

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики

**Кафедра теоретической, компьютерной и экспериментальной
механики**

Направление подготовки: « Математическое моделирование физико-
механических процессов»

ОТЧЕТ
по учебной практике

на тему:

**«Нахождение глобального минимума методом ломаных
(Метод Пиявского)»**

Выполнила:

студентка группы 3821М1ПМфм
Селезнева Ольга Александровна

Подпись

Проверила:

Кандидат физ.-мат. Наук, доцент
Маркина Марина Викторовна

Подпись

Нижний Новгород
2022

Теоретическое описание

Рассмотрим многомерную задачу глобальной оптимизации в общем случае:

$$F^* = F(y^*) = \min\{F(y): y \in D\},$$

Где область поиска представляет собой произвольный параллелепипед:

$$S = \{ \omega \in \mathbb{R}^N: a_j \leq \omega_j \leq b_j, 1 \leq j \leq N \}.$$

Его можно привести к стандартному гиперкубу D

$$S = \left\{ y \in \mathbb{R}^N: -\frac{1}{2} \leq y_j \leq \frac{1}{2}, 1 \leq j \leq N \right\}$$

Следующим преобразованием

$$y_j = \frac{(2\omega_j - (a_j + b_j))}{2\rho}$$

$$\rho = \max\{b_j - a_j: 1 \leq j \leq N\}.$$

На практике все функции принимаются липшицевыми, то есть удовлетворяющими следующему неравенству:

$$\forall y', y'' \in D \mid F(y') - F(y'') \mid \leq L \parallel y' - y'' \parallel = L \left\{ \sum_{j=1}^N (y'_j - y''_j)^2 \right\}^{1/2}$$

$0 < L < \infty$ – константа Липшица.

Алгоритм Пиявского

Рассматривается липшицева функция $f(x), x \in [a, b]$, значение которой в точке минимума x^* обозначим как $f^* = f(x^*)$. Условие Липшица можно переформулировать следующим образом: для произвольного $y \in [a, b]$ функция $C(x) = f(y) - L \mid x - y \mid$ ограничивает снизу $f(x)$, то есть $C(x) \leq f(x), x \in [a, b]$.

Пусть известны значения функции в k последовательных точках: x_1, \dots, x_k из отрезка $[a, b]$ и z_1, \dots, z_k – значения функции в этих точках. Сконструируем кусочно-линейную функцию:

$$C^k(x) = \bigcup_{i=2}^k c_i(x),$$

$$c_i(x) = \max\{z_{i-1} - L(x - x_{i-1}), z_i + L(x - x_i)\}, x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Такая функция, в силу условия Липшица, ограничивает $f(x)$ снизу: в дальнейшем будем называть ее минорантой. Миноранта построена как поточечный максимум линейных функций, ограничивающих функцию $f(x)$ снизу на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Точки пересечения этих линейных функций вычисляются как:

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \frac{z_{i-1} - z_i}{2L}$$

А значение миноранты в этих точках

$$c_i(\tilde{x}_i) = \frac{z_i + z_{i-1}}{2} + L \frac{x_{i-1} - x_i}{2}$$

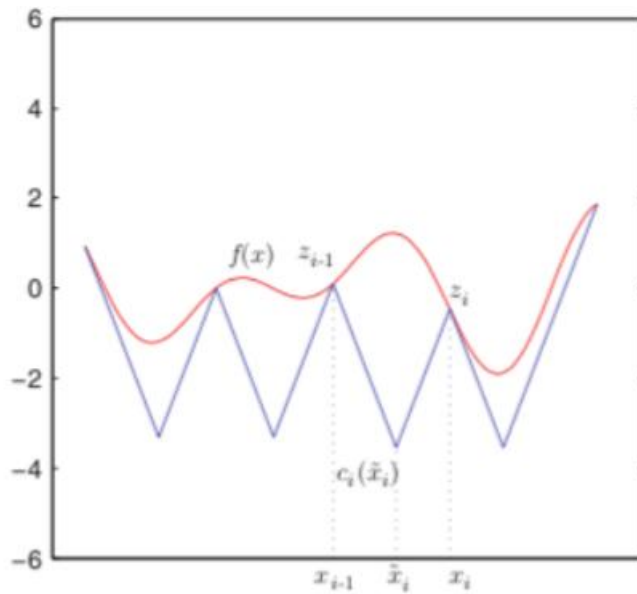


Рисунок 1. Пример кусочно-линейной миноранты.

