Модуль 4. Стационарное уравнение теплопроводности. Консервативные разностные схемы для решения модельных задач (применение метода баланса)

4.1. «Разрывная модельная задача»

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

решением которой является функция $u(x), x \in [a,b]$. Коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ и значения μ_1 и μ_2 считаем заданными. При выполнении условий

$$\begin{cases} k(x) > 0, x \in [a,b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a,b] \end{cases} \tag{4.1*}$$

задача (4.1) классифицируется как **первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности**.

Дифференциальное уравнение задачи (4.1) представляет собой запись закона сохранения тепла для тонкого и однородного в каждом поперечном сечении стержня. Левый конец стержня соответствует точке $x = a$, правый – точке $x = b$. Длина стержня равна l, причем $l = b - a$. Уравнение (4.1) есть **дифференциальная форма записи закона сохранения тепла на отрезке** $[a,b]$.

Функция $u(x)$ описывает **стационарное (не зависящее от времени) распределение температуры** на стержне. Значение $u(x)$ есть температура стержня в поперечном сечении с координатой $x \in [a,b]$. В соответствии с граничными условиями задачи (4.1), на левом и правом концах стержня поддерживаются постоянные (по времени) температуры μ_1 и μ_2 соответственно.

Коэффициенты дифференциального уравнения имеют следующий смысл:

- $k(x) > 0$ есть коэффициент теплопроводности в поперечном сечении стержня с координатой $x \in [a,b]$;
- $q(x) \geq 0$ есть интенсивность теплообмена стержня с окружающей средой через контур поперечного сечения с координатой $x \in [a,b]$;
- $f(x)$ есть плотность источников (стоков) тепла в поперечном сечении стержня с координатой $x \in [a,b]$ – например, вследствие выделения или поглощения тепла химических реакций или электрических токов.

В рамках модели (4.1) теплообмен стержня с окружающей средой описывается законом Ньютона: тепло, поступающее через контур поперечного сечения с координатой x, пропорционально разности температуры стержня $u(x)$ и температуры окружающей среды $\theta(x)$:

$$-q(x)\,(u(x)-\theta(x)).$$

Если $q(x)\neq 0$, коэффициент $f(x)$ в уравнении (4.1) включает в себя слагаемое $q(x)\,\theta(x)$.

Функцию

$$w(x) = -k(x)u'(x)$$

называют **функцией теплового потока**. В соответствии с законом Фурье тепловой поток через поперечное сечение стержня пропорционален градиенту температур в том же сечении. Дифференциальное уравнение задачи (4.1) иногда записывают в виде

$$\frac{d\,w(x)}{dx} + q(x)u(x) - f(x) = 0$$

Далее задачу (4.1) рассматриваем в каждом из двух случаев:

- коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ при $x\in[a,b]$ являются достаточно гладкими;
- коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ являются достаточно гладкими за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода, расположенных на отрезке $[a,b]$.

Второе предположение оказывается полезным при изучении объектов («стержней»), составленных из материалов с разными физическими свойствами или помещенных в среду, параметры которой существенно неоднородны по координате $x\in[a,b]$.

Формулировки теорем о существовании и единственности решения задачи (4.1) в случае гладких и разрывных коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ см. в учебной литературе.

Если коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ имеют точки разрыва, постановку задачи необходимо дополнить **условиями сопряжения.**

Предположим, что $\xi\in(a,b)$ – точка разрыва 1-го рода хотя бы для одного из коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ и точечные (сосредоточенные) источники (стоки) тепла на стержне отсутствуют. Тогда условия сопряжения принимают вид:

$$\begin{cases} u_+ = u_-,\ u_+ = \lim\limits_{x\to\xi+0} u(x),\ u_- = \lim\limits_{x\to\xi-0} u(x), \\ w_+ = w_-,\ w_+ = \lim\limits_{x\to\xi+0} w(x),\ w_- = \lim\limits_{x\to\xi-0} w(x) \end{cases} \qquad (4.1^{**})$$

Условие $u_+ = u_-$ есть требование **непрерывности температуры** в точке $\xi\in(a,b)$, условие $w_+ = w_-$ есть требование **непрерывности теплового потока** в точке $\xi\in(a,b)$.

