

Théorie des mesures de risque

Étude approfondie

Présenté par

Achille Rostan Fossouo Tadjuidje,
Benjamin Côté,
Li Zhu et
Olivier Côté

ACT-7008

2022.03.31

Table des matières

1 Introduction

2 VaR

3 TVaR

4 Estimation

5 Sous-additivité de la TVaR

6 Applications de la TVaR

Introduction

1 Introduction

2 VaR

3 TVaR

4 Estimation

5 Sous-additivité de la TVaR

6 Applications de la TVaR

Introduction

La demande de mécanismes pour contrôler ou limiter le risque se pose dans plusieurs domaines d'application y compris la finance, l'actuariat, la gestion de la chaîne d'approvisionnement, l'énergie et la médecine.

■ Le risque est mesuré par la variance

Markowitz (1952) a été le premier à formaliser le problème de la détermination de l'investissement optimal dans un portefeuille d'actifs financiers utilisant un cadre risque-rendement.

■ Pour et contre

Bien que la variance peut convenir lorsque la distribution des résultats est proche de la symétrie, elle n'est pas appropriée dans le cas général où la distribution peut être asymétrique.

Introduction

■ VaR et TVaR

Pour dépasser cette limite, plusieurs autres des mesures de risque ont été prises en compte dans les applications financières. Les mesures du risque basées sur les expected shortfalls ou sur les quantiles ont rapidement gagné en popularité au cours de la première décennie du 21^e siècle, incluant VaR et TVaR (initialement développée par Rockafellar et Uryasev (2000)).

VaR

1 Introduction

2 VaR

3 TVaR

4 Estimation

5 Sous-additivité de la TVaR

6 Applications de la TVaR

VaR : Exigence du capital - I

VaR est une solution optimale pour l'exigence du capital.

Cette section et la section suivante sont inspirées de [Denuit \(2005\)](#).

Solvabilité :

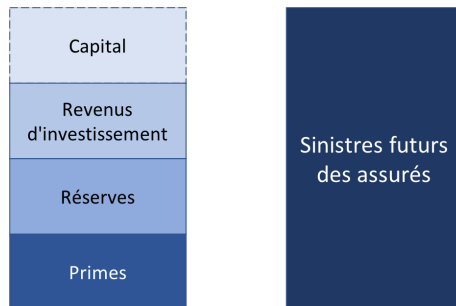
La solvabilité d'une société d'assurance peut être définie comme la capacité de la société à faire face, à tout moment, à ses engagements envers ses assurés et/ou envers les bénéficiaires de contrats d'assurances.

Exigence du capital :

Afin de protéger les assurés, l'autorité réglementaire impose une exigence du capital.

VaR : Exigence du capital - II

Le **capital** x est utilisé comme coussin contre la perte X que les primes, les réserves et les revenus d'investissement ne sont pas suffisants pour couvrir les sinistres futurs des assurés.



VaR : Optimisation - l'exigence du capital - I

Afin de déterminer l'exigence du capital, on peut faire l'optimisation en deux étapes :

Étape 1 : minimiser le risque de solvabilité

- **Objectif**

Trouver une exigence du capital pour s'assurer les événements que la perte X ne dépasse pas presque sûrement l'exigence du capital \varkappa

- **Mesure utilisée - Expected shortfall**

L'objectif peut être traduit par une minimisation du shortfall
 $E[(X - \varkappa)_+]$

Étape 2 : Optimiser le calcul par l'introduit du coût du capital

- **Objectif**

Considérer le coût du capital

- **Mesure utilisée**

Introduire le terme ϵx qui représente le coût du capital

VaR : Optimisation - l'exigence du capital - II

Le problème devient alors une optimisation et l'exigence du capital est la solution de ce problème d'optimisation.

$$\min_x \left\{ E[(X - x)_+] + x\epsilon \right\}, 0 < \epsilon < 1 \quad (1)$$



Figure - Équilibre entre le risque et le coût

VaR : Optimisation - Rappel du Théorème fondamental de l'analyse

Afin de trouver la solution pour l'expression (1), on va utiliser le Théorème fondamental de l'analyse.

$$\frac{d}{dx} \int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$$

VaR : Optimisation de la fonction du coût - I

On définit d'abord la fonction du coût $C(X, x)$. Ensuite, on calcule les dérivées première et seconde pour chercher la solution de la minimisation.