На рис. 1 приведен пример построения кусочно-линейной миноранты. Алгоритм Пиявского заключается в выборе минимальной точки миноранты как следующей для вычисления значения функции. То есть точка x^{k+1} выбирается таким образом, что

$$C^k(x^{k+1}) = \min C^k(x), x \in [a, b]$$

Или

$$C^k(x^{k+1}) = \min c_i(\tilde{x}_i), 1 \leq i \leq k.$$

После K шагов $f_K^* = \min\{z_i, 1 \leq i \leq K\}$ считается оценкой минимума функции и $x_K^* = \arg \min\{z_i, 1 \leq i \leq K\}$ – оценкой точки минимума.

Доказана сходимость алгоритма Пиявского, если за L принимается число, не меньшее истинного значения константы Липшица. Однако не всегда возможно найти истинное значение константы. Чтобы преодолеть эту трудность, Р. Стронгин предложил алгоритм, адаптивно оценивающий константу [1].

На Рис. 2 представлена поэтапная схема алгоритма. Она была позаимствована из [2]. Данная схема была взята за основу и реализована программно.

Алгоритм метода ломаных

Шаг 0. Задать константу $L > 0$ и $\varepsilon > 0$ — точность решения задачи по значению функции.

Шаг 1. Положить $x^1 = a, x^2 = b$, вычислить $Q^1 = Q(x^1), Q^2 = Q(x^2)$,
 $Q_2^* = \min \{Q^1; Q^2\}, x_2^* = \arg \min \{Q(x^1); Q(x^2)\}, k = 2$.

Шаг 2. Упорядочить точки нижним индексом по возрастанию координаты

$$a = x_1 < \dots < x_k = b.$$

Шаг 3. Определить подынтервал $[x_t; x_{t+1}]$ с минимальным значением характеристики (4.117):

$$R_t = \min \{R_i : i = 1, \dots, k-1\}. \quad (4.118)$$

Шаг 4. Если выполнен критерий останова

$$Q_k^* - R_t \leq \varepsilon, \quad (4.119)$$

прекратить вычисления и принять Q_k^* и соответствующую точку x_k^* за оценку решения. Если же (4.119) не выполнено, перейти на шаг 5.

Шаг 5. Провести новое измерение в точке

$$x^{k+1} = \hat{x}_t, Q^{k+1} = Q(x^{k+1}). \quad (4.120)$$

Положить

$$Q_{k+1}^* = \min \{Q_k^*; Q^{k+1}\}, x_{k+1}^* = \arg \min \{Q(x^i) : i = 1, \dots, k+1\},$$

принять $k := k+1$, перейти на шаг 2.

Рисунок 2. Алгоритм метода Пиявского.

Также из данного источника был реализован метод оценивания константы. Он представлен на Рис. 3.

Применение метода при неизвестном L (метод с оцениванием константы)

Оценим константу Липшица снизу величиной

$$l_k = \max_{1 \leq i < j \leq k} \frac{|Q_j - Q_i|}{\|x^j - x^i\|}. \quad (4.113)$$

Примем в качестве константы Липшица в выражении для миноранты из (4.107) следующую оценку:

$$L_k = \begin{cases} rl_k, & \text{если } l_k > 0; \\ 1, & \text{если } l_k = 0, \end{cases} \quad (4.114)$$

где параметр надежности $r > 1$.

Замечание. Для метода с оценкой константы Липшица вида (4.114) приведенная выше теорема останется справедлива в той своей части, которая утверждает конечность выполнения метода. Оценка точности полученного приближения будет верна только при дополнительном предположении, что оценка L_k на момент останова окажется не меньше значения L .

Рисунок 3. Оценка константы Липшица

Замечание: Данный алгоритм предполагает, что минимизируется функция одного аргумента, тогда как исходная задача является многокритериальной. Это связано с тем, что в многомерном случае данный метод точно нереализуем.

