# Модуль 7. Стационарное уравнение теплопроводности. Оценка вычислительной погрешности. Способы задания граничных условий. Пример отсутствия сходимости. Пример сходящейся неоднородной схемы. Проверка на консервативность

## 7.1. Модельная задача для оценки вычислительной погрешности

Чтобы получить представление о величине вычислительной погрешности, возникающей в ходе решения разностных схем, рассмотрим пример: первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности имеет вид

$$\begin{cases} 12 \cdot u''(x) - 5 \cdot u(x) = 2\,110 - 450 \cdot x^2, \; x \in [0, 1] \\ u(0) = 10, \; u(1) = 100 \end{cases} \tag{7.1}$$

где $k(x) = 12, \; q(x) = 5, \; f(x) = 450 \cdot x^2 - 2\,110, \; \mu_1 = 10, \; \mu_2 = 100, \; l = 1.$

Решением задачи является $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$ (можно проверить подстановкой).

Чтобы построить численное решение, определим на отрезке $[0; 1]$ сетку с узлами $x_i = ih, \; i = \overline{0, n}$. Ее размерность (число участков) $n$, шаг $h = \dfrac{1}{n}$.

В соответствии с методом баланса консервативную разностную схему для решения задачи (7.1) строим на основе коэффициентов

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = 12, \quad i = \overline{1, n}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\, dx = 5, \qquad i = \overline{1, n-1}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\, dx \approx 450 \cdot x_i^2 - 2\,110 = \widetilde{\varphi}_i \quad i = \overline{1, n-1}$$

(для приближенного вычисления интегралов взята формула средних прямоугольников).

Разностная схема принимает вид

$$\begin{cases} 12 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 2\,110 - 450 \cdot x_i^2, i = \overline{1, n-1}, \\ v_0 = 10, v_n = 100 \end{cases} \tag{7.2}$$

и представляет собой СЛАУ с 3-х диагональной матрицей. При любом значении $n$ (на любой равномерной сетке) решение (7.2) существует и единственно, что вытекает из соответствия СЛАУ условиям *Теоремы о применении прогонки*.

Так как $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$ является решением дифференциального уравнения, для каждого внутреннего узла $x_i = ih, i = \overline{1, n-1}$ верно

$$12 \cdot u''(x_i) - 5 \cdot u(x_i) = 2\,110 - 450 \cdot x_i^2, \quad i = \overline{1, n-1} \tag{7.3}$$

В граничных узлах $x_0 = 0$, $x_n = 1$ выполняется $u(x_0) = 10$, $u(x_n) = 100$.

Задача (7.1) поставлена так, что для ее решения $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$ четвертая производная тождественно равна нулю ($u^{IV}(x) \equiv 0$). Поэтому в каждом внутреннем узле сетки, где определен оператор $[u_{x\bar{x}}]_i$, значение оператора совпадает со значением второй производной:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = u''(x_i), \; x_i = ih, i = \overline{1, n-1} \tag{7.4}$$

В силу (7.3) и (7.4) для $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$ верно

$$\begin{cases} 12 \cdot \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i = 2\,110 - 450 \cdot x_i^2, i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 10, u_n = 100 \end{cases} \tag{7.5}$$

Сопоставив (7.2) и (7.5), приходим к выводу, что решением (7.2) является вектор $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$, такой, что

$$v_i = 10 + 90 \cdot x_i^2, i = \overline{0, n}. \tag{7.6}$$

**Решение дифференциальной задачи (7.1) и решение разностной схемы (7.2) в узлах сетки совпадают:** $v_i = u(x_i) = u_i, i = \overline{0, n}$.

Решая СЛАУ (7.2) методом прогонки, получим вектор $\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \ldots \tilde{v}_n) \in R^{n+1}$, отличный от вектора $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ вследствие погрешности счета.

Далее полагаем, что значения $10+90\cdot x_i^2$, $i=\overline{0,n}$, будут вычислены точно или пренебрегаем погрешностью их вычисления. *Вычислительную погрешность* решения СЛАУ определим следующим образом:

$$z^{вп}=v-\widetilde{v}, \tag{7.7}$$

где $z^{вп}=(z_0^{вп}, z_1^{вп}, \ldots z_n^{вп})\in R^{n+1}$ есть *вычислительная погрешность*;

$v=(v_0, v_1, \ldots v_n)\in R^{n+1}$ есть точное решение схемы (7.2), его можно вычислить по формулам (7.6);

$\widetilde{v}=(\widetilde{v}_0, \widetilde{v}_1, \ldots \widetilde{v}_n)\in R^{n+1}$ есть решение (7.2), полученное методом прогонки.

Для оценки вычислительной погрешности можно использовать норму $\| \ \|_\infty$. Компьютерный эксперимент покажет зависимость вычислительной погрешности от шага сетки.

***Комментарии***

**В данном примере погрешность аппроксимации равна нулю:**

$$\psi_0=u_0-10=0,$$
$$\psi_n=u_n-100=0,$$
$$\psi_i=12\cdot\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}-5\cdot u_i-2\,110+450\cdot x_i^2=$$
$$=12\cdot\frac{h^2}{24}(u^{IV}(\xi_i)+u^{IV}(\eta_i))=0,$$
$$i=\overline{1,n-1}$$

Компоненты вектора погрешности аппроксимации выписаны по определению.

