МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра математических методов исследования операций

Отчет

о лабораторной работе №6

по теме: "Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методами типа Рунге-Кутта"

Направление 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Выполнила Матыкина О.В.

Проверила Шабунина З.А.

Воронеж 2022

1 Постановка задачи

В рамках работы необходимо решить задачу Коши с заданной точностью с автоматическим выбором шага методом удвоения и деления шага пополам.

1.1 Описание параметров.

Входные параметры:

data – имя файла исходных данных;

f – имя процедуры – функции с двумя параметрами (функция f – вычисляет значение правой части уравнения (1));

Выходные параметры:

rez - имя файла выходных данных;

Icod - выходная переменная – код завершения подпрограммы, принимающая следующие значения:

Icod = 0 – нет ошибки, решение получено;
Icod = 1 – требуемая точность не достигнута, решение получено с меньшей точностью;
Icod = 2 – ошибка входных данных.

Структура файла исходных данных:

Отдельно в каждой строке - значения A, B, C, y_c, h_{min} – минимально допустимый шаг интегрирования, ε – наибольшее допустимое значение абсолютной погрешности.

Структура выходного файла:

Первая и последующие строки - $x-$координата точки интегрирования, полученное приближенное значение в этой точке, локальная погрешность в этой точке.
Последняя строка файла – число точек интегрирования; число точек, в которых не достигается заданная точность; общее количество минимальных шагов интегрирования.

2 Метод решения

Пусть на отрезке $[x_0, x_0 + X]$ требуется найти численное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

на сетке узлов $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_0 + X$ (3)

2.1 Метод Рунге-Кутта третьего порядка

В данной работе рассмотрен следующий метод третьего порядка:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \qquad (30)$$

$K_1 = hf(x_0, y_0),$

$K_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}K_1\right),$

$K_3 = hf(x_0 + h, y_0 - hK_1 + 2hK_2)$

Расчетная формула при условии, что

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

то есть правая часть уравнения (1) зависит только от x, принимает вид

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(f_0 + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h)\right)$$

В этом случае разложение локальной погрешности метода по степеням h есть величина:

$$r = u(x_0 + h) - y_0 - \frac{h}{6}\left(f_0 + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h)\right) =$$

1) $u(x_0 + h)$

$$= u_0 + hu_0' + \frac{h^2}{2}u_0'' + \frac{h^3}{6}u_0^{(3)} + \frac{h^4}{24}u_0^{(4)} + \frac{h^5}{120}u_0^{(5)} + o(h^6)$$

$$2)\ f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=f_0+\frac{h}{2}f_0'+\frac{h^2}{8}f_0''+\frac{h^3}{48}f_0^{(3)}+\frac{h^4}{24*16}f_0^{(4)}+o(h^5)$$

$$3)\ f(x_0+h)=f_0+hf_0'+\frac{h^2}{2}f_0''+\frac{h^3}{6}f_0^{(3)}+\frac{h^4}{24}f_0^{(4)}+o(h^5)$$

$$\begin{aligned}&=u_0+hu_0'+\frac{h^2}{2}u_0''+\frac{h^3}{6}u_0^{(3)}+\frac{h^4}{24}u_0^{(4)}+\frac{h^5}{120}u_0^{(5)}-y_0-\frac{h}{6}f_0\\&\quad-\frac{2h}{3}f_0\ -\frac{h^2}{3}f_0'-\frac{h^3}{12}f_0''-\frac{h^4}{24*3}f_0^{(3)}-\frac{h^5}{24*24}f_0^{(4)}\\&\quad-\frac{h}{6}f_0\ -\frac{h^2}{6}f_0'-\frac{h^3}{12}f_0''-\frac{h^4}{36}f_0^{(3)}-\frac{h^5}{24*6}f_0^{(4)}+o(h^6)\\&=\frac{-h^5}{24^2*5}u_0^{(5)}+o(h^6)=\ o(h^5)\end{aligned}$$

2.2 Оценка локальной погрешности по правилу Рунге

Метод заключается в том, что по одной и той же выбранной вычислительной формуле считаются два приближения к решению в одной точке, но с разными шагами. Сравнение этих двух приближенных значений позволяет получить апостериорную оценку погрешности.

