МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Факультет прикладной математики, информатики и механики

Кафедра математических методов исследования операций

Отчет

о лабораторной работе №8

по теме: "Численное решение уравнений математической физики"

Направление 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Выполнила Матыкина О.В.

Проверила Шабунина З.А.

Воронеж 2022

1 Постановка задачи

Дано уравнение теплопроводности

$$u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ x \in (a,\ b),\ t > 0, \tag{25}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \phi(x),\ x \in [a,\ b], \tag{26}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u_x(a,t) + \beta_1 u(a,t) = \mu_1(t), \qquad t > 0,\\ &\alpha_2 u_x(b,t) + \beta_2 u(b,t) = \mu_2(t), \qquad t > 0. \end{aligned} \tag{27}$$

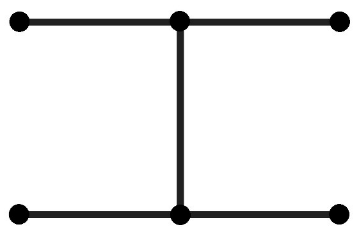


Рис. 1. Шаблон для шеститочечной неявной схемы.

Аппроксимировать задачу (25)–(27) с помощью разностной схемы, построенной по шаблону, изображенному на рис. 1

— со вторым порядком точности по обеим координатам в случае С);

— с весовым параметром σ в случае С).

Найти порядок аппроксимации разностной схемы.

Найти необходимое условие устойчивости разностного оператора по начальным данным с помощью спектрального критерия.

Найти приближенное решение для всех $t \le T$.

1.1 Описание параметров.

Входные параметры:

c^2

$a,\ b$ – границы отрезка, на котором ищется решение;

T – момент времени, до которого производится расчет;

α_1, β_1 – коэффициенты граничного условия в точке a;

α_2, β_2 – коэффициенты граничного условия в точке b;

h – шаг сетки по x;

τ – шаг сетки по времени.

Выходные параметры.

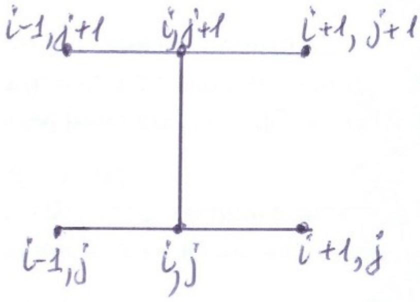
Вывести в выходной файл все входные данные задачи; для каждого временного слоя t_j вывести следующую таблицу данных.

i	x_i	u_{ij}	$u(t_j,x_i)$	r_{ij}

Здесь i — номер точки на временном слое t_j, x_i — координата точки на временном слое, u_{ij} — приближенное решение в точке (x_i,t_j), $u(t_j,x_i)$ — точное решение в точке (x_i,t_j), r_{ij} — погрешность в точке (x_i,t_j).

В конце таблицы вывести максимум модуля погрешности на временном слое $r_j = \max|r_{ij}|$. В конце файла вывести максимум модуля погрешности на сетке $r = \max|r_j|$.

2 Метод решения



Составим следующую двуслойную схему:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{k\sigma}{h^2}\left(y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}\right) + \frac{k(1-\sigma)}{h^2}\left(y_{i-1}^{j} - 2y_i^{j} + y_{i+1}^{j}\right) + \varphi \qquad (1)$$

$i = \overline{1, N-1}$

$j = 0, 1, 2, \ldots \; (j = \overline{0, M-1})$

$0 \le \sigma \le 1$ – параметр.

1). $\sigma = 0$ – схема переходит в простейшую явную схему; ($\varphi = f_i^j$).

2) $\sigma = 1$ – схема переходит в простейшую неявную схему ($\varphi = f_i^j$) (чисто неявная схема).

3) $\sigma = \frac{1}{2}$, $\varphi = f(x_i;\ t_j + \frac{\tau}{2})$ – схема Кранка-Николсона (или схема с полусуммой)

2.1 Аппроксимация

Аппроксимация схемы

Аппроксимация

В качестве центра разложения возьмём точку $(x_i,\ t_j+\frac{\tau}{2})$.