Далее использовано их представление с помощью значений четвертых производных точного решения задачи, вычисленных в некоторых неизвестных средних точках (см. модуль 5).

Затем использовано свойство задачи (7.1), а именно, для $\forall x \ \ u^{IV}(x)=0$.

**Погрешность схемы равна нулю:** $z_i=u_i-v_i=0, i=\overline{0,n}$ (это компоненты $z$ – вектора погрешности схемы).

**Общая погрешность** решения задачи (7.1) с помощью схемы (7.2) **состоит только из вычислительной погрешности:**

$$z^{общ}=u-\widetilde{v}=u-v+v-\widetilde{v}=z+z^{вп}=z^{вп}$$

### 7.2. Способы задания граничных условий

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right)-q(x)u(x)=-f(x), x\in[a,b] \\ k(x)>0,\ x\in[a,b] \\ q(x)\geq 0,\ x\in[a,b] \end{cases} \tag{7.8}$$

Оно описывает распределение температуры на тонком и однородном в каждом поперечном сечении стержне.

Если на одной из границ отрезка $[a,b]$ задана температура, данное условие относится к *граничным условиям 1-го рода*; если задан тепловой поток – *граничное условие 2-го рода*; если осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона – *граничное условие 3-го рода*.

К *граничным условиям 4-го рода* относятся: условие равенства температур на границе двух сред (торец стержня и окружающая среда), т.е. условие теплового контакта; условие равенства тепловых потоков на границе двух сред (торец стержня и окружающая среда), т.е. *закон теплопроводности*.

Покажем, как записываются граничные условия. **На левой границе отрезка** $[a,b]$**, то есть при** $x=a$:

– **граничное условие 1-го рода** (температура) имеет вид $u(a)=\mu_1$;

– **граничное условие 2-го рода** (тепловой поток) имеет вид $w(a)=\mathrm{M}_1$
(случай $w(a)=0$ соответствует теплоизоляции левого торца стержня)

– **граничное условие 3-го рода** (теплообмен) имеет вид $w(a)=-\gamma_1(u(a)-\theta_1)$
где $\theta_1$ температура окружающей среды и $\gamma_1>0$ коэффициент теплообмена.

Тепловой поток связан с температурой как $w(x)=-k(x)u'(x)$, поэтому граничные условия 2-го и 3-го рода можно записать через производную температуры

$$k(a)u'(a)=-\mathrm{M}_1$$

$k(a)u'(a)=\gamma_1(u(a)-\theta_1)$, где $\gamma_1>0$.

Граничное условие 3-го рода записывают также в виде

$k(a)u'(a)=\gamma_1 u(a)-\zeta_1$, где $\zeta_1=\gamma_1\cdot\theta_1$, $\gamma_1>0$.

**На правой границе отрезка** $[a, b]$, **то есть при** $x = b$:

– **граничное условие 1-го рода** (температура) имеет вид $u(b) = \mu_2$;

– **граничное условие 2-го рода** (тепловой поток) имеет вид $w(b) = \mathrm{M}_2$ (случай $w(b) = 0$ соответствует теплоизоляции правого торца стержня)

– **граничное условие 3-го рода** (теплообмен) имеет вид $w(b) = -\gamma_2(\theta_2 - u(b))$, где $\theta_2$ температура окружающей среды и $\gamma_2 > 0$ есть коэффициент теплообмена.

Граничные условия 2-го и 3-го рода можно записать через производную температуры

$$k(b)u'(b) = -\mathrm{M}_2$$

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2(u(b) - \theta_2), \text{ где } \gamma_2 > 0$$

Граничное условие 3-го рода записывают также в виде

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2, \text{ где } \zeta_2 = \gamma_2 \cdot \theta_2,\ \gamma_2 > 0.$$

**При изучении дифференциального уравнения** (7.8) **соответственно способу задания граничных условий различают краевые задачи:**

**1) первая краевая задача** (задача Дирихле)

$$u(a) = \mu_1$$

$$u(b) = \mu_2$$

**2) вторая краевая задача** (задача Неймана)

$$k(a)u'(a) = -\mathrm{M}_1$$

$$k(b)u'(b) = -\mathrm{M}_2$$

**3) третья краевая задача**

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1, \text{ где } \gamma_1 > 0,$$

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2, \text{ где } \gamma_2 > 0.$$

Граничные условия

$$u(a) = \mu_1,\ k(b) \cdot u'(b) = 0$$

означают, что на левом торце стержня задана температура $\mu_1$, а правый торец стержня теплоизолирован. Такая краевая задача является **смешанной**.

***Комментарии***

Для «разрывной модельной задачи» (см. модуль 4) в точках разрыва параметров поставлены два «граничных» условия 4-го рода: условие теплового контакта $u_+ = u_-$ и закон теплопроводности $w_+ = w_-$. Указанные условия были названы условиями сопряжения.