La fonction du coût

$$\begin{aligned}C(X, x) &= E[(X - x)_+] + x\epsilon \\&= \int_x^\infty S(t)dt + x\epsilon\end{aligned}$$

La dérivée première

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}C(X, x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_x^\infty S(t)dt + x\epsilon\right) \\&= -S(x) + \epsilon = 0 \\&\Rightarrow S(x) = \epsilon \Rightarrow F(x) = 1 - \epsilon\end{aligned}$$

VaR : Optimisation de la fonction du coût - II

La dérivée seconde

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}C(X, x) &= \frac{d}{dx}(-S(x) + \epsilon) \\ &= f(x) > 0\end{aligned}$$

Conclusion :

$x = F^{-1}(1 - \epsilon)$ est une solution optimale pour l'exigence du capital.

VaR : Définition de la mesure VaR

Définition VaR

Soit un risque X avec une fonction quantile F_X^{-1} .

La mesure VaR avec un niveau de confiance κ associée à la v.a. X est définie par

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa), \kappa \in (0, 1)$$

VaR : une solution optimale pour l'exigence du capital

Théorème 1

Soit la v.a. X telle que $E(X) < \infty$, alors, on a

$$VaR_{\kappa}(X) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ E[(X - x)_+] + (1 - \kappa)x \right\}$$

VaR est une solution optimale pour l'exigence du capital.

VaR : Cas spécial -I

Pour $X \sim \text{Exp}(1)$,

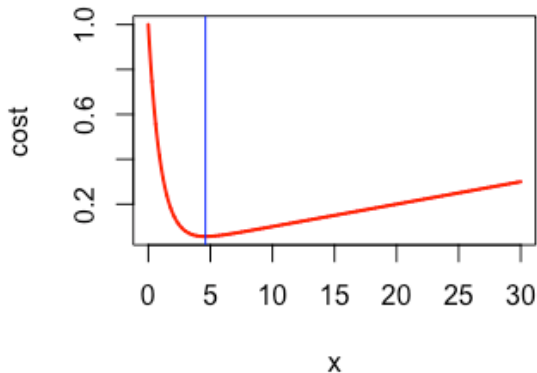
$$\text{VaR}_\kappa(X) = -\log(1 - \kappa)$$

Quand $\kappa = 0,99$, $\text{VaR}_{0.99}(X) = 4.60517$.

$$\begin{aligned} C(X, x) &= E[(X - x)_+] + x(1 - \kappa) \\ &= \int_x^\infty S(t) dt + x(1 - \kappa) \\ &= \int_x^\infty e^{-t} dt + x(1 - 0.99) \\ &= e^{-x} + 0.01x \end{aligned}$$

VaR : Cas spécial -II

VaR = 4.60517



TVaR

1 Introduction

2 VaR

3 TVaR

- Définition
- Exemples

4 Estimation

5 Sous-additivité de la TVaR

6 Applications de la TVaR

Définition - TVaR

Définition TVaR

La mesure TVaR avec un niveau de confiance κ est définie par

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1 - \kappa} \int_{\kappa}^1 F_X^{-1}(u) du, \kappa \in (0, 1),$$

avec

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} TVaR_{\kappa}(X) = TVaR_0(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(u) du = E[X]$$

$TVaR$ peut être considérée comme la « moyenne arithmétique » des VaRs.

Définition - Expected Shortfall

Définition Expected shortfall

La mesure Expected Shortfall avec un niveau de confiance κ est définie par

$$ES_{\kappa}(X) = E[(X - VaR_{\kappa}(X))_+] = \pi_X(VaR_{\kappa}(X))$$

Relation entre la TVaR et de l'Expected Shortfall

$$\begin{aligned} ES_{\kappa}(X) &= \int_0^1 \left(VaR_{\xi}(X) - VaR_{\kappa}(X) \right)_+ d\xi \\ &= \int_{\kappa}^1 VaR_{\xi}(X) d\xi - VaR_{\kappa}(X)(1 - \kappa) \\ &= \left(TVaR_{\kappa}(X) - VaR_{\kappa}(X) \right) (1 - \kappa) \end{aligned}$$

TVaR et la valeur minimale de la fonction du coût - I

Rappel que la fonction du coût est définie par

$$C(X, x) = E[(X - x)_+] + x\epsilon$$

et atteint son minimum quand $x = VaR_{1-\epsilon}(X)$.