Обозначим через $\bar{y}_1$ решение, полученное по выбранной расчетной формуле типа (4),(5) в точке $x_1=x_0+h$. Главный член локальной погрешности обозначим через $\psi(x_0,y_0)h^{s+1}$, подчеркнув тем самым, что решение получено из точки x_0:

$$y(x_0+h)-\bar{y}_1=\psi(x_0,y_0)h^{s+1}. \tag{98}$$

Обозначим через $\hat{y}$ решение, полученное по правилу (4,5) в точке $x_0+\frac{h}{2}$, главный член погрешности которого равен

$$y\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-\hat{y}=\psi(x_0,y_0)\left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}. \tag{99}$$

Из точки $x_0 + \frac{h}{2}$ вычислим приближение $\bar{\bar{y}}_1$ к решению в точке $x_0 + h$ с погрешностью

$$\hat{y}(x_0 + h) - \bar{\bar{y}}_1 = \psi\left(x_0 + \frac{h}{2}, \hat{y}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}, \qquad (100)$$

где $\hat{y}(x)$ – точное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$\hat{y}\left(x + \frac{h}{2}\right) = \hat{y}$.

Если в качестве приближения к решению в точке x принять $\bar{\bar{y}}_1$, то согласно правилу Рунге [6] главная часть погрешности метода на двух последовательных шагах $h/2$ равна

$$y(x_0 + h) - \bar{\bar{y}}_1 = (\bar{\bar{y}}_1 - \bar{y}_1)/(2^s - 1). \qquad (101)$$

Так как в этой работе используется метод третьего порядка, то s=3.

2.3 Метод удвоения и деления шага пополам

Обозначим через ε_{n+1} локальную погрешность метода в точке $x_n + h$, а через y_{n+1}^{h} – приближенное значение, вычисленное с шагом h. Пусть наибольшая погрешность шага интегрирования равна $\varepsilon > 0$. Тогда если $|\varepsilon_{n+1}| > \varepsilon$, то приближенное значение y_{n+1}^{h} считается неудовлетворительным по точности и выбирается новое значение шага $h^{(1)} = \frac{h}{2}$. С этим новым шагом по той же формуле Рунге-Кутта вычисляется новое значение $y_{n+1}^{h^{(1)}}$ в новой точке $x_n + h^{(1)}$. Если оценка локальной погрешности $\varepsilon_{n+1}^{(1)}$ на новом шаге $h^{(1)}$ опять превосходит заданную наибольшую допустимую локальную погрешность ε, то шаг снова делится пополам и вычисления повторяются. Так происходит до тех пор, пока локальная погрешность не станет меньше или равна ε или пока шаг не достигнет минимальной длины h_{min}.

Дальнейшее интегрирование уравнения будет производиться из точки $x_{n+1} = x_n + h_n$ с шагом h_{n+1}, который выбирается по следующему правилу. Если локальная погрешность ε_{n+1} на шаге $h_n = x_{n+1} - x_n$ удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{k}, \tag{144}$$

где k – константа, то шаг интегрирования удваивается $h_{n+1} = 2h_n$. Если выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon}{k} \le |\varepsilon_{n+1}| \le \varepsilon, \tag{145}$$

то шаг интегрирования не меняется,

$$h_{n+1} = h_n. \tag{146}$$

Константа k полагается равной 2^s, где s – порядок используемой оценки локальной погрешности метода.

3 Алгоритм

1) Прочитать входные данные.

2) Проверить входные данные

3) Посчитать начальный шаг. Если C=B, то поменять знак шага, поменять границы A и B местами.

4) Вызвать функцию step вычисления y_1.

