

# Modèles linéaires en actuariat

Exercices et solutions



# Modèles linéaires en actuariat

Exercices et solutions

**Marie-Pier Côté**

**Vincent Mercier**

**École d'actuariat, Université Laval**

**Seconde édition**

© 2019 Marie-Pier Côté. « Modèles linéaires en actuariat : Exercices et solutions » est dérivé de la deuxième édition de « Modèles de régression et de séries chronologiques : Exercices et solutions » de Vincent Goulet, sous contrat CC BY-SA.



Cette création est mise à disposition selon le contrat Paternité-Partage des conditions initiales à l'identique 2.5 Canada disponible en ligne <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/ca/> ou par courrier postal à Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

#### **Historique de publication**

Septembre 2019 : Première édition

#### **Code source**

Le code source  $\text{\LaTeX}$  de la première édition de ce document est disponible en communiquant directement avec les auteurs.

# Introduction

Ce document contient les exercices proposés par Marie-Pier Côté pour le cours ACT-2003 Modèles linéaires en actuariat, donné à l'École d'actuariat de l'Université Laval. Certains exercices sont le fruit de l'imagination des auteurs ou de ceux des versions précédentes, alors que plusieurs autres sont des adaptations d'exercices tirés des ouvrages cités dans la bibliographie.

C'est d'ailleurs afin de ne pas usurper de droits d'auteur que ce document est publié selon les termes du contrat Paternité-Partage des conditions initiales à l'identique 2.5 Canada de Creative Commons. Il s'agit donc d'un document «libre» que quiconque peut réutiliser et modifier à sa guise, à condition que le nouveau document soit publié avec le même contrat.

Le document est séparé en deux parties correspondant aux deux sujets faisant l'objet d'exercices : d'abord la régression linéaire (simple, multiple et régularisée), puis les modèles linéaires généralisés.

L'estimation des paramètres, le calcul de prévisions et l'analyse des résultats sont toutes des procédures à forte composante numérique. Il serait tout à fait artificiel de se restreindre, dans les exercices, à de petits ensembles de données se prêtant au calcul manuel. Dans cette optique, plusieurs des exercices de ce recueil requièrent l'utilisation du logiciel statistique R. D'ailleurs, l'annexe ?? présente les principales fonctions de R pour la régression.

Le format de cet annexe est inspiré de [?] : la présentation des fonctions compte peu d'exemples. Par contre, le lecteur est invité à lire et exécuter le code informatique des sections d'exemples ??.

L'annexe ?? contient quelques résultats d'algèbre matricielle utiles pour résoudre certains exercices.

Les réponses des exercices se trouvent à la fin de chacun des chapitres, alors que les solutions complètes sont regroupées à l'annexe A.

Tous les jeux de données mentionnés dans ce document sont disponibles en format électronique à l'adresse

???? à régler

Ces jeux de données sont importés dans R avec l'une ou l'autre des commandes `scan` ou `read.table`. Certains jeux de données sont également fournis avec R; la commande

```
> data()
```

en fournit une liste complète.

Nous remercions d'avance les lecteurs qui voudront bien nous faire part de toute erreur ou omission dans les exercices ou leurs réponses.

Marie-Pier Côté <marie-pier.cote@act.ulaval.ca>

Vincent Mercier <vincent.mercier.7@ulaval.ca>

Québec, septembre 2019



# Table des matières

|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>            | <b>v</b>  |
| <b>I Régression linéaire</b>   | <b>1</b>  |
| 2 Régression linéaire simple   | 3         |
| 3 Régression linéaire multiple | 9         |
| <b>A Solutions</b>             | <b>15</b> |
| Chapitre 2 . . . . .           | 15        |
| Chapitre 3 . . . . .           | 40        |





**Première partie**

**Régression linéaire**



## 2 Régression linéaire simple

2.1 Considérer les données suivantes et le modèle de régression linéaire  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$  :

| $t$   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $X_t$ | 65 | 43 | 44 | 59 | 60 | 50 | 52 | 38 | 42 | 40 |
| $Y_t$ | 12 | 32 | 36 | 18 | 17 | 20 | 21 | 40 | 30 | 24 |

- Placer ces points ci-dessus sur un graphique.
- Calculer les équations normales.
- Calculer les estimateurs  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$  en résolvant le système d'équations obtenu en b).
- Calculer les prévisions  $\hat{Y}_t$  correspondant à  $X_t$  pour  $t = 1, \dots, n$ . Ajouter la droite de régression au graphique fait en a).
- Vérifier empiriquement que  $\sum_{t=1}^{10} e_t = 0$ .

2.2 On vous donne les observations ci-dessous.

| $t$ | $X_t$ | $Y_t$ |
|-----|-------|-------|
| 1   | 2     | 6     |
| 2   | 3     | 4     |
| 3   | 5     | 6     |
| 4   | 7     | 3     |
| 5   | 4     | 6     |
| 6   | 4     | 4     |
| 7   | 1     | 7     |
| 8   | 6     | 4     |

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^8 X_t &= 32 & \sum_{t=1}^8 X_t^2 &= 156 \\ \sum_{t=1}^8 Y_t &= 40 & \sum_{t=1}^8 Y_t^2 &= 214 \\ \sum_{t=1}^8 X_t Y_t &= 146 \end{aligned}$$

- Calculer les coefficients de la régression  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ ,  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$ .
- Construire le tableau d'analyse de variance de la régression en a) et calculer le coefficient de détermination  $R^2$ . Interpréter les résultats.

2.3 Le jeu de données `women.dat`, disponible à l'URL mentionnée dans l'introduction et inclus dans R, contient les tailles et les poids moyens de femmes américaines âgées de 30 à 39 ans. Importer les données dans R ou rendre le jeu de données disponible avec `data(women)`, puis répondre aux questions suivantes.

- Établir graphiquement une relation entre la taille (*height*) et le poids (*weight*) des femmes.
- À la lumière du graphique en a), proposer un modèle de régression approprié et en estimer les paramètres.
- Ajouter la droite de régression calculée en b) au graphique. Juger visuellement de l'ajustement du modèle.

- d) Obtenir, à l'aide de la fonction `summary` la valeur du coefficient de détermination  $R^2$ . La valeur est-elle conforme à la conclusion faite en c) ?
- e) Calculer les statistiques SST, SSR et SSE, puis vérifier que  $SST = SSR + SSE$ . Calculer ensuite la valeur de  $R^2$  et la comparer à celle obtenue en d).

2.4 Dans le contexte de la régression linéaire simple, démontrer que

$$\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y}) e_t = 0.$$

- 2.5 Considérer le modèle de régression linéaire par rapport au temps  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ . Écrire les équations normales et obtenir les estimateurs des moindres carrés des paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$ . *Note* :  $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ .
- 2.6 a) Trouver l'estimateur des moindres carrés du paramètre  $\beta$  dans le modèle de régression linéaire passant par l'origine  $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ ,  $E[\varepsilon_t] = 0$ ,  $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \delta_{ts} \sigma^2$ .
- b) Démontrer que l'estimateur en a) est sans biais.
- c) Calculer la variance de l'estimateur en a).
- 2.7 Démontrer que l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\beta}$  trouvé à l'exercice 2.6 est l'estimateur sans biais à variance (uniformément) minimale du paramètre  $\beta$ . En termes mathématiques : soit

$$\beta^* = \sum_{t=1}^n c_t Y_t$$

un estimateur linéaire du paramètre  $\beta$ . Démontrer qu'en déterminant les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  de façon à minimiser

$$\text{var}[\beta^*] = \text{var} \left[ \sum_{t=1}^n c_t Y_t \right]$$

sous la contrainte que

$$E[\beta^*] = E \left[ \sum_{t=1}^n c_t Y_t \right] = \beta,$$

on obtient  $\beta^* = \hat{\beta}$ .

2.8 Dans le contexte de la régression linéaire simple, démontrer que

- a)  $E[\text{MSE}] = \sigma^2$
- b)  $E[\text{MSR}] = \sigma^2 + \beta_1^2 \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2$

2.9 Supposons que les observations  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  sont soumises à une transformation linéaire, c'est-à-dire que  $Y_t$  devient  $Y'_t = a + bY_t$  et que  $X_t$  devient  $X'_t = c + dX_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ .

- a) Trouver quel sera l'impact sur les estimateurs des moindres carrés des paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  dans le modèle de régression linéaire  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ .
- b) Démontrer que le coefficient de détermination  $R^2$  n'est pas affecté par la transformation linéaire.

2.10 On sait depuis l'exercice 2.6 que pour le modèle de régression linéaire simple passant par l'origine  $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$ , l'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  est

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}.$$

Démontrer que l'on peut obtenir ce résultat en utilisant la formule pour  $\hat{\beta}_1$  dans la régression linéaire simple usuelle ( $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ ) en ayant d'abord soin d'ajouter aux données un  $(n+1)^{\text{e}}$  point  $(m\bar{X}, m\bar{Y})$ , où

$$m = \frac{n}{\sqrt{n+1}-1} = \frac{n}{a}.$$

### 2.11 Soit le modèle de régression linéaire simple

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Construire un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $\beta_1$  si la variance  $\sigma^2$  est connue.

### 2.12 Vous analysez la relation entre la consommation de gaz naturel *per capita* et le prix du gaz naturel. Vous avez colligé les données de 20 grandes villes et proposé le modèle

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon,$$

où  $Y$  représente la consommation de gaz *per capita*,  $X$  le prix et  $\varepsilon$  est le terme d'erreur aléatoire distribué selon une loi normale. Vous avez obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= 138,581 & \sum_{t=1}^{20} (X_t - \bar{X})^2 &= 10668 \\ \hat{\beta}_1 &= -1,104 & \sum_{t=1}^{20} (Y_t - \bar{Y})^2 &= 20838 \\ \sum_{t=1}^{20} X_t^2 &= 90048 & \sum_{t=1}^{20} e_t^2 &= 7832. \\ \sum_{t=1}^{20} Y_t^2 &= 116058 \end{aligned}$$

Trouver le plus petit intervalle de confiance à 95 % pour le paramètre  $\beta_1$ .

### 2.13 Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'effet de la température sur le rendement d'un procédé chimique.

| X  | Y  |
|----|----|
| -5 | 1  |
| -4 | 5  |
| -3 | 4  |
| -2 | 7  |
| -1 | 10 |
| 0  | 8  |
| 1  | 9  |
| 2  | 13 |
| 3  | 14 |
| 4  | 13 |
| 5  | 18 |

- a) On suppose une relation linéaire simple entre la température et le rendement. Calculer les estimateurs des moindres carrés de l'ordonnée à l'origine et de la pente de cette relation.

- b) Établir le tableau d'analyse de variance et tester si la pente est significativement différente de zéro avec un niveau de confiance de 0,95.
- c) Quelles sont les limites de l'intervalle de confiance à 95 % pour la pente ?
- d) Y a-t-il quelque indication qu'un meilleur modèle devrait être employé ?

**2.14** Y a-t-il une relation entre l'espérance de vie et la longueur de la «ligne de vie» dans la main ? Dans un article de 1974 publié dans le *Journal of the American Medical Association*, Mather et Wilson dévoilent les 50 observations contenues dans le fichier `lifeline.dat`. À la lumière de ces données, y a-t-il, selon vous, une relation entre la «ligne de vie» et l'espérance de vie ? Vous pouvez utiliser l'information partielle suivante :

$$\begin{array}{lll} \sum_{t=1}^{50} X_t = 3333 & \sum_{t=1}^{50} X_t^2 = 231\,933 & \sum_{t=1}^{50} X_t Y_t = 30\,549,75 \\ \sum_{t=1}^{50} Y_t = 459,9 & \sum_{t=1}^{50} Y_t^2 = 4308,57. & \end{array}$$

**2.15** Considérer le modèle de régression linéaire passant par l'origine présenté à l'exercice 2.6. Soit  $X_0$  une valeur de la variable indépendante,  $Y_0$  la vraie valeur de la variable indépendante correspondant à  $X_0$  et  $\hat{Y}_0$  la prévision (ou estimation) de  $Y_0$ . En supposant que

- i)  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  ;
- ii)  $\text{cov}(\varepsilon_0, \varepsilon_t) = 0$  pour tout  $t = 1, \dots, n$  ;
- iii)  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$  est estimé par  $s^2$ ,

construire un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $Y_0$ . Faire tous les calculs intermédiaires.

**2.16** La masse monétaire et le produit national brut (en millions de *snouks*) de la Fictinie (Asie postérieure) sont reproduits dans le tableau ci-dessous.

| Année | Masse monétaire | PNB  |
|-------|-----------------|------|
| 1987  | 2,0             | 5,0  |
| 1988  | 2,5             | 5,5  |
| 1989  | 3,2             | 6,0  |
| 1990  | 3,6             | 7,0  |
| 1991  | 3,3             | 7,2  |
| 1992  | 4,0             | 7,7  |
| 1993  | 4,2             | 8,4  |
| 1994  | 4,6             | 9,0  |
| 1995  | 4,8             | 9,7  |
| 1996  | 5,0             | 10,0 |

- a) Établir une relation linéaire dans laquelle la masse monétaire explique le produit national brut (PNB).
- b) Construire des intervalles de confiance pour l'ordonnée à l'origine et la pente estimées en a). Peut-on rejeter l'hypothèse que la pente est nulle ? Égale à 1 ?
- c) Si, en tant que ministre des Finances de la Fictinie, vous souhaitez que le PNB soit de 12,0 en 1997, à combien fixeriez-vous la masse monétaire ?
- d) Pour une masse monétaire telle que fixée en c), déterminer les bornes inférieure et supérieure à l'intérieur desquelles devrait, avec une probabilité de 95 %, se trouver le PNB moyen. Répéter pour la valeur du PNB de l'année 1997.

**2.17** Le fichier `house.dat` contient diverses données relatives à la valeur des maisons dans la région métropolitaine de Boston. La signification des différentes variables se trouve dans le fichier. Comme l'ensemble de données est plutôt grand (506 observations pour chacune des 13 variables), répondre aux questions suivantes à l'aide de R.

- a) Déterminer à l'aide de graphiques à laquelle des variables suivantes le prix médian des maisons (`medv`) est le plus susceptible d'être lié par une relation linéaire : le nombre moyen de pièces par immeuble (`rm`), la proportion d'immeubles construits avant 1940 (`age`), le taux de taxe foncière par 10 000 \$ d'évaluation (`tax`) ou le pourcentage de population sous le seuil de la pauvreté (`lstat`).

*Astuce* : en supposant que les données se trouvent dans le *data frame* `house`, essayer les commandes suivantes :

```
plot(house)
attach(house)
plot(data.frame(rm, age, lstat, tax, medv))
detach(house)
plot(medv ~ rm + age + lstat + tax, data = house)
```

- b) Faire l'analyse complète de la régression entre le prix médian des maisons et la variable choisie en a), c'est-à-dire : calcul de la droite de régression, tests d'hypothèses sur les paramètres afin de savoir si la régression est significative, mesure de la qualité de l'ajustement et calcul de l'intervalle de confiance de la régression.
- c) Répéter l'exercice en b) en utilisant une variable ayant été rejetée en a). Observer les différences dans les résultats.

**2.18** On veut prévoir la consommation de carburant d'une automobile à partir de ses différentes caractéristiques physiques, notamment le type du moteur. Le fichier `carburant.dat` contient des données tirées de *Consumer Reports* pour 38 automobiles des années modèle 1978 et 1979. Les caractéristiques fournies sont

- `mpg` : consommation de carburant en milles au gallon ;
- `nbcyl` : nombre de cylindres (remarquer la forte représentation des 8 cylindres !);
- `cylindree` : cylindrée du moteur, en pouces cubes ;
- `cv` : puissance en chevaux vapeurs ;
- `poids` : poids de la voiture en milliers de livres.

Utiliser R pour faire l'analyse ci-dessous.

- a) Convertir les données du fichier en unités métriques, le cas échéant. Par exemple, la consommation de carburant s'exprime en  $\ell/100$  km. Or, un gallon américain correspond à 3,785 litres et 1 mille à 1,6093 kilomètre. La consommation en litres aux 100 km s'obtient donc en divisant 235,1954 par la consommation en milles au gallon. De plus, 1 livre correspond à 0,45455 kilogramme.
- b) Établir une relation entre la consommation de carburant d'une voiture et son poids. Vérifier la qualité de l'ajustement du modèle et si le modèle est significatif.
- c) Trouver un intervalle de confiance à 95 % pour la consommation en carburant d'une voiture de 1 350 kg.

**Réponses**

- 2.1 c)  $\hat{\beta}_0 = 66.44882$  et  $\hat{\beta}_1 = -0.8407468$  d)  $\hat{Y}_1 = 11,80, \hat{Y}_2 = 30,30, \hat{Y}_3 = 29,46, \hat{Y}_4 = 16,84, \hat{Y}_5 = 16,00, \hat{Y}_6 = 24,41, \hat{Y}_7 = 22,73, \hat{Y}_8 = 34,50, \hat{Y}_9 = 31,14, \hat{Y}_{10} = 32,82$
- 2.2 a)  $\hat{\beta}_0 = 7$  et  $\hat{\beta}_1 = -0,5$  b) SST = 14, SSR = 7, SSE = 7, MSR = 7, MSE = 7/6, F = 6,  $R^2 = 0,5$
- 2.3 b)  $\hat{\beta}_0 = -87,5167$  et  $\hat{\beta}_1 = 3,45$  d)  $R^2 = 0,991$  e) SSR = 3332,7 SSE = 30,23 et SST = 3362,93
- 2.5  $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1(n+1)/2, \hat{\beta}_1 = (12\sum_{t=0}^n tY_t - 6n(n+1)\bar{Y})/(n(n^2-1))$
- 2.6 a)  $\hat{\beta} = \sum_{t=1}^n X_t Y_t / \sum_{t=1}^n X_t^2$  c)  $\text{var}[\hat{\beta}] = \sigma^2 / \sum_{t=1}^n X_t^2$
- 2.9 a)  $\hat{\beta}'_1 = (b/d)\hat{\beta}_1$
- 2.11  $\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm z_{\alpha/2} \sigma (\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2)^{-1/2}$
- 2.12  $(-1,5, -0,7)$
- 2.13 a)  $\hat{\beta}_0 = 9,273, \hat{\beta}_1 = 1,436$  b)  $t = 9,809$  c)  $(1,105, 1,768)$
- 2.14  $F = 0,73$ , valeur  $p : 0,397$
- 2.15  $\hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2}(n-1)s \sqrt{1 + X_0^2 / \sum_{t=1}^n X_t^2}$
- 2.16 a) PNB = 1,168 + 1,716 MM b)  $\beta_0 \in (0,060, 2,276), \beta_1 \in (1,427, 2,005)$  c) 6,31 d)  $(11,20, 12,80)$  et  $(10,83, 13,17)$
- 2.18 b)  $R^2 = 0,858$  et  $F = 217,5$  c)  $10,57 \pm 2,13$



### 3 Régression linéaire multiple

- 3.1 Considérer le modèle de régression linéaire  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ , où  $\mathbf{X}$  est une matrice  $n \times (p + 1)$ . Démontrer, en dérivant

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta})^2 \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

par rapport à  $\boldsymbol{\beta}$ , que les équations normales à résoudre pour obtenir l'estimateur des moindres carrés de  $\boldsymbol{\beta}$  sont, sous forme matricielle,

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y},$$

Déduire l'estimateur des moindres carrés de ces équations. *Astuce* : utiliser le théorème ?? de l'annexe ??.