Alors, on remplace $1 - \epsilon$ par κ et on obtient

$$\begin{aligned}\min C(X) &= E[(X - VaR_{\kappa}(X))_+] + VaR_{\kappa}(X)(1 - \kappa) \\ &= \left(TVaR_{\kappa}(X) - VaR_{\kappa}(X)\right)(1 - \kappa) + VaR_{\kappa}(X)(1 - \kappa) \\ &= TVaR_{\kappa}(X)(1 - \kappa)\end{aligned}$$

TVaR et la valeur minimale de la fonction du coût - II

Donc,

$$TVaR_{\kappa}(X)(1 - \kappa) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ E[(X - x)_+] + x(1 - \kappa) \right\}$$

On introduit la théorème 3.

Théorème 3

Soit la v.a. X telle que $E(X) < \infty$. Alors, on a

$$TVaR_{\kappa}(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{1 - \kappa} E[(X - x)_+] + x \right\}$$

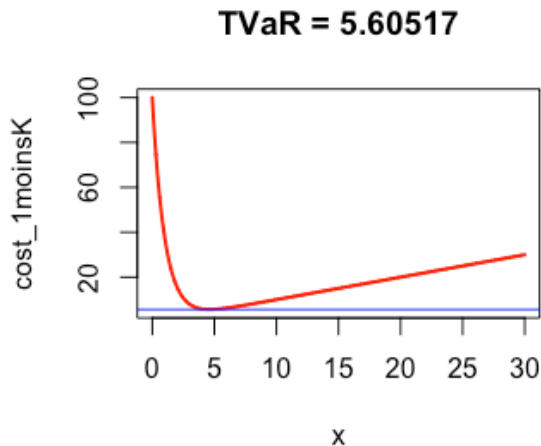
TVaR - Cas spécial - I

Pour $X \sim \text{Exp}(1)$,

$$\begin{aligned}TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \exp(-VaR_{\kappa}(X)) + VaR_{\kappa}(X) \\&= \frac{1}{1-\kappa} (1-\kappa) - \log(1-\kappa) \\&= 1 - \log(1-\kappa)\end{aligned}$$

TVaR - Cas spécial - II

Quand $\kappa = 0,99$, $TVaR_{0.99}(X) = 5.60517$.



Estimation

1 Introduction

2 VaR

3 TVaR

4 Estimation

- Théorie
- Exemple mélange d'erlang
- Exemple Loi normale
- Exemple Loi exponentielle

5 Sous-additivité de la TVaR

6 Applications de la TVaR

Théorie

Soit une quantité α que l'on tente d'estimer :

$$\alpha = E[\mathbb{Y}(\mathcal{x}^*)]$$

Où $\mathbb{Y} = (\mathbb{Y}(\mathcal{x}) : \mathcal{x} \in \mathbb{R})$ est un processus stochastique continu à droite.

La quantité \mathcal{x}^* est une quantité nécessaire pour l'estimation de $\mathbb{Y}(\mathcal{x}^*)$.

Application : estimation de la CVaR

Pour la l'estimation de la $CVaR_{\kappa}(X)$ à l'aide de $\mathbb{Y}(\mathcal{x}^*)$, on aurait

$$\mathbb{Y}(\mathcal{x}) = \frac{X \cdot 1_{\{X > \mathcal{x}\}}}{1 - \kappa}$$

Avec $\mathcal{x}^* = VaR_{\kappa}(X)$.

Théorie

Soit une quantité α que l'on tente d'estimer :

$$\alpha = E[\mathbb{Y}(x^*)]$$

Où $\mathbb{Y} = (\mathbb{Y}(x) : x \in \mathbb{R})$ est un processus stochastique continu à droite.

La quantité x^* est une quantité nécessaire pour l'estimation de $\mathbb{Y}(x^*)$.

Application : estimation de la CVaR

Pour la l'estimation de la $CVaR_\kappa(X)$ à l'aide de $\mathbb{Y}(x^*)$, on aurait

$$\mathbb{Y}(x) = \frac{X \cdot 1_{\{X > x\}}}{1 - \kappa}$$

Avec $x^* = VaR_\kappa(X)$.

