.000000
0.440000	0.016174	0.000318	0.185909	0.001496	1.700160	0.003520	11.616000	0.000000
0.460000	0.020232	0.000364	0.222235	0.001638	1.943040	0.003680	12.696000	0.000000
0.480000	0.025065	0.000415	0.263635	0.001786	2.208000	0.003840	13.824000	0.000000
0.500000	0.030780	0.000470	0.310560	0.001940	2.496000	0.004000	15.000000	0.000000
0.520000	0.037490	0.000530	0.363480	0.002101	2.808000	0.004160	16.224000	0.000000
0.540000	0.045321	0.000595	0.422885	0.002268	3.144960	0.004320	17.496000	0.000000
0.560000	0.054408	0.000665	0.489283	0.002442	3.507840	0.004480	18.816000	0.000000
0.580000	0.064895	0.000741	0.563203	0.002622	3.897600	0.004640	20.184000	0.000000
0.600000	0.076939	0.000821	0.645192	0.002808	4.315200	0.004800	21.600000	0.000000
0.620000	0.090706	0.000908	0.735816	0.003001	4.761600	0.004960	23.064000	0.000000
0.640000	0.106374	0.001000	0.835661	0.003200	5.237760	0.005120	24.576000	0.000000
0.660000	0.124135	0.001098	0.945331	0.003406	5.744640	0.005280	26.136000	0.000000
0.680000	0.144190	0.001203	1.065451	0.003618	6.283200	0.005440	27.744000	0.000000
0.700000	0.166756	0.001314	1.196664	0.003836	6.854400	0.005600	29.400000	0.000000
0.720000	0.192060	0.001431	1.339632	0.004061	7.459200	0.005760	31.104000	0.000000
0.740000	0.220345	0.001556	1.495037	0.004292	8.098560	0.005920	32.856000	0.000000
0.760000	0.251865	0.001687	1.663579	0.004530	8.773440	0.006080	34.656000	0.000000
0.780000	0.286891	0.001826	1.845979	0.004774	9.484800	0.006240	36.504000	0.000000
0.800000	0.325708	0.001972	2.042976	0.005024	10.233600	0.006400	38.400000	0.000000
0.820000	0.368614	0.002126	2.255328	0.005281	11.020800	0.006560	40.344000	0.000000
0.840000	0.415925	0.002287	2.483813	0.005544	11.847360	0.006720	42.336000	0.000000
0.860000	0.467971	0.002456	2.729227	0.005814	12.714240	0.006880	44.376000	0.000000
0.880000	0.525098	0.002634	2.992387	0.006090	13.622400	0.007040	46.464000	0.000000
0.900000	0.587670	0.002820	3.274128	0.006372	14.572800	0.007200	48.600000	0.000000
0.920000	0.656067	0.003014	3.575304	0.006661	15.566400	0.007360	50.784000	0.000000
0.940000	0.730687	0.003217	3.896789	0.006956	16.604160	0.007520	53.016000	0.000000
0.960000	0.811943	0.003429	4.239475	0.007258	17.687040	0.007680	55.296000	0.000000
0.980000	0.900270	0.003650	4.604275	0.007566	18.816000	0.007840	57.624000	0.000000
1.000000	0.996119	0.003881	4.992120	0.007880	19.992000	0.008000	60.000000	0.000000

Тест №2

Возьмем $u = x^5$

Рассмотрим линейную задачу

$u' = v, v' = w, w' = z, z' = 120x$

В качестве начальных значений пристрелочных параметров укажем приближенные значения.

Входные данные:

0; 1

10

0.001

10

1; 1

0; 0; 1; 20

Результат работы программы:

```
IER=0
L=1
alpha=-0.014, betta=0.2
Fi1=-0.0, Fi2=0.0
   x         u        delt_u       v        delt_v       w        delt_w       z        delt_z
0.000000  0.000000  0.000000 -0.014400  0.014400  0.200000  0.200000  0.000000  0.000000
0.100000 -0.000440  0.000450  0.005600  0.005100  0.200000  0.180000  0.600000  0.000000
0.200000  0.001120  0.000800  0.028600  0.020600  0.320000  0.160000  2.400000  0.000000
0.300000  0.005580  0.003150  0.072600  0.032100  0.680000  0.140000  5.400000  0.000000
0.400000  0.016240  0.006000  0.167600  0.039600  1.400000  0.120000  9.600000  0.000000
0.500000  0.040000  0.008750  0.355600  0.043100  2.600000  0.100000  15.000000  0.000000
0.600000  0.088560  0.010800  0.690600  0.042600  4.400000  0.080000  21.600000  0.000000
0.700000  0.179620  0.011550  1.238600  0.038100  6.920000  0.060000  29.400000  0.000000
0.800000  0.338080  0.010400  2.077600  0.029600  10.280000  0.040000  38.400000  0.000000
0.900000  0.597240  0.006750  3.297600  0.017100  14.600000  0.020000  48.600000  0.000000
1.000000  1.000000  0.000000  5.000600  0.000600  20.000000  0.000000  60.000000  0.000000
```

За одну итерацию найдены пристрелочные параметры, при подстановке которых $\Phi_1(\alpha, \beta) \le \varepsilon, \Phi_2(\alpha, \beta) \le \varepsilon$

Тест №3

Возьмем $u=x^5$

Рассмотрим нелинейную задачу

$u'=v, v'=w, w'=z, z'=120x+u^2-x^{10}$

Входные данные:

0; 1

10

0.001

10

1; 1

0; 0; 1; 20

Результат работы программы:

```
IER=0
L=2
alpha=-0.015, betta=0.2
Fi1=0.0, Fi2=0.0
```

x	u	delt_u	v	delt_v	w	delt_w	z	delt_z
0.000000	0.000000	0.000000	-0.014564	0.014564	0.200332	0.200332	0.000000	0.000000
0.100000	-0.000455	0.000465	0.005469	0.004969	0.200332	0.180332	0.600000	0.000000
0.200000	0.001094	0.000774	0.028502	0.020502	0.320332	0.160332	2.400000	0.000000
0.300000	0.005546	0.003116	0.072535	0.032035	0.680332	0.140332	5.400001	0.000001
0.400000	0.016201	0.005961	0.167569	0.039569	1.400332	0.120332	9.600005	0.000005
0.500000	0.039959	0.008709	0.355602	0.043102	2.600333	0.100333	15.000018	0.000018
0.600000	0.088521	0.010761	0.690635	0.042635	4.400338	0.080338	21.600032	0.000032
0.700000	0.179586	0.011516	1.238669	0.038169	6.920350	0.060350	29.399951	0.000049
0.800000	0.338055	0.010375	2.077704	0.029704	10.280365	0.040365	38.399386	0.000614
0.900000	0.597227	0.006737	3.297737	0.017237	14.600338	0.020338	48.597194	0.002806
1.000000	1.000003	0.000003	5.000757	0.000757	20.000098	0.000098	59.990561	0.009439

За две итерации достигнута необходимая точность.