## 7.3. Пример аппроксимации граничных условий

Построим численный метод решения третьей краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), x \in [a,b] \\ k(x) > 0,\ x \in [a,b] \\ q(x) \geq 0,\ x \in [a,b] \\ k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1 \\ -k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2 \end{cases} \tag{7.9}$$

Для этого определим на отрезке $[a;b]$ равномерную сетку с узлами $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n}$, и дополнительными узлами $x_{i+0.5} = a + (i+0.5)h,\ \ i = \overline{0,n-1}$.

Размерность сетки (число участков) равна $n$, шаг $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Для аппроксимации дифференциального уравнения используем метод баланса и получим уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot v_i = -\varphi_i,\ i = \overline{1,n-1}, \end{cases} \tag{7.10}$$

с коэффициентами

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1},\ \ i = \overline{1,n}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)\,dx,\ \ i = \overline{1,n-1}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\,dx,\ \ i = \overline{1,n-1}$$

Для аппроксимации граничных условий применим правый разностный оператор

$$[u_x]_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \approx u'(x_i),$$

заданный в узлах $x_i = ih, i = \overline{0, n-1}$, и левый разностный оператор

$$[u_{\bar{x}}]_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \approx u'(x_i),$$

заданный в узлах $x_i = ih, i = \overline{1, n}$. Каждый из них пригоден приближенного вычисления первой производной.

Запишем один из операторов (правый) в узле $x_0 = a$, другой (левый) – в узле $x_n = b$:

$$[u_x]_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} \approx u'(x_0)$$

$$[u_{\bar{x}}]_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \approx u'(x_n)$$

Заменив в граничных условиях (7.9) значения $u'(a)$ и $u'(b)$ на значения указанных выше операторов, на основе (7.10) получим разностную схему

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot v_i = -\varphi_i, i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{v_1 - v_0}{h} \cdot k(x_0) = \gamma_1 \cdot v_0 - \zeta_1 \\ -\frac{v_n - v_{n-1}}{h} \cdot k(x_n) = \gamma_2 \cdot v_n - \zeta_2 \end{cases} \qquad (7.11)$$

Точное решение задачи (7.9) в узлах сетки обозначим $u = (u_0, u_1, \ldots u_n) \in R^{n+1}$.

Точное решение СЛАУ (7.11) обозначим $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$. Рассматриваем $v$ (решение схемы) как численное решение краевой задачи (7.9).

**Определение.** **Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$z = u - v$, где $z_i = u_i - v_i, i = 0, \ldots n$.

Таким образом, вектор $z = (z_0, z_1, \ldots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы.

**О п р е д е л е н и е .** **Погрешностью аппроксимации** задачи (7.9) разностной схемой (7.11) называют *невязку разностной схемы, при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи, а именно:*

$$\begin{cases} \psi_i = \dfrac{u_{i-1} - u_i}{h^2} \cdot a_i - \dfrac{u_i - u_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot u_i + \varphi_i, i = \overline{1, n-1}, \\ \psi_0 = \dfrac{u_1 - u_0}{h} \cdot k(x_0) - \gamma_1 \cdot u_0 + \zeta_1 \\ \psi_n = -\dfrac{u_n - u_{n-1}}{h} \cdot k(x_n) - \gamma_2 \cdot u_n + \zeta_2 \end{cases} \tag{7.12}$$

Таким образом, $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность аппроксимации. Компоненты $\psi_0, \psi_n$ называют *погрешностями аппроксимации граничных условий*. Компоненты $\psi_i, i = \overline{1, n-1}$ называют *погрешностями аппроксимации основного уравнения*.

**Основные свойства схемы** (7.11) **состоят в следующем.**

В случае гладких коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ *погрешность аппроксимации основного уравнения имеет 2-й порядок:* $\psi_i = O(h^2), i = 1, \ldots n-1$, *а погрешность аппроксимации граничных условий имеет 1-й порядок:* $\psi_0 = O(h), \psi_n = O(h)$ (проверить, используя формулу Тейлора).

**Схема сходится с 1-м порядком:** доказательство приведено в учебной литературе.

## 7.4. Аппроксимация граничных условий методом баланса

Чтобы улучшить сходимость схемы (7.11), нужна более точная аппроксимация граничных условий. Более точные разностные операторы, пригодные для вычисления производных, используют многоточечный шаблон, из-за которого матрица разностной схемы потеряет 3-х диагональную структуру.

**Покажем, как для аппроксимации граничных условий и улучшения сходимости можно использовать метод баланса.**

Рассмотрим граничное условие 3-го рода, заданное на левом конце отрезка:

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1$$

Дифференциальное уравнение задачи (7.9) проинтегрируем на участке $[x_0; x_{0.5}]$:

$$\int_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx - \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)u(x)dx = -\int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)dx \tag{7.13}$$

(в интегральной форме выписан закон сохранения тепла на участке $[x_0; x_{0.5}]$).