Estimateur lorsque x^* connu

Si x^* est connu, un estimateur évident serait la moyenne échantillonnale :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{Y}_i(x^*) = \bar{\mathbb{Y}}_n(x^*)$$

On aurait alors des garanties, à l'aide du théorème central limite, de convergence et une distribution pour nos intervalles de confiance.

Application : estimation de la CVaR

Pour la l'estimation de la $CVaR_\kappa(X)$ à l'aide de $\bar{\mathbb{Y}}_n(x^*)$, on aurait

$$\hat{\alpha}(x^*) = \bar{\mathbb{Y}}_n(x^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X \cdot 1_{\{X > x^*\}}}{1 - \kappa}$$

Avec $x^* = VaR_\kappa(X)$.

Estimateur lorsque x^* connu

Si x^* est connu, un estimateur évident serait la moyenne échantillonnale :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{Y}_i(x^*) = \bar{\mathbb{Y}}_n(x^*)$$

On aurait alors des garanties, à l'aide du théorème central limite, de convergence et une distribution pour nos intervalles de confiance.

Application : estimation de la CVaR

Pour la l'estimation de la $CVaR_{\kappa}(X)$ à l'aide de $\bar{\mathbb{Y}}_n(x^*)$, on aurait

$$\hat{\alpha}(x^*) = \bar{\mathbb{Y}}_n(x^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X \cdot 1_{\{X > x^*\}}}{1 - \kappa}$$

Avec $x^* = VaR_{\kappa}(X)$.

Problème

Problème : la quantité \mathfrak{x}^* n'est pas connue, nous devons donc également l'estimer à l'aide d'un estimateur que nous noterons \hat{X}_n .

Si on tente maintenant d'estimer α par $\bar{Y}_n(\hat{X}_n)$, quelles garanties statistiques avons-nous ?

Problème

Problème : la quantité \mathcal{X}^* n'est pas connue, nous devons donc également l'estimer à l'aide d'un estimateur que nous noterons \hat{X}_n .

Si on tente maintenant d'estimer α par $\bar{Y}_n(\hat{X}_n)$, quelles garanties statistiques avons-nous ?

Convergence en distribution

On peut commencer par approximer $\bar{Y}_n(\hat{X}_n)$ (on suppose $Y(\cdot)$ dérivable) :

$$\bar{Y}_n(\hat{X}_n) \stackrel{taylor}{\approx} \bar{Y}_n(x^*) + \alpha'(x^*) (\hat{X}_n - x^*) \quad (2)$$

Si on peut démontrer qu'il existe des variables aléatoires gaussiennes conjointes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 tel que :

$$\sqrt{n} \left(\bar{Y}_n(x^*) - \alpha, \hat{X}_n - x^* \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$$

Alors, on devrait avoir (selon l'équation 2) :

$$\sqrt{n} \left(\bar{Y}_n(\hat{X}_n) - \alpha \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} \mathcal{N}_1 + \alpha'(x^*) \mathcal{N}_2$$

Retour la $CVaR$

Application : estimation de la $CVaR$

Pour la l'estimation de la $CVaR_\kappa(X)$ à l'aide de $\overline{Y}_n(\hat{X}_n)$, on aurait

$$\overline{Y}_n(\hat{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X \cdot 1_{\{X > \hat{X}_n\}}}{1 - \kappa}$$

Avec $\hat{X}_n = \inf\{x : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq \hat{X}_n\}} \geq \kappa\}$.

Hypothèse importantes

Cette hypothèse (qui contient 4 volets) est ici titre indicatif, on en aura besoin pour la suite.

Hypothèse 1 de Glynn et collab. (2020)

Dans un certain voisinage \mathbb{O} de x^* , $\alpha(\cdot)$ est continue et dérivable et il existe des fonctions f et g tel que

$$\boxed{1} \quad E \left[(\mathbb{Y}(x_1) - \mathbb{Y}(x_2))^2 \right] \leq f(x_2 - x_1), x_1 < x_2, \text{ et } x_1, x_2 \in \mathbb{O}$$

$$\boxed{2} \quad E \left[\min \left((\mathbb{Y}(x_1) - \mathbb{Y}(x_2))^2, (\mathbb{Y}(x_3) - \mathbb{Y}(x_2))^2 \right) \right] \leq g(x_3 - x_1), x_1 < x_2 < x_3, \text{ et } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{O}$$

$$\boxed{3} \quad \int_0^1 f^{1/2}(u) u^{-5/4} du < \infty$$

$$\boxed{4} \quad \int_0^1 g^{1/2}(u) u^{-3/2} du < \infty$$

Théorème

Théorème 1 de Glynn et collab. (2020)

