

Модуль 3. Метод прогонки. Вычислительная устойчивость методов

3.1. Введение: вопросы погрешности, устойчивости и сходимости

3.2. Прогонка: описание метода

$$Ax=b$$

Методы решения линейных систем:

- прямые
- итерационные

Определение

Методы, которые решают задачу за конечное число арифметических действий, называются прямыми.

Определение

Методы, которые генерируют последовательность, каждый элемент которой может рассматриваться как приближение, называются итерационными.

Правило Крамера, метод Гаусса – прямые методы.

В практическом смысле прямых методов не бывает из-за вычислительной погрешности.

На практике часто встречаются задачи большой размерности, с матрицей определенной структуры. Для них придумывают специальные прямые или итерационные методы.

Метод прогонки – это прямой метод решения линейных систем с 3-х диагональной матрицей.

$$(y_0, y_1, \dots, y_n) \in R^{n+1}$$

$$(1) \begin{cases} y_0 - \chi_1 y_1 = \mu_1 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i \\ -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \end{cases} \quad \text{Коэффициенты } \chi_1, \chi_2, A_i, C_i, B_i, i=1, n-1 - \text{известны.}$$

Правая часть: $\mu_1, \mu_2, \varphi_i, i=1, n-1$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & \cdot & n-1 & n \\ \hline 0 & 1 & -\chi_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & A_1 & -C_1 & B_1 & \cdot & 0 & 0 \\ 2 & 0 & A_2 & -C_2 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdot & -\chi_2 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ -\varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \cdot \\ -\varphi_{n-1} \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (1^*)$$

$$\text{Прогонка: } y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad i=0, n-1 \quad (2)$$

$\alpha_1 \cdot \alpha_n$
 $\beta_1 \cdot \beta_n$ рассматриваются как параметры

Нужно вывести формулы для α и β , вычислить их, а затем по формулам (2) вычислить компоненты

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 \\ y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1 = \chi_1$, $\beta_1 = \mu_1$ подставляем y_{i-1} из (2) в систему (1).

$$A_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - C_i y_i + B_i y_{i-1} = -\varphi_i$$

$$y_i(A_i \alpha_i - C_i) + B_i y_{i+1} = -\varphi_i - A_i \beta_i$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$(3^{**}) \quad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{\varphi_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad i = 1, n-1 \quad (3^*), (3^{**}) - \text{это прямой ход прогонки, эти}$$

вычисления позволяют вычислить все α_i и β_i .

y_{n-1}, y_n – неизвестны $\mu_2, \chi_2, \alpha_n, \beta_n$ – известны

$$\begin{cases} -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \\ y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n \end{cases} \quad \text{Из этой системы можно выразить } y_n = \frac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} \quad (4)$$

Используя формулу (4) и формулу (2) получим все остальные y . Эти вычисления называются обратным ходом прогонки.

$$\begin{cases} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, & i = n-1, 0 \\ y_n = \frac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} \end{cases}$$

Оценка числа действий.

	прямой ход	обратный ход	всего
Умножение	2n-2	n+2	3n
Деление	2n-2	1	2n-1
Слож./Выч.	2n-2	n+2	3n

Размерность системы (1) $(n+1) \times (n+1)$. Обозначим $m = n+1$, тогда число действий в методе прогонки выражается через размерность линейной системы, как $[8m - 9]$.

Замечание: для систем с 3-х диагональной матрицей большой размерности, прогонка требует числа действий порядка $\sim 8m$, а метод Гаусса $\sim m^3$.

3.3. Условия применения метода

$$\begin{cases} y_0 - \chi_1 y_1 = \mu_1 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\varphi_i \\ -\chi_2 y_{n-1} + y_n = \mu_2 \end{cases}$$

$$\text{Прямой ход прогонки: } \alpha_1 = \chi_1, \beta_1 = \mu_1 \quad \alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad \beta_{i+1} = \frac{\varphi_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i} \quad i = 1, n-1$$

$$\text{Обратный ход: } y_n = \frac{-\chi_2 \beta_n - \mu_2}{\chi_2 \alpha_n - 1} \quad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, 0$$

Есть много однотипных теорем, гарантирующих выполнения метода прогонки. Эта теорема, как и многие теоремы линейной алгебры использует диагональное преобладание.

$$A_{m \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & a_{mm} \end{bmatrix} \text{ Диагональное преобладание: } |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^m |a_{ij}| \quad i = 1, m, \text{ если выполнено со}$$

знаком \geq - нестрогое диагональное преобладание.