Введем обозначение

$$\varphi_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} f\ (x)\ dx \tag{7.14}$$

и запишем

$$-\int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)dx = -0.5h \cdot \frac{1}{0.5h} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)\ dx = -\ 0.5h \cdot \varphi_0$$

Введем обозначение

$$d_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} q\ (x)\ dx \tag{7.15}$$

и запишем

$$\int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_0) \int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)dx = 0.5h \cdot d_0\ \cdot u_0$$

В уравнении (7.13) присутствует разность тепловых потоков, проходящих через сечения с координатами $x_0$ и $x_{0.5}$: так как $w(x) = -k(x)u'(x)$, видим, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx = -\int\limits_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx}w(x)\ dx = w(x_0) - w(x_{0.5})$$

Используя (7.14) и (7.15), аппроксимируем баланс тепла (7.13) уравнением

$$w_0 - w_{0.5} - 0.5h \cdot d_0\ \cdot u_0\ = -0.5h \cdot \varphi_0\ , \tag{7.16}$$

Тепловой поток, проходящий через сечение с координатой $x_{0.5}$, выразим через разность температур в сечениях с координатами $x_0$ и $x_1$ (см. выкладки в модуле 4):

$$w_{0.5} = \frac{u_0 - u_1}{h} a_1 \tag{7.17}$$

Тепловой поток через сечение $x_0$ получим из граничного условия:

$$w_0 = w(x_0) = w(a) = -k(a)u'(a) = -\gamma_1 u(a) + \zeta_1 = -\gamma_1 u_0 + \zeta_1 \tag{7.18}$$

Подстановкой (7.17) и (7.18) в уравнение (7.16) получим

$$-\gamma_1 u_0 + \zeta_1 - \frac{u_0 - u_1}{h} a_1 - 0.5h \cdot d_0 \cdot u_0 = -0.5h \cdot \varphi_0 .$$

После корректировки обозначений, а именно: $u = (u_0, u_1, \ldots u_n) \in R^{n+1}$ есть точное решение дифференциальной задачи, $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ есть точное решение разностной схемы, сформулируем

**Утверждение 1.** Для граничного условия 3-го рода

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1 ,$$

($k(a) > 0$, $\gamma_1 > 0$ и $\zeta_1$ заданы), методом баланса получена аппроксимация

$$\frac{v_1 - v_0}{h} a_1 = (\gamma_1 + 0.5h \cdot d_0) \cdot v_0 - (\zeta_1 + 0.5h \cdot \varphi_0) \tag{7.19}$$

с коэффициентами

$$a_1 = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \qquad d_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)\, dx \qquad \varphi_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)\, dx \tag{7.20}$$

Интегрирование дифференциального уравнение на участке $[x_{n-0.5}; x_n]$ и аналогичные выкладки, проведенные на правом конце стержня, позволяют сформулировать

**Утверждение 2.** Для граничного условия 3-го рода

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2$$

($k(b) > 0$, $\gamma_2 > 0$ и $\zeta_2$ заданы), методом баланса получена аппроксимация

$$-\frac{v_n - v_{n-1}}{h} a_n = (\gamma_2 + 0.5h \cdot d_n) \cdot v_n - (\zeta_2 + 0.5h \cdot \varphi_n) \tag{7.21}$$

с коэффициентами

$$a_n = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \qquad d_n = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_{n-0.5}}^{x_n} q(x)\, dx \qquad \varphi_n = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_{n-0.5}}^{x_n} f(x)\, dx \tag{7.22}$$

(Докажите утверждение самостоятельно).

**Консервативную разностную схему** для решения краевой задачи (7.9) записываем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{v_{i-1}-v_i}{h^2}\cdot a_i - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{h^2}\cdot a_{i+1} - d_i v_i = -\varphi_i,\, i = \overline{1,n-1}, \\ \dfrac{v_1 - v_0}{h}\cdot a_1 = (\gamma_1 + 0.5h\cdot d_0)v_0 - (\zeta_1 + 0.5h\cdot \varphi_0) \\ -\dfrac{v_n - v_{n-1}}{h}\cdot a_n = (\gamma_2 + 0.5h\cdot d_n) - (\zeta_2 + 0.5h\cdot \varphi_n) \end{cases} \tag{7.23}$$

**Определение. Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$z = u - v$, где $z_i = u_i - v_i,\, i = 0,\ldots n$.

Вектор $z = (z_0, z_1, \ldots z_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность схемы.

**Определение. Погрешностью аппроксимации** называют *невязку разностной схемы* (7.23)*, при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи* (7.9)*, а именно:*

$$\begin{cases} \psi_i = \dfrac{u_{i-1}-u_i}{h^2} a_i - \dfrac{u_i - u_{i+1}}{h^2} a_{i+1} - d_i u_i + \varphi_i,\, i = \overline{1,n-1}, \\ \psi_0 = \dfrac{u_1 - u_0}{h}\cdot a_1 - (\gamma_1 + 0.5h\cdot d_0)u_0 + (\zeta_1 + 0.5h\cdot \varphi_0) \\ \psi_n = \dfrac{u_n - u_{n-1}}{h}\cdot a_n - (\gamma_2 + 0.5h\cdot d_n)u_n + (\zeta_2 + 0.5h\cdot \varphi_n) \end{cases} \tag{7.24}$$

Таким образом, $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n) \in R^{n+1}$ есть погрешность аппроксимации. Компоненты $\psi_0, \psi_n$ называют погрешностями аппроксимации граничных условий (на левом и правом концах отрезка соответственно). Компоненты $\psi_i,\, i = \overline{1,n-1}$ называют *погрешностями аппроксимации основного уравнения*.