Si on peut démontrer qu'il existe des variables aléatoires gaussiennes conjointes \mathcal{N}_1 et \mathcal{N}_2 tel que :

$$\sqrt{n} \left(\bar{Y}_n(x^*) - \alpha, \hat{X}_n - x^* \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} (\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$$

Et que l'hypothèse 1 (dernière diapositive) est respectée, Alors, on a :

$$\sqrt{n} \left(\bar{Y}_n(\hat{X}_n) - \alpha \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} \mathcal{N}_1 + \alpha'(x^*) \mathcal{N}_2$$

Problème : estimer $\alpha'(x^*)$

Proposition

Proposition 1 de Glynn et collab. (2020)

Les quatre volets de l'hypothèse 1 sont satisfaits si au moins une des conditions suivantes est remplie :

- a** Il existe $\gamma > 1/2$ et une v.a. Γ avec $E[\Gamma^2] < \infty$ tel que

$$|\mathbb{Y}(x_1) - \mathbb{Y}(x_2)| \leq \Gamma |x_1 - x_2|^\gamma$$

pour $x_1, x_2 \in \mathbb{O}$

- b** Il existe $b \in \mathbb{R}, c > 0, \beta > 1/2$ et des v.a. W et χ tel que

$$\mathbb{Y}(x) = W 1_{\{\chi \leq x\}} - b$$

avec $E[W^2 1_{\{x_1 < \chi \leq x_2\}}] \leq c |x_2 - x_1|^\beta$ pour $x_1, x_2 \in \mathbb{O}$

Preuve : Laissée en exercice

Nouveau processus aléatoire

On introduit un processus continu à droite $Z = (Z(x) : x \in \mathbb{R})$. Voici des relations importantes en lien avec Z :

- $E[Z(x^*)] = 0$
- $\phi(x) = E[Z(x)]$
- $\phi(\cdot)$ est dérivable et sa dérivée est positive aux alentours de x^* .

On suppose que l'estimateur \hat{X}_n de x^* :

- minimise $|\bar{Z}_n(\cdot)|$
- converge vers x^* lorsque $n \rightarrow \infty$
- satisfasse

$$\bar{Z}_n(\hat{X}_n) = o_p(n^{-1/2}) \quad (3)$$

Où

$$a_n o_p(1/a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Nouveau processus aléatoire

On introduit un processus continu à droite $Z = (Z(x) : x \in \mathbb{R})$. Voici des relations importantes en lien avec Z :

- $E[Z(x^*)] = 0$
- $\phi(x) = E[Z(x)]$
- $\phi(\cdot)$ est dérivable et sa dérivée est positive aux alentours de x^* .

On suppose que l'estimateur \hat{X}_n de x^* :

- minimise $|\bar{Z}_n(\cdot)|$
- converge vers x^* lorsque $n \rightarrow \infty$
- satisfasse

$$\bar{Z}_n(\hat{X}_n) = o_p(n^{-1/2}) \quad (3)$$

Où

$$a_n o_p(1/a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Application à la $CVaR$

Pour la $CVaR_\kappa(X)$, on aurait

- $\mathbb{Y}(x) = \frac{X 1_{\{X > x\}}}{1 - \kappa}$
- $Z(x) = 1_{\{X \leq x\}} - \kappa$

Théorème 2

Théorème 2 de Glynn et collab. (2020)

Si l'hypothèse 1 tiens à x^* pour \mathbb{Y} et Z et que \hat{X}_n satisfait l'équation 3, alors

$$\sqrt{n} \left(\bar{\mathbb{Y}}_n(\hat{X}_n) - \alpha \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} \mathcal{N}'_1 - \frac{\alpha'(x^*)}{\phi'(x^*)} \mathcal{N}'_2$$

Problème : estimer $\frac{\alpha'(x^*)}{\phi'(x^*)}$

Pour aller plus loin

À l'aide du théorème 2 de Glynn et collab. (2020) appliqué à la $CVaR_\kappa(X)$, on a :

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i 1_{\{X_i > \hat{X}_n\}}}{1 - \kappa} - E[X | X > x^*] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} \sigma \mathcal{N}(0, 1)$$

où

$$\sigma^2 = Var \left(\frac{(X - x^*) 1_{\{X > x^*\}}}{1 - \kappa} \right)$$

Problème : estimer σ^2

Difficulté

Comme pointé par Glynn et collab. (2020), les approches nécessitent l'estimation de $\alpha'(\mathbf{x}^*)$ ou $\sigma^2(\mathbf{x}^*)$.