Для построения процедур многоэкстремальной оптимизации в многомерном случае используется несколько подходов: методы редукции (т.е. понижения) размерности с использованием разверток Пеано-Гильберта, редукция с применением многошаговой схемы, компонентные методы. В данной работе реализуется первый способ. Перейдем к нему.

Кривые Пеано (Кривые, заполняющие пространство)

Определение. Непрерывное отображение $y(x), x \in [0, 1]$, на единичный гиперкуб D , называется кривой Пеано или кривой, заполняющей пространство.

Отметим, что данное отображение с необходимостью не инъективно.

Построение аппроксимации кривой Пеано.

Существует несколько способов построения кривых Пеано как объектов, возникающих при предельном переходе. Свои алгоритмы предложили многие математики, такие как Пеано, Гильберт, Мур, Лебег, Серпинский, Полия. Эти алгоритмы подробно изучены в монографии Сагана [5]. Изложим построение кривой, заполняющей пространство, следуя Гильберту.

Разделим единичный гиперкуб D на 2^N равных меньших гиперкубов, пересекая исходный гиперкуб N плоскостями, каждая из которых перпендикулярна одной из координатных осей и проходит через начало координат. Тем самым, получено 2^N меньших гиперкубов с длиной ребра 2^{-1} , каждый из которых обозначим как $D(z_1)$, где $0 \leq z_1 \leq 2^N - 1$. Каждый из полученных гиперкубов разделим подобным образом. В результате, имеем 2^{2N} гиперкубов с длиной ребра 2^{-2} , которые можно занумеровать как $D(z_1, z_2)$, где $0 \leq z_1 \leq 2^N - 1, 0 \leq z_2 \leq 2^N - 1$. Продолжая разбиения аналогичным образом M раз, получаем 2^{MN} гиперкубов с длиной ребра 2^{-MN} , занумерованных таким образом, что выполняется следующее вложение

$$D \supset D(z_1) \supset D(z_1, z_2) \supset \dots \supset D(z_1, \dots, z_M),$$

где $0 \leq z_i \leq 2^N - 1, 1 \leq i \leq M$.

Теперь разделим единичный отрезок $[0, 1]$ на 2^N равных меньших отрезков и обозначим их как $d(z_1)$, где $0 \leq z_1 \leq 2^N - 1$. Каждый из полученных отрезков еще раз поделим на 2^N частей, которые обозначим как $d(z_1, z_2)$, где $0 \leq z_1 \leq 2^N - 1$,

$0 \leq z_2 \leq 2^N - 1$. После M итераций получаем разбиение единичного отрезка на 2^{MN} меньших, каждый длиной 2^{-MN} , для которых выполняется следующее вложение $d \supset d(z_1) \supset d(z_1, z_2) \supset \dots \supset d(z_1, \dots, z_M)$, где $0 \leq z_i \leq 2^N - 1, 1 \leq i \leq M$.

Процесс деления единичного отрезка можно воспринимать как описанный выше процесс деления гиперкуба в пространстве с $N = 1$ – с той лишь разницей, что левый конец отрезка перенесен в начало координат. Переобозначим отрезок $d(z_1, \dots, z_M)$ с левым концом v как $d(M, v)$.

Установим взаимно однозначное соответствие между 2^{MN} отрезками и 2^{MN} гиперкубами, то есть установим отображение $d(M, v) \rightarrow D(M, v)$ так, чтобы оно удовлетворяло следующим свойствам:

1. $D(M + 1, v') \subset D(M, v'')$, если и только если $d(M + 1, v') \subset d(M, v'')$.
2. Два отрезка $d(M, v'), d(M, v)$ имеют общую граничную точку, если соответствующие гиперкубы $D(M, v'), D(M, v'')$ имеют общую грань.

Первое условие выполнено по построению, выполнение второго достигается специальной нумерацией гиперкубов.

