Модуль 5. Основы теории разностных схем. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Модельная задача для доказательства сходимости. Погрешность разностного оператора. Погрешность аппроксимации и погрешность схемы. Анализ общей погрешности решения.

5.1. Модельная задача для доказательства сходимости

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} 12u'' - 5u = -7 \\ u(0) = 10,\, u(1) = 100 \end{cases} \tag{5.1}$$

решением которой является функция $u(x),\, x \in [0,1]$.

Задача (5.1) есть частный случай задачи (4.1), заданной на отрезке $[a,b] = [0,1]$ при $k(x) = 12,\, q(x) = 5,\, f(x) = 7$ (точка разрыва отсутствует) с граничными условиями $\mu_1 = 10,\, \mu_2 = 100$.

Решение (5.1) существует, единственно и является достаточно гладким.

Численное решение (5.1) можно найти с помощью консервативной разностной схемы, построенной методом баланса. Для этого на отрезке $[0,1]$ определим сетку с узлами $x_i = ih,\, i = \overline{0,n}$ и шагом $h = \frac{1}{n}$ (сетка размерности n). Так как коэффициенты консервативной схемы, построенной методом баланса, принимают значения

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx = 7, \quad i = \overline{1,n-1} \qquad d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx = 5, \quad i = \overline{1,n-1}$$

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = 12, \quad i = \overline{1,n}$$

схема записывается в виде

$$\begin{cases} 12 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = -7,\, i = \overline{1,n-1}, \\ v_0 = 10,\, v_n = 100 \end{cases} \tag{5.2}$$

и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с 3-х диагональной матрицей.

На примере задачи (5.1) и консервативной схемы (5.2) покажем, как можно доказывать сходимость решения разностных схем к решению дифференциальных задач.

5.2. Погрешность схемы и сходимость

Точное решение задачи (5.1) обозначим $u(x), x \in [0,1]$.

Точное решение задачи (5.1) в узлах сетки обозначим $u = (u_0, u_1, \dots u_n) \in R^{n+1}$.

Точное решение разностной схемы (5.2) обозначим $v = (v_0, v_1, \dots v_n) \in R^{n+1}$.

Определение. **Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$z = u - v$, где $z_i = u_i - v_i,\ i = 0, \dots n$. (5.3)

Таким образом, вектор $z = (z_0, z_1, \dots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы.

Для изучения z используем норму $\| z \|$. Среди способов задания нормы отметим:

$\| z \|_1 = \sum_{i=0}^{n} |z_i|$ – норма, порождающая расстояние «городских кварталов»;

$\| z \|_2 = \sqrt{(z,z)}$ – евклидова норма;

$\| z \|_\infty = \max_{i=0,n} |z_i|$ – норма, порождающая расстояние Чебышева.

Определение. Если при сгущении сетки ($n \to +\infty$) погрешность z стремится к нулю ($\| z \| \to 0$), говорят, что схема **сходится.** Если на всех достаточно густых сетках (то есть $\forall n \ge \hat{N}$) для погрешности z верна оценка

$\| z \| \le M h^k$ (5.4)

где $h > 0$ – шаг сетки и $k > 0$, $M > 0$ – константы, не зависящие от h, говорят, что схема **сходится** с **порядком** k.

(так как $\lim_{n \to +\infty} M h^k = 0$, из оценки (5.4) следует сходимость).

Сходимость схемы (5.2) будем доказывать, используя норму $\| z \|_\infty$.

5.3. Погрешность разностного оператора

Разностная схема (5.2) содержит выражения, относящиеся к категории **разностных операторов**, а именно, выражения**:**

$$\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2},\ i=1,\dots n-1.$$

Для указанных выше выражений используются обозначения

$$[v_{x\bar{x}}]_i=\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2},\ i=1,\dots n-1. \qquad (5.5)$$

Каждый из операторов $[v_{x\bar{x}}]_i,\ i=1,\dots n-1$ называется **центральным разностным оператором для вычисления второй производной на трехточечном шаблоне**, то есть в точке x_i с использованием точек $x_{i+1},\ x_{i-1}$ (далее кратко – разностный оператор).

Покажем, почему оператор вида (5.5), не содержащий производных, может использоваться для численного дифференцирования.

Пусть $u(x)$ – произвольная достаточно гладкая функция, заданная на отрезке $x\in[0,1]$.

Пусть на отрезке $x\in[0,1]$ задана сетка с узлами $x_i=ih,\ i=0,n$ и шагом $h=\dfrac{1}{n}$.