Ces estimations restent non triviale puisque les estimateurs $\bar{Y}_n(.)$ et \hat{X}_n peuvent ne pas être continus.

Bien que ce ne soit pas couvert dans cette présentation, la méthode du rapport de vraisemblance généralisé peut permettre de gérer ces discontinuités (Peng et collab., 2018).

Difficulté

Comme pointé par Glynn et collab. (2020), les approches nécessitent l'estimation de $\alpha'(\mathbf{x}^*)$ ou $\sigma^2(\mathbf{x}^*)$.

Ces estimations restent non triviale puisque les estimateurs $\overline{Y}_n(.)$ et \hat{X}_n peuvent ne pas être continus.

Bien que ce ne soit pas couvert dans cette présentation, la méthode du rapport de vraisemblance généralisé peut permettre de gérer ces discontinuités (Peng et collab., 2018).

Difficulté

Comme pointé par Glynn et collab. (2020), les approches nécessitent l'estimation de $\alpha'(\mathbf{x}^*)$ ou $\sigma^2(\mathbf{x}^*)$.

Ces estimations restent non triviale puisque les estimateurs $\overline{Y}_n(.)$ et \hat{X}_n peuvent ne pas être continus.

Bien que ce ne soit pas couvert dans cette présentation, la méthode du rapport de vraisemblance généralisé peut permettre de gérer ces discontinuités (Peng et collab., 2018).

Approche alternative brute

Pour « éviter les complications d'implémentation associées à l'estimation de la variance » associée au théorème 2, Glynn et collab. (2020) proposent une approche basée sur le *Batching*.



L'idée est de **simuler plusieurs échantillons**, **estimer les quantités désirées** pour chaque échantillon et ensuite **estimer l'intervalle de confiance**.

Application du théorème 2 de Glynn et collab. (2020) I

Soit m échantillons simulés de n observations.

On définit les quantités suivantes :

- $\hat{X}_n^{(i)}$ est l'estimateur de x^* fait à partir de l'échantillon i , qui contient n observations
- $\bar{Y}_n^{(i)}(\hat{X}_n^{(i)})$ est l'estimateur de la quantité α fait à partir de l'échantillon i , qui contient n observations

Application du théorème 2 de Glynn et collab. (2020) II

Ensuite, on définit $\hat{\mu}_{m \cdot n}$, soit la moyenne des estimations de α de la manière suivante :

$$\hat{\mu}_{m \cdot n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{\mathbb{Y}}_n^{(i)}(\hat{X}_n^{(i)})$$

et

$$\hat{s}_{m \cdot n}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \left(\bar{\mathbb{Y}}_n^{(i)}(\hat{X}_n^{(i)}) - \hat{\mu}_{m \cdot n} \right)^2$$

Application du théorème 2 de Glynn et collab. (2020) III

À l'aide du théorème 2, on a que

$$\sqrt{m}(\hat{\mu}_{m \cdot n} - \alpha) / \hat{s}_{m \cdot n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} t_{m-1}$$

Avec ceci, on aura nos intervalles de confiance.

Procédure d'estimation

Procédure d'estimation (Glynn et collab., 2020)

- Pour chaque échantillon i allant de $1, \dots, m$
 - ▶ Simuler n réalisations de la variable X aléatoire d'intérêt.
 - ▶ Estimer la $VaR_\kappa(X)$ à l'aide du quantile empirique
 - ▶ Utiliser la $VaR_\kappa(X)$ pour estimer la $TVaR_\kappa(X)$ en faisant la moyenne des réalisations supérieures à l'estimation de la $VaR_\kappa(X)$
 - ▶ Retourner l'estimation de la $VaR_\kappa(X)$ et de la $TVaR_\kappa(X)$
- Estimer la moyenne empirique et l'écart-type échantillonnal pour les m $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ estimées.
- Utiliser la loi faible des grands nombres pour bâtir un intervalle de confiance sur un paramètre d'intérêt α

$$\sqrt{m} \frac{\hat{\mu}_n - \alpha}{\hat{S}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} t_{m-1}$$

Exemple mélange d'ergang

Exemple mélange d'ergang

Soit X une variable aléatoire tel que :

- $X \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}, \beta = 0.1)$
- $P(N = k) = \zeta_k$, où $N \sim \text{BinNeg}(r = 4, \mu = 5)$

On cherche à estimer $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ avec $\kappa = 0.99$ à l'aide d'un intervalle de confiance de niveau $\alpha = 0.95$.