		0	0	0
			0	0
0				0
0	0			
0	0	0		

Теорема о применимости прогонки:

Пусть в системе (1) все $A_i \neq 0$, все $B_i \neq 0$,

(*) $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$, $i=1, n-1$, $|\chi_1| \leq 1$, $|\chi_2| < 1$

Тогда при любой правой части μ_1, μ_2, φ_i , $i=1, n-1$ система (1) имеет единственное решение и его можно найти методом прогонки.

Доказательство: 1) доказать знаменатель $\neq 0$

2) доказать существование решения.

1) $|\alpha_1| = |\chi_1| \leq 1 \Rightarrow |C_1 - \alpha_1 A_1| \geq |C_1| - |\alpha_1| \cdot |A_1| \geq |C_1| - |A_1| > 0$, т.к. $B_1 \neq 0$ и $|C_1| \geq |A_1| + |B_1| > |A_1|$

$$|\alpha_2| = \frac{|B_1|}{|C_1 - \alpha_1 A_1|} \leq \frac{|B_1|}{|C_1| - |\alpha_1| |A_1|} \leq \frac{|B_1|}{|C_1| - |A_1|} \leq \frac{|B_1|}{|B_1|} = 1$$

для всех остальных α_i, β_i по индукции доказывается, что знаменатель $\neq 0$ и все $|\alpha_i| \leq 1$.

$$|1 - \alpha_n \chi_2| \geq \|1 - \alpha_n\| \|\chi_2\| \geq \|1 - \chi_2\| > 0 \quad \text{по усл.}$$

2) По способу построению полученные u_n являются решениями системы.

по теореме Гершгорина возможно, что система вырождена.

в курсе ГА – Альтернатива Фредгольма:

1) $A_{m \times m} \quad Ax=b, \det A \neq 0 \Rightarrow \forall b \exists! x$

2) $Ax=b, \det A=0 \Rightarrow$ для некоторых b не $\exists x$ и для некоторых $b \exists$ много решений.

По Альтернативе Фредгольма линейная система с 3-х диагональной матрицей, удовлетворяет условию (*) не вырождена. (Система имеет решение при $\forall b \Rightarrow$ возможен только 1-й вариант Альтернативы).

3.4. Вычислительная устойчивость прогонки

Определение:

Численный метод называется вычислительно устойчивым, если вычислительная погрешность возникающая на некотором шаге больше не возрастает.

Теорема:

При условиях теоремы о применимости прогонки, этот метод вычислительно устойчив.

Доказательство: обратный ход прогонки: $y_n = \{ \text{по формуле} \} y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \quad i=n-1, 0$ предположим, что на некотором шаге машина вместо y_k , за счет округления, вычислила \hat{y}_k . $|y_k - \hat{y}_k|$ -

вычислительная погрешность шага. $\delta_k = |y_k - \hat{y}_k|$ на следующем шаге должны вычислить

$y_{k-1} = \alpha_k y_k + \beta_k$ а вычислим $\hat{y}_{k-1} = \alpha_k \hat{y}_k + \beta_k = \alpha_k (y_k - \delta_k) + \beta_k = y_{k-1} - \delta_k \alpha_k$, вычислительная

погрешность следующего шага при этом составит: $\delta_{k-1} \stackrel{\text{def}}{=} y_{k-1} - \hat{y}_{k-1} = \delta_k \alpha_k$.

Мы рассуждаем, что новые вычислительные погрешности не появляются, а просто вычисляем последствия старой погрешности. $|\delta_{k-1}| \leq |\delta_k|$, т.к. в условиях теоремы о применимости прогонки $|\alpha_k| < 1$.

Выводы:

- 1) Есть много разных вариантов теорем об условиях применения метода прогонки.
- 2) Есть много разных вариантов самой прогонки (циклическая прогонка).
- 3) Есть матричная прогонка с блочной 3-х диагональной матрицей, на диагоналях стоят не нулевые блоки.

К истокам:

- проблемы вычислительной устойчивости – решена (теорема)
- проблема сходимости не ставится, т.к. прогонка дает точное решение линейной системы.