**Свойство схемы** (7.23) **состоит в следующем.**

В случае гладких коэффициентов $k(x), q(x), f(x)$ *погрешность аппроксимации основного уравнения имеет 2-й порядок:* $\psi_i = O(h^2), i = 1,\ldots n-1$; *погрешность аппроксимации граничных условий также имеет 2-й порядок:* $\psi_0 = O(h^2), \psi_n = O(h^2)$.

*Схему (7.23) называют* **схемой с улучшенной аппроксимацией граничных условий**.

**Схема сходится со 2-м порядком:** доказательство приведено в учебной литературе.

***Комментарии***

Свойства схемы (7.23) обеспечены внесением малых поправок в схему (7.11):

– поправки $0.5h \cdot d_0$, $0.5h\varphi_0$ и поправка $a_1 - k(x_0)$ на левом конце отрезка;

– поправки $0.5h \cdot d_n$, $0.5h \cdot \varphi_n$ и поправка $a_n - k(x_n)$ на правом конце отрезка.

Разработка схемы (7.23) не потребовала изменения шаблонов: СЛАУ (7.23) является 3-х диагональной.

## 7.5. Пример отсутствия сходимости

**Под сходимостью схемы понимают сходимость решений разностной схемы к решению исходного уравнения.**

**Приведем пример, когда решение разностной схемы при сгущении сетки ($n \to +\infty$) сходится к некоторой функции, но эта предельная функция не является решением дифференциального уравнения.**

**В таких случаях говорят, что схема расходится.**

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) = 0, x \in (0,1) \\ u(0) = 1, u(1) = 0 \\ k(x) = \begin{cases} 2, x \in [0,\xi) \\ 1, x \in [\xi,1] \end{cases} \\ u_- = u_+, w_- = w_+ \end{cases} \tag{7.25}$$

Несложно проверить, что решением (7.25) является кусочно-линейная функция

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2-\xi}x, x \in [0,\xi] \\ \dfrac{2}{2-\xi}(1-x), x \in [\xi,1] \end{cases}$$

которая соответствует условиям сопряжения. Действительно,

$$u_- = \lim_{x \to \xi - 0}\left(1 - \frac{1}{2-\xi}x\right) = \frac{2-2\xi}{2-\xi}$$

$$u_+ = \lim_{x \to \xi + 0}\left(\frac{2}{2-\xi}(1-x)\right) = \frac{2-2\xi}{2-\xi}$$

$$w_- = \lim_{x\to\xi-0}\left(-2\cdot\left(1-\frac{1}{2-\xi}x\right)'\right) = -\frac{2}{2-\xi}$$

$$w_+ = \lim_{x\to\xi+0}\left(-1\cdot\left(\frac{2}{2-\xi}(1-x)\right)'\right) = -\frac{2}{2-\xi}$$

Таким образом, $u_- = u_+$, $w_- = w_+$, температура $u(x)$ и тепловой поток $w(x)$ при $x \in [0,1]$ непрерывны и в точке $\xi$ принимают значения

$$u(\xi) = \frac{2-2\xi}{2-\xi} \qquad\qquad w(\xi) = -\frac{2}{2-\xi}$$

Чтобы привести пример схемы, которая расходится, предположим, что разрыв функции $k(x)$ имеет место в точке $\xi \in (0,1)$, где $\xi$ – иррациональное число, и построим на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку с узлами $x_i = ih,\, i = \overline{0,n}$, где шаг сетки $h = \frac{1}{n}$.

Число $\xi \in (0,1)$, являясь иррациональным, ни при каком $n$ не будет узлом сетки.

Для дифференциального оператора задачи (7.25) при любом $x \neq \xi$ верно

$$(k(x)u'(x))' = k'(x)u'(x) + k(x)u''(x) \tag{7.26}$$

Используя (7.26), аппроксимируем дифференциальный оператор:

$$(k'u' + ku'')|_{x=x_i} \approx [k_{\dot{x}}]_i[u_{\dot{x}}]_i + k(x_i)[u_{x\bar{x}}]_i \tag{7.27}$$

В (7.27) использованы центральные разностные операторы для вычисления первой и второй производных. Так как в каждом внутреннем узле $x_i = ih,\, i = \overline{1,n-1}$ для решения задачи (7.25) выполняется

$$(k'u' + ku'')|_{x=x_i} = 0,$$

рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} \dfrac{k_{i+1}-k_{i-1}}{2h}\cdot\dfrac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2h} + k_i\dfrac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2} = 0,\; i = \overline{1,n-1} \\ v_0 = 1,\; v_n = 0 \end{cases} \tag{7.28}$$

Пусть при некотором значении $n$ (число участков сетки) точка $\xi$ попадает в интервал $(x_s, x_{s+1})$. Тогда $k_0 = k_1 = ... = k_s = 2$ и $k_{s+1} = k_{s+2} = ... = k_n = 1$.