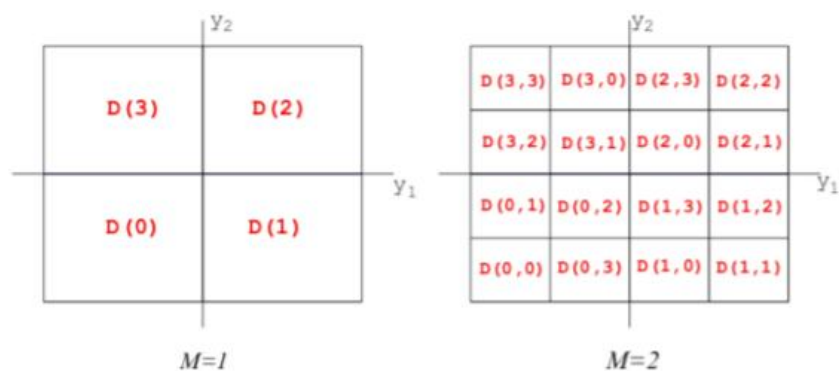
Опустим алгоритм данной нумерации, который подробно описан в монографии Р. Стронгина [1], лишь отметив, что полученное взаимно однозначное соответствие обладает важными свойствами, сформулированными в следующем утверждении.

Теорема. Пусть $y(x)$ – отображение, определенное следующим правилом: для любого $M \geq 1$ $y(x) \in D(M, v)$ тогда и только тогда, когда $x \in d(M, v)$. Тогда:

1. $y(x)$ – непрерывное отображение единичного отрезка $[0, 1]$ на гиперкуб D , то есть полученное отображение действительно является кривой, заполняющей пространство.
2. Рассмотрим Липшицеву функцию $F : D \rightarrow R$, с константой Липшица L . Тогда функция одной переменной $f(x) = F(y(x)) : [0, 1] \rightarrow R$ является гёльдеровой с показателем N^{-1} и константой Гёльдера $H = 2L\sqrt{N+3}$. То есть $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1]: |f(x_1) - f(x_2)| < 2L\sqrt{N+3} |x_1 - x_2|^{1/N}.$$

На Рис. 4 представлен пример разбиения гиперкуба и единичного отрезка при $N = 2, M = 2$.



Пример разбиения гиперкуба.



Пример разбиения отрезка.

Рисунок 4. Разбиение гиперкуба и единичного отрезка

Аппроксимации кривых Пеано

Фиксируем число разбиения M . Рассмотрим кусочек разбиения единичного отрезка

$$d(z_1, \dots, z_M) = [v^i, v^i + 2^{-MN}], 0 \leq i \leq 2^{MN} - 1.$$

Выше было сказано, что существует специальное отображение таких отрезков на гиперкубы разбиения $D(z_1, \dots, z_M)$. Условимся обозначать центр такого гиперкуба, как

$$y^i = y(z_1, \dots, z_M), 0 \leq i \leq 2^{MN} - 1.$$

Указанное отображение из единичного отрезка на центры кубов уже можно считать аппроксимацией кривой Пеано, которое, однако, не является непрерывным. Построим непрерывную кривую $l(x)$, соединив эти центры.

$$\begin{aligned} l(x) &= y^i + y^{i+1} - y^i [(w(x) - v^i) / (v^{i+1} - v^i)] \\ v^i &\leq w(x) \leq v^{i+1} \text{ и } w(x) = x(1 - 2^{-MN}), \\ 0 &\leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Образ следующего отрезка на прямой

$$[v^i(1 - 2^{-MN})^{-1}, v^{i+1}(1 - 2^{-MN})^{-1}], 0 \leq i \leq 2^{MN} - 1$$

есть отрезок, соединяющий центры гиперкубов. Поэтому полученная аппроксимация называется кусочно-линейной. Такое отображение является непрерывным и инъективным.

Иллюстрация для плоского случая с $M = 3$ приведена Рис. 5.