Рассмотрим разностный оператор $[u_{x\bar{x}}]_i$, заданный в узле x_i.

$$[u_{x\bar{x}}]_i=\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}. \qquad (5.6)$$

Определение. **Погрешностью разностного оператора** $[u_{x\bar{x}}]_i$, заданного в узле x_i, называется разность значения производной $u''(x_i)$, для вычисления которой используется оператор, и значения самого оператора:

$$\psi^*(x_i)=u''(x_i)-[u_{x\bar{x}}]_i\ . \qquad (5.7)$$

Исследуем погрешность оператора. Для этого запишем ее в виде

$$\psi^*(x_i)=u''(x_i)-\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} \qquad (5.8)$$

и каждое слагаемое (5.8) представим формулой Тейлора в окрестности точки x_i *(при изучении погрешности разностных операторов формула Тейлора выписывается в окрестности той точки, в которой нужно вычислить производную).*

Слагаемые $u''(x_i)$ и $u_i=u(x_i)$ уже представлены формулой Тейлора в точке x_i.

Для u_{i+1} и u_{i-1} формулу Тейлора запишем в виде

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u(x_i) + u'(x_i)\cdot h + u''(x_i)\cdot\frac{h^2}{2!} + u'''(x_i)\cdot\frac{h^3}{3!} + u^{IV}(\xi_i)\cdot\frac{h^4}{4!} \qquad (5.9)$$

где неизвестная средняя точка обозначена через $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$;

$$u_{i-1} = u(x_i - h) = u(x_i) - u'(x_i)\cdot h + u''(x_i)\cdot\frac{h^2}{2!} - u'''(x_i)\cdot\frac{h^3}{3!} + u^{IV}(\eta_i)\cdot\frac{h^4}{4!} \qquad (5.10)$$

где неизвестная средняя точка обозначена через $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Так как

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2\cdot u(x_i) + 2\cdot u''(x_i)\cdot\frac{h^2}{2} + \left(u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)\right)\cdot\frac{h^4}{24}$$

при подстановке данной суммы в формулу (5.8) получим

$$\psi^*(x_i) = u''(x_i) - \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} =$$

$$= u''(x_i) - \frac{2\cdot u(x_i) + u''(x_i)\cdot h^2 + \left(u(\xi_i) + u(\eta_i)\right)\cdot\frac{h^4}{24} - 2u_i}{h^2} =$$

$$= -(u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i))\cdot\frac{h^2}{24}$$

Теорема (о погрешности оператора). Пусть $u(x)$ – некоторая достаточно гладкая функция, заданная на отрезке $x \in [0,1]$. Пусть на отрезке $x \in [0,1]$ задана сетка с узлами $x_i = ih,\ i = \overline{0,n}$ и шагом $h = \frac{1}{n}$. Тогда во внутренних узлах сетки, то есть в узлах $x_i = ih,\ i = \overline{1, n-1}$, разностный оператор $\left[u_{x\bar{x}}\right]_i$ аппроксимирует вторую производную $u''(x_i)$ и для погрешности разностного оператора верно:

$$\psi^*(x_i) = -(u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i))\cdot\frac{h^2}{24}, \qquad (5.11)$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – некоторые неизвестные средние точки; также верно

$$\psi^*(x_i) = -u^{IV}(x_i)\cdot\frac{h^2}{12} + o(h^2). \qquad (5.12)$$

Доказательство. Представление погрешности в виде (5.11) доказано выше.

Чтобы доказать (5.12), используем другой способ записи формулы Тейлора, а именно, u_{i+1} и u_{i-1} запишем в виде

$$u_{i+1} = u(x_i + h) =$$

$$= u(x_i) + u'(x_i) \cdot h + u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2!} + u'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{4!} + o(h^4)$$

$$u_{i-1} = u(x_i - h) =$$

$$= u(x_i) - u'(x_i) \cdot h + u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2!} - u'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{4!} + o(h^4)$$

откуда следует

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2 \cdot u(x_i) + 2 \cdot u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + 2 \cdot u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{24} + o(h^4).$$

При подстановке данной суммы в формулу погрешности оператора (5.8) получим

$$\psi^*(x_i) = u''(x_i) - \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} =$$

$$= u''(x_i) - \frac{2 \cdot u(x_i) + u''(x_i) \cdot h^2 + u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{12} + o(h^4) - 2u_i}{h^2} =$$

$$= -u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^2}{12} + o(h^2)$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть $u(x)$ – полином степени не выше 3. **Тогда разностный оператор $[u_{x\bar{x}}]_i$ аппроксимирует вторую производную $u''(x_i)$ абсолютно точно**, то есть

$$u''(x_i) = [u_{x\bar{x}}]_i \tag{5.13}$$

Доказательство. Если $u(x)$ – полином степени не выше 3, то $u^{IV}(x) \equiv 0$. Поэтому из (5.11) следует $\psi^*(x_i) = 0$.