Условия сопряжения означают: несмотря на разрыв 1-го рода какого-либо из коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ в точке $\xi \in (a,b)$ температура $u(x)$ и тепловой поток $w(x)$ должны быть непрерывны по x на всем отрезке $[a,b]$. **Такие условия гарантируют существование и единственность решения задачи (4.1).**

Далее «разрывной модельной задачей» называем задачу (4.1) с коэффициентами (4.1*), без точек разрыва коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ или с единственной точкой разрыва (разрыв 1-го рода в точке $\xi \in (a,b)$). В случае разрыва коэффициентов ставятся условия сопряжения (4.1**).

Без ограничения общности «разрывную модельную задачу» запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} k(x) > 0, x \in [a,b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a,b] \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} k^{(1)}(x), x \in [a,\xi] \\ k^{(2)}(x), x \in [\xi,b] \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} q^{(1)}(x), x \in [a,\xi] \\ q^{(2)}(x), x \in [\xi,b] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} f^{(1)}(x), x \in [a,\xi] \\ f^{(2)}(x), x \in [\xi,b] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\xi+0} u(x), = \lim\limits_{x\to\xi-0} u(x), \\ \lim\limits_{x\to\xi+0} \left(k^{(2)}(x)u'(x)\right) = \lim\limits_{x\to\xi-0} \left(k^{(1)}(x)u'(x)\right) \end{cases}$$

С целью численного решения «разрывной модельной задачи» (I) построим однородную консервативную разностную схему методом баланса (интегрально-интерполяционным методом).

4.2. Построение однородной консервативной разностной схемы методом баланса (интегрально-интерполяционный метод)

Чтобы решить «разрывную модельную задачу» численно, определим на отрезке $[a;b]$ равномерную сетку с узлами $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n}$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – шаг сетки.

Такую сетку называем сеткой размерности n (число n соответствует числу участков, на которые разбит отрезок). Заметим, что на сетке размерности n определены $n+1$ узлов.

Строим вспомогательную сетку с узлами $x_{i+0.5} = a + (i+0.5)h,\ \ i = \overline{0,n-1}$.

Такие узлы расположены в центре участков основной сетки: узел $x_{i+0.5}$ расположен в центре отрезка $[x_i; x_{i+1}]$, $i = \overline{0,n-1}$.

Для построения консервативной разностной схемы перейдем от дифференциальной формы записи закона сохранения тепла к интегральной форме.

Для этого дифференциальное уравнение задачи (4.1) интегрируем на каждом из участков вспомогательной сетки:

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\,\frac{du}{dx}\right)dx - \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx = -\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx\,, \qquad i = \overline{1,n-1} \tag{4.2}$$

Каждое из уравнений (4.2) представляет собой **запись закона сохранения тепла на «своем» участке** $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ **в интегральной форме.**

Чтобы переписать правую часть (4.2), введем новые коэффициенты

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f\ (x)\ dx\ ,\quad i = \overline{1,n-1} \tag{4.3}$$

и для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$-\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = -h\cdot\frac{1}{h}\cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\ dx = -\,\varphi_i h\,. \tag{4.4}$$

Чтобы преобразовать левую часть (4.2), используем приближение

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_i) \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)dx\,,$$

введем новые коэффициенты

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q\,(x)\,dx\,, \quad i = \overline{1, n-1} \tag{4.5}$$

и для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_i)\, d_i h \tag{4.6}$$

Несложно показать, что на каждом из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ в уравнении (4.2) присутствует разность тепловых потоков: функция теплового потока определена как $w(x) = -k(x)u'(x)$, откуда следует

$$\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx = -\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx} w(x)\,dx = w(x_{i-0.5}) - w(x_{i+0.5}) \tag{4.7}$$

Подставляя (4.4), (4.6) и (4.7) в уравнения теплового баланса (4.2) и добавив граничные условия (4.1), получим **системы линейных алгебраических уравнений** (СЛАУ)

$$\begin{cases} w(x_{i-0.5}) - w(x_{i+0.5}) - hd_i u(x_i) = -\varphi_i h, \; i = \overline{1, n-1} \\ u(x_0) = \mu_1, u(x_n) = \mu_2 \end{cases} \tag{4.8}$$