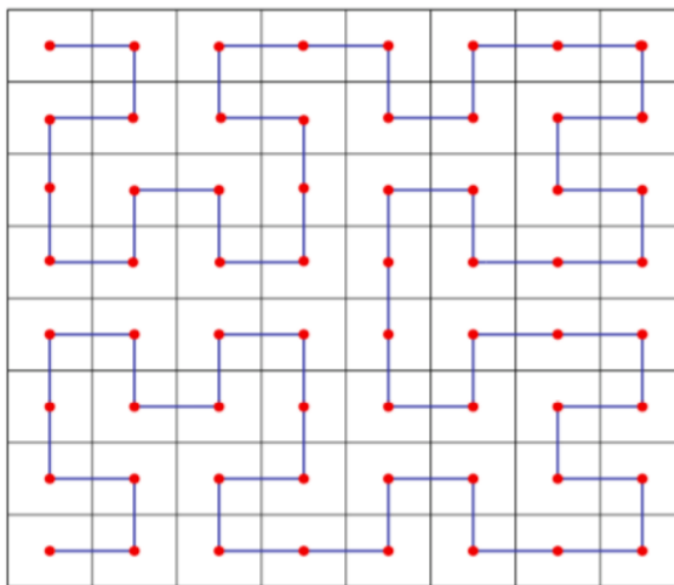


Рисунок 5. Пример кусочно-линейной аппроксимации кривой Пеано

Истинная кривая Пеано, как было сформулировано в теореме, из многомерной липшицевой функции делает гёльдерову. Аналогичное утверждение справедливо и для аппроксимации.

Подобрав достаточно большое число разбиения M , можно добиться достаточной точности приближения точек гиперкуба точками кусочно-линейной кривой.

Однако такая аппроксимация не единственная и содержит недостатки. Подробнее можно ознакомиться в работе [6].

Связь между многомерной липшицевой функцией и соответствующей ей гёльдеровой функцией

Чтобы использовать метод Пиявского в применении к многомерным липшицевым функциям, нужно понимать, какими свойствами будет обладать одномерная функция, построенная на основе кривой, заполняющей многомерное пространство. Если метод использует аппроксимацию кривой Пеано $pM(\cdot)$ порядка M и обеспечивает нижнюю границу U_M^* для одномерной функции $y(x)$, тогда это значение будет нижней границей для функции $F(y)$, но только вдоль кривой $pM(\cdot)$. Остается вопрос, можно ли установить

нижнюю границу для многомерной функции $F(y)$ на всем многомерном интервале поиска D .

Теорема. Пусть U_M^* – нижняя граница вдоль кривой Пеано $pM(x)$ для многомерной функции $F(y)$, удовлетворяющей условию Липшица с константой Липшица L , то есть

$$U_M^* \leq F(pM(x)), x \in [0, 1],$$

тогда

$$U = U_M^* - 2^{-(M+1)} L \sqrt{N}$$

является нижней границей для $F(y)$ на всей области D , то есть,

$$U \leq F(y), y \in D.$$

Программная реализация и численные эксперименты

Алгоритм Пиявского, построение аппроксимации кривой Пеано были реализованы программно на языке C# в среде Visual Studio 2012 так, как они описаны выше.

При запуске программы появляется визуальная форма вида:

1 Функция Экли $-5 \leq x, y \leq 5$
$$f(x, y) = -20 \exp \left[-0.2 \sqrt{0.5 (x^2 + y^2)} \right] - \exp [0.5 (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)] + e + 20$$
$$f(0, 0) = 0$$

2 Функция Леви N 13 $-10 \leq x, y \leq 10$
$$f(x, y) = \sin^2 3\pi x + (x - 1)^2 (1 + \sin^2 3\pi y) + (y - 1)^2 (1 + \sin^2 2\pi y)$$
$$f(1, 1) = 0$$

3 Функция Букина N 6 $-15 \leq x \leq -5, -3 \leq y \leq 3$
$$f(x, y) = 100 \sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01 |x + 10|.$$
$$f(-10, 1) = 0$$

Решать тестовую задачу №
m =

Метод Пиявского
Параметр надежности $\gamma > 1$
Число разбиений
 $\leq x_1 \leq$
 $\leq x_2 \leq$
Точность по значению функции ϵ
Максимальное число итераций

Результаты:
Достигнутая точность [linkLabel1](#)
Затрачено итераций [linkLabel2](#)
Координаты минимума
x1 [linkLabel3](#) x2 [linkLabel4](#)
Значение функции [linkLabel5](#)

Рисунок 6. Запуск программы

Как видно из Рис. 6 на выбор предлагаются три тестовых функции: Экли, Леви №13, Букина №6. Формулы данных функций, их ограничения и глобальный минимум также представлены на Рис. 6 справа. Задана их нумерация.

Справа пользователю предлагается ввести номер тестовой функции и обновить данные, чтобы вручную не вписывать ограничения на аргументы. Однако можно выбрать другие отрезки.

Также справа можно задать параметр надежности функции. Он будет использован для оценки константы Липшица.