Следствие 2. Для погрешности разностного оператора в узлах $x_i = ih, i = \overline{1, n-1}$, верна оценка

$$\left| \psi^*(x_i) \right| \le \frac{h^2}{12} \cdot \max_{x \in [x_{i-1};\, x_{i+1}]} |u^{IV}(x)|. \tag{5.14}$$

Доказательство. Действительно, из свойства (5.11) получим

$$|\psi^*(x_i)| \le \frac{h^2}{24} \cdot |u^{\text{IV}}(\xi_i)| + \frac{h^2}{24} \cdot |u^{\text{IV}}(\eta_i)| \le$$

$$\le \frac{h^2}{24} \cdot \max_{x \in [x_i; x_{i+1}]} |u^{IV}(x)| + \frac{h^2}{24} \cdot \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} |u^{IV}(x)| \le \frac{h^2}{12} \cdot \max_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} |u^{\text{IV}}(x)|$$

Из (5.11), (5.12), (5.14) следует: **разностный оператор $[u_{x\bar{x}}]_i$ можно использовать для вычисления второй производной $u''(x_i)$:** *при измельчении сетки погрешность оператора стремится к нулю.*

5.4. Погрешность аппроксимации (для схемы)

Для уравнений произвольного вида **невязкой** называют *разность левой и правой частей уравнения.*

Например, запишем уравнение $5x = 15$, тогда $5x - 15$ – невязка. Если в качестве x взять точное решение уравнения, невязка обратится в ноль: $x = 3$ решение, $5 \times 3 = 15$, при этом невязка $5 \times 3 - 15 = 0$.

Если в качестве x взять значение, не являющееся решением, *невязка $5x - 15$ показывает, насколько различаются левая и правая части уравнения при выбранном x.*

Определение. Для произвольной дифференциальной задачи и разностной схемы **погрешностью аппроксимации** ψ называют *невязку разностной схемы, при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи.*

Определение. Для задачи (5.1) и разностной схемы (5.2) **погрешностью аппроксимации** ψ называют *невязку разностной схемы (5.2), при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи (5.1),* при этом (по определению невязки):

$$\psi_0 = u_0 - 10 \tag{5.15}$$

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i + 7, i = 1, \dots n-1 \tag{5.16}$$

$$\psi_n = u_n - 100 \tag{5.17}$$

Таким образом, $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots \psi_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность аппроксимации.

Вектор ψ имеет столько компонент, сколько уравнений в разностной схеме.

Среди способов задания нормы $\|\psi\|$ отметим $\|\psi\|_1, \|\psi\|_2, \|\psi\|_\infty$. При изучении задачи (5.1) и схемы (5.2) будем использовать $\|\psi\|_\infty$.

5.5. Связь погрешности схемы и погрешности аппроксимации

Теорема (о связи погрешностей z и ψ). Для задачи (5.1) и схемы (5.2) компоненты погрешности z и компоненты погрешности аппроксимации ψ связаны системой уравнений

$$\begin{cases} 12 \cdot \dfrac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i = \psi_i, i = \overline{1, n-1}, \\ z_0 = \psi_0, z_n = \psi_n \end{cases} \tag{5.18}$$

СЛАУ (5.8) имеет такую же структуру (такую же матрицу), как СЛАУ (5.2). В левой части (5.18) вместо v записывается погрешность схемы z, а в правой – вместо правой части (5.2) записывается погрешность аппроксимации ψ.