Схема (7.28) принимает вид

$$
\begin{cases}
v_0 = 1 \\
2 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = \overline{1, s-1} \\
\dfrac{(1-2)}{2h} \cdot \dfrac{v_{s+1} - v_{s-1}}{2h} + 2 \cdot \dfrac{v_{s-1} - 2v_s + v_{s+1}}{h^2} = 0, \\
\dfrac{(1-2)}{2h} \cdot \dfrac{v_{s+2} - v_s}{2h} + \dfrac{v_s - 2v_{s+1} + v_{s+2}}{h^2} = 0, \\
\dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = \overline{s+2, n} \\
v_n = 0
\end{cases}
\tag{7.29}
$$

При любом значении $n$ решение схемы (7.29) **существует и единственно.** (Потому что выполняются условия *Теоремы о применении прогонки*).

При конкретном значении $n$ найдем решение (7.29), то есть найдем вектор $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$.

Затем рассмотрим предельное численное решение $\overline{v}(x)$, формирующееся при $n \to \infty$.

Для этого, во-первых, выделим из (7.29) уравнения

$$
\begin{cases}
2 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = \overline{1, s-1} \\
\dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = \overline{s+2, n}
\end{cases}
$$

Они показывают, что решение (7.29) должно быть линейной функцией на участке $[x_0, x_s]$ и линейной функцией на участке $[x_{s+1}, x_n]$.

С учетом того, что $v_0 = 1$ и $v_n = 0$, компоненты вектора $v = (v_0, v_1, \ldots v_n) \in R^{n+1}$ можно найти в виде

$$
v_i = \begin{cases}
1 - \alpha^{(n)} x_i, i = \overline{0, s}, \\
\beta^{(n)} (1 - x_i), i = \overline{s+1, n}
\end{cases}
\tag{7.30}
$$

(потому что $v_0 = 1 - \alpha^{(n)} x_0 = 1$ и $v_n = \beta^{(n)} (1 - x_n) = 0$).

Запишем оставшиеся два уравнений схемы (7.29), а именно:

$$\begin{cases} -\dfrac{v_{s+1}-v_{s-1}}{4h^2}+2\cdot\dfrac{v_{s-1}-2v_s+v_{s+1}}{h^2}=0, \\ -\dfrac{v_{s+2}-v_s}{4h^2}+\dfrac{v_s-2v_{s+1}+v_{s+2}}{h^2}=0 \end{cases} \quad (7.31)$$

Используем (7.30) и для индексов $i = s-1, s, s+1, s+2$ запишем

$$v_{s-1}=1-\alpha^{(n)}x_{s-1}, \qquad v_s=1-\alpha^{(n)}x_s$$

$$v_{s+1}=\beta^{(n)}(1-x_{s+1}) \qquad v_{s+2}=\beta^{(n)}(1-x_{s+2}).$$

Тогда на основе (7.31) получим два уравнения для коэффициентов $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$:

$$\begin{cases} \alpha^{(n)}=\dfrac{1-\beta^{(n)}(1-x_{s+1})}{\dfrac{16}{7}\cdot h+x_{s-1}}, \\ 1-\alpha^{(n)}\cdot x_s=\beta^{(n)}\cdot(1-x_{s+1}) \end{cases}$$

Если значение $n$ задано, решением являются коэффициенты

$$\alpha^{(n)}=0 \qquad \beta^{(n)}=\frac{1}{1-x_{s+1}}.$$

**У т в е р ж д е н и е .** Если значение $n$ задано и точка $\xi$ попадает в интервал $(x_s, x_{s+1})$, решением схемы (7.29) является $v=(v_0, v_1,\dots v_n)\in R^{n+1}$ такой, что

$$v_i=\begin{cases} 1, \; i=0,s, \\ \dfrac{1}{1-x_{s+1}}\cdot(1-x_i), i=s+1,n \end{cases} \quad (7.32)$$

**С л е д с т в и е .** При сгущении сетки, т.е. при $n\to\infty$, существуют предельные значения

$$\overline{\alpha}=\lim_{n\to\infty}\alpha^{(n)}=0, \qquad \overline{\beta}=\lim_{n\to\infty}\beta^{(n)}=\frac{1}{1-\xi}$$

**Пределом численных решений при $n\to\infty$ является кусочно-линейная функция**

$$\overline{v}(x)=\begin{cases} 1, x\in[0,\xi] \\ \dfrac{1}{1-\xi}(1-x), x\in[\xi,1] \end{cases} \quad (7.33)$$

***Выводы***

**1) Решение разностной схемы сходится к функции, не являющейся решением исходной задачи:** $\bar{v}(x) \neq u(x)$.

**2) Предельное численное решение** $\bar{v}(x)$ **соответствует условию теплового контакта** $\bar{v}_+ = \bar{v}_-$:

$$\bar{v}_- = \lim_{x\to\xi-0} \bar{v}(x) = \lim_{x\to\xi-0} (1) = 1$$

$$\bar{v}_+ = \lim_{x\to\xi+0} \bar{v}(x) = \lim_{x\to\xi+0} \left(\frac{1}{1-\xi}(1-x)\right) = \frac{1-\xi}{1-\xi} = 1$$

(температура непрерывна).