Система состоит из $n+1$ уравнений и содержит $2n+1$ неизвестных: не известны значения $w_{i+0.5}, i = \overline{0, n-1}$ *(тепловой поток через поперечные сечения в узлах вспомогательной сетки)* и неизвестны значения u_i, $i = \overline{0, n}$ *(температура в поперечных сечениях в узлах основной сетки).*

Чтобы уменьшить число неизвестных, выясним, как связаны потоки и температуры: выразим $w_{i+0.5}, i = \overline{0, n-1}$ через $u_i, i = \overline{0, n}$.

Из определения $w(x) = -k(x)u'(x)$ получим $u'(x) = -\dfrac{w(x)}{k(x)}$.

На каждом участке вида $[x_{i-1}; x_i]$, то есть для индексов $i = \overline{1, n}$, записываем интеграл

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\,dx = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx$$

Слева – интеграл от полной производной температуры: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\,dx = u_i - u_{i-1}$.

Справа используем приближение

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)}dx \approx -w\left(x_{i-0.5}\right) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Тогда справедливо приближенное равенство

$$u_i - u_{i-1} \approx -w\left(x_{i-0.5}\right) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \qquad (4.9)$$

Вводим новые коэффициенты

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (4.10)$$

и, пренебрегая приближенным характером равенства (4.9), выразим функцию теплового потока:

$$w_{i-0.5} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h} a_i, \qquad (4.11)$$

Формула (4.11) справедлива для всех $i = \overline{1,n}$: **тепловой поток через поперечное сечение узла вспомогательной сетки можно выразить через разность температур в поперечных сечениях соседних с ним узлов основной сетки**.

Справедлива аналогичная формула

$$w_{i+0.5} = -\frac{u_i - u_{i+1}}{h} a_{i+1} \qquad (4.12)$$

(для всех $i = \overline{0, n-1}$).

Подставим (4.11), (4.12) в уравнения (4.8), разделим уравнения на h и преобразуем (4.8) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i-1} - u_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i u_i = -\varphi_i, \ i = \overline{1,n-1} \\ u_0 = \mu_1, u_n = \mu_2 \end{cases} \qquad (4.13)$$

Это система линейных алгебраических уравнений, в которой $n+1$ уравнений, $n+1$ неизвестных, неизвестными являются $u_i, i = \overline{0,n}$.

Так как при построении (4.13) на базе (4.2) были использованы приближения (4.6) и (4.9), решение (4.13) будет отличаться от решения (4.2) и, как следствие, отличаться от решения исходной задачи (4.1). Поэтому для записи исходной задачи и записи СЛАУ (разностной схемы) используют разные обозначения.

Через $u(x),\, x \in [a,b]$ обозначим точное решение задачи (4.1).

Через $u = (u_0, u_1, \ldots u_n) \in R^{n+1}$ обозначим точное решение задачи (4.1) в узлах сетки.

Через $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ обозначим точное решение СЛАУ (4.13).

СЛАУ (4.13) записываем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i v_i = -\varphi_i \,, \; i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = \mu_1 \,, \;\; v_n = \mu_2 \end{cases} \tag{4.14}$$

Коэффициенты СЛАУ определим по формулам (4.3), (4.5) и (4.10):

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \;\; i = \overline{1, n}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q\,(x)\, dx \,, \;\; i = \overline{1, n-1}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f\,(x)\, dx \,, \;\; i = \overline{1, n-1}$$

Система уравнений (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) представляет собой однородную консервативную разностную схему для решения первой краевой задачи стационарного уравнения теплопроводности.

Схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) построена методом баланса (интегрально-интерполяционным методом).

Схема (4.14) построена для решения «разрывной модельной задачи» (I), а также для решения задач вида (4.1) с большим (но конечным) числом точек разрыва 1-го рода коэффициентов задачи.

Комментарии

Разностная схема называется консервативной, если в ней реализован разностный аналог физических законов сохранения.