- 3.2 Pour chacun des modèles de régression ci-dessous, spécifier la matrice de schéma  $\mathbf{X}$  dans la représentation  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  du modèle, puis obtenir, si possible, les formules explicites des estimateurs des moindres carrés des paramètres.

- a)  $Y_t = \beta_0 + \varepsilon_t$
- b)  $Y_t = \beta_1 X_t + \varepsilon_t$
- c)  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t$

- 3.3 Vérifier, pour le modèle de régression linéaire simple, que les valeurs trouvées dans la matrice de variance-covariance  $\text{var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  correspondent à celles calculées au chapitre 2.

- 3.4 Démontrer les relations ci-dessous dans le contexte de la régression linéaire multiple et trouver leur équivalent en régression linéaire simple. Utiliser  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ .

- a)  $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$
- b)  $\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{e} = 0$
- c)  $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$

- 3.5 Considérer le modèle de régression linéaire multiple présenté à l'exercice 3.1. Soit  $\hat{Y}_0$  la prévision de la variable dépendante correspondant aux valeurs du vecteur ligne  $\mathbf{x}_0 = (1, X_{01}, \dots, X_{0p})$  des  $p$  variables indépendantes. On a donc

$$\hat{Y}_0 = \mathbf{x}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

- a) Démontrer que  $E[\hat{Y}_0] = E[Y_0]$ .
- b) Démontrer que l'erreur dans la prévision de la valeur moyenne de  $Y_0$  est

$$E[(\hat{Y}_0 - E[Y_0])^2] = \sigma^2 \mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0'.$$

Construire un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $E[Y_0]$ .

c) Démontrer que l'erreur dans la prévision de  $Y_0$  est

$$E[(Y_0 - \hat{Y}_0)^2] = \sigma^2 (1 + \mathbf{x}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0').$$

Construire un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $Y_0$ .

3.6 En ajustant le modèle

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \varepsilon_t$$

à un ensemble de données, on a obtenu les statistiques suivantes :

$$R^2 = 0,521$$

$$F = 5,438.$$

Déterminer la valeur  $p$  approximative du test global de validité du modèle.

3.7 On vous donne les observations suivantes :

| Y  | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> |
|----|----------------|----------------|
| 17 | 4              | 9              |
| 12 | 3              | 10             |
| 14 | 3              | 11             |
| 13 | 3              | 11             |

De plus, si  $\mathbf{X}$  est la matrice de schéma du modèle

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, 3, 4,$$

où  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ , alors

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 765 & -87 & -47 \\ -87 & 11 & 5 \\ -47 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

et

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6 & 34 & -13 & -13 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Trouver, par la méthode des moindres carrés, les estimateurs des paramètres du modèle mentionné ci-dessus.
  - Construire le tableau d'analyse de variance du modèle obtenu en a) et calculer le coefficient de détermination.
  - Vérifier si les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont significatives dans le modèle.
  - Trouver un intervalle de confiance à 95 % pour la valeur de  $Y$  lorsque  $X_1 = 3,5$  et  $X_2 = 9$ .
- 3.8 Répéter l'exercice 2.18 en ajoutant la cylindrée du véhicule en litres dans le modèle. La cylindrée est exprimée en pouces cubes dans les données. Or, 1 pouce correspond à 2,54 cm et un litre est défini comme étant 1 dm<sup>3</sup>, soit 1 000 cm<sup>3</sup>. Trouver un intervalle de confiance pour la consommation en carburant d'une voiture de 1 350 kg ayant un moteur de 1,8 litre.

3.9 Dans un exemple du chapitre 2 des notes de cours, nous avons tâché d'expliquer les sinistres annuels moyens par véhicule pour différents types de véhicules uniquement par la puissance du moteur (en chevaux-vapeur). Notre conclusion était à l'effet que la régression était significative — rejet de  $H_0$  dans les tests  $t$  et  $F$  — mais l'ajustement mauvais —  $R^2$  petit.

Examiner les autres variables fournies dans le fichier `auto-price.dat` et choisir deux autres caractéristiques susceptibles d'expliquer les niveaux de sinistres. Par exemple, peut-on distinguer une voiture sport d'une minifourgonnette?

Une fois les variables additionnelles choisies, calculer les différentes statistiques propres à une régression en ajoutant d'abord une, puis deux variables au modèle de base. Quelles sont vos conclusions?

3.10 En bon étudiant(e), vous vous intéressez à la relation liant la demande pour la bière,  $Y$ , aux variables indépendantes  $X_1$  (le prix de celle-ci),  $X_2$  (le revenu disponible) et  $X_3$  (la demande de l'année précédente). Un total de 20 observations sont disponibles. Vous postulez le modèle

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \beta_3 X_{t3} + \varepsilon_t,$$

où  $E[\varepsilon_t] = 0$  et  $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \delta_{ts}\sigma^2$ . Les résultats de cette régression, tels que calculés dans R, sont fournis ci-dessous.

```
{fontsize=\small}
> fit <- lm(Y ~ X1 + X2 + X3, data = biere)
> summary(fit)

Call: lm(formula = Y ~ X1 + X2 + X3, data = biere)
Residuals:
    Min.      1st Qu.      Median      3rd Qu.      Max.
-1.014e+04 -5.193e-03 -2.595e-03  4.367e-03  2.311e-02

Coefficients:
              Value Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.5943   1.0138     1.5726   0.1354
X1 -0.0480    0.1479    -0.3243   0.7499
X2  0.0549    0.0306     1.7950   0.0916
X3  0.8130    0.1160     7.0121 2.933e-06

Residual standard error: 0.0098 on 16 degrees of freedom
Multiple R-Squared:  0.9810    Adjusted R-squared:  0.9774
F-statistic: 275.49 on 3 and 16 degrees of freedom,
the p-value is 7.160e-14
```

- Indiquer les dimensions des matrices et vecteurs dans la représentation matricielle  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  du modèle.
- La régression est-elle significative? Expliquer.
- On porte une attention plus particulière au paramètre  $\beta_2$ . Est-il significativement différent de zéro? Quelle est l'interprétation du test  $H_0 : \beta_2 = 0$  versus  $H_1 : \beta_2 \neq 0$ ?
- Quelle est la valeur et l'interprétation de  $R^2$ , le coefficient de détermination? De manière générale, est-il envisageable d'obtenir un  $R^2$  élevé et, simultanément, toutes les statistiques  $t$  pour les tests  $H_0 : \beta_1 = 0$ ,  $H_0 : \beta_2 = 0$  et  $H_0 : \beta_3 = 0$  non significatives? Expliquer brièvement.

3.11 Au cours d'une analyse de régression, on a colligé les valeurs de trois variables explicatives  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  ainsi que celles d'une variable dépendante  $Y$ . Les résultats suivants ont par la suite été obtenus avec R.

a) On considère le modèle complet  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$ . À partir de l'information ci-dessus, calculer la statistique appropriée pour compléter chacun des tests suivants. Indiquer également le nombre de degrés de liberté de cette statistique. Dans tous les cas, l'hypothèse alternative  $H_1$  est la négation de l'hypothèse  $H_0$ .

i)  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$

ii)  $H_0 : \beta_1 = 0$

iii)  $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$

b) À la lumière des résultats en a), quelle(s) variable(s) devrait-on inclure dans la régression? Justifier votre réponse.

**3.12** Dans une régression multiple avec quatre variables explicatives et 506 données, on a obtenu :

$$\text{SSR}(X_1|X_4) = 21\,348$$

$$\text{SSR}(X_4) = 2\,668$$

$$R^2 = 0,6903$$

$$s^2 = 26,41.$$

Calculer la statistique appropriée pour le test

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0 \text{ ou } \beta_3 \neq 0.$$

**3.13** En régression linéaire multiple, on a  $\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$  et  $\text{SSE}/\sigma^2 \sim \chi^2(n - p - 1)$ .

a) Vérifier que

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s\sqrt{c_{ii}}} \sim t(n - p - 1), \quad i = 0, 1, \dots, p,$$

où  $c_{ii}$  est le  $(i + 1)^{\text{e}}$  élément de la diagonale de la matrice  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  et  $s^2 = \text{MSE}$ .

b) Que vaut  $c_{11}$  en régression linéaire simple? Adapter le résultat ci-dessus à ce modèle.

**3.14** Considérer le modèle de régression linéaire  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ , où  $\mathbf{X}$  est une matrice  $n \times (p + 1)$ ,  $\text{var}[\varepsilon] = \sigma^2 \mathbf{W}^{-1}$  et  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ . Démontrer, en dérivant

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \sum_{t=1}^n w_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{x}_t' \beta)^2 \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)' \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \end{aligned}$$

par rapport à  $\beta$ , que les équations normales à résoudre pour obtenir l'estimateur des moindres carrés pondérés de  $\beta$  sont, sous forme matricielle,

$$(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X}) \hat{\beta}^* = \mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y},$$

puis en déduire cet estimateur. *Astuce* : cette preuve est simple si l'on utilise le théorème ?? de l'annexe ?? avec  $\mathbf{A} = \mathbf{W}$  et  $f(\beta) = \mathbf{y} - \mathbf{X}\beta$ .

**3.15** Considérer le modèle de régression linéaire simple passant par l'origine  $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$ . Trouver l'estimateur linéaire sans biais à variance minimale du paramètre  $\beta$ , ainsi que sa variance, sous chacune des hypothèses suivantes.

a)  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$

b)  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2 / w_t$

c)  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2 X_t$

d)  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2 X_t^2$

3.16 Proposer, à partir des données ci-dessous, un modèle de régression complet (incluant la distribution du terme d'erreur) pouvant expliquer le comportement de la variable  $Y$  en fonction de celui de  $X$ .

| $Y$   | $X$ |
|-------|-----|
| 32,83 | 25  |
| 9,70  | 3   |
| 29,25 | 24  |
| 15,35 | 11  |
| 13,25 | 10  |
| 24,19 | 20  |
| 8,59  | 6   |
| 25,79 | 21  |
| 24,78 | 19  |
| 10,23 | 9   |
| 8,34  | 4   |
| 22,10 | 18  |
| 10,00 | 7   |
| 18,64 | 16  |
| 18,82 | 15  |

3.17 On vous donne les 23 données dans le tableau ci-dessous.

| $t$ | $Y_t$ | $X_t$ | $t$ | $Y_t$ | $X_t$ | $t$ | $Y_t$ | $X_t$ |
|-----|-------|-------|-----|-------|-------|-----|-------|-------|
| 12  | 2,3   | 1,3   | 19  | 1,7   | 3,7   | 6   | 2,8   | 5,3   |
| 23  | 1,8   | 1,3   | 20  | 2,8   | 4,0   | 10  | 2,1   | 5,3   |
| 7   | 2,8   | 2,0   | 5   | 2,8   | 4,0   | 4   | 3,4   | 5,7   |
| 8   | 1,5   | 2,0   | 2   | 2,2   | 4,0   | 9   | 3,2   | 6,0   |
| 17  | 2,2   | 2,7   | 21  | 3,2   | 4,7   | 13  | 3,0   | 6,0   |
| 22  | 3,8   | 3,3   | 15  | 1,9   | 4,7   | 14  | 3,0   | 6,3   |
| 1   | 1,8   | 3,3   | 18  | 1,8   | 5,0   | 16  | 5,9   | 6,7   |
| 11  | 3,7   | 3,7   | 3   | 3,5   | 5,3   |     |       |       |

a) Calculer l'estimateur des moindres carrés ordinaires  $\hat{\beta}$ .

b) Supposons que la variance de  $Y_{16}$  est  $4\sigma^2$  plutôt que  $\sigma^2$ . Recalculer la régression en a) en utilisant cette fois les moindres carrés pondérés.

c) Refaire la partie b) en supposant maintenant que la variance de l'observation  $Y_{16}$  est  $16\sigma^2$ . Quelles différences note-t-on ?

3.18 Une coopérative de taxi new-yorkaise s'intéresse à la consommation de carburant des douze véhicules de sa flotte en fonction de leur âge. Hormis leur âge, les véhicules sont identiques et utilisent tous le même type d'essence. La seule chose autre différence notable d'un véhicule à l'autre est le sexe du conducteur : la coopérative emploie en effet des hommes et des femmes. La coopérative a recueilli les données suivantes afin d'établir un modèle de régression pour la consommation de carburant :

| Consommation (mpg) | Âge du véhicule | Sexe du conducteur |
|--------------------|-----------------|--------------------|
| 12,3               | 3               | M                  |
| 12,0               | 4               | F                  |
| 13,7               | 3               | F                  |
| 14,2               | 2               | M                  |
| 15,5               | 1               | F                  |
| 11,1               | 5               | M                  |
| 10,6               | 4               | M                  |
| 14,0               | 1               | M                  |
| 16,0               | 1               | F                  |
| 13,1               | 2               | M                  |
| 14,8               | 2               | F                  |
| 10,2               | 5               | M                  |

- a) En plaçant les points sur un graphique de la consommation de carburant en fonction de l'âge du véhicule, identifier s'il existe ou non une différence entre la consommation de carburant des femmes et celle des hommes. *Astuce* : utiliser un symbole (pch) différent pour chaque groupe.
- b) Établir un modèle de régression pour la consommation de carburant. Afin de pouvoir intégrer la variable qualitative «sexe du conducteur» dans le modèle, utiliser une variable indicatrice du type

$$X_{i2} = \begin{cases} 1, & \text{si le conducteur est un homme} \\ 0, & \text{si le conducteur est une femme.} \end{cases}$$

- c) Quelle est, selon le modèle établi en b), la consommation moyenne d'une voiture taxi de quatre ans conduite par une femme ? Fournir un intervalle de confiance à 90 % pour cette prévision.

## Réponses

3.2 a)  $\hat{\beta}_0 = \bar{Y}$  b)  $\hat{\beta}_1 = (\sum_{t=1}^n X_t Y_t) / (\sum_{t=1}^n X_t^2)$

3.6  $p \approx 0,01$

3.7 a)  $\hat{\beta} = (-22,5, 6,5, 1,5)$  b)  $F = 13,5$ ,  $R^2 = 0,9643$  c)  $t_1 = 3,920$ ,  $t_2 = 1,732$  d)  $13,75 \pm 13,846$

3.8 b)  $R^2 = 0,8927$  et  $F = 145,6$  c)  $12,04 \pm 2,08$

3.10 a)  $\mathbf{y}_{20 \times 1}$ ,  $\mathbf{X}_{20 \times 4}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{4 \times 1}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{20 \times 1}$

3.11 a) i) 40,44, 3 et 21 degrés de liberté ii) 0,098, 1 et 21 degrés de liberté iii) 9,82, 2 et 21 degrés de liberté b)  $X_1$  et  $X_3$ , ou  $X_2$  et  $X_3$

3.12 103,67

3.15 a)  $\hat{\beta}^* = \sum_{t=1}^n X_t Y_t / \sum_{t=1}^n X_t^2$ ,  $\text{var}[\hat{\beta}^*] = \sigma^2 / \sum_{t=1}^n X_t^2$

b)  $\hat{\beta}^* = \sum_{t=1}^n w_t X_t Y_t / \sum_{t=1}^n w_t X_t^2$ ,  $\text{var}[\hat{\beta}^*] = \sigma^2 / \sum_{t=1}^n w_t X_t^2$

c)  $\hat{\beta}^* = \bar{Y} / \bar{X}$ ,  $\text{var}[\hat{\beta}^*] = \sigma^2 / (n\bar{X})$

d)  $\hat{\beta}^* = \sum_{t=1}^n Y_t / X_t$ ,  $\text{var}[\hat{\beta}^*] = \sigma^2 / n$

3.16  $Y_t = 18,12 + 29,68X_t + 4,09X_t^2 + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0, 1,373)$

3.17 a)  $\hat{\beta} = (1,4256, 0,3158)$  b)  $\hat{\beta}^* = (1,7213, 0,2243)$  c)  $\hat{\beta}^* = (1,808, 0,1975)$

3.18 b)  $\text{mpg} = 16,687 - 1,04 \text{ age} - 1,206 \text{ sexe}$  c)  $12,53 \pm 0,58 \text{ mpg}$

# A Solutions

## Chapitre 2

- 2.1 a) Voir la figure A.1. Remarquer que l'on peut, dans la fonction `plot`, utiliser une formule pour exprimer la relation entre les variables.
- b) Les équations normales sont les équations à résoudre pour trouver les estimateurs de  $\beta_0$  et  $\beta_1$  minimisant la somme des carrés

$$\begin{aligned} S(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \\ &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta_0 - \beta_1 X_t)^2. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta_0} &= -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta_0 - \beta_1 X_t) \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta_0 - \beta_1 X_t) X_t, \end{aligned}$$

d'où les équations normales sont

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) &= 0 \\ \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t) X_t &= 0. \end{aligned}$$

- c) Par la première des deux équations normales, on trouve

$$\sum_{t=1}^n Y_t - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t = 0,$$

soit, en isolant  $\hat{\beta}_0$ ,

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{t=1}^n Y_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t}{n} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}.$$

De la seconde équation normale, on obtient

$$\sum_{t=1}^n X_t Y_t - \hat{\beta}_0 \sum_{t=1}^n X_t - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t^2 = 0$$

```
x<-c(65, 43, 44, 59, 60, 50, 52, 38, 42, 40)
y<-c(12, 32, 36, 18, 17, 20, 21, 40, 30, 24)
plot(y ~ x, pch = 16)
```