Доказательство. Компоненту погрешности z_0 запишем по определению: $z_0 = u_0 - v_0$. Затем, поскольку v является точным решением схемы (5.2), используем равенство $v_0 = 10$ и обнаружим, что $u_0 - 10$ есть определение компоненты погрешности аппроксимации ψ_0, см. (5.15):

$$z_0 = u_0 - v_0 = u_0 - 10 = \psi_0$$

Аналогично запишем компоненту погрешности z_n (по определению она равна $u_n - v_n$). Затем, поскольку v является точным решением схемы (5.2), используем равенство $v_n = 100$ и обнаружим, что $u_n - 100$ есть определение компоненты погрешности аппроксимации ψ_n, см. (5.17):

$$z_n = u_n - v_n = u_n - 100 = \psi_n$$

Для индексов $i = \overline{1, n-1}$ в левую часть уравнений (5.2) вместо компонент вектора v запишем компоненты погрешности z, затем подставим определения компонент погрешности, то есть $z_i = u_i - v_i$, $i = \overline{1, n-1}$, см. (5.3), и перегруппируем слагаемые:

$$12 \cdot \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i =$$

$$= 12 \cdot \frac{(u_{i-1} - v_{i-1}) - 2(u_i - v_i) + (u_{i+1} - v_{i+1})}{h^2} - 5(u_i - v_i) =$$

$$= \left(12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i\right) - \left(12 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i\right)$$

Поскольку v является точным решением схемы (5.2), используем равенства

$$12 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = -7,\ i = \overline{1, n-1}$$

и выражения во вторых парах скобок в проведенных выше выкладках заменим на (-7):

$$12 \cdot \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i = \left(12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i\right) + 7 = \psi_i,\ i = \overline{1, n-1}$$

В соответствии с определением (5.16) левые части уравнений (5.18) при $i = \overline{1, n-1}$ оказались равными компонентам погрешности аппроксимации.

Теорема доказана.

5.6. Оценка погрешности аппроксимации

Теорема (об оценке погрешности ψ). Разностная схема (5.2) аппроксимирует задачу (5.1) абсолютно точно на границе

$$\psi_0 = 0,\ \psi_n = 0 \tag{5.19}$$

и со вторым порядком на основном уравнении: верна оценка

$$\max_{i=\overline{1,n-1}} |\psi_i| \le \hat{M}h^2, \tag{5.20}$$

где $\hat{M} = \max\limits_{x\in[0,1]} |u^{\mathrm{IV}}(x)|$, значение $\hat{M}$ не зависит от h.

Доказательство. Так как решение задачи (5.1) соответствует граничным условиям

$$u_0 = 10 \quad (u(0) = 10),$$

$$u_n = 100 \quad (u(1) = 100),$$

для начальной и последней компонент погрешности ψ верно

$$\psi_0 = u_0 - 10 = 0,$$

$$\psi_n = u_n - 100 = 0.$$

Тогда говорят, что аппроксимация граничных условий является абсолютно точной.

Компоненты погрешности ψ с номерами $i = \overline{1, n-1}$ запишем по определению

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i + 7.$$

Для точного решения задачи (5.1) основное (дифференциальное) уравнение выполняется в любой точке отрезка $x \in [0,1]$. Для каждого из узлов сетки x_i, $i = \overline{1, n-1}$ запишем

$$12 \cdot u''(x_i) - 5u(x_i) + 7 = 0$$

и вычтем данное (равное нулю) выражение из компоненты погрешности аппроксимации:

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i + 7 - \{12 \cdot u''(x_i) - 5u(x_i) + 7\},\ i = \overline{1, n-1}.$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$\psi_i = \left(12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 12 \cdot u''(x_i)\right) - \left(5u_i - 5u(x_i)\right) + \left(7 - 7\right) =$$
$$= 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 12 \cdot u''(x_i) = -12 \cdot \psi^*(x_i)$$

где $\psi^*(x_i)$ есть погрешность разностного оператора $[u_{x\bar{x}}]_i$ в точке x_i, см. (5.8).

Таким образом, **компонента ψ_i вектора погрешности аппроксимации ψ линейно зависит от погрешности разностного оператора в точке** x_i: $\psi_i = -12 \cdot \psi^*(x_i)$.

С учетом свойств (5.11) и (5.12) для каждого $i = \overline{1, n-1}$ получим

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{h^2}{24} \{u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)\}. \tag{5.21}$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ – неизвестные средние точки;

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{h^2}{12} u^{IV}(x_i) + o(h^2). \tag{5.22}$$

На базе (5.21) для каждой компоненты ψ_i с индексами $i = \overline{1, n-1}$ строим оценку

$$|\psi_i| \le \frac{h^2}{2} |u^{IV}(\xi_i)| + \frac{h^2}{2} |u^{IV}(\eta_i)| \le \max_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} |u^{IV}(x)| \cdot h^2 \tag{5.23}$$

Чтобы оценка была справедлива для всех индексов $i = \overline{1, n-1}$ одновременно, расширим диапазон значений x, на котором берется максимум:

$$|\psi_i| \le \max_{x \in [x_0, x_n]} |u^{IV}(x)| \cdot h^2 \tag{5.24}$$

Это означает, что $\max\limits_{i=\overline{1,n-1}} |\psi_i| \le \hat{M}h^2$,

где $\hat{M} = \max\limits_{x\in[0,1]} |u^{\mathrm{IV}}(x)|$ и значение $\hat{M}$ не зависит от h.

