Обязател.

Решение по алгоритму "на бумажке":

исходная матрица 2×2

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

решаем через квадратное уравнение:

$$(2-\lambda) \times (3-\lambda) - 2 \times 1 = 0$$

$$6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

корни уравнение находим через дискриминант (его значение под квадратным корнем):

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4$$

$$\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = 1$$

для λ_1 находим собствен. вектор:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow x \text{ и } y \text{ равны } 1$$

Т.о, для собствен. значения $\lambda_1 = 4$ собствен. вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

теперь собствен. вектор для $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

$$-2y + 2y = 0$$

$$y = 1$$

тогда $x = -2$

т.о, для собствен. значения $\lambda_2 = 1$ собствен. вектор $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

исходная матрица 3×3

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

решаем по правилу треугольников:

$$(4-\lambda) \times (4-\lambda) \times (4-\lambda) + ((-1) \times 1 \times (-1)) + ((-1) \times 1 \times (-1)) -$$

$$- ((-1) \times (4-\lambda) \times (-1)) - ((4-\lambda) \times (-1) \times (-1)) - ((4-\lambda) \times 1 \times 1) = 0$$

в результате преобразований получаем кубическое уравнение:

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = 0$$

корни уравнения $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = 3$

находим собствен. вектора для каждого из собствен. значений

$\lambda_1 = 6$

$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ x - 2(2x + z) - z = 0 \\ -x - 2x - z - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + z \\ -3x - 3z = 0 \\ -3x - 3z = 0 \end{cases}$$

$-3x = 3z$

$x = -1$

$z = 1$

тогда $y = -2 + 1 = -1$

собствен. вектор $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$ (два вектора):

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - y \\ z - y + y - z = 0 \\ -z + y - y + z = 0 \end{cases}$$

$z = y = 1$

тогда $x = 0$

первый собствен. вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z - x \\ x + z - x - z = 0 \\ -x - z + x + z = 0 \end{cases}$$

$z = x = 1$

тогда $y = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

второй собствен. вектор