Errata de *Exercices de méthodes statistiques*

Vincent Goulet

École d'actuariat, Université Laval

Version 1.0, ISBN 2-9809136-3-4

1. Le théorème C.3, page 60, devrait plutôt se lire ainsi : *Soient* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)'$ *et* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)'$, *d'où* $\mathbf{x}'\mathbf{a} = a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = \sum_{i=1}^k a_i x_i$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}'\mathbf{a} &= \frac{d}{d\mathbf{x}} \sum_{i=1}^k a_i x_i \\
&= \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1} \sum_{i=1}^k a_i x_i \\ \vdots \\ \frac{d}{dx_k} \sum_{i=1}^k a_i x_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

2. Solution de l'exercice 2.10 : dans la seconde ligne de l'expression de $\hat{\beta}_1$ le terme $m^2\bar{X}$ au dénominateur devrait plutôt se lire $m^2\bar{X}^2$.
3. Solution de l'exercice 2.17 b) : dans le texte, on devrait lire : «...le coefficient de détermination n'est que de $R^2 = 0{,}4835$, ...»
4. Solution de l'exercice 3.4 b) : remplacer le texte à partir de «D'ailleurs...» par : «D'ailleurs, on constate que $\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{e} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{e}$ et donc, en supposant sans perte de généralité que $\hat{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$, que $\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{e} = 0$ et $\mathbf{X}'\mathbf{e} = \mathbf{0}$ sont des conditions en tous points équivalentes.»
5. Solution de l'exercice 3.7 : en a), effacer le r dans la matrice $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ (ainsi que la seconde paire de crochets) ; en b) $\mathbf{e} = (0, 0, 0{,}5, -0{,}5)$.
6. Solution de l'exercice 4.3 : on devrait renvoyer à la figure 4.3 en a) et à la figure 4.4 en b).

7. Solution de l'exercice 4.8 : le premier bloc d'équations devrait plutôt se lire

$$\begin{aligned}(\alpha B + \beta B^2 + \gamma B^3)m_t &= \alpha m_{t-1} + \beta m_{t-2} + \gamma m_{t-3} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(c_0 + c_1 t) - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)c_1 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)m_t - (\alpha + 2\beta + 3\gamma)c_1\end{aligned}$$

8. Solution de l'exercice 5.4 : le corrélogramme à la figure 5.1 (c) devrait compter 40 autocorrélations.
9. Solution de l'exercice 5.8 : erreur de signe pour la seconde valeur du bruit blanc. Remplacer la solution par le texte ci-dessous.

   Cet exercice vise simplement à illustrer comment diverses combinaisons de valeurs d'un processus de bruit blanc peuvent générer des observations de processus ARMA. Dans tous les cas, on prend.

   a) On peut calculer les valeurs de $\{X_t\}$ à partir de la définition $X_t = 0{,}6X_{t-1} + Z_t$ avec $X_1 = Z_1$. On a donc

   $$\begin{aligned}X_1 &= Z_1 = 0{,}180 \\ X_2 &= 0{,}6X_1 + Z_2 = -1{,}502 \\ X_3 &= 0{,}6X_2 + Z_3 = 2{,}099 \\ X_4 &= 0{,}6X_3 + Z_4 = 2{,}589.\end{aligned}$$

   De manière équivalente, la solution de l'équation caractéristique d'un processus AR(1) est $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$. On a donc

   $$\begin{aligned}X_1 &= Z_1 = 0{,}180 \\ X_2 &= Z_2 + 0{,}6Z_1 = -1{,}502 \\ X_3 &= Z_3 + 0{,}6Z_2 + 0{,}36Z_1 = 2{,}099 \\ X_4 &= Z_4 + 0{,}6Z_3 + 0{,}36Z_2 + 0{,}216Z_3 = 2{,}099.\end{aligned}$$

   b) On a $X_t = Z_t - 0{,}4Z_{t-1}$, donc

   $$\begin{aligned}X_1 &= Z_1 = 0{,}180 \\ X_2 &= Z_2 - 0{,}4Z_1 = -1{,}682 \\ X_3 &= Z_3 - 0{,}4Z_2 = 3{,}644 \\ X_4 &= Z_4 - 0{,}4Z_3 = 0{,}130.\end{aligned}$$

   c) Ici, $X_t = 0{,}6X_{t-1} + Z_t - 0{,}4Z_{t-1}$. Par conséquent,

   $$\begin{aligned}X_1 &= Z_1 = 0{,}180 \\ X_2 &= 0{,}6X_1 + Z_2 - 0{,}4Z_1 = -1{,}574 \\ X_3 &= 0{,}6X_2 + Z_3 - 0{,}4Z_2 = 2{,}700 \\ X_4 &= 0{,}6X_3 + Z_4 - 0{,}4Z_3 = 1{,}750.\end{aligned}$$

On peut également démontrer que la réprésentation MA(∞) d'un processus ARMA$(1, 1)$ est $X_t = Z_t + (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} Z_{t-j}$. On a donc, de manière équivalente,

$$\begin{aligned}
X_1 &= Z_1 = 0{,}180 \\
X_2 &= Z_2 + 0{,}2Z_1 = -1{,}574 \\
X_3 &= Z_3 + 0{,}2(Z_2 + 0{,}6Z_1) = 2{,}700 \\
X_4 &= Z_4 + 0{,}2(Z_3 + 0{,}6Z_2 + 0{,}36Z_3) = 1{,}750.
\end{aligned}$$