Теорема доказана.

Следствие. Так как $\max\limits_{i=\overline{0,n}} |\psi_i| = \max\limits_{i=\overline{1,n-1}} |\psi_i|$ (в силу $\psi_0 = \psi_n = 0$), верна оценка

$$\|\psi\|_\infty \le \hat{M} \cdot h^2. \tag{5.25}$$

Для модельной задачи (5.1) и консервативной разностной схемы (5.2) доказано, что схема аппроксимирует модельную задачу с порядком 2.

5.7. Аппроксимация, устойчивость, сходимость

Определение. Если при сгущении сетки ($n \to +\infty$) погрешность ψ стремится к нулю ($\|\psi\| \to 0$), говорят, что разностная схема **аппроксимирует** дифференциальную задачу. Если на всех густых сетках (при $\forall n \ge \hat{N}$) верна оценка

$$\|\psi\| \le \hat{M}h^k \tag{5.26}$$

где $h > 0$ – шаг сетки и $k > 0$, $\hat{M} > 0$ – константы, не зависящие от h, говорят, что **разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком k**.

Определение. Если на всех густых сетках (при $\forall n \ge \hat{N}$) верна оценка

$$\|z\| \le C\|\psi\|, \tag{5.27}$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от h, говорят, что **разностная схема устойчива**.

Если на всех густых сетках (при $\forall n \ge \hat{N}$) неравенства (5.26) и (5.27) выполнены и в них использован один и тот же способ задания нормы погрешности ψ, то

$$\|z\| \le C\|\psi\| \le C \cdot \hat{M} \cdot h^k = M \cdot h^k, \tag{5.28}$$

где $h > 0$ – шаг сетки и $k > 0, M = C \cdot \hat{M} > 0$ – константы, не зависящие от h.

Неравенство (5.28) означает, что в соответствии с определением (5.4) **разностная схема сходится с порядком k**.

Теорема (о сходимости разностных схем). Если схема устойчива и оценки (5.26) и (5.27) выполнены в одной и той же норме для погрешности аппроксимации, аппроксимация с порядком k влечет сходимость с тем же порядком.

5.8. Доказательство устойчивости схемы для модельной задачи

Для доказательства устойчивости схемы (5.2) используем СЛАУ (5.18), потому что (5.18) связывает компоненты погрешности z и компоненты погрешности аппроксимации ψ .

С учетом того, что схема (5.2) аппроксимирует дифференциальное уравнение на граничных условиях абсолютно точно, то есть $\psi_0 = \psi_n = 0$, запишем (5.18) в виде

$$\begin{cases} 12 \cdot \dfrac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i = \psi_i, i = 1, n-1, \\ z_0 = 0, z_n = 0 \end{cases} \tag{5.29}$$

Теорема (об устойчивости). Консервативная разностная схема (5.2) устойчива:

$$\| z \|_\infty \le C \cdot \| \psi \|_\infty \tag{5.30}$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от h .

Доказательство. Запишем канонический вид СЛАУ с 3-х диагональной матрицей:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i, i = 1, n-1, \\ y_0 - \kappa_1 y_1 = \mu_1, y_n - \kappa_2 y_{n-1} = \mu_2 \end{cases} \tag{5.31}$$

Неизвестным в системе (5.31) является вектор $y = (y_0, y_1, \ldots y_n) \in R^{n+1}$.

Коэффициенты прямого хода прогонки вычисляются по формулам:

$$\alpha_1 = \kappa_1, \beta_1 = \mu_1$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, i = 1, n-1, \ \beta_{i+1} = \frac{\beta_i A_i + \varphi_i}{C_i - \alpha_i A_i}, i = 1, n-1$$

Обратный ход прогонки стартует с вычисления $y_n = \dfrac{\mu_2 - \kappa_2 \beta_n}{1 - \kappa_2 \alpha_n}$.

Остальные компоненты искомого вектора $y \in R^{n+1}$ вычисляются последовательно (от старшего индекса к младшему) по формулам $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, \ldots 0$.