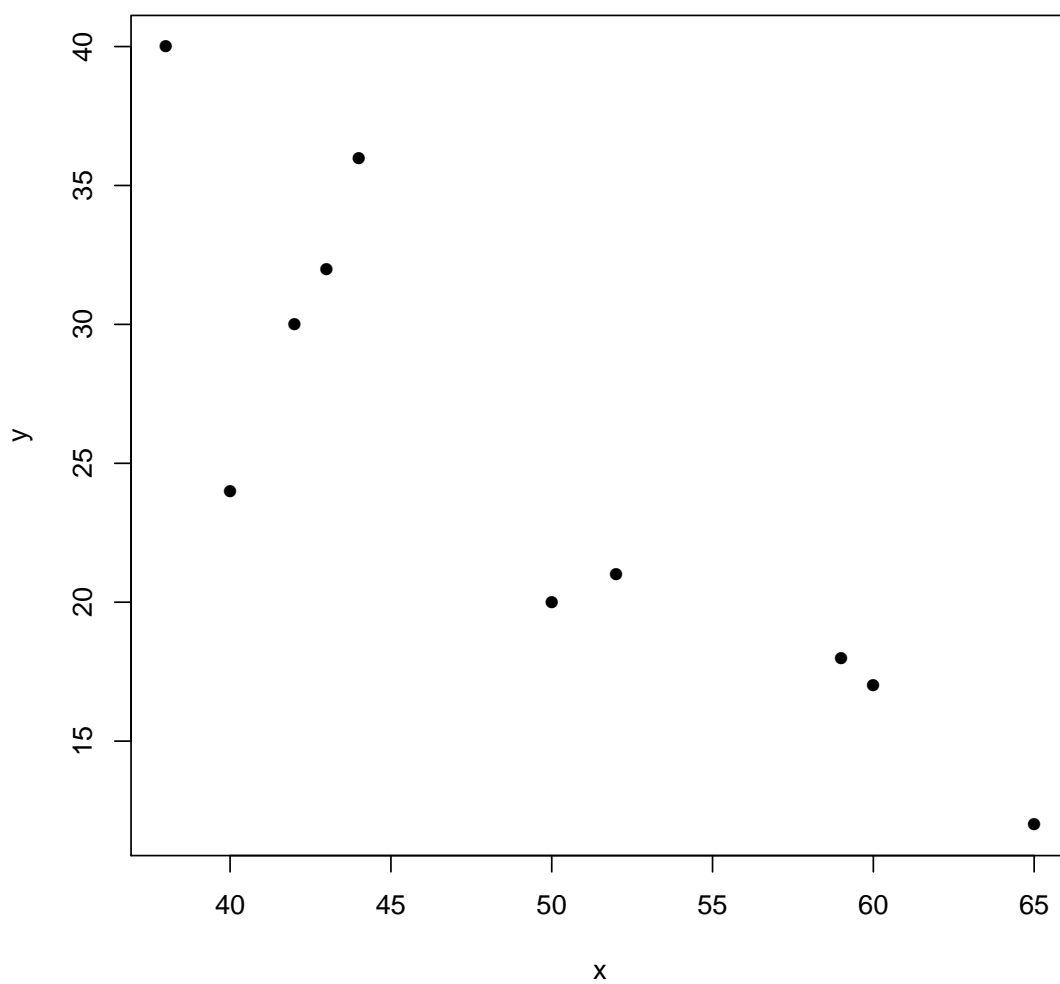


FIG. A.1 – Relation entre les données de l'exercice 2.1



puis, en remplaçant  $\hat{\beta}_0$  par la valeur obtenue ci-dessus,

$$\hat{\beta}_1 \left( \sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2 \right) = \sum_{t=1}^n X_t Y_t - n\bar{X}\bar{Y}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 - n\bar{X}^2} \\ &= \frac{11\,654 - (10)(49,3)(25)}{25\,103 - (10)(49,3)^2} \\ &= -0,8407 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ &= 25 - (-0,8407)(49,3) \\ &= 66,4488. \end{aligned}$$

- d) On peut calculer les prévisions correspondant à  $X_1, \dots, X_{10}$  — ou valeurs ajustées — à partir de la relation  $\hat{Y}_t = 66,4488 - 0,8407X_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, 10$ . Avec R, on crée un objet de type modèle de régression avec `lm` et on en extrait les valeurs ajustées avec `fitted` :

```
fit <- lm(y ~ x)
fitted(fit)

##          1          2          3          4          5          6
## 11.80028 30.29670 29.45596 16.84476 16.00401 24.41148
##          7          8          9         10
## 22.72998 34.50044 31.13745 32.81894
```

Pour ajouter la droite de régression au graphique de la figure A.1, il suffit d'utiliser la fonction `abline` avec en argument l'objet créé avec `lm`. L'ordonnée à l'origine et la pente de la droite seront extraites automatiquement. Voir la figure A.2.

- e) Les résidus de la régression sont  $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ,  $t = 1, \dots, 10$ . Dans R, la fonction `residuals` extrait les résidus du modèle :

```
residuals(fit)

##          1          2          3          4          5
## 0.1997243 1.7032953 6.5440421 1.1552437 0.9959905
##          6          7          8          9         10
## -4.4114773 -1.7299837 5.4995615 -1.1374514 -8.8189450
```

On vérifie ensuite que la somme des résidus est (essentiellement) nulle :

```
sum(residuals(fit))

## [1] -4.440892e-16
```

```
abline(fit)
```

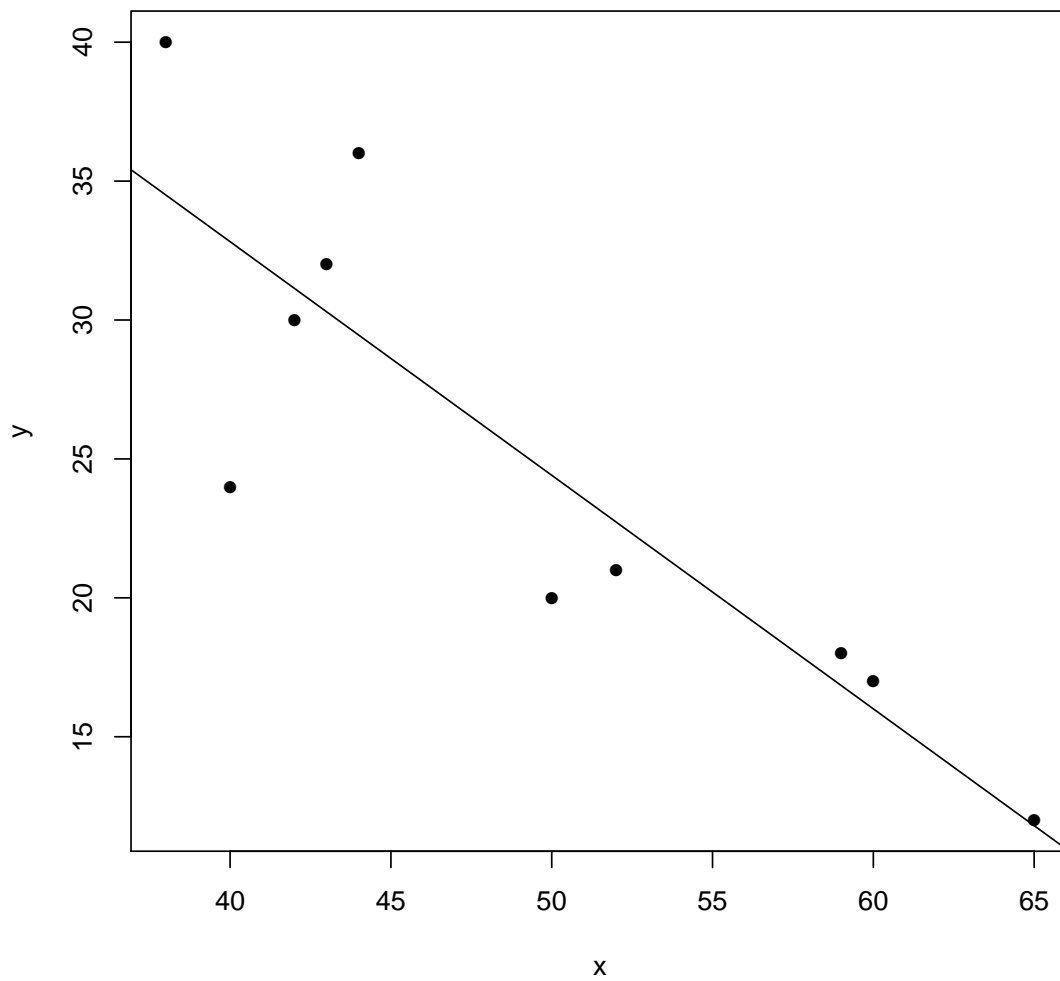


FIG. A.2 – Relation entre les données de l'exercice 2.1 et la droite de régression

2.2 a) Nous avons le modèle de régression usuel. Les coefficients de la régression sont

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^8 X_t Y_t - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{t=1}^8 X_t^2 - n \bar{X}^2} \\ &= \frac{146 - (8)(32/8)(40/8)}{156 - (8)(32/8)^2} \\ &= -0,5\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ &= (40/8) - (-0,5)(32/8) \\ &= 7.\end{aligned}$$

b) Les sommes de carrés sont

$$\begin{aligned}SST &= \sum_{t=1}^8 (Y_t - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{t=1}^8 Y_t^2 - n \bar{Y}^2 \\ &= 214 - (8)(40/8)^2 \\ &= 14, \\ SSR &= \sum_{t=1}^8 (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{t=1}^8 \hat{\beta}_1^2 (X_t - \bar{X})^2 \\ &= \hat{\beta}_1^2 (\sum_{t=1}^8 X_t^2 - n \bar{X}^2) \\ &= (-1/2)^2 (156 - (8)(32/8)^2) \\ &= 7.\end{aligned}$$

et  $SSE = SST - SSR = 14 - 7 = 7$ . Par conséquent,  $R^2 = SSR/SST = 7/14 = 0,5$ , donc la régression explique 50 % de la variation des  $Y_t$  par rapport à leur moyenne  $\bar{Y}$ . Le tableau ANOVA est le suivant :

| Source     | SS | d.l. | MS  | Ratio F |
|------------|----|------|-----|---------|
| Régression | 7  | 1    | 7   | 6       |
| Erreur     | 7  | 6    | 7/6 |         |
| Total      | 14 | 7    |     |         |

2.3 a) Voir la figure A.3.

b) Le graphique montre qu'un modèle linéaire serait excellent. On estime les paramètres de ce modèle avec  $\text{lm}$  :

```
data(women)
plot(weight ~ height, data = women, pch = 16)
```

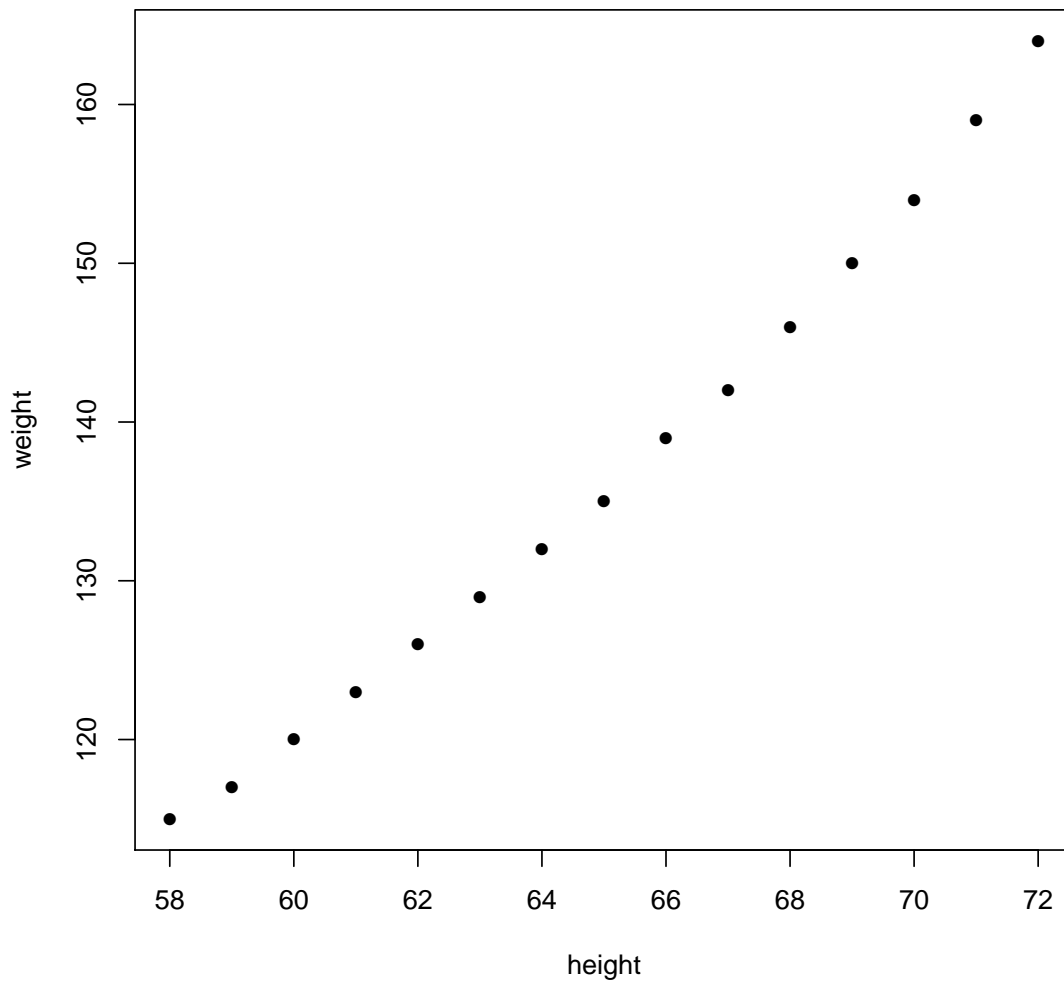


FIG. A.3 – Relation entre la taille et le poids moyen de femmes américaines âgées de 30 à 39 ans (données `women`)

```
(fit <- lm(weight ~ height, data = women))

##
## Call:
## lm(formula = weight ~ height, data = women)
##
## Coefficients:
## (Intercept)      height
##      -87.52       3.45
```

c) Voir la figure A.4. On constate que l'ajustement est excellent.

d) Le résultat de la fonction `summary` appliquée au modèle `fit` est le suivant :

```
summary(fit)

##
## Call:
## lm(formula = weight ~ height, data = women)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.7333 -1.1333 -0.3833  0.7417  3.1167
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -87.51667    5.93694  -14.74 1.71e-09 ***
## height       3.45000    0.09114   37.85 1.09e-14 ***
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.525 on 13 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.991, Adjusted R-squared:  0.9903
## F-statistic: 1433 on 1 and 13 DF, p-value: 1.091e-14
```

Le coefficient de détermination est donc  $R^2 = 0,991$ , ce qui est près de 1 et confirme donc l'excellent ajustement du modèle évoqué en c).

e) On a

```
attach(women)
SST <- sum((weight - mean(weight))^2)
SSR <- sum((fitted(fit) - mean(weight))^2)
SSE <- sum((weight - fitted(fit))^2)
all.equal(SST, SSR + SSE)

## [1] TRUE

all.equal(summary(fit)$r.squared, SSR/SST)

## [1] TRUE
```

**2.4** Puisque  $\hat{Y}_t = (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) + \hat{\beta}_1 X_t = \bar{Y} + \hat{\beta}_1 (X_t - \bar{X})$  et que  $e_t = Y_t - \hat{Y}_t = (Y_t - \bar{Y}) - \hat{\beta}_1 (X_t - \bar{X})$ ,

```
abline(fit)
```

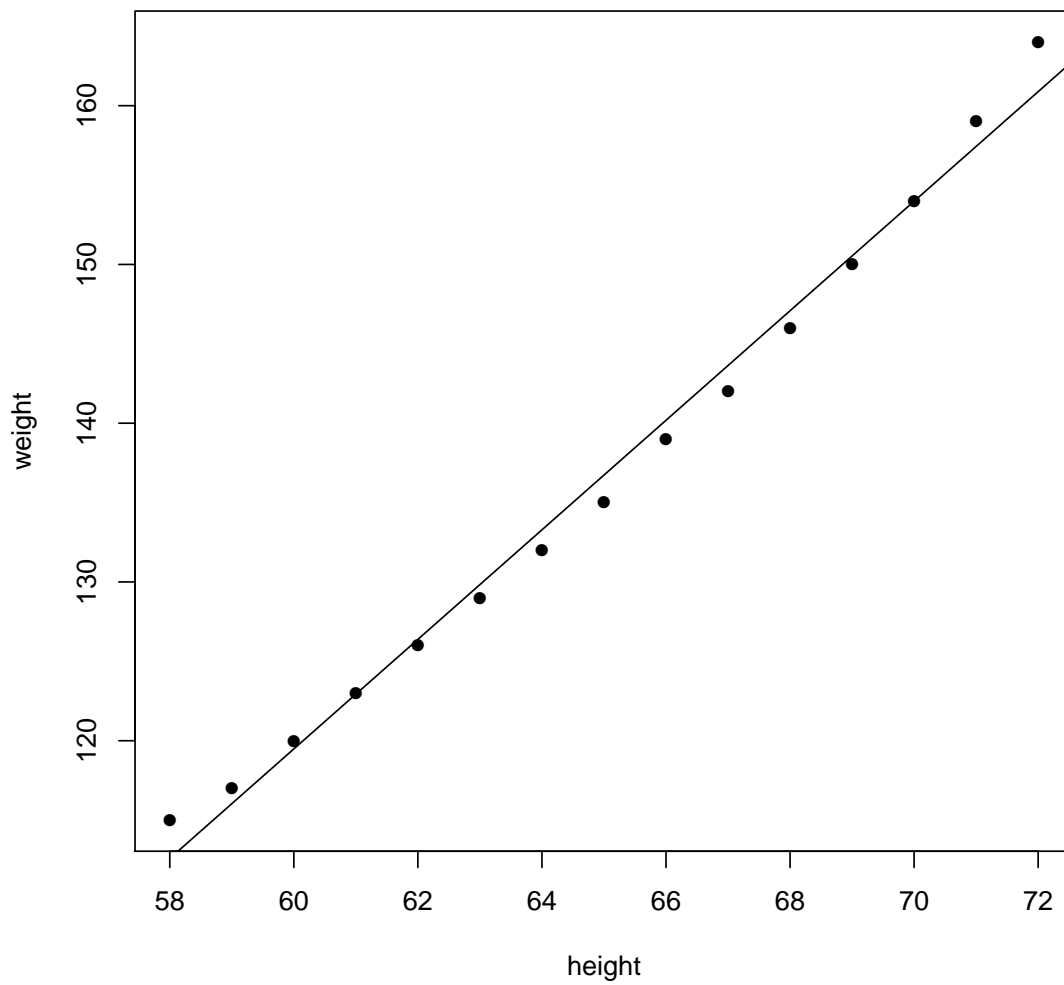


FIG. A.4 – Relation entre les données `women` et droite de régression linéaire simple

alors

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y}) e_t &= \hat{\beta}_1 \left( \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) - \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \right) \\ &= \hat{\beta}_1 \left( S_{XY} - \frac{S_{XY}}{S_{XX}} S_{XX} \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