Аналогично можно задать параметр m, который отвечает за разбиение области D и единичного отрезка при построении аппроксимации кривой Пеано. По умолчанию, для кривой Пеано в программе установлено $n = 2$, тестовые функции специально подобраны под данный параметр. Стоит уточнить, что пользователь может сам задать параметр m или же рассчитать его, нажав на кнопку «Пересчитать».

Далее предлагается ввести точность по значению и максимальное число итераций. Эти два параметра отвечают за остановку и выход из программы. Поскольку описанные алгоритмы могут работать до бесконечного числа шагов лишь теоретически, но никак не практически. Программа остановит работу, если будет выполнено введенное количество итераций, либо же выйдет по точности приближения решения.

Ниже представлена область для вывода результатов. Первоначально она заполнена программным «мусором». После нажатия кнопки «Start», программа начнет работу и эти данные обновятся.

Посередине представлена таблица из трех колонок. После первого запуска в ней появятся результаты. Их можно будет удалить, нажав кнопку «Очистить». Данные в таблице приведены следующие: в первой колонке обычная нумерация строк, во второй точки проведения испытаний алгоритма Пиявского для одномерной функции, в третьей колонке соответственно значение функции в этих точках.

Численные эксперименты

Для каждого примера подберем удачные параметры и запустим программу. Результаты будут приведены в Рис. 7, Рис. 8, Рис. 9. Тестовые задачи будут запущены в той нумерации, в которой они представлены на Рис. 6.

The screenshot displays the 'Global Minimum' application window. On the left, three test functions are listed:

- 1 Функция Экли**: $-5 \leq x, y \leq 5$

$$f(x, y) = -20 \exp \left[-0.2 \sqrt{0.5 (x^2 + y^2)} \right] - \exp [0.5 (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)] + e + 20$$
 $f(0, 0) = 0$
- 2 Функция Леви N 13**: $-10 \leq x, y \leq 10$

$$f(x, y) = \sin^2 3\pi x + (x - 1)^2 (1 + \sin^2 3\pi y) + (y - 1)^2 (1 + \sin^2 2\pi y)$$
 $f(1, 1) = 0$
- 3 Функция Букина N 6**: $-15 \leq x \leq -5, -3 \leq y \leq 3$

$$f(x, y) = 100 \sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01 |x + 10|$$
 $f(-10, 1) = 0$

In the center, a table shows the results for the Экли function:

№	$0 \ll x_i \ll 1$	$F(x_i)$
0	0	4,253653810838...
1	1	4,253653810838...
2	0,5	2,384187673953...
3	0,375	2,693693338444...
4	0,700652628491...	3,255459716655...
5	0,205597371508...	2,6138864505057
6	0,562559165235...	1,819556174717...
7	0,841746447582...	0,740699427146...
8	0,116893124292...	2,652730943679...
9	0,460653340380...	2,167519100013...
10	0,289936505001...	2,663028775682...
11	0,904930684277...	2,462066004308...
12	0,782612058925...	2,512509523784...
13	0,625089459000...	2,770265652675...
14	0,065711893056...	3,4462386421541
15	0,523022048006...	1,400392076797...
16	0,419989209317...	2,720122690739...
17	0,161404896036...	0,681351820467...
18	0,332342223303...	4,0863648622712
19	0,247564966753...	2,977173541722...
20	0,945102042210...	3,7050891764656...
21	0,866263870318...	1,813642313071...
22	0,744685816767...	3,196089749967...

On the right, the 'Решать тестовую задачу №' panel is shown with the following settings:

- Task number: 1
- m: 23
- Method: Метод Пиявского
- Parameter of reliability $r > 1$: 2
- Number of divisions: 100
- Search range for x_1 : [-5, 5]
- Search range for x_2 : [-5, 5]
- Accuracy by function value ϵ : 0.0001
- Maximum number of iterations: 500

The results section shows:

- Achieved accuracy: [0.00511654888776453](#)
- Iterations spent: [500](#)
- Coordinates of the minimum: x_1 [5.96046447753906E-07](#), x_2 [5.96046447753906E-07](#)
- Function value: [-0.000113919401139422](#)

Buttons include 'Пересчитать', 'Обновить', 'Очистить', and 'Start'.