Разностная схема называется однородной, если способ записи коэффициентов схемы не зависит от наличия точек разрыва коэффициентов (параметров) дифференциальной задачи (подробнее см. Модуль 7).

Примеры неоднородной разностной схемы и неконсервативной разностной схемы представлены в Модуле 7.

4.3. Проверка корректности схемы

Математическая задача называется корректной, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий (или параметров) задачи.

Проверим корректность разностной схемы.

Теорема (проверка корректности схемы). При любом $n \geq 2$ решение разностной схемы (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5), (4.10) существует, единственно и может быть найдено прогонкой. При отыскании решения задачи (4.14) прогонка вычислительно устойчива.

Доказательство. Перепишем (4.14) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{a_i}{h^2} \cdot v_{i-1} - \left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right) \cdot v_i + \dfrac{a_{i+1}}{h^2} \cdot v_{i+1} = -\varphi_i \, , i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = \mu_1, v_n = \mu_2 \end{cases} \tag{4.15}$$

Сравним (4.15) с тем, как записывается СЛАУ с 3-х диагональной матрицей в формулировке *Теоремы о применении прогонки* и проверим выполнение условий *Теоремы о применении прогонки*.

При решении (4.15) необходимо найти $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$.

Так как $k(x) > 0$ при любом $x \in [a, b]$, получим $a_i > 0, i = \overline{1, n}$.

Так как $q(x) \geq 0$ получим $d_i \geq 0, i = \overline{1, n-1}$.

Очевидно выполнение условий

$$\left| \frac{a_i}{h^2} \right| \neq 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\left| \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right| \geq \left| \frac{a_i}{h^2} \right| + \left| \frac{a_{i+1}}{h^2} \right|, \qquad i = \overline{1, n-1}$$

Коэффициенты κ_1, κ_2, предусмотренные канонической формой записи, в системе (4.15) отсутствуют: $|\kappa_1| = 0 \leq 1; |\kappa_2| = 0 < 1$.

Таким образом, существование и единственность решения задачи (4.15), возможность его получения методом прогонки и вычислительная устойчивость прогонки при получении указанного решения вытекают из *Теоремы о применении прогонки*.

Непрерывная зависимость решения (4.15) от параметров (коэффициентов) СЛАУ при фиксированном n гарантирована тем, что определитель 3-х диагональной матрицы (в силу Теоремы о применении прогонки) отличен от нуля.

Разностная схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) как математическая задача поставлена корректно.

4.4. Теоремы о сходимости схемы

Точное решение задачи (4.1) в узлах сетки обозначим $u = (u_0, u_1, \ldots u_n) \in R^{n+1}$.

Точное решение разностной схемы (4.14) обозначим $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$.

Определение. **Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$z = u - v$, где $z_i = u_i - v_i$, $i = 0, \ldots n$. (4.16)

Таким образом, $z = (z_0, z_1, \ldots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы.

Определение. Если при сгущении сетки ($n \to +\infty$) погрешность z стремится к нулю ($\| z \| \to 0$), говорят, что **схема сходится.** Если на всех густых сетках (то есть $\forall n \geq \hat{N}$) для погрешности z верна оценка

$$\| z \| \leq M h^k \tag{4.17}$$

где $h > 0$ – шаг сетки и $k > 0$, $M > 0$ – константы, не зависящие от h, говорят, что **схема сходится** с **порядком** k.

Теоремы о сходимости схемы приведем без доказательства.

Теорема 1 (о сходимости схемы)

Пусть для «разрывной модельной задачи» (I) коэффициенты
$k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}[a,b]$.

Тогда схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) сходится с порядком 2:

$$\| z \| \leq M h^2 \tag{4.18}$$

Теорема 2 (о сходимости схемы)

Пусть для «разрывной модельной задачи» (I) коэффициенты
$k(x), q(x), f(x) \in Q^{(2)}[a,b]$.

Тогда схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) сходится с порядком 2:

$$\| z \| \leq M h^2 \tag{4.19}$$

В оценках (4.18) и (4.19) $h > 0$ – шаг сетки и $M > 0$ – константа, которая зависит от коэффициентов задачи $k(x), q(x), f(x)$, но не зависит от h.