**3) Предельное численное решение** $\bar{v}(x)$ **не соответствует закону теплопроводности** $\bar{w}_+ = \bar{w}_-$. Действительно,

слева от точки $\xi \in (0,1)$ тепловой поток отсутствует:

$$\bar{w}_- = \lim_{x\to\xi-0} \left(-k(x)\bar{v}'(x)\right) = \lim_{x\to\xi-0} \left(-2\cdot(1)'\right) = 0$$

справа от точки $\xi \in (0,1)$ тепловой поток составит

$$\bar{w}_+ = \lim_{x\to\xi+0} \left(-k(x)\bar{v}'(x)\right) = \lim_{x\to\xi+0} \left(-1\cdot\left(\frac{1}{1-\xi}(1-x)\right)'\right) = \frac{1}{1-\xi}$$

**4) Предельному численному решению соответствует расположенный в точке** $\xi \in (0,1)$ **точечный источник тепла с положительной мощностью**

$$\bar{w}_+ - \bar{w}_- = \frac{1}{1-\xi} > 0 \qquad (7.34)$$

**5) Схема расходится.**

***Задание***

1) Объясните, что не учтено при построении схемы (7.29).

2) Напишите консольное приложение для проверки того, что схема расходится.

## 7.6. Пример сходящейся неоднородной схемы

Разностная схема называется **однородной,** если запись схемы, разработанной для решения некоторого класса задач, не зависит от выбора задачи из указанного класса и не зависит от выбора сетки. Во всех узлах сетки разностные уравнения однородной схемы записываются одинаково. Разностная схема, построенная методом баланса, является **однородной** (см. модуль 4).

Приведем пример **сходящейся неоднородной схемы**. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -f(x), \ \ x \in (0,2) \\ u(0) = 13 \\ u(2) = 19 \end{cases} \tag{7.35}$$

$$k(x) = \begin{cases} 3, \ x \in (0, \xi) \\ 7, \ x \in (\xi, 2) \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} 0, \ x \in (0, \xi) \\ 5, \ x \in (\xi, 2) \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 10, \ x \in (0, \xi) \\ -15, x \in (\xi, 2) \end{cases}$$

В точке разрыва $\xi = 0.4$ указываются условия сопряжения.

При $x < \xi$ дифференциальное уравнение задачи (7.35) имеет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{d^2u}{dx^2} = -10, \ \ x \in (0, \xi) \\ u(0) = 13 \end{cases}$$

При $x > \xi$ дифференциальное уравнение задачи (7.35) имеет вид

$$\begin{cases} 7 \cdot \dfrac{d^2u}{dx^2} - 5 \cdot u(x) = 15, \ \ x \in (\xi, 2) \\ u(2) = 19 \end{cases}$$

При $x = \xi$ поставлены условия теплового контакта $u_- = u_+$, где

$$u_- = \lim_{x \to \xi - 0} u(x) \qquad\qquad u_+ = \lim_{x \to \xi + 0} u(x)$$

и записан закон теплопроводности $w_- = w_+$, где

$$w_- = \lim_{x \to \xi - 0} \left(-3 \cdot u'(x)\right) \qquad\qquad w_+ = \lim_{x \to \xi + 0} \left(-7 \cdot u'(x)\right)$$

Для решения (7.35) построим на отрезке $[0;2]$ равномерную сетку с узлами $x_i = ih,\ i = \overline{0,n}$, где шаг сетки $h = \dfrac{2}{n}$. Число $n$ выбираем так, чтобы точка $\xi = 0.4$ совпадала с узлом сетки, такой узел обозначим $x_s$.

Очевидно, что при $x_i < x_s$ и при $x_i > x_s$ разностный оператор $[u_{x\bar{x}}]_i$ аппроксимирует вторую производную $u''(x_i)$ с порядком 2:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \approx u''(x_i),\ x_i = ih,\ i = \overline{1,n-1},\ i \neq s$$

Поэтому разностные уравнения

$$\begin{cases} 3 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -10,\ \ i = 1,...s-1 \\ 7 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 15,\ \ i = s+1,...n \end{cases}$$

аппроксимируют дифференциальное уравнение (7.35) при значениях $x$ левее и правее точки разрыва, аппроксимация с порядком 2.

Разностное уравнение

$$-3 \cdot \frac{v_s - v_{s-1}}{h} = -7 \cdot \frac{v_{s+1} - v_s}{h}$$

аппроксимирует условие $w_+ = w_-$ (использованы левый и правый разностные операторы для аппроксимации предельных слева и справа значений производной в точке $\xi = 0.4$). Данная аппроксимация имеет 1-й порядок.