Рассмотрим СЛАУ (5.29) как частный случай СЛАУ (5.31).

В роли $y \in R^{n+1}$ выступает $z \in R^{n+1}$, коэффициентам СЛАУ (5.31) соответствуют

$$A_i = B_i = \frac{12}{h^2}, C_i = \frac{24}{h^2} + 5, i = 1, n-1$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \varphi_i = -\psi_i, i = \overline{1, n-1}.$$

Несложно показать, что для (5.29) условия *Теоремы о применения прогонки* выполнены:

$$|A_i| \neq 0; |B_i| \neq 0; \; |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \; i = \overline{1, n-1},$$

$$|\kappa_1| = 0 \leq 1; |\kappa_2| = 0 < 1,$$

и при любых $\psi_i, i = \overline{1, n-1}$ СЛАУ (5.29) имеет единственное решение.

Оценим коэффициенты прямого хода прогонки, затем оценим z с помощью $\beta_i, i = \overline{1, n}$, затем получим оценки для $\beta_i, i = \overline{1, n}$ с помощью ψ, в заключение построим оценку z с помощью ψ.

Для прямого хода прогонки задачи (5.29) справедливо

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \tag{5.32}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\frac{12}{h^2}}{\frac{24}{h^2} + 5 - \alpha_i \frac{12}{h^2}} = \frac{1}{2 - \alpha_i + \frac{5}{12} h^2}, i = \overline{1, n-1} \tag{5.33}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\beta_i \frac{12}{h^2} - \psi_i}{\frac{24}{h^2} + 5 - \alpha_i \frac{12}{h^2}} = \frac{\beta_i - \frac{\psi_i h^2}{12}}{2 - \alpha_i + \frac{5h^2}{12}}, i = \overline{1, n-1} \tag{5.34}$$

При изучении устойчивости схемы (5.2) метод прогонки используется не для решения СЛАУ (5.29), а для оценки z с помощью ψ.

Решение СЛАУ можно представить как

$$z_n = 0, \; z_i = \alpha_{i+1} z_{i+1} + \beta_{i+1}, \; i = n-1, \ldots 0, \text{ при этом } z_0 = 0. \tag{5.35}$$

Оценим компоненты z, используя значения $\beta_i, i = \overline{1, n}$ и оценки $|\alpha_i| \leq 1, i = 1, \ldots n$, гарантированные *Теоремой о применении прогонки*. Так как $z_n = 0$, получим

$$|z_{n-1}| = |\alpha_n z_n + \beta_n| = |\beta_n|$$

$$|z_{n-2}| = |\alpha_{n-1} z_{n-1} + \beta_{n-1}| \leq |\alpha_{n-1}| |z_{n-1}| + |\beta_{n-1}| \leq$$
$$\leq |z_{n-1}| + |\beta_{n-1}| \leq |\beta_n| + |\beta_{n-1}|$$

Для произвольного индекса $j = n-3,...1$:

$$\begin{aligned}&\left|z_j\right| = \left|\alpha_{j+1} z_{j+1} + \beta_{j+1}\right| \le \left|z_{j+1}\right| + \left|\beta_{j+1}\right| \le \\ &\le \left|\alpha_{j+2} z_{j+2} + \beta_{j+2}\right| + \left|\beta_{j+1}\right| \le \left|z_{j+2}\right| + \left|\beta_{j+2}\right| + \left|\beta_{j+1}\right| \le ... \\ &\le \left|z_n\right| + \left|\ \beta_n\right| + ... + \left|\beta_{j+2}\right| + \left|\beta_{j+1}\right| = |\ \beta_n\ | + |\ \beta_{n-1}\ | + ... + |\ \beta_{j+1}\ |\end{aligned} \tag{5.36}$$

В частности, для индекса $j = 1$ верно

$$\left|z_1\right| = \left|\alpha_2 z_2 + \beta_2\right| \le \left|z_2\right| + \left|\beta_2\right| \le \left|\alpha_3 z_3 + \beta_3\right| + \left|\beta_2\right| \le \left|\ \beta_n\right| + ... + \left|\beta_3\right| + \left|\beta_2\right|$$

Оценка, справедливая для любого индекса $j = 1,...n-1$, **имеет вид**

$$\left|z_j\right| \le \sum_{i=2}^{n} \left|\beta_i\right| \le (n-1) \cdot \max_{i=2,n} \left|\beta_i\right| \tag{5.37}$$