2.5 On a un modèle de régression linéaire simple usuel avec  $X_t = t$ . Les estimateurs des moindres carrés des paramètres  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont donc

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{t=1}^n t}{n}$$

et

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n t Y_t - \bar{Y} \sum_{t=1}^n t}{\sum_{t=1}^n t^2 - n^{-1} (\sum_{t=1}^n t)^2}.$$

Or, puisque  $\sum_{t=1}^n t = n(n+1)/2$  et  $\sum_{t=1}^n t^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ , les expressions ci-dessus se simplifient en

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \frac{n+1}{2}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n t Y_t - n(n+1)\bar{Y}/2}{n(n+1)(2n+1)/6 - n(n+1)^2/4} \\ &= \frac{12 \sum_{t=1}^n t Y_t - 6n(n+1)\bar{Y}}{n(n^2 - 1)}.\end{aligned}$$

2.6 a) L'estimateur des moindres carrés du paramètre  $\beta$  est la valeur  $\hat{\beta}$  minimisant la somme de carrés

$$\begin{aligned}S(\beta) &= \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 \\ &= \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta X_t)^2.\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{d}{d\beta} S(\beta) = -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta X_t) X_t,$$

d'où l'unique équation normale de ce modèle est

$$\sum_{t=1}^n X_t Y_t - \hat{\beta} \sum_{t=1}^n X_t^2 = 0.$$

L'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  est donc

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}.$$

b) On doit démontrer que  $E[\hat{\beta}] = \beta$ . On a

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\beta}] &= E\left[\frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}\right] \\
 &= \frac{1}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \sum_{t=1}^n X_t E[Y_t] \\
 &= \frac{1}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \sum_{t=1}^n X_t \beta X_t \\
 &= \beta \frac{\sum_{t=1}^n X_t^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\
 &= \beta.
 \end{aligned}$$

c) Des hypothèses du modèle, on a

$$\begin{aligned}
 \text{var}[\hat{\beta}] &= \text{var}\left[\frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}\right] \\
 &= \frac{1}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)^2} \sum_{t=1}^n X_t^2 \text{var}[Y_t] \\
 &= \frac{\sigma^2}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)^2} \sum_{t=1}^n X_t^2 \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2}.
 \end{aligned}$$

2.7 On veut trouver les coefficients  $c_1, \dots, c_n$  tels que  $E[\beta^*] = \beta$  et  $\text{var}[\beta^*]$  est minimale. On cherche donc à minimiser la fonction

$$\begin{aligned}
 f(c_1, \dots, c_n) &= \text{var}[\beta^*] \\
 &= \sum_{t=1}^n c_t^2 \text{var}[Y_t] \\
 &= \sigma^2 \sum_{t=1}^n c_t^2
 \end{aligned}$$

sous la contrainte  $E[\beta^*] = \sum_{t=1}^n c_t E[Y_t] = \sum_{t=1}^n c_t \beta X_t = \beta \sum_{t=1}^n c_t X_t = \beta$ , soit  $\sum_{t=1}^n c_t X_t = 1$  ou  $g(c_1, \dots, c_n) = 0$  avec

$$g(c_1, \dots, c_n) = \sum_{t=1}^n c_t X_t - 1.$$

Pour utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on pose

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(c_1, \dots, c_n, \lambda) &= f(c_1, \dots, c_n) - \lambda g(c_1, \dots, c_n), \\
 &= \sigma^2 \sum_{t=1}^n c_t^2 - \lambda \left( \sum_{t=1}^n c_t X_t - 1 \right),
 \end{aligned}$$



puis on dérive la fonction  $\mathcal{L}$  par rapport à chacune des variables  $c_1, \dots, c_n$  et  $\lambda$ . On trouve alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_u} &= 2\sigma^2 c_u - \lambda X_u, \quad u = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -\sum_{t=1}^n c_t X_t + 1.\end{aligned}$$

En posant les  $n$  premières dérivées égales à zéro, on obtient

$$c_t = \frac{\lambda X_t}{2\sigma^2}.$$

Or, de la contrainte,

$$\sum_{t=1}^n c_t X_t = \frac{\lambda}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n X_t^2 = 1,$$

d'où

$$\frac{\lambda}{2\sigma^2} = \frac{1}{\sum_{t=1}^n X_t^2}$$

et, donc,

$$c_t = \frac{X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\beta^* &= \sum_{t=1}^n c_t Y_t \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \hat{\beta}.\end{aligned}$$

- 2.8 a) Tout d'abord, puisque  $\text{MSE} = \text{SSE}/(n-2) = \sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2 / (n-2)$  et que  $E[Y_t] = E[\hat{Y}_t]$ , alors

$$\begin{aligned}E[\text{MSE}] &= \frac{1}{n-2} E\left[\sum_{t=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2\right] \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n E[(Y_t - \hat{Y}_t)^2] \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n E[(Y_t - E[Y_t]) - (\hat{Y}_t - E[\hat{Y}_t])]^2 \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n (\text{var}[Y_t] + \text{var}[\hat{Y}_t] - 2\text{cov}(Y_t, \hat{Y}_t)).\end{aligned}$$

Or, on a par hypothèse du modèle que  $\text{cov}(Y_t, Y_s) = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \delta_{ts}\sigma^2$ , d'où  $\text{var}[Y_t] = \sigma^2$  et  $\text{var}[\bar{Y}] = \sigma^2/n$ . D'autre part,

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{Y}_t] &= \text{var}[\bar{Y} + \hat{\beta}_1(X_t - \bar{X})] \\ &= \text{var}[\bar{Y}] + (X_t - \bar{X})^2 \text{var}[\hat{\beta}_1] + 2(X_t - \bar{X})\text{cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1)\end{aligned}$$

et l'on sait que

$$\text{var}[\hat{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

et que

$$\begin{aligned} \text{cov}(\bar{Y}, \hat{\beta}_1) &= \text{cov}\left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n}, \frac{\sum_{s=1}^n (X_s - \bar{X}) Y_s}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}\right) \\ &= \frac{1}{n \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \text{cov}(Y_t, (X_s - \bar{X}) Y_s) \\ &= \frac{1}{n \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \text{var}[Y_t] \\ &= \frac{\sigma^2}{n \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$ . Ainsi,

$$\text{var}[\hat{Y}_t] = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{(X_t - \bar{X})^2 \sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}.$$

De manière similaire, on détermine que

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, \hat{Y}_t) &= \text{cov}(Y_t, \bar{Y} + \hat{\beta}_1(X_t - \bar{X})) \\ &= \text{cov}(Y_t, \bar{Y}) + (X_t - \bar{X}) \text{cov}(Y_t, \hat{\beta}_1) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{(X_t - \bar{X})^2 \sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E[(Y_t - \hat{Y}_t)^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \frac{(X_t - \bar{X})^2 \sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}$$

et

$$\sum_{t=1}^n E[(Y_t - \hat{Y}_t)^2] = (n-2) \sigma^2,$$

d'où  $E[\text{MSE}] = \sigma^2$ .

b) On a

$$\begin{aligned}
 E[\text{MSR}] &= E[\text{SSR}] \\
 &= E \left[ \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 \right] \\
 &= \sum_{t=1}^n E[\hat{\beta}_1^2 (X_t - \bar{X})^2] \\
 &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 E[\hat{\beta}_1^2] \\
 &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 (\text{var}[\hat{\beta}_1] + E[\hat{\beta}_1]^2) \\
 &= \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \left( \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} + \beta_1^2 \right) \\
 &= \sigma^2 + \beta_1^2 \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2.
 \end{aligned}$$

2.9 a) Il faut exprimer  $\hat{\beta}'_0$  et  $\hat{\beta}'_1$  en fonction de  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$ . Pour ce faire, on trouve d'abord une expression pour chacun des éléments qui entrent dans la définition de  $\hat{\beta}'_1$ . Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
 \bar{X}' &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X'_t \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (c + dX_t) \\
 &= c + d\bar{X},
 \end{aligned}$$

et, de manière similaire,  $\bar{Y}' = a + b\bar{Y}$ . Ensuite,

$$\begin{aligned}
 S'_{XX} &= \sum_{t=1}^n (X'_t - \bar{X}')^2 \\
 &= \sum_{t=1}^n (c + dX_t - c - d\bar{X})^2 \\
 &= d^2 S_{XX}
 \end{aligned}$$

et  $S'_{YY} = b^2 S_{YY}$ ,  $S'_{XY} = bd S_{XY}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}'_1 &= \frac{S'_{XY}}{S'_{XX}} \\
 &= \frac{bd S_{XY}}{d^2 S_{XX}} \\
 &= \frac{b}{d} \hat{\beta}_1
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}'_0 &= \bar{Y}' - \hat{\beta}'_1 \bar{X}' \\
 &= a + b\bar{Y} - \frac{b}{d} \hat{\beta}_1 (c + d\bar{X}) \\
 &= a - \frac{bc}{d} \hat{\beta}_1 + b(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\
 &= a - \frac{bc}{d} \hat{\beta}_1 + b\hat{\beta}_0.
 \end{aligned}$$

b) Tout d'abord, on établit que

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} \\
 &= \hat{\beta}_1^2 \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} \\
 &= \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{XX}}{S_{YY}}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, avec les résultats obtenus en a), on démontre directement que

$$\begin{aligned}
 (R^2)' &= (\hat{\beta}'_1)^2 \frac{S'_{XX}}{S'_{YY}} \\
 &= \left(\frac{b}{d}\right)^2 \hat{\beta}_1^2 \frac{d^2 S_{XX}}{b^2 S_{YY}} \\
 &= \hat{\beta}_1^2 \frac{S_{XX}}{S_{YY}} \\
 &= R^2.
 \end{aligned}$$

**2.10** Considérons un modèle de régression usuel avec l'ensemble de données  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n), (m\bar{X}, m\bar{Y})$ , où  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t$ ,  $\bar{Y} = n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_t$ ,  $m = n/a$  et  $a = \sqrt{n+1} - 1$ . On définit

$$\begin{aligned}
 \bar{X}' &= \frac{1}{n+1} \sum_{t=1}^{n+1} X_t \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{t=1}^n X_t + \frac{m}{n+1} \bar{X} \\
 &= k\bar{X}
 \end{aligned}$$

et, de manière similaire,

$$\bar{Y}' = k\bar{Y},$$

où

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{n+m}{n+1} \\
 &= \frac{n(a+1)}{a(n+1)}.
 \end{aligned}$$

L'expression pour l'estimateur des moindres carrés de la pente de la droite de régression pour cet ensemble de données est

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{n+1} X_t Y_t - (n+1) \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{t=1}^{n+1} X_t^2 - (n+1) (\bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t + m^2 \bar{X} \bar{Y} - (n+1) k^2 \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 + m^2 \bar{X}^2 - (n+1) k^2 \bar{X}^2}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}m^2 - k^2(n+1) &= \frac{n^2}{a^2} - \frac{n^2(a+1)^2}{a^2(n+1)} \\ &= \frac{n^2(n+1) - n^2(n+1)}{a^2(n+1)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \\ &= \hat{\beta}.\end{aligned}$$

Interprétation : en ajoutant un point bien spécifique à n'importe quel ensemble de données, on peut s'assurer que la pente de la droite de régression sera la même que celle d'un modèle passant par l'origine. Voir la figure A.5 pour une illustration du phénomène.

- 2.11** Puisque, selon le modèle,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  et que  $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$ , alors  $Y_t \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_t, \sigma^2)$ . De plus, on sait que

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}) Y_t}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2},\end{aligned}$$

donc l'estimateur  $\hat{\beta}_1$  est une combinaison linéaire des variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_n$ . Par conséquent,  $\hat{\beta}_1 \sim N(E[\hat{\beta}_1], \text{var}[\hat{\beta}_1])$ , où  $E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$  et  $\text{var}[\hat{\beta}_1] = \sigma^2 / S_{XX}$  et, donc,

$$\Pr \left[ -z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma / \sqrt{S_{XX}}} < z_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha.$$

Un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $\beta_1$  lorsque la variance  $\sigma^2$  est connue est donc

$$\beta_1 \in \hat{\beta}_1 \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}}.$$

- 2.12** L'intervalle de confiance pour  $\beta_1$  est

$$\begin{aligned}\beta_1 &\in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{XX}}} \\ &\in \hat{\beta}_1 \pm t_{0,025}(20-2) \sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}.\end{aligned}$$

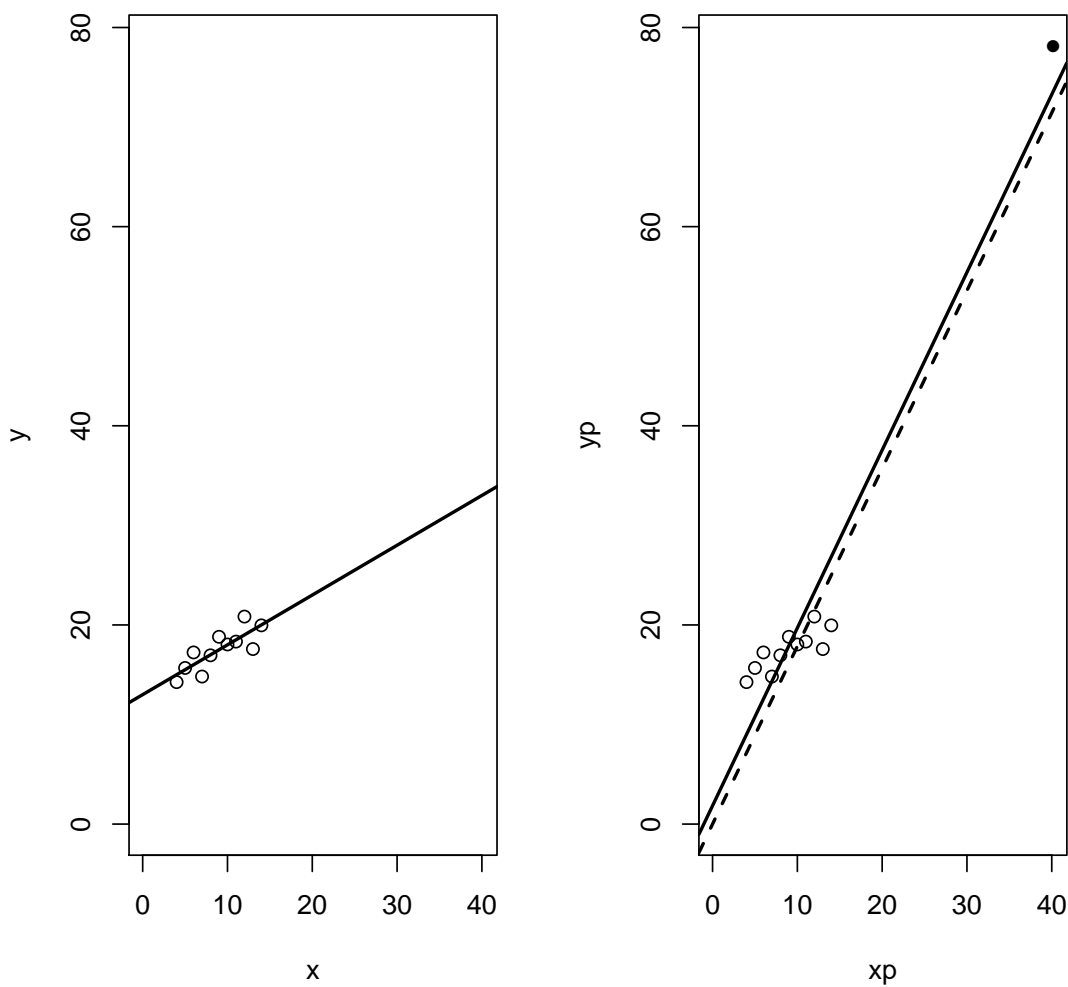


FIG. A.5 – Illustration de l'effet de l'ajout d'un point spécial à un ensemble de données. À gauche, la droite de régression usuelle. À droite, le même ensemble de points avec le point spécial ajouté (cercle plein), la droite de régression avec ce nouveau point (ligne pleine) et la droite de régression passant par l'origine (ligne pointillée). Les deux droites sont parallèles.

On nous donne  $SST = S_{YY} = 20838$  et  $S_{XX} = 10668$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} SSR &= \hat{\beta}_1^2 \sum_{t=1}^{20} (X_t - \bar{X})^2 \\ &= (-1,104)^2 (10668) \\ &= 13002,33 \\ SSE &= SST - SSR \\ &= 7835,67 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{SSE}{18} \\ &= 435,315. \end{aligned}$$

De plus, on trouve dans une table de quantiles de la loi de Student (ou à l'aide de la fonction `qt` dans R) que  $t_{0,025}(18) = 2,101$ . L'intervalle de confiance recherché est donc

$$\begin{aligned} \beta_1 &\in -1,104 \pm 2,101 \sqrt{\frac{435,315}{10668}} \\ &\in (-1,528, -0,680). \end{aligned}$$

**2.13 a)** On trouve aisément les estimateurs de la pente et de l'ordonnée à l'origine de la droite de régression :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{t=1}^n X_t^2 - n \bar{X}^2} \\ &= 1,436 \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ &= 9,273. \end{aligned}$$

b) Les sommes de carrés sont

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{t=1}^n Y_t^2 - n \bar{Y}^2 \\ &= 1194 - 11(9,273)^2 \\ &= 248,18 \\ SSR &= \hat{\beta}_1^2 \left( \sum_{t=1}^n X_t^2 - n \bar{X}^2 \right) \\ &= (1,436)^2 (110 - 11(0)) \\ &= 226,95 \end{aligned}$$

et  $SSE = SST - SSR = 21,23$ . Le tableau d'analyse de variance est donc le suivant :

| Source     | SS     | d.l. | MS     | Ratio F |
|------------|--------|------|--------|---------|
| Régression | 226,95 | 1    | 226,95 | 96,21   |
| Erreur     | 21,23  | 9    | 2,36   |         |
| Total      | 248,18 | 10   |        |         |

Or, puisque  $t = \sqrt{F} = 9,809 > t_{\alpha/2}(n-2) = t_{0,025}(9) = 2,26$ , on rejette l'hypothèse  $H_0 : \beta_1 = 0$  soit, autrement dit, la pente est significativement différente de zéro.

c) Puisque la variance  $\sigma^2$  est inconnue, on l'estime par  $s^2 = \text{MSE} = 2,36$ . On a alors

$$\begin{aligned}\beta_1 &\in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \sqrt{\widehat{\text{Var}}[\hat{\beta}_1]} \\ &\in 1,436 \pm 2,26 \sqrt{\frac{2,36}{110}} \\ &\in (1,105, 1,768).\end{aligned}$$

d) Le coefficient de détermination de la régression est  $R^2 = \text{SSR}/\text{SST} = 226,95/248,18 = 0,914$ , ce qui indique que l'ajustement du modèle aux données est très bon. En outre, suite au test effectué à la partie b), on conclut que la régression est globalement significative. Toutes ces informations portent à conclure qu'il n'y a pas lieu d'utiliser un autre modèle.