Комментарии

$C^{(2)}[a,b]$ – пространство дважды непрерывно-дифференцируемых функции, заданных на отрезке $[a,b]$.

$Q^{(2)}[a,b]$ – пространство функции, заданных на отрезке $[a,b]$ и имеющих две непрерывные производные, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

4.5. Варианты расчета коэффициентов консервативных разностных схем

Для приближенного вычисления интегралов применяются:

формула средних прямоугольников

$$\int_A^B f(x)\,dx \approx f\left(\frac{A+B}{2}\right)(B-A) \tag{4.20}$$

формула трапеций

$$\int_A^B f(x)\,dx \approx \frac{f(A)+f(B)}{2}(B-A) \tag{4.21}$$

Утверждение 1. Пусть коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ задачи (4.1) являются достаточно гладкими. Тогда без потери порядка (скорости) сходимости для приближенного решения (4.1) можно использовать однородную консервативную схему

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1}-v_i}{h^2}\cdot\tilde{a}_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2}\cdot\tilde{a}_{i+1} - \tilde{d}_i v_i = -\tilde{\varphi}_i, \quad i=\overline{1,n-1}, \\ v_0=\mu_1, \quad v_n=\mu_2 \end{cases} \tag{4.22}$$

с коэффициентами, вычисленными по формуле «средних прямоугольников»

$\tilde{a}_i = k_{i-0.5}, i=\overline{1,n}$,

$\tilde{d}_i = q_i, i=\overline{1,n-1}$,

$\tilde{\varphi}_i = f_i, i=\overline{1,n-1}$.

или коэффициентами, вычисленными по формуле трапеций

$$\tilde{a}_i = \frac{2\cdot k_{i-1}\cdot k_i}{k_{i-1}+k_i}, i=\overline{1,n},$$

$$\tilde{d}_i = \frac{q_{i-0.5} + q_{i+0.5}}{2}, \; i = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{f_{i-0.5} + f_{i+0.5}}{2}, \; i = \overline{1, n-1}.$$

Комментарий

По формуле средних прямоугольников получим:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{1}{k(x_{i-0.5})} = \frac{1}{k_{i-0.5}}$$

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx k_{i-0.5}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot q(x_i) = q_i$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(x_i) = f_i$$

По формуле трапеций получим:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{1}{k(x_{i-1})} + \frac{1}{k(x_i)} \right) = \frac{k_{i-1} + k_i}{2 \cdot k_{i-1} \cdot k_i}$$

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx \frac{2 \cdot k_{i-1} \cdot k_i}{k_{i-1} + k_i}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{q(x_{i-0.5}) + q(x_{i+0.5})}{2} = \frac{q_{i-0.5} + q_{i+0.5}}{2}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{f(x_{i-0.5}) + f(x_{i+0.5})}{2} = \frac{f_{i-0.5} + f_{i+0.5}}{2}$$

Так как на участках интегрирования длины h погрешность формулы «средних прямоугольников» и погрешность формулы трапеций составляет $O(h^3)$, коэффициенты исходной разностной схемы (4.14) будут вычислены с погрешностью не более $O(h^2)$, и это не приводит к снижению порядка сходимости (см. учебную литературу).

Утверждение 2. Пусть коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ задачи (4.1) являются достаточно гладкими за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Тогда однородная консервативная разностная схема (4.22) *с коэффициентами, вычисленными по формуле средних прямоугольников (формуле трапеций) на участках гладкости указанных выше коэффициентов задачи*, сохраняет порядок сходимости.