Договоримся: $u(x_i,\ t_j+\frac{\tau}{2}) \equiv u$.

$$\psi_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau}(u_i^{j+1}-u_i^{j}) - \frac{c^2\sigma}{h^2}(u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}) - \frac{c^2(1-\sigma)}{h^2}(u_{i-1}^{j}-2u_i^{j}+u_{i+1}^{j}) -$$
$$-\varphi - \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f\right)_i^{j+1} =$$

$$1)\ \frac{1}{\tau}\left(u(x_i,\ t_{j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2}) - u(x_i,\ t_{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2})\right) = \frac{1}{\tau}\left(u + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\tau/2)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^4) -\right.$$
$$\left. - u + \frac{\tau}{2}\frac{\partial u}{\partial t} - \cancel{\frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} + \frac{(\tau/2)^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^4)\right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^4)$$

$$2)\ u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = u_i - \cancel{h\frac{\partial u_i}{\partial x}} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \cancel{\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4} + O(h^5) -$$
$$-2u_i +$$
$$+ u_i + \cancel{h\frac{\partial u_i}{\partial x}} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \cancel{\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4} + O(h^5) =$$
$$= h^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4} + O(h^6)$$

$$3)\ \frac{\partial^2 u_i^{j+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_i,\ t_{j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} + O(\tau^3)$$

$$\frac{\partial^4 u_i^{j+1}}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u(x_i,\ t_{j+\frac{1}{2}}+\frac{\tau}{2})}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^5 u}{\partial t\,\partial x^4} + \frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^5 u}{\partial t^2\partial x^4} + O(\tau^3)$$

$$\frac{\partial^2 u_i^{j}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_i,\ t_{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} + O(\tau^3)$$

$$\frac{\partial^4 u_i^{j+1}}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u(x_i,\ t_{j+\frac{1}{2}}-\frac{\tau}{2})}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^5 u}{\partial t\,\partial x^4} + \frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4} + O(\tau^3)$$

$$= \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \frac{\tau^2}{24}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\tau^4) -$$
$$-\frac{c^2\sigma}{\cancel{h^2}}\cancel{h^2}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2} + O(\tau^3) + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{h^2\tau}{24}\frac{\partial^5 u}{\partial t\,\partial x^4} + \frac{h^2}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4} + O(h^2\tau^3)\right) -$$

$$-\frac{c^2(1-\sigma)}{\cancel{h^2}}\cancel{h^2}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+\underbrace{\frac{(\tau/2)^2}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}}+O(\tau^3)+\right.$$

$$\left.+\underline{\underline{\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}}}-\frac{h^2\tau}{24}\frac{\partial^5 u}{\partial t\partial x^4}+\frac{h^2}{24}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}+O(h^2\tau^3)\right)-$$

$$-\varphi-\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+ * \cancel{c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+f_i^{j+1/2} \ominus$$

~~$\circledast\ c^2\sigma+c^2(1-\sigma)-c^2$~~

$\circledast\ -c^2\sigma-c^2(1-\sigma)+c^2=0$

$\circledast\ -c^2\sigma+c^2(1-\sigma)=c^2-2c^2\sigma=2c^2\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)$

$$\ominus\ \tau c^2\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+\frac{\tau^2}{8}\left(* \frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-c^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}\right)-$$

$$-\frac{c^2h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\varphi+f_i^{j+1/2}+O(\tau^2+h^2)$$

При $\varphi=f_i^{j+1/2}$, $\sigma=\frac{1}{2}$, $\|\psi\|=O(\tau^2+h^2)$.

Аппроксимация граничных условий

Аппроксимация граничных условий

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varphi & (1)\\ \alpha_1\frac{\partial u(a,t)}{\partial x}+\beta_1 u(a,t)=\mu_1(t) & (2) \quad a\le x\le b\\ \alpha_2\frac{\partial u(b,t)}{\partial x}+\beta_2 u(b,t)=\mu_2(t) & (3) \quad t\ge 0\\ u(x,0)=\mu_3(x)\end{cases}$$

$$u(x_1,t_{j+1})=u(a+h,t_{j+1})=u_0^{j+1}+h\frac{\partial u_0^{j+1}}{\partial x}\Big|_{x=x_0}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_0^{j+1}}{\partial x^2}+O(h^3)$$

$$u(x_{N-1},t_{j+1})=u(b-h,t_{j+1})=u_N^{j+1}-h\frac{\partial u_N^{j+1}}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_N^{j+1}}{\partial x}+O(h^3)$$

Из диф. ур-ия (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x}\Big|^{j+1}_{\substack{x=x_0\\ \text{или}\\ x=x_N}}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\varphi\right)^{j+1}_{\substack{x=x_0\\ \text{или}\\ x=x_N}}$$