**2.14** On doit déterminer si la régression est significative, ce qui peut se faire à l'aide de la statistique  $F$ . Or, à partir de l'information donnée dans l'énoncé, on peut calculer

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{50} X_t Y_t - 50 \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{t=1}^{50} X_t^2 - 50 \bar{X}^2} \\ &= -0,0110 \\ \text{SST} &= \sum_{t=1}^{50} Y_t^2 - 50 \bar{Y}^2 \\ &= 78,4098 \\ \text{SSR} &= \hat{\beta}_1^2 \sum_{t=1}^{50} (X_t - \bar{X})^2 \\ &= 1,1804 \\ \text{SSE} &= \text{SST} - \text{SSR} \\ &= 77,2294\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{MSR} &= 1,1804 \\ \text{MSE} &= \frac{\text{SSE}}{50 - 2} \\ &= 1,6089\end{aligned}$$

et, enfin,

$$\begin{aligned}F &= \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} \\ &= 0,7337.\end{aligned}$$

Soit  $F$  une variable aléatoire ayant une distribution de Fisher avec 1 et 48 degrés de liberté, soit la même distribution que la statistique  $F$  sous l'hypothèse  $H_0 : \beta_1 = 0$ . On a que  $\Pr[F > 0,7337] = 0,3959$ , donc la valeur  $p$  du test  $H_0 : \beta_1 = 0$  est 0,3959. Une telle valeur  $p$  est généralement considérée trop élevée pour rejeter l'hypothèse  $H_0$ . On ne peut donc considérer la relation entre la ligne de vie et l'espérance de vie comme significative. (Ou on ne la considère significative qu'avec un niveau de confiance de  $1 - p = 60,41$  %.)



**2.15** Premièrement, selon le modèle de régression passant par l'origine,  $Y_0 = \beta X_0 + \varepsilon_0$  et  $\hat{Y}_0 = \hat{\beta} X_0$ . Considérons, pour la suite, la variable aléatoire  $Y_0 - \hat{Y}_0$ . On voit facilement que  $E[\hat{\beta}] = \beta$ , d'où  $E[Y_0 - \hat{Y}_0] = E[\beta X_0 + \varepsilon_0 - \hat{\beta} X_0] = \beta X_0 - \beta X_0 = 0$  et

$$\text{var}[Y_0 - \hat{Y}_0] = \text{var}[Y_0] + \text{var}[\hat{Y}_0] - 2\text{cov}(Y_0, \hat{Y}_0).$$

Or,  $\text{cov}(Y_0, \hat{Y}_0) = 0$  par l'hypothèse ii) de l'énoncé,  $\text{var}[Y_0] = \sigma^2$  et  $\text{var}[\hat{Y}_0] = X_0^2 \text{var}[\hat{\beta}]$ . De plus,

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{\beta}] &= \frac{1}{(\sum_{t=1}^n X_t^2)^2} \sum_{t=1}^n X_t^2 \text{var}[Y_t] \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \end{aligned}$$

d'où, finalement,

$$\text{var}[Y_0 - \hat{Y}_0] = \sigma^2 \left( 1 + \frac{X_0^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \right).$$

Par l'hypothèse de normalité et puisque  $\hat{\beta}$  est une combinaison linéaire de variables aléatoires normales,

$$Y_0 - \hat{Y}_0 \sim N \left( 0, \sigma^2 \left( 1 + \frac{X_0^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \right) \right)$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sigma \sqrt{1 + X_0^2 / \sum_{t=1}^n X_t^2}} \sim N(0, 1).$$

Lorsque la variance  $\sigma^2$  est estimée par  $s^2$ , alors

$$\frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{s \sqrt{1 + X_0^2 / \sum_{t=1}^n X_t^2}} \sim t(n-1).$$

La loi de Student a  $n - 1$  degrés de liberté puisque le modèle passant par l'origine ne compte qu'un seul paramètre. Les bornes de l'intervalle de confiance pour la vraie valeur de  $Y_0$  sont donc

$$\hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2}(n-1) s \sqrt{1 + \frac{X_0^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2}}.$$

**2.16** a) Soit  $X_1, \dots, X_{10}$  les valeurs de la masse monétaire et  $Y_1, \dots, Y_{10}$  celles du PNB. On a  $\bar{X} = 3,72$ ,  $\bar{Y} = 7,55$ ,  $\sum_{t=1}^{10} X_t^2 = 147,18$ ,  $\sum_{t=1}^{10} Y_t^2 = 597,03$  et  $\sum_{t=1}^{10} X_t Y_t = 295,95$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{10} X_t Y_t - 10 \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{t=1}^{10} X_t^2 - 10 \bar{X}^2} \\ &= 1,716 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ &= 1,168. \end{aligned}$$

On a donc la relation linéaire PNB = 1,168 + 1,716 MM.

- b) Tout d'abord, on doit calculer l'estimateur  $s^2$  de la variance car cette quantité entre dans le calcul des intervalles de confiance demandés. Pour les calculs à la main, on peut éviter de calculer les valeurs de  $\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_{10}$  en procédant ainsi :

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{t=1}^{10} Y_t^2 - 10\bar{Y}^2 \\ &= 27,005 \\ SSR &= \hat{\beta}_1^2 \left( \sum_{t=1}^{10} X_t^2 - 10\bar{X}^2 \right) \\ &= 25,901, \end{aligned}$$

puis  $SSE = SST - SSR = 1,104$  et  $s^2 = MSE = SSE / (10 - 2) = 0,1380$ . On peut maintenant construire les intervalles de confiance :

$$\begin{aligned} \beta_0 &\in \hat{\beta}_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2)s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}} \\ &\in 1,168 \pm (2,306)(0,3715) \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{3,72^2}{8,796}} \\ &\in (0,060, 2,276) \\ \beta_1 &\in \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2}(n-2)s \sqrt{\frac{1}{S_{XX}}} \\ &\in 1,716 \pm (2,306)(0,3715) \sqrt{\frac{1}{8,796}} \\ &\in (1,427, 2,005). \end{aligned}$$

Puisque l'intervalle de confiance pour la pente  $\beta_1$  ne contient ni la valeur 0, ni la valeur 1, on peut rejeter, avec un niveau de confiance de 95 %, les hypothèses  $H_0 : \beta_1 = 0$  et  $H_0 : \beta_1 = 1$ .

- c) Par l'équation obtenue en a) liant le PNB à la masse monétaire (MM), un PNB de 12,0 correspond à une masse monétaire de

$$\begin{aligned} MM &= \frac{12,0 - 1,168}{1,716} \\ &= 6,31. \end{aligned}$$

- d) On cherche un intervalle de confiance pour la droite de régression en  $MM_{1997} = 6,31$  ainsi qu'un intervalle de confiance pour la prévision  $PNB = 12,0$  associée à cette même valeur de la masse monétaire. Avec une probabilité de  $\alpha = 95$  %, le PNB moyen se trouve dans l'intervalle

$$12,0 \pm t_{\alpha/2}(n-2)s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(6,31 - \bar{X})^2}{S_{XX}}} = (11,20, 12,80),$$

alors que la vraie valeur du PNB se trouve dans l'intervalle

$$12,0 \pm t_{\alpha/2}(n-2)s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(6,31 - \bar{X})^2}{S_{XX}}} = (10,83, 13,17).$$

```
par(mfrow = c(2, 2))
plot(medv ~ rm + age + lstat + tax, data = house, ask = FALSE)
```

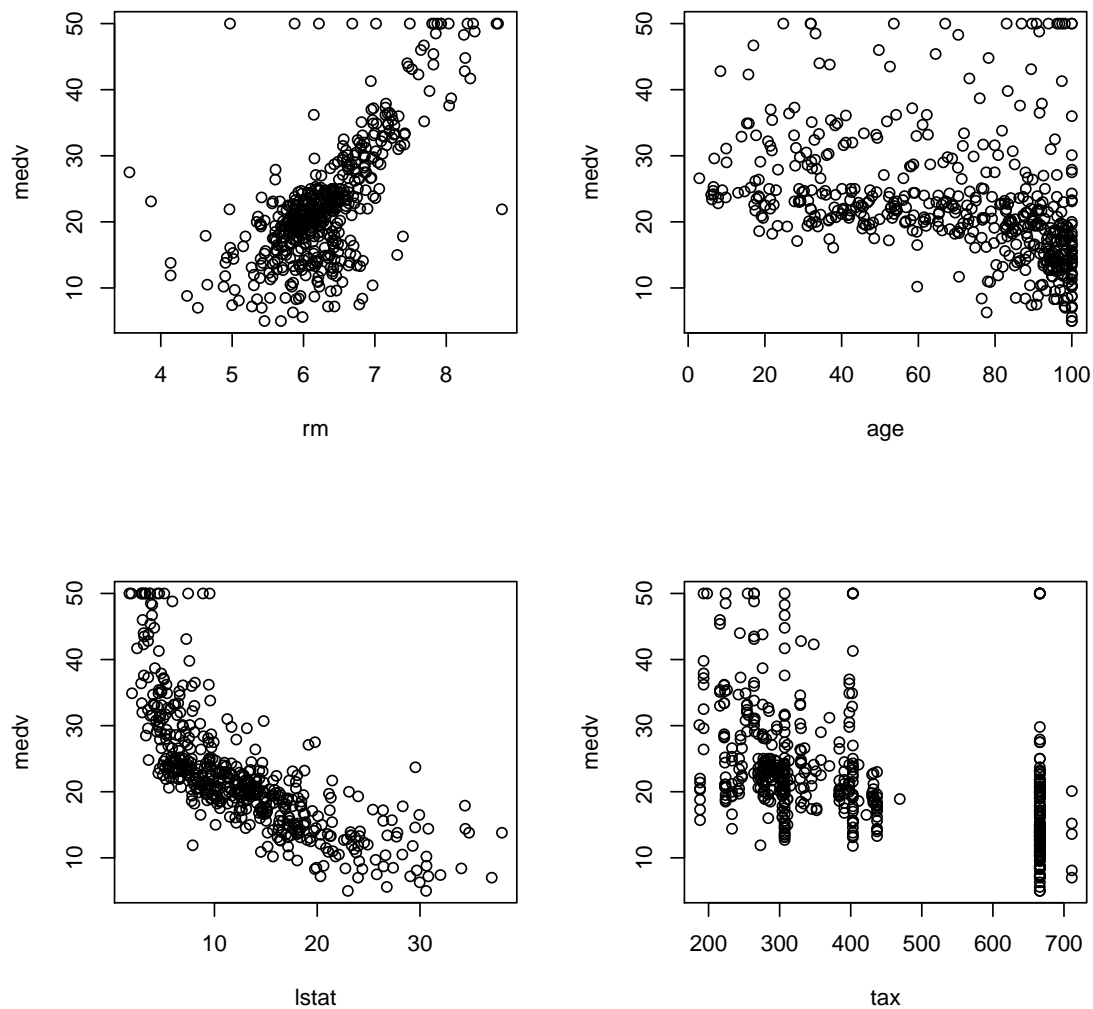


FIG. A.6 – Relation entre la variable medv et les variables rm, age, lstat et tax des données house.dat

2.17 a) Les données du fichier house.dat sont importées dans R avec la commande

```
house <- read.table("data/house.dat", header = TRUE)
```

La figure A.6 contient les graphiques de medv en fonction de chacune des variables rm, age, lstat et tax. Le meilleur choix de variable explicative pour le prix médian semble être le nombre moyen de pièces par immeuble, rm.

b) Les résultats ci-dessous ont été obtenus avec R.

```
fit1 <- lm(medv ~ rm, data = house)
summary(fit1)

##
## Call:
## lm(formula = medv ~ rm, data = house)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -23.346  -2.547   0.090   2.986  39.433
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -34.671     2.650  -13.08  <2e-16 ***
## rm              9.102     0.419   21.72  <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 6.616 on 504 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4835, Adjusted R-squared:  0.4825
## F-statistic: 471.8 on 1 and 504 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

On peut voir que tant l'ordonnée à l'origine que la pente sont très significativement différentes de zéro. La régression est donc elle-même significative. Cependant, le coefficient de détermination n'est que de  $R^2 = 0,4835$ , ce qui indique que d'autres facteurs pourraient expliquer la variation dans `medv`.

On calcule les bornes de l'intervalle de confiance de la régression avec la fonction `predict` :

```
pred.ci <- predict(fit1, interval = "confidence", level = 0.95)
```

La droite de régression et ses bornes d'intervalle de confiance inférieure et supérieure sont illustrée à la figure A.7.

c) On reprend la même démarche, mais cette fois avec la variable `age` :

```
fit2 <- lm(medv ~ age, data = house)
summary(fit2)

##
## Call:
## lm(formula = medv ~ age, data = house)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -15.097  -5.138  -1.958   2.397  31.338
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  30.97868     0.99911  31.006  <2e-16 ***
## age          -0.12316     0.01348  -9.137  <2e-16 ***
## ---
```

```
ord <- order(house$rm)
plot(medv ~ rm, data = house, ylim = range(pred.ci))
matplot(house$rm[ord], pred.ci[ord,],
        type = "l", lty = c(1, 2, 2), lwd = 2,
        col = "black", add = TRUE)
```

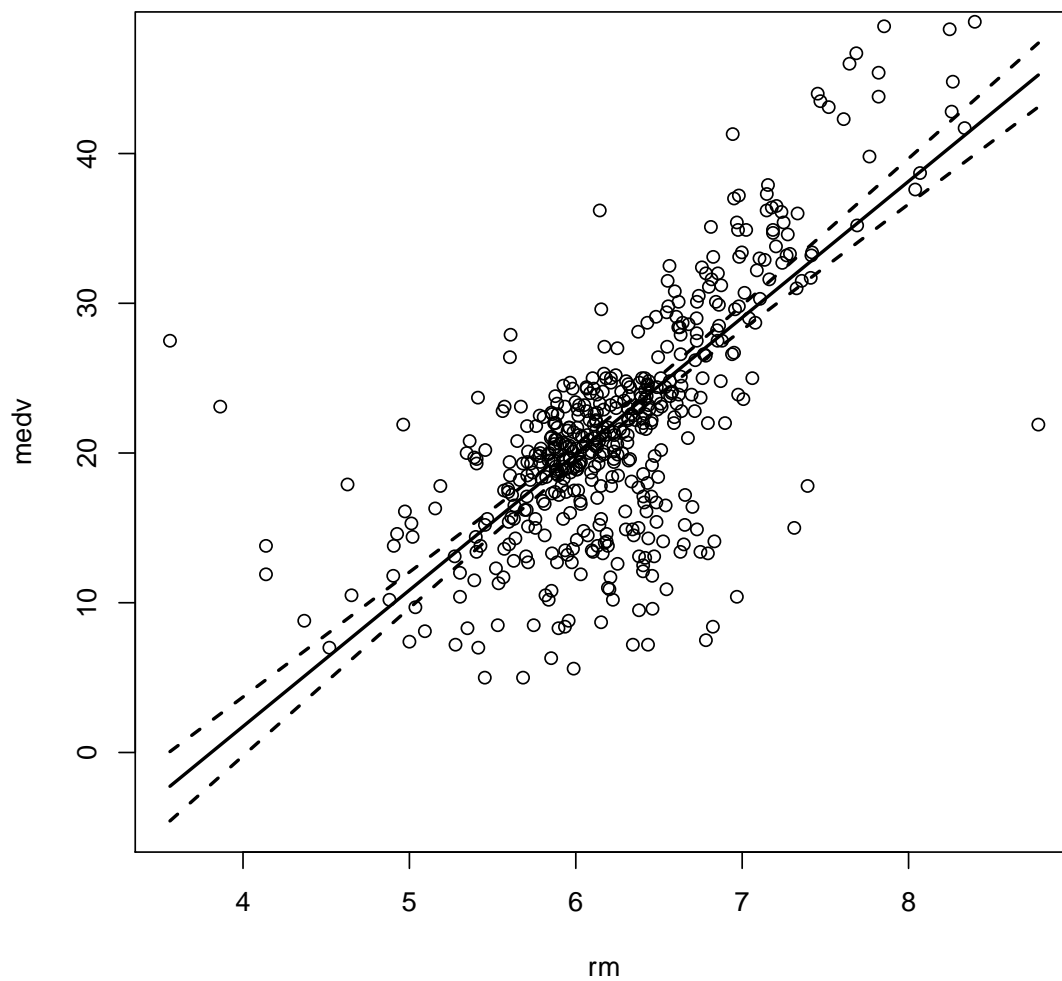


FIG. A.7 – Résultat de la régression de la variable `rm` sur la variable `medv` des données `house.dat`

```
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 8.527 on 504 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.1421, Adjusted R-squared: 0.1404
## F-statistic: 83.48 on 1 and 504 DF, p-value: < 2.2e-16

pred.ci <- predict(fit2, interval = "confidence", level = 0.95)
```

La régression est encore une fois très significative. Cependant, le  $R^2$  est encore plus faible qu'avec la variable `rm`. Les variables `rm` et `age` contribuent donc chacune à expliquer les variations de la variable `medv` (et `rm` mieux que `age`), mais aucune ne sait le faire seule de manière satisfaisante. La droite de régression et l'intervalle de confiance de celle-ci sont reproduits à la figure A.8. On constate que l'intervalle de confiance est plus large qu'en b).

- 2.18 a) On importe les données dans R, puis on effectue les conversions demandées. La variable `consommation` contient la consommation des voitures en  $\ell/100$  km et la variable `poids` le poids en kilogrammes.