Рисунок 7. Результат работы программы для функции Экли.

Из Рис. 7 видно, что программа вышла по количеству шагов, не достигнув заданной точности 10^{-4} . Однако вычисленные точки и значение функции близки к нужным результатам. Координаты точки минимума имеют порядок 10^{-7} , что не является машинным нулем, но близко к нему.

Запустим вторую тестовую функцию.

The screenshot displays the 'Global Minimum' software interface. On the left, three test functions are listed:

- 1 Функция Экли**: $-5 \leq x, y \leq 5$

$$f(x, y) = -20 \exp \left[-0.2 \sqrt{0.5 (x^2 + y^2)} \right] - \exp[0.5 (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)] + e + 20$$
 $f(0, 0) = 0$
- 2 Функция Леви N 13**: $-10 \leq x, y \leq 10$

$$f(x, y) = \sin^2 3\pi x + (x - 1)^2 (1 + \sin^2 3\pi y) + (y - 1)^2 (1 + \sin^2 2\pi y)$$
 $f(1, 1) = 0$
- 3 Функция Букина N 6**: $-15 \leq x \leq -5, -3 \leq y \leq 3$

$$f(x, y) = 100 \sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01 |x + 10|.$$
 $f(-10, 1) = 0$

In the center, a table shows the results of the optimization for the second function (Levi N 13):

№	$0 \leq x_i \leq 1$	$F(l(x_i))$
0	0	9,997041439148...
1	1	5,999005147896...
2	0,75	2,250733868577...
3	0,504164670079...	2,476779585826...
4	0,630851501216...	1,189026068808...
5	0,377477838941...	3,005415028089...
6	0,584889535474...	2,492142209323...
7	0,250389006441...	4,394223439930...
8	0,841948856135...	3,655208805160...
9	0,681063926285...	1,125524818509...
10	0,445482604971...	4,093004564833...
11	0,856517648932...	1,158820747538...
12	0,705610203637...	2,1320594596339
13	0,159353368436...	4,439750588386...
14	0,906684935998...	4,091262308185...
15	0,322400611766...	2,77736053821107
16	0,544433441018...	3,490953142635...
17	0,787411724430...	3,140005095505...
18	0,615815264830...	2,106174917870...
19	0,102453995388...	3,11919094494948
20	0,205040733079...	6,070252109623...
21	0,292416096729...	4,039150214853...
22	0,946237927261...	4,150989753052...

On the right, the 'Решать тестовую задачу №' panel shows the settings for the second function (Levi N 13):

- Метод Пиявского
- Параметр надежности $\tau > 1$: 2
- Число разбиений: 100
- Граничные условия: $-10 \leq x_1 \leq 10$, $-10 \leq x_2 \leq 10$
- Точность по значению функции ϵ : 0,00001
- Максимальное число итераций: 1000

The 'Результаты:' section shows the following values:

- Достигнутая точность: [7.83635689871609E-06](#)
- Затрачено итераций: [936](#)
- Координаты минимума: x_1 [6.8115234375](#), x_2 [6.8603515625](#)
- Значение функции: [0.112227282429786](#)

Buttons for 'Очистить' and 'Start' are also visible.

Рисунок 8. Результат работы программы для функции Леви.

В данном случае программа прекратила работу по точности. Однако полученные результаты достаточно далеки от ожидаемых. Это может быть связано с плохо подобранной аппроксимацией кривой или другими параметрами. В данном случае приведенные результаты являются лучшими из всей серии экспериментов с другими параметрами.

Стоит вспомнить, что выше говорилось о недостатках аппроксимации кривой Пеано. Один из них связан с неинъективностью кривой Пеано, в то время как $l(x)$ инъективна. Гиперкуб разбиения в пространстве размерности N имеет вплоть до 2^N "соседей" (при предельном переходе это свойство выливается в факт, что каждая точка в гиперкубе имеет вплоть до 2^N прообразов), однако кусочно-линейная аппроксимация уменьшает количество "соседей" до двух: слева и справа. Так как практически все оптимизационные алгоритмы используют близость между точками, инъективность

аппроксимации означает потерю существенной информации. Это можно исправить, построив другую аппроксимацию кривой, но этого не представлено в данной работе.

Запустим третью задачу.