Комментарий

Для коэффициента теплопроводности «разрывной модельной задачи» (I)

$$k(x)=\begin{cases} k^{(1)}(x),\ x\in[a,\xi] \\ k^{(2)}(x),\ x\in[\xi,b] \end{cases}$$

коэффициент разностной схемы (4.14) имеет вид

$$a_i=\left(\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}\approx\begin{cases} \left(\dfrac{1}{h}\cdot\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k^{(1)}(x)}\right)^{-1}, & \xi\ge x_i \\ \left(\dfrac{1}{h}\cdot\left(\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{\xi}\frac{dx}{k^{(1)}(x)}+\int\limits_{\xi}^{x_i}\frac{dx}{k^{(2)}(x)}\right)\right)^{-1}, & \xi\in(x_{i-1};x_i) \\ \left(\dfrac{1}{h}\cdot\displaystyle\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k^{(2)}(x)}\right)^{-1}, & \xi\le x_{i-1} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\tilde{a}_i=\begin{cases} k^{(1)}(x_{i-0.5}), & \xi\ge x_i \\ \left(\dfrac{1}{h}\cdot\left(\dfrac{\xi-x_{i-1}}{k^{(1)}\left(\dfrac{x_{i-1}+\xi}{2}\right)}+\dfrac{x_i-\xi}{k^{(2)}\left(\dfrac{\xi+x_i}{2}\right)}\right)\right)^{-1}, & \xi\in(x_{i-1};x_i) \\ k^{(2)}(x_{i-0.5}), & \xi\le x_{i-1} \end{cases}$$

Для $q(x)$ – коэффициента теплообмена «разрывной модельной задачи» (I), а именно

$$q(x)=\begin{cases} q^{(1)}(x),\ x\in[a,\xi] \\ q^{(2)}(x),\ x\in[\xi,b] \end{cases}$$

соответствующий коэффициент разностной схемы (4.14) вычисляется как

$$d_i=\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)dx=\begin{cases} \dfrac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q^{(1)}(x)dx, \quad \xi\ge x_{i+0.5} \\ \dfrac{1}{h}\cdot\left(\int\limits_{x_{i-0.5}}^{\xi} q^{(1)}(x)dx+\int\limits_{\xi}^{x_{i+0.5}} q^{(2)}(x)dx\right), \quad \xi\in(x_{i-0.5};x_{i+0.5}) \\ \dfrac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q^{(2)}(x)dx, \quad \xi\le x_{i-0.5} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\tilde{d}_i=\begin{cases} q^{(1)}(x_i), \quad \xi\ge x_{i+0.5} \\ \dfrac{1}{h}\cdot\left(q^{(1)}\left(\dfrac{x_{i-0.5}+\xi}{2}\right)(\xi-x_{i-0.5})+q^{(2)}\left(\dfrac{\xi+x_{i+0.5}}{2}\right)(x_{i+0.5}-\xi)\right), \\ \xi\in(x_{i-0.5};x_{i+0.5}) \\ q^{(2)}(x_i) \quad \xi\le x_{i-0.5} \end{cases}$$

Для $f(x)$ – коэффициента «разрывной модельной задачи» (I), отвечающего за плотность источников и стоков тепла, а именно

$$f(x)=\begin{cases} f^{(1)}(x),\ x\in[a,\xi] \\ f^{(2)}(x),\ x\in[\xi,b] \end{cases}$$

соответствующий коэффициент разностной схемы (4.14) записывается аналогично:

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\cdot\displaystyle\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f^{(1)}(x)dx, & \xi \ge x_{i+0.5} \\ \dfrac{1}{h}\cdot\left(\displaystyle\int\limits_{x_{i-0.5}}^{\xi} f^{(1)}(x)dx + \int\limits_{\xi}^{x_{i+0.5}} f^{(2)}(x)dx\right), & \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ \dfrac{1}{h}\cdot\displaystyle\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f^{(2)}(x)dx, & \xi \le x_{i-0.5} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\widetilde{\varphi}_i = \begin{cases} f^{(1)}(x_i), \quad \xi \ge x_{i+0.5} \\ \dfrac{1}{h}\cdot\left(f^{(1)}\left(\dfrac{x_{i-0.5}+\xi}{2}\right)(\xi - x_{i-0.5}) + f^{(2)}\left(\dfrac{\xi + x_{i+0.5}}{2}\right)(x_{i+0.5}-\xi)\right), \\ \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ f^{(2)}(x_i) \quad \xi \le x_{i-0.5} \end{cases}$$

Задание

Способ вычисления коэффициентов схемы (4.22), основанный на применении формулы трапеций с учетом точки разрыва, запишите самостоятельно.