Оценим β_i, $i = 1, n$, **используя значения компонент** ψ. Запишем (5.34) в виде

$$\beta_{i+1} = \frac{\beta_i - \dfrac{\psi_i h^2}{12}}{2 - \alpha_i + \dfrac{5h^2}{12}} = \frac{\beta_i - \dfrac{\psi_i h^2}{12}}{1 + \dfrac{5h^2}{12} + (1-\alpha_i)}$$

Так как $1 - \alpha_i \ge 0, i = 1, n$, и $h^2 > 0$, запишем оценку

$$\left|\beta_{i+1}\right| = \left|\frac{\beta_i - \psi_i h^2}{1 + \dfrac{5h^2}{12} + (1-\alpha_i)}\right| \le \left|\beta_i - \psi_i h^2\right| \le \left|\beta_i\right| + \left|\psi_i\right| \cdot h^2 \tag{5.38}$$

Так как $\beta_1 = 0$, получим

$$\begin{aligned}&\left|\beta_2\right| \le \left|\beta_1\right| + \left|\psi_1\right| \cdot \frac{h}{12}^2 = \left|\psi_1\right| \cdot \frac{h^2}{12} \\ &\left|\beta_3\right| \le \left|\beta_2\right| + \left|\psi_2\right| \cdot \frac{h}{12}^2 \le \left|\beta_1\right| + \left|\psi_1\right| \cdot \frac{h^2}{12} + \left|\psi_2\right| \cdot \frac{h^2}{12} = \left|\psi_1\right| \cdot \frac{h}{12}^2 + \left|\psi_2\right| \cdot \frac{h^2}{12}\end{aligned}$$

Для произвольного индекса $i = 3,...n$:

$$\left|\beta_{i+1}\right| \le \left|\beta_i\right| + \left|\psi_i\right| \cdot \frac{h^2}{12} \le \left|\beta_{i-1}\right| + \left|\psi_{i-1}\right| \cdot \frac{h^2}{12} + \left|\psi_i\right| \cdot \frac{h^2}{12} \le \ldots$$

$$\le \left|\beta_1\right| + \left|\psi_1\right| \cdot \frac{h^2}{12} + \left|\psi_2\right| \cdot \frac{h^2}{12} + \ldots + \left|\psi_i\right| \cdot \frac{h^2}{12} = \qquad (5.39)$$

$$= \frac{h^2}{12} \cdot \left(\left|\psi_1\right| + \ldots + \left|\psi_i\right| \right)$$

В частности, для $i = n$ верно

$$\left|\beta_n\right| \le \left|\beta_{n-1}\right| + \left|\psi_{n-1}\right| \cdot \frac{h^2}{12} \le \left|\beta_{n-2}\right| + \left|\psi_{n-2}\right| \cdot \frac{h^2}{12} + \left|\psi_{n-1}\right| \cdot \frac{h^2}{12} \le \ldots$$

$$\le \frac{h^2}{12} \cdot \left(\left|\psi_1\right| + \ldots + \left|\psi_{n-1}\right| \right)$$

Оценка, справедливая для любого индекса $i = 1, \ldots n$, имеет вид

$$\left|\beta_i\right| \le \frac{h^2}{12} \cdot \sum_{s=1}^{n-1} \left|\psi_s\right| \le (n-1) \cdot \frac{h^2}{12} \cdot \max_{s=\overline{1,n-1}} \left|\psi_s\right| \le \frac{h}{12} \cdot \max_{s=\overline{1,n-1}} \left|\psi_s\right| \qquad (5.40)$$

Оценим компоненты z, используя значения компонент ψ и оценки (5.37), (5.40):

$$\left|z_j\right| \le (n-1) \cdot \max_{i=\overline{2,n}} \left|\beta_i\right| \le (n-1) \cdot \frac{h}{12} \cdot \max_{s=\overline{1,n-1}} \left|\psi_s\right| \le \frac{1}{12} \cdot \max_{s=\overline{1,n-1}} \left|\psi_s\right|$$

Таким образом,

$$\max_{j=\overline{1,n-1}} \left|z_j\right| \le \frac{1}{12} \cdot \max_{s=\overline{1,n-1}} \left|\psi_s\right| \qquad (5.41)$$

Так как $\psi_0 = \psi_n = 0$ и $z_0 = z_n = 0$, верно

$$\max_{i=\overline{0,n}} \left|z_i\right| \le \frac{1}{12} \cdot \max_{i=\overline{0,n}} \left|\psi_i\right|. \qquad (5.42)$$

Используя обозначения нормы, (5.42) запишем в виде

$$\left\| z \right\|_\infty \le \frac{1}{12} \cdot \left\| \psi \right\|_\infty \qquad (5.43)$$

Константа $C = \dfrac{1}{12} > 0$ и не зависит от шага сетки. Теорема доказана.