10. Solution de l'exercice 5.9 b) : à la seconde de la série d'égalités, le dernier terme devrait être Z_{t-1+j} plutôt que Z_{t-1-j}.
11. Exercice 5.13 d) : les coefficients π_j sont erronés suite à une erreur de signe. Remplacer la solution par le texte ci-dessous.

    a) Il s'agit d'un processus ARMA$(1, 0)$, ou plus simplement AR(1). Les coefficients ψ_1, ψ_2 et ψ_3 satisfont l'égalité

    $$(1 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \dots)(1 - 0{,}5z) = 1,$$

    soit

    $$\begin{aligned}
    \psi_1 &= 0{,}5 \\
    \psi_2 &= 0{,}5\psi_1 = 0{,}25 \\
    \psi_3 &= 0{,}5\psi_2 = 0{,}125.
    \end{aligned}$$

    On confirme cette réponse avec la fonction `ARMAtoMA` de R :

    ```
    > ARMAtoMA(ar = 0.5, lag.max = 3)
    [1] 0.500 0.250 0.125
    ```

    Puisque le processus est déjà inversé, on sait que les coefficients de la représentation AR(∞) sont simplement $\pi_1 = -0{,}5$ et $\pi_j = 0$, $j > 1$.

    b) On a un processus MA(2) avec $\psi_1 = -1{,}3$, $\psi_2 = 0{,}4$ et $\psi_j = 0$, $j > 2$. Les trois premiers coefficients de la représentation AR(∞) satisfont l'équation

    $$(1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \dots)(1 - 1{,}3z + 0{,}4z^2) = 1,$$

    soit

    $$\begin{aligned}
    \pi_1 &= 1{,}3 \\
    \pi_2 &= -0{,}4 + 1{,}3\pi_1 = 1{,}29 \\
    \pi_3 &= -0{,}4\pi_1 + 1{,}3\pi_2 = 1{,}157.
    \end{aligned}$$

    On peut calculer les coefficients π_j avec la fonction `ARMAtoMA` dans R en inversant simplement le rôle des coefficients ϕ_j et θ_j (ainsi que leur signe). En d'autres mots, trouver les coefficients π_j du processus $X_t = Z_t - 1{,}3Z_{t-1} + 0{,}4Z_{t-2}$ est en tous points équivalent à trouver les coefficients ψ_j du processus $X_t - 1{,}3X_{t-1} + 0{,}4X_{t-2} = Z_t$. On a donc

```
> ARMAtoMA(ar = c(1.3, -0.4), lag.max = 3)
[1] 1.300 1.290 1.157
```

c) On a un processus ARMA$(1,2)$. Les trois premiers coefficients ψ_j sont obtenus en égalant les coefficients des puissances de z dans

$$(1 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \dots)(1 - 0{,}5z) = 1 - 1{,}3z + 0{,}4z^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 0{,}5 - 1{,}3 = -0{,}8\\ \psi_2 &= 0{,}5\psi_1 + 0{,}4 = 0\\ \psi_3 &= 0{,}5\psi_2 = 0.\end{aligned}$$

Confirmation avec R :

```
> ARMAtoMA(ar = 0.5, ma = c(-1.3, 0.4), lag.max = 3)
[1] -0.8  0.0  0.0
```

Les trois premiers coefficients π_j sont obtenus à partir de l'équation

$$(1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \dots)(1 - 1{,}3z + 0{,}4z^2) = 1 - 0{,}5z,$$

soit

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 1{,}3 - 0{,}5 = 0{,}8\\ \pi_2 &= -0{,}4 + 1{,}3\pi_1 = 0{,}64\\ \pi_3 &= -0{,}4\pi_1 + 1{,}3\pi_2 = 0{,}512.\end{aligned}$$

En effet,

```
> ARMAtoMA(ar = c(1.3, -0.4), ma = -0.5, lag.max = 3)
[1] 0.800 0.640 0.512
```

d) On a en fait $(1 - 0{,}2B)(1 - B)X_t = Z_t - 0{,}5Z_{t-1}$, soit un processus ARIMA$(1,1,1)$. Les trois premiers coefficients ψ_j sont obtenus à partir de l'équation

$$(1 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \dots)(1 - 1{,}2z + 0{,}2z^2) = 1 - 0{,}5z,$$

d'où

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 1{,}2 - 0{,}5 = 0{,}7\\ \psi_2 &= 1{,}2\psi_1 - 0{,}2 = 0{,}640\\ \psi_3 &= 1{,}2\psi_2 - 0{,}2\psi_1 = 0{,}628.\end{aligned}$$

On obtient le même résultat avec `ARMAtoMA` :

```
> ARMAtoMA(ar = c(1.2, -0.2), ma = -0.5, lag.max = 3)
[1] 0.700 0.640 0.628
```

Pour les trois premiers coefficients π_j, on résout

$$(1 + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \pi_3 z^3 + \dots)(1 - 0{,}5z) = 1 - 1{,}2z + 0{,}2z^2,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= 0{,}5 - 1{,}2 = -0{,}7 \\
\pi_2 &= 0{,}5\pi_1 + 0{,}2 = -0{,}15 \\
\pi_3 &= 0{,}5\pi_2 = -0{,}075.
\end{aligned}$$

En effet :

```
> ARMAtoMA(ar = 0.5, ma = c(-1.2, 0.2), lag.max = 3)
[1] -0.700 -0.150 -0.075
```

12. Exercice 5.15 : changer toutes les références aux moindres carrés pondérés pour les moindres carrés *généralisés*. De plus, la matrice $\mathbf{W}^{-1}$ est la matrice $\mathbf{V}$ vue au cours.