5) Пока $\mathrm{B} - (\mathrm{x}_0 + \mathrm{h}) >= \mathrm{h}_{\min}$, продолжать вычисления, переходя от точки к точке.

6) Дойти до конца отрезка одним из трех возможных случаев.

7) Вывести в файл число точек интегрирования; число точек, в которых не достигается заданная точность; общее количество минимальных шагов интегрирования. Вывести код завершения.

3.1 Алгоритм функции step

При каждом вызове функция step возвращает шаг, при котором найдено приближенное решение, само решение, переменную «флаг», которая сигнализирует о том, что было применено уменьшение шага, и счетчики:

точек интегрирования, минимальных шагов и точек, в которых не удалось найти решение с требуемой точностью.

1) Увеличить счетчик точек интегрирования на 1.

2) Если шаг <=h_{min} , увеличить счетчик минимальных шагов на 1, $h = h_{min}$.

3) Посчитать решение y_1 при текущем шаге.

4) Уточнять решение, пока не достигнута требуемая точность или шаг не стал слишком мал.

5) Если не достигнута требуемая точность, увеличить счетчик таких точек на 1.

6) Вывести результат в файл.

7) Если точность достаточно мала, увеличить шаг.

8) Вернуть результат работы функции.

4 Тестирование

Тест №1

Подберем входные данные таким образом, чтобы погрешность на шаге ε=0. При этом шаг интегрирования будет удваиваться.

Возьмем функцию

$$y = x^2, x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} y' = 2x \\ y(0) = 0' \end{cases}$$

Входные данные:

0

2

0

0

0.000001

0.000001

Результат работы программы:

Icod=0

0.000000 0.000000

0.200000 0.040000 0.000000 0.200000

0.600000 0.360000 0.000000 0.400000

1.400000 1.960000 0.000000 0.800000

1.999999 3.999996 0.000000 0.599999

2.000000 3.999997 0.000000 0.000001

Число точек интегрирования: 5

Число точек, в которых не достигается заданная точность: 0

Общее количество минимальных шагов интегрирования: 1

Тест №2

Изменим предыдущий тестовый пример таким образом, чтобы шаг был отрицательным.

Возьмем функцию

$$y = x^2, x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} y' = 2x \\ y(2) = 4' \end{cases}$$

Входные данные:

0

2

2

4

0.000001

0.000001

Результат работы программы:

Icod=0

2.000000 4.000000

1.800000 3.240000 0.000000 -0.200000

1.400000 1.960000 0.000000 -0.400000

0.600000 0.360000 0.000000 -0.800000

0.000001 0.000000 0.000000 -0.599999

0.000000 0.000001 0.000000 -0.000001

Число точек интегрирования: 5

Число точек, в которых не достигается заданная точность: 0

Общее количество минимальных шагов интегрирования: 1

Тест №3

Изменим предыдущий тестовый пример таким образом, чтобы f(x) зависела от двух переменных.

Возьмем функцию

$$y = x^2, x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} y' = 2x + y - x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Тогда погрешность на шаге должна $\sim h^4$, так как метод третьего порядка, а погрешность на шаге на один порядок выше.

Входные данные:

0

2

0

0

0.000001

0.1

Результат работы программы:

Icod=0

0.000000 0.000000

0.200000 0.037840 0.000714 0.200000

0.600000 0.323026 0.009489 0.400000

1.400000 1.727338 0.073912 0.800000

1.999999 3.338523 0.017254 0.599999

2.000000 3.338527 0.000000 0.000001

Число точек интегрирования: 5

Число точек, в которых не достигается заданная точность: 0

Общее количество минимальных шагов интегрирования: 1

Тест №4

Подберем входные данные таким образом, чтобы погрешность на шаге ε= h^5.

Из теоретической оценки погрешности имеем $r_h = \frac{-h^5}{24^2*5} u_0^{(5)} + o(h^6)$.