5.9. Завершение доказательства сходимости

Теорема (о сходимости схемы модельной задачи). Консервативная схема (5.2), построенная для задачи (5.1) методом баланса, сходится с порядком 2:

$$\| z \|_\infty \le Mh^2 \tag{5.44}$$

где h – шаг сетки, $M = \frac{1}{12} \cdot \max\limits_{x \in [0,1]} | u^{\mathrm{IV}}(x) |$, M не зависит от h.

Доказательство: Из (5.43), (5.25) и (5.20) следует:

$$\| z \|_\infty \le \frac{1}{12} \cdot \| \psi \|_\infty \le \frac{1}{12} \hat{M} h^2 = \frac{1}{12} \cdot \max\limits_{x \in [0:1]} | u^{IV}(x) | \cdot h^2 ,$$

что и требовалось доказать.

5.10. Анализ общей погрешности

Рассмотрим задачу (5.1) и разностную схему (5.2). Напомним, что

$u(x), x \in [0,1]$ есть точное решение задачи (5.1),

$u = (u_0, u_1, \ldots u_n) \in R^{n+1}$ есть точное решение задачи (5.1) в узлах сетки,

$v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ есть точное решение разностной схемы (5.2).

Решение разностной схемы, полученное практически, то есть содержащее в себе погрешность инициализации коэффициентов СЛАУ и погрешность вычислений, обозначим $\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \ldots \tilde{v}_n) \in R^{n+1}$.

Определение. **Общей погрешностью** решения задачи (5.1) с помощью разностной схемы (5.2) называют разность точного решения задачи (5.1) и решения разностной схемы (5.2), полученного практически:

$z^{общ} = u - \tilde{v}$, то есть $z_i^{общ} = u_i - \tilde{v}_i, i = 0, \ldots n$

Определение. **Вычислительной погрешностью** решения задачи (5.2) называют разность точного решения разностной схемы и решения, полученного практически:

$$z^{вп} = v - \tilde{v} \text{, то есть } z_i^{вп} = v_i - \tilde{v}_i, i = 0, \ldots n \tag{5.46}$$

Напомним **определение погрешности схемы**: **погрешность схемы** есть погрешность решения задачи (5.1) с помощью разностной схемы (5.2), то есть разность точного решения (5.1) и точного решения (5.2):

$$z = u - v \text{, то есть } z_i = u_i - v_i, i = 0, \ldots n . \tag{5.47}$$

Таким образом,

$z = (z_0, z_1, \ldots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы,

$z^{вп} = (z_0^{вп}, z_1^{вп}, \ldots z_n^{вп}) \in R^{n+1}$ есть вычислительная погрешность,

$z^{общ} = (z_0^{общ}, z_1^{общ}, \ldots z_n^{общ}) \in R^{n+1}$ есть общая погрешность.

Основные свойства общей погрешности состоят в том, что:

$$z^{общ} = u - \widetilde{v} = u - v + v - \widetilde{v} = z + z^{вп} \quad (5.47)$$

(общая погрешность есть сумма погрешности схемы и вычислительной погрешности);

$$\| z^{общ} \| \le \| z \| + \| z^{вп} \| \quad (5.48)$$

(норма общей погрешности оценивается сверху суммой норм погрешности схемы и вычислительной погрешности).

Выводы

Пусть $\varepsilon > 0$ – параметр для контроля общей погрешности (например, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$). Чтобы выполнялось

$$\| z^{общ} \| \le \varepsilon$$

- шаг сетки h должен быть достаточно мал (чем он меньше, тем меньше погрешность схемы);
- для решения СЛАУ (5.2) должен быть использован вычислительно устойчивый метод (например, прогонка вычислительно устойчива: изолированная вычислительная ошибка в дальнейшем не нарастает);
- размерность схемы (5.2), равная $n+1$, не должна быть слишком велика (чем больше уравнений содержит СЛАУ, тем больше арифметических действий нужно выполнить для ее решения и тем больше вычислительная погрешность).

Так как шаг сетки h и размерность СЛАУ (5.2) связаны: $h = \frac{1}{n}$, существует «оптимальный» диапазон значений n: нужны не слишком малые и не слишком большие значения.