```
carburant <- read.table("carburant.dat", header = TRUE)
consommation <- 235.1954/carburant$mpg
poids <- carburant$poids * 0.45455 * 1000
```

- b) La fonction `summary` fournit l'information essentielle pour juger de la validité et de la qualité du modèle :

```
fit <- lm(consommation ~ poids)
summary(fit)

##
## Call:
## lm(formula = consommation ~ poids)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.07123 -0.68380  0.01488  0.44802  2.66234
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.0146530  0.7118445  -0.021    0.984
## poids        0.0078382  0.0005315  14.748 <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.039 on 36 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.858, Adjusted R-squared: 0.854
## F-statistic: 217.5 on 1 and 36 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Le modèle est donc le suivant :  $Y_t = -0,01465 + 0,007838X_t + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0, 1,039^2)$ , où  $Y_t$  est la consommation en litres aux 100 kilomètres et  $X_t$  le poids en kilogrammes. La faible valeur  $p$  du test  $F$  indique une régression très significative. De plus, le  $R^2$  de 0,858 confirme que l'ajustement du modèle est assez bon.

```
ord <- order(house$age)
plot(medv ~ age, data = house, ylim = range(pred.ci))
matplot(house$age[ord], pred.ci[ord,],
        type = "l", lty = c(1, 2, 2), lwd = 2,
        col = "black", add = TRUE)
```

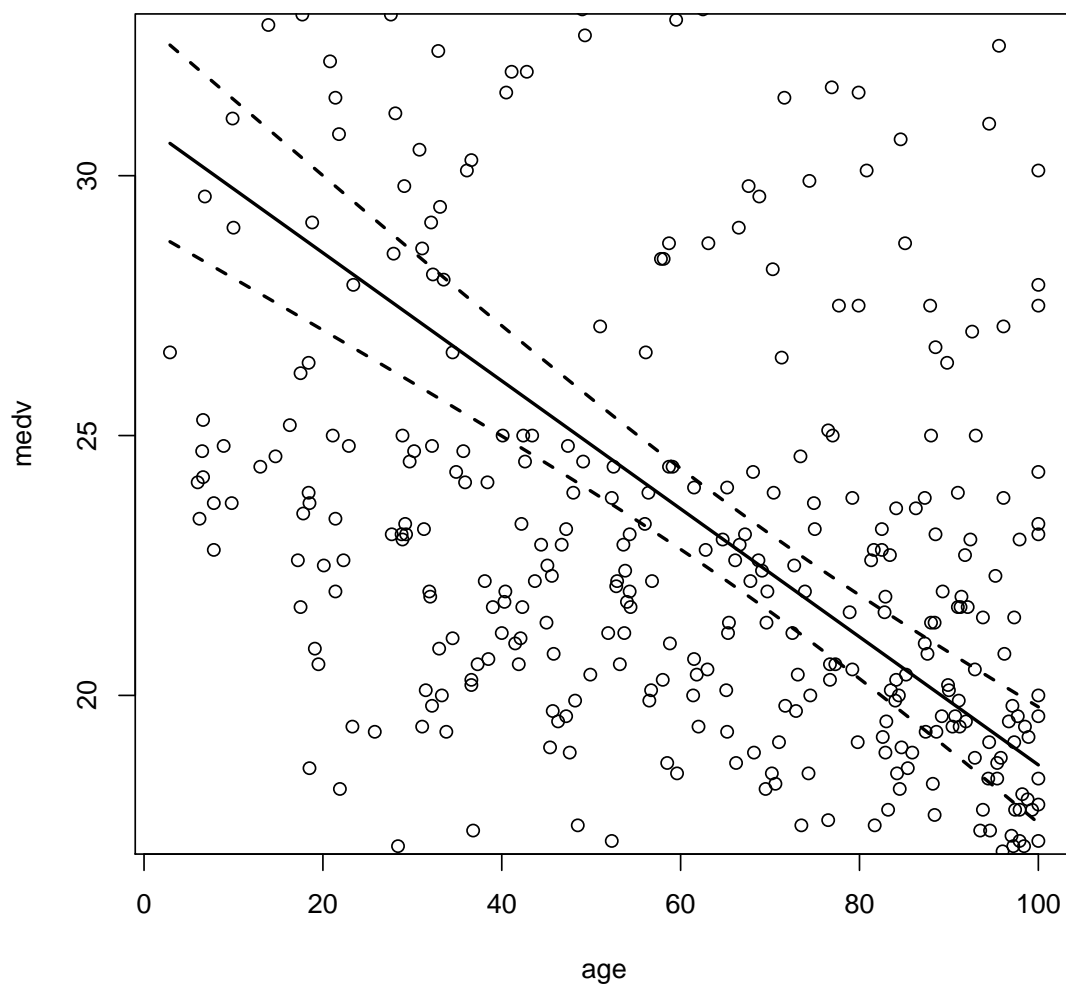


FIG. A.8 – Résultat de la régression de la variable `age` sur la variable `medv` des données `house.dat`

- c) On veut calculer un intervalle de confiance pour la consommation en carburant prévue d'une voiture de 1350 kg. On obtient, avec la fonction `predict` :

```
predict(fit, newdata = data.frame(poids = 1350), interval = "prediction")
##          fit          lwr          upr
## 1 10.5669  8.432089 12.7017
```

### Chapitre 3

- 3.1 Tout d'abord, selon le théorème ?? de l'annexe ??,

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} f(\mathbf{x})' \mathbf{A} f(\mathbf{x}) = 2 \left( \frac{d}{d\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right)' \mathbf{A} f(\mathbf{x}).$$

Il suffit, pour faire la démonstration, d'appliquer directement ce résultat à la forme quadratique

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

avec  $f(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$  et  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , la matrice identité. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\boldsymbol{\beta}} S(\boldsymbol{\beta}) &= 2 \left( \frac{d}{d\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right)' \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= 2(-\mathbf{X})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= -2\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

En posant ces dérivées exprimées sous forme matricielle simultanément égales à zéro, on obtient les équations normales à résoudre pour calculer l'estimateur des moindres carrés du vecteur  $\boldsymbol{\beta}$ , soit

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

En isolant  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  dans l'équation ci-dessus, on obtient, finalement, l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}.$$

- 3.2 a) On a un modèle sans variable explicative. Intuitivement, la meilleure prévision de  $Y_t$  sera alors  $\bar{Y}$ . En effet, pour ce modèle,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \\ &= n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_t \\ &= \bar{Y}. \end{aligned}$$



- b) Il s'agit du modèle de régression linéaire simple passant par l'origine, pour lequel la matrice de schéma est

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left( \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \\ &= \left( \sum_{t=1}^n X_t^2 \right)^{-1} \sum_{t=1}^n X_t Y_t \\ &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}, \end{aligned}$$

tel qu'obtenu à l'exercice 2.6.

- c) On est ici en présence d'un modèle de régression multiple ne passant pas par l'origine et ayant deux variables explicatives. La matrice de schéma est alors

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix}_{n \times 3}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left( \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & \cdots & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & \cdots & X_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n & n\bar{X}_1 & n\bar{X}_2 \\ n\bar{X}_1 & \sum_{t=1}^n X_{t1}^2 & \sum_{t=1}^n X_{t1} X_{t2} \\ n\bar{X}_2 & \sum_{t=1}^n X_{t1} X_{t2} & \sum_{t=1}^n X_{t2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n Y_t \\ \sum_{t=1}^n X_{t1} Y_t \\ \sum_{t=1}^n X_{t2} Y_t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'inversion de la première matrice et le produit par la seconde sont laissés aux bons soins du lecteur plus patient que les rédacteurs de ces solutions.

3.3 Dans le modèle de régression linéaire simple, la matrice schéma est

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \text{var}[\hat{\beta}] &= \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
 &= \sigma^2 \left( \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \sigma^2 \begin{bmatrix} n & n\bar{X} \\ n\bar{X} & \sum_{t=1}^n X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \frac{\sigma^2}{n \sum_{t=1}^n X_t^2 - n^2 \bar{X}^2} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n X_t^2 & -n\bar{X} \\ -n\bar{X} & n \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \begin{bmatrix} n^{-1} \sum_{t=1}^n X_t^2 & -\bar{X} \\ -\bar{X} & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \text{var}[\hat{\beta}_0] &= \sigma^2 \frac{\sum_{t=1}^n X_t^2}{n \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \\
 &= \sigma^2 \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 + n\bar{X}^2}{n \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}
 \end{aligned}$$

et

$$\text{var}[\hat{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}.$$

Ceci correspond aux résultats antérieurs.

**3.4** Dans les démonstrations qui suivent, trois relations de base seront utilisées :  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\beta}$  et  $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ .

a) On a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}'\mathbf{e} &= \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\
 &= \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) \\
 &= \mathbf{X}'\mathbf{y} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\beta} \\
 &= \mathbf{X}'\mathbf{y} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\
 &= \mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{y} \\
 &= \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

En régression linéaire simple, cela donne

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}'\mathbf{e} &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n e_t \\ \sum_{t=1}^n X_t e_t \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$  se simplifie en  $\sum_{t=1}^n e_t = 0$  et  $\sum_{t=1}^n X_t e_t = 0$  soit, respectivement, la condition pour que l'estimateur des moindres carrés soit sans biais et la seconde équation normale obtenue à la partie b) de l'exercice 2.1.

b) On a

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{y}}' \mathbf{e} &= (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\
 &= \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
 &= \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} \\
 &= \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\
 &= \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}'\mathbf{y} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Pour tout modèle de régression cette équation peut aussi s'écrire sous la forme plus conventionnelle  $\sum_{t=1}^n \hat{Y}_t e_t = 0$ . Cela signifie que le produit scalaire entre le vecteur des prévisions et celui des erreurs doit être nul ou, autrement dit, que les vecteurs doivent être orthogonaux. C'est là une condition essentielle pour que l'erreur quadratique moyenne entre les vecteurs  $\mathbf{y}$  et  $\hat{\mathbf{y}}$  soit minimale. (Pour de plus amples détails sur l'interprétation géométrique du modèle de régression, consulter [?], chapitres 20 et 21.) D'ailleurs, on constate que  $\hat{\mathbf{y}}' \mathbf{e} = \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{e}$  et donc, en supposant sans perte de généralité que  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$ , que  $\hat{\mathbf{y}}' \mathbf{e} = 0$  et  $\mathbf{X}' \mathbf{e} = \mathbf{0}$  sont des conditions en tous points équivalentes.

c) On a

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{y}}' \hat{\mathbf{y}} &= (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\
 &= \hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} \\
 &= \hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\
 &= \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}'\mathbf{y}.
 \end{aligned}$$

Cette équation est l'équivalent matriciel de l'identité

$$\begin{aligned}
 \text{SSR} &= \hat{\beta}_1^2 \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \\
 &= \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}}
 \end{aligned}$$

utilisée à plusieurs reprises dans les solutions du chapitre 2. En effet, en régression linéaire simple,  $\hat{\mathbf{y}}' \hat{\mathbf{y}} = \sum_{t=1}^n \hat{Y}_t^2 = \sum_{t=1}^n (\hat{Y} - \bar{Y})^2 + n\bar{Y}^2 = \text{SSR} + n\bar{Y}^2$  et

$$\begin{aligned}
 \hat{\boldsymbol{\beta}}' \mathbf{X}' \mathbf{y} &= \hat{\beta}_0 n\bar{Y} + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t Y_t \\
 &= (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X})n\bar{Y} + \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n X_t Y_t \\
 &= \hat{\beta}_1 \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) + n\bar{Y}^2 \\
 &= \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}} + n\bar{Y}^2,
 \end{aligned}$$

d'où  $\text{SSR} = S_{XY}^2 / S_{XX}$ .

- 3.5 a) Premièrement,  $Y_0 = \mathbf{x}_0 \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_0$  avec  $E[\varepsilon_0] = 0$ . Par conséquent,  $E[Y_0] = E[x_0 \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_0] = \mathbf{x}_0 \boldsymbol{\beta}$ . Deuxièmement,  $E[\hat{Y}_0] = E[\mathbf{x}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}}] = \mathbf{x}_0 E[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \mathbf{x}_0 \boldsymbol{\beta}$  puisque l'estimateur des moindres carrés de  $\boldsymbol{\beta}$  est sans biais. Ceci complète la preuve.

- b) Tout d'abord,  $E[(\hat{Y}_0 - E[Y_0])^2] = \mathbf{V}[\hat{Y}_0] = \text{var}[\hat{Y}_0]$  puisque la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire  $\hat{Y}_0$  ne contient, ici, qu'une seule valeur. Or, par le théorème ??,

$$\begin{aligned}\text{var}[\hat{Y}_0] &= \mathbf{V}[\mathbf{x}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}}] \\ &= \mathbf{x}_0 \mathbf{V}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] \mathbf{x}_0' \\ &= \sigma^2 \mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0'.\end{aligned}$$

Afin de construire un intervalle de confiance pour  $E[Y_0]$ , on ajoute au modèle l'hypothèse  $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ . Par linéarité de l'estimateur des moindres carrés, on a alors  $\hat{Y}_0 \sim N(E[Y_0], \text{var}[\hat{Y}_0])$ . Par conséquent,

$$\Pr \left[ -z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{Y}_0 - E[\hat{Y}_0]}{\sqrt{\text{var}[\hat{Y}_0]}} \leq z_{\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

d'où un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $E[Y_0]$  est

$$E[Y_0] \in \hat{Y}_0 \pm z_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0'}.$$

Si la variance  $\sigma^2$  est inconnue et estimée par  $s^2$ , alors la distribution normale est remplacée par une distribution de Student avec  $n - p - 1$  degrés de liberté. L'intervalle de confiance devient alors

$$E[Y_0] \in \hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2}(n - p - 1) s \sqrt{\mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0'}.$$

- c) Par le résultat obtenu en a) et en supposant que  $\text{cov}(\varepsilon_0, \varepsilon_t) = 0$  pour tout  $t = 1, \dots, n$ , on a

$$\begin{aligned}E[(Y_0 - \hat{Y}_0)^2] &= \text{var}[Y_0 - \hat{Y}_0] \\ &= \text{var}[Y_0] + \text{var}[\hat{Y}_0] \\ &= \sigma^2 (1 + \mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0').\end{aligned}$$

Ainsi, avec l'hypothèse sur le terme d'erreur énoncée en b),  $Y_0 - \hat{Y}_0 \sim N(0, \text{var}[Y_0 - \hat{Y}_0])$ . En suivant le même cheminement qu'en b), on détermine qu'un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $Y_0$  est

$$Y_0 \in \hat{Y}_0 \pm z_{\alpha/2} \sigma \sqrt{1 + \mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0'}.$$

ou, si la variance  $\sigma^2$  est inconnue et estimée par  $s^2$ ,

$$Y_0 \in \hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2}(n - p - 1) s \sqrt{1 + \mathbf{x}_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}_0'}.$$

**3.6** On a la relation suivante liant la statistique  $F$  et le coefficient de détermination  $R^2$  :

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - p - 1}{p}$$

La principale inconnue dans le problème est  $n$ , le nombre de données. Or,

$$\begin{aligned}n &= pF \left( \frac{1 - R^2}{R^2} \right) + p + 1 \\ &= 3(5,438) \left( \frac{1 - 0,521}{0,521} \right) + 3 + 1 \\ &= 19.\end{aligned}$$

Soit  $F$  une variable aléatoire dont la distribution est une loi de Fisher avec 3 et  $19 - 3 - 1 = 15$  degrés de liberté, soit la même distribution que la statistique  $F$  du modèle. On obtient la valeur  $p$  du test global de validité du modèle dans un tableau de quantiles de la distribution  $F$  ou avec la fonction `pf` dans R :

$$\Pr[F > 5,438] = 0,0099$$

3.7 a) On a

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6 & 34 & -13 & -13 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -45 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,5 \\ 6,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

b) Avec les résultats de la partie a), on a

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{X}\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \\ 13,5 \\ 13,5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

et  $\bar{Y} = 14$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}\text{SST} &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{Y}^2 = 14 \\ \text{SSE} &= \mathbf{e}'\mathbf{e} = 0,5 \\ \text{SSR} &= \text{SST} - \text{SSE} = 13,5,\end{aligned}$$

d'où le tableau d'analyse de variance est le suivant :

| Source     | SS   | d.l. | MS   | F    |
|------------|------|------|------|------|
| Régression | 13,5 | 2    | 6,75 | 13,5 |
| Erreur     | 0,5  | 1    | 0,5  |      |
| Total      | 14   |      |      |      |

Le coefficient de détermination est

$$R^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} = 0,9643.$$

c) On sait que  $\text{var}[\hat{\beta}_i] = \sigma^2 c_{ii}$ , où  $c_{ii}$  est l'élément en position  $(i+1, i+1)$  de la matrice  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ . Or,  $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \text{MSE} = 0,5$ , tel que calculé en b). Par conséquent, la statistique  $t$  du test  $H_0 : \beta_1 = 0$  est

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{s\sqrt{c_{11}}} = \frac{6,5}{\sqrt{0,5(\frac{11}{2})}} = 3,920,$$

alors que celle du test  $H_0 : \beta_2 = 0$  est

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{s\sqrt{c_{22}}} = \frac{1,5}{\sqrt{0,5(\frac{3}{2})}} = 1,732.$$

À un niveau de signification de 5 %, la valeur critique de ces tests est  $t_{0,025}(1) = 12,706$ . Dans les deux cas, on ne rejette donc pas  $H_0$ , les variables  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas significatives dans le modèle.