Получим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}^{t_{j+1}} = \frac{1}{h}\left(u_1^{j+1} - u_0^{j+1}\right) - \frac{h}{2c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi\right)_{x_0}^{t_{j+1}} + O(h^2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_N}^{t_{j+1}} = \frac{1}{h}\left(u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}\right) + \frac{h}{2c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \varphi\right)_{x_N}^{t_{j+1}} + O(h^2)$$

Далее, заменим $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x_0}^{t_{j+1}} = \frac{u_0^{j+1} - u_0^{j}}{\tau} + O(\tau)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x_N}^{t_{j+1}} = \frac{u_N^{j+1} - u_N^{j}}{\tau} + O(\tau)$$

Подставим в выражения для граничных условий:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0}^{t_{j+1}} = \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} - \frac{h}{2c^2}\,\frac{u_0^{j+1} - u_0^{j}}{\tau} + \frac{h}{2c^2}\varphi + O(\tau h) + O(h^2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_N}^{t_{j+1}} = \frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{h}{2c^2}\,\frac{u_N^{j+1} - u_N^{j}}{\tau} - \frac{h}{2c^2}\varphi + O(\tau h) + O(h^2)$$

Так как для второго порядка аппроксимации схемы необходимо, чтобы $\varphi = f_i^{j+1/2}$, то и здесь аппроксимируем свободный член таким образом. После приведения подобных слагаемых, получаем следующие уравнения для аппроксимации граничных условий:

$$u_0^{j+1}\left(\frac{2c^2}{h} + \frac{h}{\tau} - \frac{2c^2\beta_1}{\alpha_1}\right) - \frac{2c^2}{h}u_1^{j+1} = \frac{h}{\tau}u_0^{j} + hf(x_0, t_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{2c^2}{\alpha_1}\mu_1(t_{j+1}) + O(\tau h) + O(h^2)$$

$$\frac{2c^2}{h}u_{N-1}^{j+1} + \left(-\frac{2c^2}{h} - \frac{h}{\tau} - \frac{2c^2\beta_2}{\alpha_2}\right)u_N^{j+1} = -\frac{h}{\tau}u_N^{j} - hf(x_N, t_{j+1}) - \frac{2c^2}{\alpha_2}\mu_2(t_{j+1}) + O(\tau h) + O(h^2).$$

Порядок аппроксимации остался прежним.

2.2 Устойчивость

Устойчивость

$$\frac{y_n^{j+1}-y_n^j}{\tau} = \frac{c^2\sigma}{h^2}\left(y_{n-1}^{j+1}-2y_n^{j+1}+y_{n+1}^{j+1}\right) + \frac{c^2(1-\sigma)}{h^2}\left(y_{n-1}^{j}-2y_n^{j}+y_{n+1}^{j}\right)+\varphi$$

Для погрешности получаем уравнение

$$\frac{\delta y_n^{j+1}-\delta y_n^j}{\tau} = \frac{c^2\sigma}{h^2}\left(\delta y_{n-1}^{j+1}-2\sigma\delta y_n^{j+1}+\delta y_{n+1}^{j+1}\right) + \frac{c^2(1-\sigma)}{h^2}\left(\delta y_{n-1}^{j}-2\delta y_n^{j}+\delta y_{n+1}^{j}\right) \quad (1)$$

Будем искать решение в виде:

$$\delta y_n^j = \lambda_\alpha^j \cdot e^{i\alpha x_n} \quad (i^2=-1)$$

$$\delta y_{n\pm1}^j = \lambda_\alpha^j e^{i\alpha(x_n\pm h)} = \lambda_\alpha^j e^{i\alpha x_n}\cdot e^{\pm i\alpha h}$$

Подставим в (1):

$$\frac{1}{\tau}\left(\lambda_\alpha^{j+1}e^{i\alpha x_n}-\lambda_\alpha^{j}e^{i\alpha x_n}\right) = \frac{c^2\sigma}{h^2}\left(\lambda_\alpha^{j+1}e^{i\alpha(x_n-h)}-2\lambda_\alpha^{j+1}e^{i\alpha x_n}+\lambda_\alpha^{j+1}e^{i\alpha(x_n+h)}\right) + \frac{c^2(1-\sigma)}{h^2}\left(\lambda_\alpha^{j}e^{i\alpha(x_n-h)}-2\lambda_\alpha^{j}e^{i\alpha x_n}+\lambda_\alpha^{j}e^{i\alpha(x_n+h)}\right)$$