Тогда возьмем

$$y = 24x^5, x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} y' = 120x^4 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Входные данные:

0

2

0

0

0.000001

0.001

Результат работы программы:

Icod=0

0.000000 0.000000

0.200000 0.008000 0.000343 0.200000

0.400000 0.246400 0.000343 0.200000

0.600000 1.867200 0.000343 0.200000

0.800000 7.865600 0.000343 0.200000

1.000000 24.001600 0.000343 0.200000

1.200000 59.721600 0.000343 0.200000

1.400000 129.080000 0.000343 0.200000

1.600000 251.660800 0.000343 0.200000

1.800000	453.499200	0.000343	0.200000
1.999999	768.001280	0.000343	0.199999
2.000000	768.001280	0.000000	0.000001

Число точек интегрирования: 11

Число точек, в которых не достигается заданная точность: 0

Общее количество минимальных шагов интегрирования: 1

Тест №5

Изменим предыдущий тестовый пример таким образом, чтобы шаг уменьшался. Для этого $\varepsilon = \left(\frac{h_0}{2^k}\right)^4$, возьмем k=1 – шаг уменьшится в два раза, а потом будет оставаться постоянным.

Возьмем функцию

$$y = 24x^5, x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} y' = 120x^4 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Входные данные:

0

2

0

0

0.000001

0.0001

Результат работы программы:

Icod=0

0.000000 0.000000

0.100000 0.000250 0.000011 0.100000

0.200000 0.007700 0.000011 0.100000

0.300000 0.058350 0.000011 0.100000

0.400000 0.245800 0.000011 0.100000

0.500000 0.750050 0.000011 0.100000

0.600000 1.866300 0.000011 0.100000

0.700000 4.033750 0.000011 0.100000

0.800000 7.864400 0.000011 0.100000

0.900000 14.171850 0.000011 0.100000

1.000000 24.000100 0.000011 0.100000

1.100000 38.652350 0.000011 0.100000

1.200000 59.719800 0.000011 0.100000

1.300000 89.110450 0.000011 0.100000

1.400000 129.077900 0.000011 0.100000

1.500000 182.250150 0.000011 0.100000

1.600000 251.658400 0.000011 0.100000

1.700000 340.765850 0.000011 0.100000

1.800000 453.496500 0.000011 0.100000

1.999999 767.998580 0.000343 0.199999 <-

2.000000 768.000500 0.000000 0.000001

Число точек интегрирования: 20

Число точек, в которых не достигается заданная точность: 1

Общее количество минимальных шагов интегрирования: 1

Тест №6

Изменим предыдущий тестовый пример таким образом, чтобы требуемая точность не достигалась. Для этого $h_{min} = 0.2$ – первоначальный шаг, точность требует уменьшения шага вдвое.

Возьмем функцию

$$y = 24x^5, x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} y' = 120x^4 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Входные данные:

0

2

0

0

0.2

0.0001

Результат работы программы:

Icod=1

0.000000 0.000000

0.200000 0.008000 0.000343 0.200000 <-

0.400000 0.246400 0.000343 0.200000 <-

0.600000 1.867200 0.000343 0.200000 <-

0.800000 7.865600 0.000343 0.200000 <-

1.000000 24.001600 0.000343 0.200000 <-

1.200000 59.721600 0.000343 0.200000 <-

1.400000 129.080000 0.000343 0.200000 <-

1.600000 251.660800 0.000343 0.200000 <-

1.800000 453.499200 0.000343 0.200000 <-

2.000000 768.003200 0.000343 0.200000 <-

Число точек интегрирования: 10

Число точек, в которых не достигается заданная точность: 10

Общее количество минимальных шагов интегрирования: 10

Тест №7

Изменим предыдущий тестовый пример таким образом, чтобы выдавалась ошибка входных данных. Для этого поменяем границы отрезка местами, теперь A>B.

Возьмем функцию

$$y = 7 * 24 * \frac{32}{31} x^5, x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} y' = 7 * 24 * \frac{32}{31} * 5x^4 \approx 867x^4 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

Входные данные:

2

0

0

0

0.2

0.0001

Результат работы программы:

Icod=2