- d) Soit  $\mathbf{x}_0 = [1 \ 3,5 \ 9]$  et  $Y_0$  la valeur de la variable dépendante correspondant à  $\mathbf{x}_0$ . La prévision de  $Y_0$  donnée par le modèle trouvé en a) est

$$\begin{aligned}\hat{Y}_0 &= \mathbf{x}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= -22,5 + 6,5(3,5) + 1,5(9) \\ &= 13,75.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Var}}[Y_0 - \hat{Y}_0] &= s^2(1 + \mathbf{x}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0') \\ &= 1,1875.\end{aligned}$$

Par conséquent, un intervalle de confiance à 95 % pour  $Y_0$  est

$$\begin{aligned}E[Y_0] &\in \hat{Y}_0 \pm t_{0,025}(1)s\sqrt{1 + \mathbf{x}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0'} \\ &\in 13,75 \pm 12,706\sqrt{1,1875} \\ &\in (-0,096, 27,596).\end{aligned}$$

- 3.8 a) On importe les données dans R, puis on effectue les conversions nécessaires. Comme précédemment, la variable `consommation` contient la consommation des voitures en  $\ell/100$  km et la variable `poids` le poids en kilogrammes. On ajoute la variable `cylindree`, qui contient la cylindrée des voitures en litres.

```
carburant <- read.table("carburant.dat", header = TRUE)
consommation <- 235.1954/carburant$mpg
poids <- carburant$poids * 0.45455 * 1000
cylindree <- carburant$cylindree * 2.54^3/1000
```

- b) La fonction `summary` fournit l'information essentielle pour juger de la validité et de la qualité du modèle :

```
fit <- lm(consommation ~ poids + cylindree)
summary(fit)

##
## Call:
## lm(formula = consommation ~ poids + cylindree)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.8799 -0.5595  0.1577  0.6051  1.7900
##
```

```
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -3.049304    1.098281  -2.776  0.00877 **
## poids       0.012677    0.001512   8.386 6.85e-10 ***
## cylindree   -1.122696    0.333479  -3.367  0.00186 **
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9156 on 35 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8927, Adjusted R-squared:  0.8866
## F-statistic: 145.6 on 2 and 35 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Le modèle est donc le suivant :

$$Y_t = -3,049 + 0,01268X_{t1} - 1,123X_{t2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 0,9156^2 I)$$

où  $Y_t$  est la consommation en litres aux 100 kilomètres,  $X_{t1}$  le poids en kilogrammes et  $X_{t2}$  la cylindrée en litres. La faible valeur  $p$  du test  $F$  indique une régression globalement très significative. Les tests  $t$  des paramètres individuels indiquent également que les deux variables du modèle sont significatives. Enfin, le  $R^2$  de 0,8927 confirme que l'ajustement du modèle est toujours bon.

- c) On veut calculer un intervalle de confiance pour la consommation prévue d'une voiture de 1350 kg ayant un moteur d'une cylindrée de 1,8 litres. On obtient, avec la fonction `predict` :

```
predict(fit, newdata = data.frame(poids = 1350, cylindree = 1.8),
        interval = "prediction")

##           fit           lwr           upr
## 1 12.04325  9.959855 14.12665
```

- 3.9 Il y a plusieurs réponses possibles pour cet exercice. Si l'on cherche, tel que suggéré dans l'énoncé, à distinguer les voitures sport des minifourgonnettes (en supposant que ces dernières ont moins d'accidents que les premières), alors on pourrait s'intéresser, en premier lieu, à la variable `peak.rpm`. Il s'agit du régime moteur maximal, qui est en général beaucoup plus élevé sur les voitures sport. Puisque l'on souhaite expliquer le montant total des sinistres de différents types de voitures, il devient assez naturel de sélectionner également la variable `price`, soit le prix du véhicule. Un véhicule plus luxueux coûte en général plus cher à faire réparer à dommages égaux. Voyons l'effet de l'ajout, pas à pas, de ces deux variables au modèle précédent ne comportant que la variable `horsepower` :

```
autoprice <- read.table("data/auto-price.dat", header = TRUE)
fit1 <- lm(losses ~ horsepower + peak.rpm, data = autoprice)
summary(fit1)

##
## Call:
## lm(formula = losses ~ horsepower + peak.rpm, data = autoprice)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -67.973 -24.074  -6.373  18.049 130.301
```

```
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  5.521414  29.967570   0.184 0.854060
## horsepower   0.318477   0.086840   3.667 0.000336 ***
## peak.rpm     0.016639   0.005727   2.905 0.004205 **
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 33.44 on 156 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.1314, Adjusted R-squared:  0.1203
## F-statistic: 11.8 on 2 and 156 DF, p-value: 1.692e-05

anova(fit1)

## Analysis of Variance Table
##
## Response: losses
##             Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## horsepower   1  16949  16948.5  15.1573 0.0001463 ***
## peak.rpm      1   9437   9437.0   8.4397 0.0042049 **
## Residuals    156 174435  1118.2
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

La variable `peak.rpm` est significative, mais le  $R^2$  demeure faible. Ajoutons maintenant la variable `price` au modèle :

```
fit2 <- lm(losses ~ horsepower + peak.rpm + price, data = autoprce)
summary(fit2)

##
## Call:
## lm(formula = losses ~ horsepower + peak.rpm + price, data = autoprce)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -66.745 -25.214  -5.867  18.407 130.032
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -0.6972172  31.3221462  -0.022  0.98227
## horsepower   0.2414922   0.1408272   1.715  0.08838 .
## peak.rpm     0.0181386   0.0061292   2.959  0.00357 **
## price        0.0005179   0.0007451   0.695  0.48803
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 33.49 on 155 degrees of freedom
```



```
## Multiple R-squared:  0.1341, Adjusted R-squared:  0.1173
## F-statistic: 8.001 on 3 and 155 DF,  p-value: 5.42e-05

anova(fit2)

## Analysis of Variance Table
##
## Response: losses
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## horsepower  1  16949  16948.5  15.1071 0.0001502 ***
## peak.rpm    1   9437   9437.0   8.4118 0.0042702 **
## price       1    542    542.1   0.4832 0.4880298
## Residuals 155 173893  1121.9
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Du moins avec les variables `horsepower` et `peak.rpm`, la variable `price` n'est pas significative. D'ailleurs, l'augmentation du  $R^2$  suite à l'ajout de cette variable est minime. À ce stade de l'analyse, il vaudrait sans doute mieux reprendre tout depuis le début avec d'autres variables. Des méthodes de sélection des variables seront étudiées plus avant dans le chapitre.

- 3.10 a) On a  $p = 3$  variables explicatives et, du nombre de degrés de liberté de la statistique  $F$ , on apprend que  $n - p - 1 = 16$ . Par conséquent,  $n = 16 + 3 + 1 = 20$ . Les dimensions des vecteurs et de la matrice de schéma dans la représentation  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  sont donc :  $n \times 1 = 20 \times 1$  pour les vecteurs  $\mathbf{y}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $n \times (p + 1) = 20 \times 4$  pour la matrice  $\mathbf{X}$ ,  $(p + 1) \times 1$  pour le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$ .
- b) La valeur  $p$  associée à la statistique  $F$  est, à toute fin pratique, nulle. Cela permet de rejeter facilement l'hypothèse nulle selon laquelle la régression n'est pas significative.
- c) On doit se fier ici au résultat du test  $t$  associé à la variable  $X_2$ . Dans les résultats obtenus avec R, on voit que la valeur  $p$  de la statistique  $t$  du paramètre  $\beta_2$  est 0,0916. Cela signifie que jusqu'à un seuil de signification de 9,16 % (ou un niveau de confiance supérieur à 90,84 %), on ne peut rejeter l'hypothèse  $H_0 : \beta_2 = 0$  en faveur de  $H_1 : \beta_2 \neq 0$ . Il s'agit néanmoins d'un cas limite et il est alors du ressort de l'analyste de décider d'inclure ou non le revenu disponible dans le modèle.
- d) Le coefficient de détermination est de  $R^2 = 0,981$ . Cela signifie que le prix de la bière, le revenu disponible et la demande de l'année précédente expliquent plus de 98 % de la variation de la demande en bière. L'ajustement du modèle aux données est donc particulièrement bon. Il est tout à fait possible d'obtenir un  $R^2$  élevé et, simultanément, toutes les statistiques  $t$  non significatives : comme chaque test  $t$  mesure l'impact d'une variable sur la régression étant donné la présence des autres variables, il suffit d'avoir une bonne variable dans un modèle pour obtenir un  $R^2$  élevé et une ou plusieurs autres variables redondantes avec la première pour rendre les tests  $t$  non significatifs.
- 3.11 a) L'information demandée doit évidemment être extraite des deux tableaux d'analyse de variance fournis dans l'énoncé. Il importe, ici, de savoir que le résultat de la fonction `anova` de R est un tableau d'analyse de variance séquentiel, où chaque ligne identifiée par le nom d'une variable correspond au test  $F$  partiel résultant de l'ajout de cette variable au modèle. Ainsi, du premier tableau on obtient les sommes de carrés

$$\text{SSR}(X_2) = 45,59085$$

$$\text{SSR}(X_3|X_2) = 8,76355$$

alors que du second tableau on a

$$\begin{aligned} \text{SSR}(X_1) &= 45,59240 \\ \text{SSR}(X_2|X_1) &= 0,01842 \\ \text{SSR}(X_3|X_1, X_2) &= 8,78766, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{\text{SSE}(X_1, X_2, X_3)}{n - p - 1} \\ &= 0,44844. \end{aligned}$$

- i) Le test d'hypothèse  $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  est le test global de validité du modèle. La statistique  $F$  pour ce test est

$$\begin{aligned} F &= \frac{\text{SSR}(X_1, X_2, X_3)/3}{\text{MSE}} \\ &= \frac{(\text{SSR}(X_1) + \text{SSR}(X_2|X_1) + \text{SSR}(X_3|X_1, X_2))/3}{\text{MSE}} \\ &= \frac{(45,5924 + 0,01842 + 8,78766)/3}{0,44844} \\ &= 40,44. \end{aligned}$$

Puisque la statistique MSE a 21 degrés de liberté, la statistique  $F$  en a 3 et 21.

- ii) Pour tester cette hypothèse, il faut utiliser un test  $F$  partiel. On teste si la variable  $X_1$  est significative dans la régression globale. La statistique du test est alors

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\text{SSR}(X_1|X_2, X_3)/1}{\text{MSE}} \\ &= \frac{\text{SSR}(X_1, X_2, X_3) - \text{SSR}(X_2, X_3)}{\text{MSE}} \\ &= \frac{\text{SSR}(X_1, X_2, X_3) - \text{SSR}(X_2) - \text{SSR}(X_3|X_2)}{\text{MSE}} \\ &= \frac{54,39848 - 45,59085 - 8,76355}{0,44844} \\ &= 0,098, \end{aligned}$$

avec 1 et 21 degrés de liberté.

- iii) Cette fois, on teste si les variables  $X_2$  et  $X_3$  (les deux ensemble) sont significatives dans la régression globale. On effectue donc encore un test  $F$  partiel avec la statistique

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\text{SSR}(X_2, X_3|X_1)/2}{\text{MSE}} \\ &= \frac{(\text{SSR}(X_1, X_2, X_3) - \text{SSR}(X_1))/2}{\text{MSE}} \\ &= \frac{(54,39848 - 45,5924)/2}{0,44844} \\ &= 9,819, \end{aligned}$$

avec 2 et 21 degrés de liberté.

- b) À la lecture du premier tableau d'analyse de variance que tant les variables  $X_2$  que  $X_3$  sont significatives dans le modèle. Par contre, comme on le voit dans le second tableau, la variable  $X_2$  devient non significative dès lors que la variable  $X_1$  est ajoutée au modèle. (L'impact de la variable  $X_3$  demeure, lui, inchangé.) Cela signifie que les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont redondantes et qu'il faut choisir l'une ou l'autre, mais pas les deux. Par conséquent, les choix de modèle possibles sont  $X_1$  et  $X_3$ , ou  $X_2$  et  $X_3$ .

3.12 La statistique à utiliser pour faire ce test  $F$  partiel est

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\text{SSR}(X_2, X_3 | X_1, X_4) / 2}{\text{MSE}} \\ &= \frac{\text{SSR}(X_1, X_2, X_3, X_4) - \text{SSR}(X_1, X_4)}{2 \text{MSE}} \\ &= \frac{\text{SSR} - \text{SSR}(X_4) - \text{SSR}(X_1 | X_4)}{2s^2} \end{aligned}$$

où  $\text{SSR} = \text{SSR}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Or,

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} \\ &= \frac{\text{SSR}}{\text{SSR} + \text{SSE}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{SSR} &= \frac{R^2}{1 - R^2} \text{SSE} \\ &= \frac{R^2}{1 - R^2} \text{MSE}(n - p - 1) \\ &= \frac{0,6903}{1 - 0,6903} (26,41)(506 - 4 - 1) \\ &= 29492. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{29492 - 2668 - 21348}{(2)(26,41)} \\ &= 103,67. \end{aligned}$$

3.13 a) Tout d'abord, si  $Z \sim N(0,1)$  et  $V \sim \chi^2(r)$  alors, par définition,

$$\frac{Z}{\sqrt{V/r}} \sim t(r).$$

Tel que mentionné dans l'énoncé,  $\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, \sigma^2 c_{ii})$  ou, de manière équivalente,

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{c_{ii}}} \sim N(0,1).$$

Par conséquent,

$$\frac{\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{c_{ii}}}}{\sqrt{\frac{\text{SSE}}{\sigma^2(n-p-1)}}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s \sqrt{c_{ii}}} \sim t(n - p - 1).$$

- b) En régression linéaire simple,  $c_{11} = 1/\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 = 1/S_{XX}$  et  $\sigma^2 c_{11} = \text{var}[\hat{\beta}_1]$ . Le résultat général en a) se réduit donc, en régression linéaire simple, au résultat bien connu du test  $t$  sur le paramètre  $\beta_1$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s\sqrt{1/S_{XX}}} \sim t(n-1).$$

3.14 En suivant les indications donnée dans l'énoncé, on obtient aisément

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} S(\beta) &= 2 \left( \frac{d}{d\beta} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \right)' \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \\ &= -2\mathbf{X}'\mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \\ &= -2(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X}\beta). \end{aligned}$$

Par conséquent, les équations normales à résoudre pour trouver l'estimateur  $\hat{\beta}^*$  minimisant la somme de carrés pondérés  $S(\beta)$  sont  $(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})\hat{\beta}^* = \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y}$  et l'estimateur des moindres carrés pondérés est

$$\hat{\beta}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y}.$$

3.15 De manière tout à fait générale, l'estimateur linéaire sans biais à variance minimale dans le modèle de régression linéaire  $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ ,  $\text{var}[\varepsilon] = \sigma^2 \mathbf{W}^{-1}$  est

$$\hat{\beta}^* = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y}$$

et sa variance est, par le théorème ??,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\hat{\beta}^*] &= (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{V}[\mathbf{y}]\mathbf{W}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

puisque les matrices  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X}$  sont symétriques. Dans le cas de la régression linéaire simple passant par l'origine et en supposant que  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$ , ces formules se réduisent en

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum_{t=1}^n w_t X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n w_t X_t^2}$$

et

$$\text{var}[\hat{\beta}^*] = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n w_t X_t^2}.$$

a) Cas déjà traité à l'exercice 2.6 où  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  et, donc,

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}$$

et

$$\text{var}[\hat{\beta}^*] = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2}.$$

b) Cas général traité ci-dessus.

c) Si  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2 X_t$ , alors  $w_t = X_t^{-1}$ . Le cas général se simplifie donc en

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^* &= \frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t} \\ &= \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \\ \text{var}[\hat{\beta}^*] &= \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n X_t} \\ &= \frac{\sigma^2}{n\bar{X}}.\end{aligned}$$

d) Si  $\text{var}[\varepsilon_t] = \sigma^2 X_t^2$ , alors  $w_t = X_t^{-2}$ . On a donc

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^* &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{Y_t}{X_t} \\ \text{var}[\hat{\beta}^*] &= \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

**3.16** Le graphique des valeurs de  $Y$  en fonction de celles de  $X$ , à la figure A.9, montre clairement une relation quadratique. On postule donc le modèle

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2).$$

Par la suite, on peut estimer les paramètres de ce modèle avec la fonction `lm` de R :

```
fit <- lm(Y ~ poly(X, 2), data = donnees)
summary(fit)

##
## Call:
## lm(formula = Y ~ poly(X, 2), data = donnees)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.9123 -0.6150 -0.1905  0.6367  1.6921
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   18.1240     0.3025   59.91 3.10e-16 ***
## poly(X, 2)1   29.6754     1.1717   25.33 8.72e-12 ***
## poly(X, 2)2    4.0899     1.1717    3.49 0.00446 **
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.172 on 12 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.982, Adjusted R-squared:  0.979
## F-statistic: 326.8 on 2 and 12 DF, p-value: 3.434e-11

anova(fit)
```

```
plot(Y ~ X, data = donnees)
```

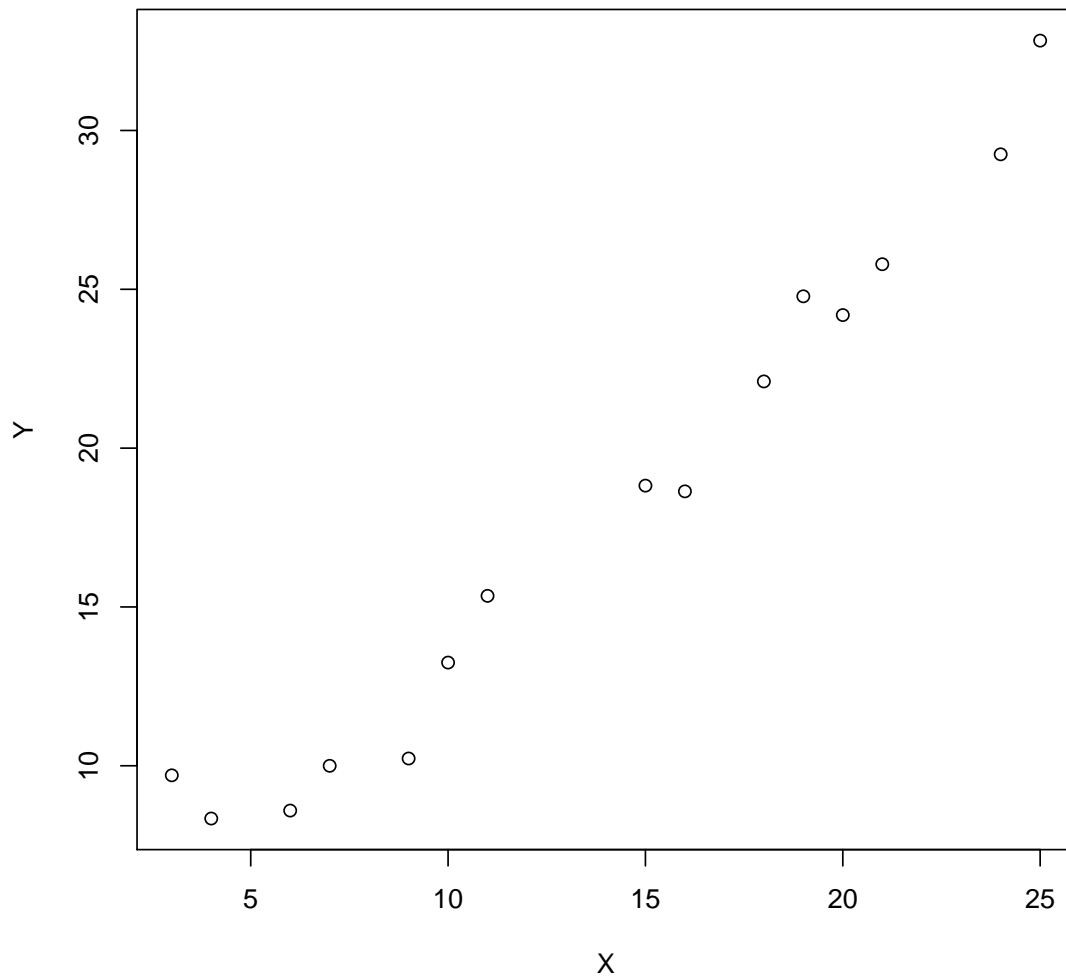


FIG. A.9 – Graphique des données de l'exercice 3.16

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## poly(X, 2)  2 897.36   448.68   326.79 3.434e-11 ***
## Residuals 12  16.48     1.37
## ---
## Signif. codes:
## 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Tant le test  $F$  global que les tests  $t$  individuels sont concluants, le coefficient de détermination est élevé et l'on peut constater à la figure A.10 que l'ajustement du modèle est bon. On conclut donc qu'un modèle adéquat pour cet ensemble de données est

$$Y_t = 18,12 + 29,68X_t + 4,09X_t^2 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1,373).$$

3.17 Comme on peut le constater à la figure A.11, le point  $(X_{16}, Y_{16})$  est plus éloigné des autres. En b) et c), on diminue son poids dans la régression.

a) On calcule d'abord l'estimateur des moindres carrés ordinaires :