Учитываем граничные условия и записываем схему:

$$\begin{cases} v_0 = 13 \\ 3 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -10,\ \ i = 1,...s-1 \\ -3 \cdot \dfrac{v_s - v_{s-1}}{h} = -7 \cdot \dfrac{v_{s+1} - v_s}{h},\ \ i = s \\ 7 \cdot \dfrac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 15,\ \ \ i = s+1,...n \\ v_n = 19 \end{cases} \tag{7.36}$$

Схема (7.36) применяется на равномерных сетках, для которых точка $\xi = 0.4$ является узлом сетки: $\xi = x_s$.

**Утверждение 1.** При любом значении $n$ решение схемы (7.36) **существует и единственно.** (Доказательство следует из выполнения условий *Теоремы о применении прогонки).*

**Утверждение 2.** Схема (7.36) **сходится с 1-м порядком.** (Доказательство провести самостоятельно).

***Задание***

Объясните, почему схема (7.36) не классифицируется как однородная.

## 7.7. Проверка на консервативность. Дисбаланс

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \tag{7.37}$$

решением которой является функция $u(x), x \in [a,b]$. Коэффициенты $k(x), q(x), f(x)$ и значения $\mu_1$ и $\mu_2$ считаем заданными, они соответствуют условиям

$$\begin{cases} k(x) > 0, x \in [a,b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a,b] \end{cases}.$$

На отрезке $[a;b]$ строим равномерную сетку с узлами $x_i = a + ih, i = \overline{0,n}$, и дополнительными узлами $x_{i+0.5} = a + (i+0.5)h,\ i = \overline{0,n-1}$. Размерность сетки равна $n$, шаг сетки $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Интегрируем основное уравнение задачи (7.37) на участке $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$:

$$\int\limits_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)dx - \int\limits_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} q(x)u(x)dx + \int\limits_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} f(x)dx = 0 \tag{7.38}$$

Это уравнение представляет собой запись закона сохранения тепла на участке $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$ в интегральной форме.

Первый из интегралов вычислим, используя формулы теплового потока (см. модуль 4), следующие два интеграла запишем как сумму интегралов по участкам $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$

$$w(x_{0.5}) - w(x_{n-0.5}) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(-\int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx + \int\limits_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx\right) = 0 \tag{7.39}$$

Используя обозначение

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f\ (x)\ dx\ ,\quad i = \overline{1, n-1} \tag{7.40}$$

для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$-\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = -h \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)\ dx = -\varphi_i h\ .$$

Используя обозначение

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q\ (x)\ dx\ ,\quad i = \overline{1, n-1} \tag{7.41}$$

для каждого из участков $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$ запишем

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_i)\ d_i h$$

Используя построенную ранее разностную аппроксимацию функции теплового потока

$$w_{i-0.5} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h} a_i\ ,\ i = \overline{1, n}\ , \text{ где } a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1},\ i = \overline{1, n}\ , \tag{7.42}$$

перепишем (7.39) в виде

$$\frac{u_0 - u_1}{h} a_1 - \frac{u_{n-1} - u_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} \left( -d_i u_i + \varphi_i \right) = 0 \tag{7.43}$$

Уравнение (7.43) является разностным аналогом закона сохранения тепла на отрезке $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$.

**Определение.** Пусть $\hat{v} \in R^{n+1}$ есть численное решение задачи (7.37), полученное с помощью некоторой разностной схемы, заданной на сетке с узлами $x_i = a + ih,\ i = \overline{0, n}$, и дополнительными узлами $x_{i+0.5} = a + (i + 0.5)h,\ \ i = \overline{0, n-1}$. Величину

$$R = \frac{\hat{v}_0 - \hat{v}_1}{h} a_1 - \frac{\hat{v}_{n-1} - \hat{v}_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} \left( -d_i \hat{v}_i + \varphi_i \right) \tag{7.44}$$

с коэффициентами (7.40)-(7.42), называют **дисбалансом схемы**.

**Утверждение.** Дисбаланс схемы (4.14), построенной методом баланса с целью численного решения задачи (7.37), равен нулю: $R = 0$.

**Доказательство.** Пусть $v \in R^{n+1}$ есть численное решение задачи (7.37), полученное с помощью (4.14). Дисбалансом схемы является число

$$R = \frac{v_0 - v_1}{h} a_1 - \frac{v_{n-1} - v_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} \left( - d_i v_i + \varphi_i \right).$$

где коэффициенты заданы формулами (7.40)-(7.42). Коэффициенты схемы (4.14) совпадают с коэффициентами (7.40)-(7.42) для расчета $R$. Вектор $v \in R^{n+1}$ удовлетворяет каждому из уравнений (4.14). Просуммировав уравнения (4.14), получим $R = 0$.

***Комментарии***

**Дисбаланс и его свойства, проявляющиеся при сгущении сетки, используются при проверке схемы на консервативность.** Если $R = 0$, схема называется консервативной. Малые значения $R$, стремящиеся к нулю при сгущении сетки, не мешают сходимости.

При решении прикладных задач рекомендуется использовать консервативные схемы.