The screenshot displays the 'Global Minimum' software interface, which is divided into three main sections for different optimization problems.

Problem 1 (Экли): The function is $f(x, y) = -20 \exp[-0.2 \sqrt{0.5(x^2 + y^2)}] - \exp[0.5(\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)] + e + 20$ with constraints $-5 \leq x, y \leq 5$. The initial value is $f(0, 0) = 0$.

Problem 2 (Леви N 13): The function is $f(x, y) = \sin^2 3\pi x + (x - 1)^2 (1 + \sin^2 3\pi y) + (y - 1)^2 (1 + \sin^2 2\pi y)$ with constraints $-10 \leq x, y \leq 10$. The initial value is $f(1, 1) = 0$.

Problem 3 (Букина N 6): The function is $f(x, y) = 100 \sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01|x + 10|$ with constraints $-15 \leq x \leq -5$ and $-3 \leq y \leq 3$. The initial value is $f(-10, 1) = 0$.

In the center, a table shows the results of the optimization process for Problem 3, listing the iteration number (№), the current value of the function (F(x,y)), and the value of the function at the minimum (F(x,y)).

№	0 < x1 < 1	F(x,y)
0	0	70,98196267274...
1	1	70,99196259645...
2	0,25	5,09114570846848
3	0,562490514683...	49,82191906038...
4	0,363816380856...	59,31863954615...
5	0,770136972746...	46,0118027973434
6	0,159574040711...	32,34447597366...
7	0,668312977005...	63,73941832066...
8	0,871960968487...	44,15121903287...
9	0,468136539737...	38,77459681235...
10	0,100060771688...	58,047923507899
11	0,219087309736...	39,4324511443959
12	0,294704827018...	45,5853351448
13	0,929940239255...	66,12821884538...
14	0,821467676668...	32,8124011593924
15	0,420599694823...	61,49230917988...
16	0,612269749707...	58,1265411321062
17	0,512827436096...	22,67547819274...
18	0,723214400152...	31,51445856746...
19	0,052941063972...	64,35020226338...
20	0,187735596220...	5,946733567605...
21	0,263239594998...	21,28229746251...
22	0,326453154056...	56,677261443345

On the right, the 'Решать тестовую задачу №' (Solve test problem №) section shows the results for Problem 3. The parameters are: m = 17, Method: Пиваского (Pivasko), Parameter of reliability: 2, Number of divisions: 100, Accuracy: 0,0001, Maximum number of iterations: 1000. The results are: Достигнутая точность: 0,00124501624684575, Затрачено итераций: 1000, Координаты минимума: x1 = -9,71698760986328, x2 = 0,00075531005859375, Значение функции: 0,695999182886881.

Рисунок 9. Результат работы программы для функции Букина.

Данная функция закончила работу по количеству итераций. Полученная точка близка к ожидаемой, но все же не является ей. Но полученные результаты лучше, чем для предыдущего случая.

Подводя итог, можно сказать, что сведение многомерной задачи к одномерной ухудшает функционал, который изначально обладает большой константой Липшица. Принципиальное ограничение на число M ($M * N < 52 \rightarrow M < 26$) не позволяет добиваться достаточной точности решения задач. Но даже при таких ограничениях, полученные результаты можно назвать правильными с учетом погрешности.

Литература

1. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука, 1978. 240 с.
2. С. Ю. Городецкий. Лекции по методам нелинейной оптимизации. – Учебное пособие, 2018. Нижний Новгород. 219 с.
3. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // Журнал вычислительной математики и математической физики, т.12, № 4 (1972), стр. 885—896.
4. Норкин В. И. О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики, т.32, № 7 (1992), стр. 992—1006.
5. Sagan, H.: Space-Filling Curves. Springer, New York (1994)
6. Тарасов А.А. Поиск оптимальных траекторий космического аппарата с использованием кривых, заполняющих пространство. 2021// Доступ: https://keldysh.ru/microsatellites/Bachelor_Thesis_Tarasov.pdf
7. Худайбердиев Юсуф Алишер угли. Глобальная оптимизация траекторий космических аппаратов с помощью кривых, заполняющих пространство. 2018// Доступ: https://keldysh.ru/microsatellites/Bachelor_Thesis_Khudayberdiev.pdf