```
(fit1 <- lm(Y ~ X, data = donnees))

##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X, data = donnees)
##
## Coefficients:
## (Intercept)          X
##      1.4256      0.3158
```

b) Si l'on suppose que la variance de la données  $(X_{16}, Y_{16})$  est quatre fois plus élevée que la variance des autres données, alors il convient d'accorder un point quatre fois moins grand à cette donnée dans la régression. Cela requiert les moindres carrés pondérés. Pour calculer les estimateurs avec `lm` dans R, on utilise l'argument `weights` :

```
w <- rep(1, nrow(donnees))
w[16] <- 0.25
(fit2 <- update(fit1, weights = w))

##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X, data = donnees, weights = w)
##
## Coefficients:
## (Intercept)          X
##      1.7213      0.2243
```

c) On répète la procédure en b) avec un poids de encore plus petit pour la donnée  $(X_{16}, Y_{16})$  :

```
w[16] <- 0.0625
(fit3 <- update(fit1, weights = w))
```

```
plot(Y ~ X, data = donnees)  
x <- seq(min(donnees$X), max(donnees$X), length = 200)  
lines(x, predict(fit, data.frame(X = x), lwd = 2))
```

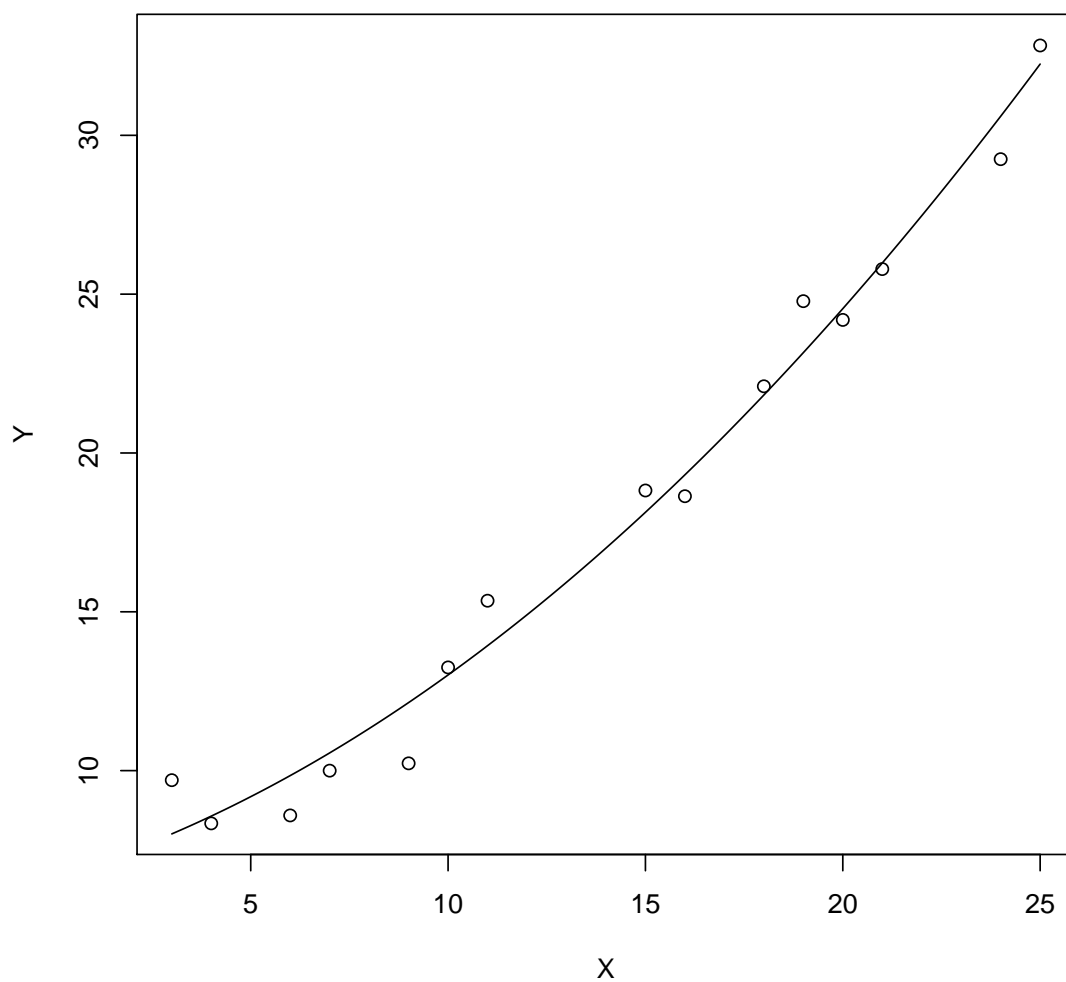


FIG. A.10 – Graphique des données de l'exercice 3.16 et courbe obtenue par régression



```
plot(Y ~ X, data = donnees)  
points(donnees$X[16], donnees$Y[16], pch = 16)
```

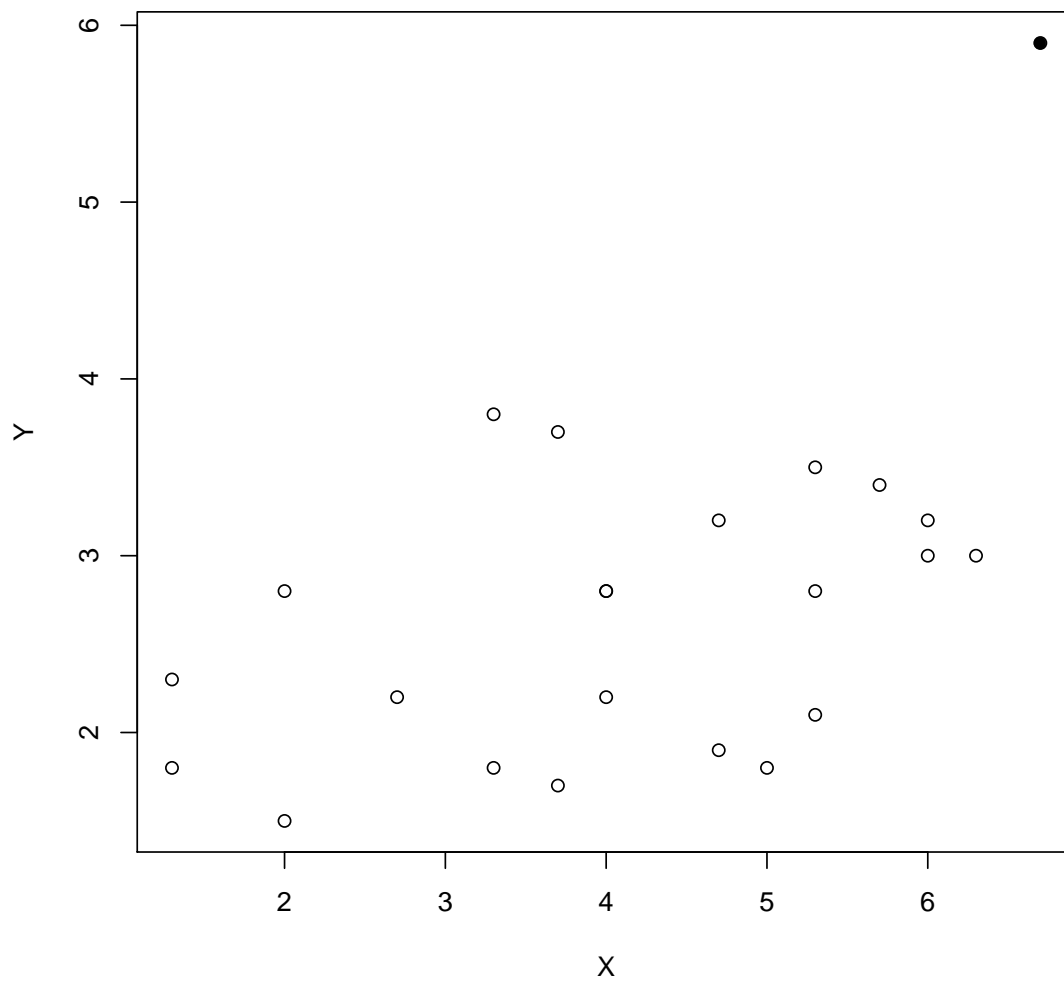


FIG. A.11 – Graphique des données de l'exercice 3.17. Le cercle plein représente la donnée  $(X_{16}, Y_{16})$ .

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X, data = donnees, weights = w)
##
## Coefficients:
## (Intercept)          X
##      1.8080      0.1975
```

Plus le poids accordé à la donnée  $(X_{16}, Y_{16})$  est faible, moins la droite de régression est attirée vers ce point (voir la figure A.12).

3.18 a) Voir la figure A.13 pour le graphique. Il y a effectivement une différence entre la consommation de carburant des hommes et des femmes : ces dernières font plus de milles avec un gallon d'essence.

b) Remarquer que la variable `sexe` est un facteur et peut être utilisée telle quelle dans `lm` :

```
(fit <- lm(mpg ~ age + sexe, data = donnees))

##
## Call:
## lm(formula = mpg ~ age + sexe, data = donnees)
##
## Coefficients:
## (Intercept)      age      sexeM
##      16.687      -1.040      -1.206
```

c) Calcul d'une prévision pour la valeur moyenne de la variable `mpg` :

```
predict(fit, newdata = data.frame(age = 4, sexe = "F"),
        interval = "confidence", level = 0.90)

##      fit      lwr      upr
## 1 12.52876 11.94584 13.11168
```

```
plot(Y ~ X, data = donnees)
points(donnees$X[16], donnees$Y[16], pch = 16)
abline(fit1, lwd = 2, lty = 1)
abline(fit2, lwd = 2, lty = 2)
abline(fit3, lwd = 2, lty = 3)
legend(1.2, 6, legend = c("Modèle a)", "Modèle b)", "Modèle c)",
      lwd = 2, lty = 1:3)
```

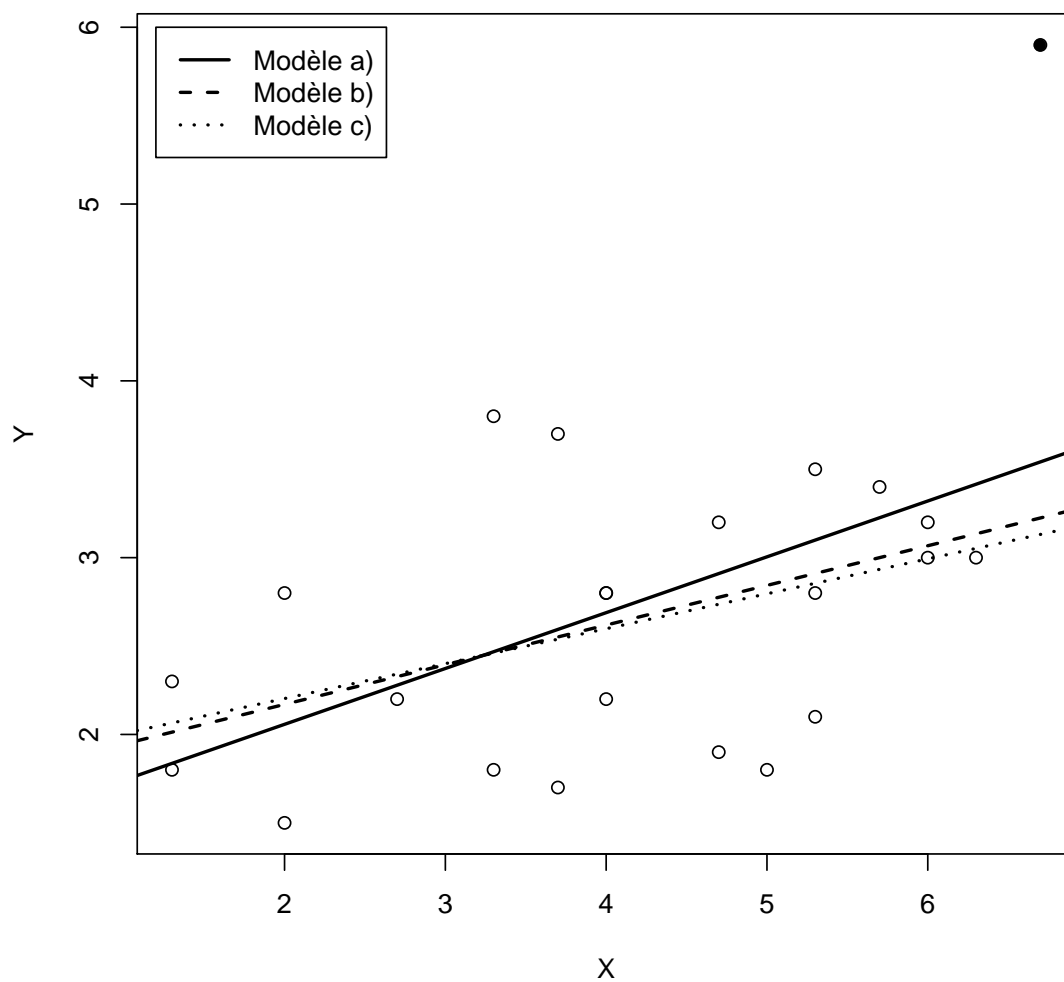


FIG. A.12 – Graphique des données de l'exercice 3.17 avec les droites de régression obtenues à l'aide des moindres carrés pondérés.

```
hommes <- subset(donnees, sexe == "M")
femmes <- subset(donnees, sexe == "F")
plot(mpg ~ age, data = hommes,
      xlim = range(donnees$age), ylim = range(donnees$mpg))
points(mpg ~ age, data = femmes, pch = 16)
legend(4, 16, legend = c("Hommes", "Femmes"), pch = c(1, 16))
```

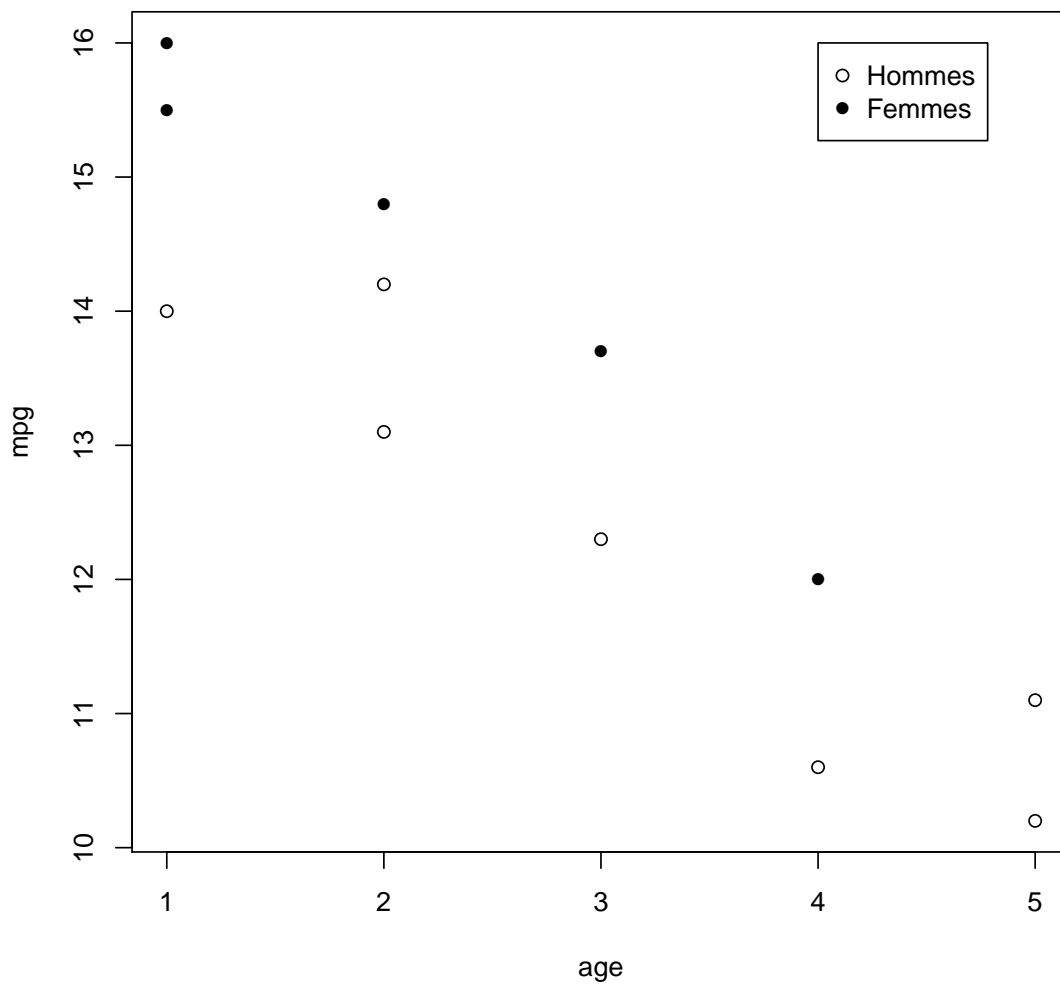


FIG. A.13 – Graphique des données de l'exercice 3.18