$$\Big| : \lambda_\alpha^j e^{i\alpha x_n}$$

$$\frac{1}{\tau}(\lambda_\alpha - 1) = \frac{c^2\sigma}{h^2}\left(\lambda_\alpha e^{-i\alpha h}-2\lambda_\alpha+\lambda_\alpha e^{i\alpha h}\right) + \frac{c^2(1-\sigma)}{h^2}\left(e^{-i\alpha h}-2+e^{i\alpha h}\right) \Big| \cdot \tau$$

$$e^{-i\alpha h}+e^{i\alpha h} = \cos\alpha h - i\sin\alpha h + \cos\alpha h + i\sin\alpha h = 2\cos\alpha h$$

$$2\cos\alpha h - 2 = -4\sin^2\frac{\alpha h}{2}$$

*

$$\lambda_\alpha - 1 = \frac{c^2\sigma\tau}{h^2}\lambda_\alpha\left(-4\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right) + \frac{c^2(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(-4\sin^2\frac{\alpha h}{2}\right)$$

Т.к. рассматривается схема Кранка-Николсон, то $\sigma = \frac{1}{2}$.

Заменим $\frac{c^2\tau}{2h^2} = k$.

$$\lambda_\alpha + 4\lambda_\alpha\sin^2\frac{\alpha h}{2}k = 1 - 4k\sin^2\frac{\alpha h}{2}$$

$$\lambda_\alpha = \frac{1-4k\sin^2\frac{\alpha h}{2}}{1+4k\sin^2\frac{\alpha h}{2}} \Rightarrow |\lambda_\alpha| \le 1 \text{ для } \forall\alpha.$$

Схема безусловно устойчива.

3 Алгоритм

Составим систему уравнений для трехточечной прогонки.

$$
\begin{cases}
y_0^{j+1}\left(\frac{2c^2}{h}+\frac{h}{\tau}-\frac{2c^2\beta_1}{\alpha_1}\right)-\frac{2c^2}{h}y_1^{j+1}=\frac{h}{\tau}y_0^j+hf\left(x_0,t_{j+\frac{1}{2}}\right)-\\
\qquad -\frac{2c^2}{\alpha_1}\mu_1(t_{j+1})\\
y_{i-1}^{j+1}-\left(2+\frac{h^2}{c^2\tau\sigma}\right)y_i^{j+1}+y_{i+1}^{j+1}=\left(2\frac{1-\sigma}{\sigma}-\frac{h^2}{c^2\tau\sigma}\right)y_i^j-\frac{1-\sigma}{\sigma}\left(y_{i-1}^j+\right.\\
\qquad \left.+y_{i+1}^j\right)-\frac{h^2}{c^2\sigma}f\left(x_i,t_{j+1/2}\right),\ i=\overline{1,N-1}\\
y_{N-1}^{j+1}\cdot\frac{2c^2}{h^2}-\left(\frac{2c^2}{h}+\frac{h}{\tau}+\frac{2c^2\beta_2}{\alpha_2}\right)y_N^{j+1}=-\frac{h}{\tau}y_N^j-hf\left(x_N,t_{j+1/2}\right)-\\
\qquad -\frac{2c^2}{\alpha_1}\mu_2(t_{j+1})
\end{cases}
$$

Условие диагонального преобладания выполняется.

1) Прочитать входные данные.
2) Проверить входные данные.
3) В цикле по j от 0 до M-1:
   а) Создать и заполнить векторы-коэффициенты матрицы для трехточечной прогонки.
   б) Методом трехточечной прогонки решить систему на j-м слое.
   в) В цикле по i от 0 до N вывести результат в файл.
   г) Вывести максимум модуля погрешности на временном слое.
4) Вывести максимум модуля погрешности на сетке.

4 Тестирование

Тест №1

Тестовый пример, на котором полученное численное решение совпадает с точным.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + x^2 - 2t, \ x \in (0, 1), \ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \ x \in [0, 1],$$

$$-u_x(0,t) + u(0,t) = 0,$$
$$u(1,t) = t.$$

Аналитическое решение $u(x,t) = x^2 \cdot t$

Входные данные:

1

0; 1

0.003

-1; 0

0; 1

0.1

0.001

Результат работы программы:

j = 1

i x[i] y[i] u[i] r

0 0.0 0.0 0.0 -0.0

1 0.1 0.0 0.0 -0.0

2 0.2 0.0 0.0 -0.0

3 0.30000000000000004 0.0001 0.0001 -0.0

4 0.4 0.0002 0.0002 -0.0

5 0.5 0.0003 0.0003 -0.0

6 0.6000000000000001 0.0004 0.0004 -0.0

7 0.7000000000000001 0.0005 0.0005 -0.0

8 0.8 0.0006 0.0006 -0.0

9 0.9 0.0008 0.0008 -0.0

10 1.0 0.001 0.001 0.0

r_max = 0

----

j = 2

i x[i] y[i] u[i] r

0 0.0 0.0 0.0 -0.0

1 0.1 0.0 0.0 -0.0

2 0.2 0.0001 0.0001 -0.0

3 0.30000000000000004 0.0002 0.0002 -0.0

4 0.4 0.0003 0.0003 -0.0

5 0.5 0.0005 0.0005 -0.0

6 0.6000000000000001 0.0007 0.0007 -0.0

7 0.7000000000000001 0.001 0.001 -0.0

8 0.8 0.0013 0.0013 -0.0

9 0.9 0.0016 0.0016 -0.0

10 1.0 0.002 0.002 0.0

r_max = 0

----

j = 3

i x[i] y[i] u[i] r

0 0.0 0.0 0.0 -0.0

1 0.1 0.0 0.0 -0.0

2 0.2 0.0001 0.0001 -0.0

3 0.30000000000000004 0.0003 0.0003 -0.0

4 0.4 0.0005 0.0005 -0.0

5 0.5 0.0008 0.0008 -0.0

6 0.6000000000000001 0.0011 0.0011 -0.0

7 0.7000000000000001 0.0015 0.0015 -0.0

8 0.8 0.0019 0.0019 -0.0

9 0.9 0.0024 0.0024 -0.0

10 1.0 0.003 0.003 0.0

r_max = 0

----

r = 0

Видно, что численное решение совпадает с аналитическим.

Тест №2

Тестовый пример, демонстрирующий сходимость численного решения к точному со вторым порядком сходимости;

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \cos(t) + \sin(x), \; x \in (0, \pi), \; t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin(x), \; x \in [0, \pi],$$

$$u_x(0,t) = 1,$$

$$u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -1 + \sin(t),$$

Аналитическое решение $u(x,t) = \sin(x) + \sin(t)$

Входные данные:

1

0; 3.14

0.3

1; 0

1; 1

0.3

0.1

Результат работы программы:

j = 1

i x[i] y[i] u[i] r

0 0.0 0.0962 0.0998 0.0036

1 0.3 0.3946 0.3954 0.0008

2 0.6 0.6646 0.6645 -0.0001

3 0.9 0.8837 0.8832 -0.0005

4 1.2 1.0325 1.0319 -0.0007

5 1.5 1.098 1.0973 -0.0007

6 1.8 1.0742 1.0737 -0.0005

7 2.1 0.9629 0.963 0.0001

8 2.4 0.7731 0.7753 0.0022

9 2.7 0.5179 0.5272 0.0093

10 3.0 0.2072 0.241 0.0337

r_max = 0.03370845309701764

----

j = 2

i x[i] y[i] u[i] r

0 0.0 0.1928 0.1987 0.0058

1 0.3 0.4918 0.4942 0.0024

2 0.6 0.763 0.7633 0.0003

3 0.9 0.9827 0.982 -0.0007

4 1.2 1.1318 1.1307 -0.0011

5 1.5 1.1971 1.1962 -0.0009

6 1.8 1.1726 1.1725 -0.0001

7 2.1 1.0593 1.0619 0.0025

8 2.4 0.8649 0.8741 0.0093

9 2.7 0.6013 0.626 0.0247

10 3.0 0.2886 0.3398 0.0512

r_max = 0.05118880788509133

----

j = 3

i x[i] y[i] u[i] r

0 0.0 0.2882 0.2955 0.0074

1 0.3 0.5875 0.591 0.0036

2 0.6 0.8591 0.8602 0.001

3 0.9 1.0793 1.0788 -0.0004

4 1.2 1.2285 1.2276 -0.0009

5 1.5 1.2934 1.293 -0.0004

6 1.8 1.2675 1.2694 0.0018

7 2.1 1.1517 1.1587 0.0071

8 2.4 0.9534 0.971 0.0176

9 2.7 0.6876 0.7229 0.0353

10 3.0 0.3749 0.4366 0.0617

r_max = 0.0617463677134753

\---

r = 0.0617463677134753

Видно, что решение сходится со вторым порядком точности по обеим переменным.