Il faut faire $m = 100$ échantillons de $n = 10\,000$ observations pour l'estimation.

Code R : Intervalle de confiance

```
## Simulation des n réalisations, m fois
data_oli <- lapply(1:m, function(i){
  rgamma(n, rnbinom(n, size = 4, mu = 5), 0.1)
})

## Quantile empirique
VaR <- lapply(data_oli, function(dat){
  quantile(dat, kappa, type = 4)
})

## Moyenne au dessus de la VaR
TVaR <- lapply(1:length(data_oli), function(i){
  mean(data_oli[[i]][data_oli[[i]] > VaR[[i]]])
})
```

Code R : Simulation et estimation

```
mean_VaR <- mean(unlist(VaR))           # moy VaR
sd_VaR <- sd(unlist(VaR))                # sd VaR
mean_TVaR <- mean(unlist(TVaR))          # moy TVaR
sd_TVaR <- sd(unlist(TVaR))              # sd TVaR

## Intervalle de confiance sur la VaR et la TVaR
data.frame("VaR" = mean_VaR +
            sd_VaR / sqrt(length(data_list)) *
            qt(c(0.025, 0.5, 0.975),
                df = length(data_list) - 1),
            "TVaR" = mean_TVaR +
            sd_TVaR / sqrt(length(data_list)) *
            qt(c(0.025, 0.5, 0.975),
                df = length(data_list) - 1))
```

Résultats (tableau)

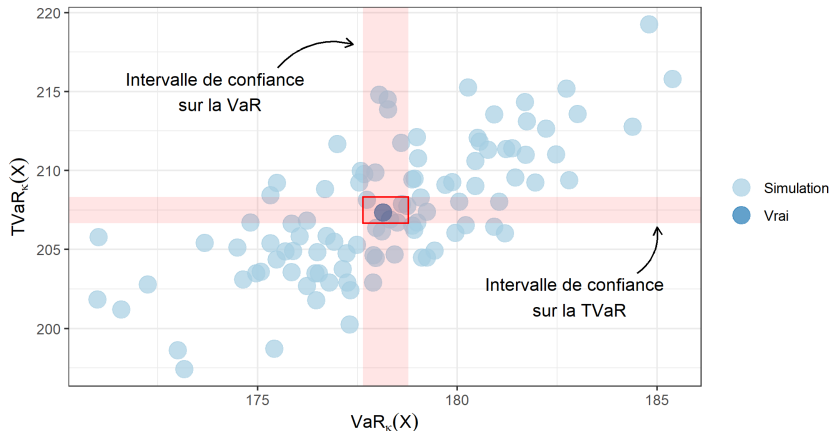
Table – Estimations pour l'exemple mélange d'ergang ($\alpha = 95\%$)

| | $Var_{0.99}(X)$ | $TVaR_{0.99}(X)$ |
|------------------|-----------------|------------------|
| Borne inférieure | 177.64 | 206.67 |
| Moyenne | 178.21 | 207.49 |
| Borne supérieure | 178.78 | 208.31 |
| Vraie valeur | 178.14 | 207.34 |

Résultats (graphique)

Estimations de $(\text{VaR}_\kappa(X), \text{TVaR}_\kappa(X))$ pour chaque échantillon

$X \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}, \beta = 0.1)$, $\zeta_k = P(N = k)$ où $N \sim \text{BinNeg}(r = 4, \mu = 5)$ et $\kappa = 0.99$



Pour les simulations : $\alpha = 0.95$, $n = 10000$ et $m = 100$

Exemple Loi normale

Exemple loi normale

Dans cet exemple, supposons que $X \sim N(0, 1)$. On cherche à estimer

$VaR_{\kappa}(X)$ et $TVaR_{\kappa}(X)$ avec $\kappa = 0.99$ à l'aide d'un intervalle de confiance de niveau $\alpha = 0.95$.

Il faut faire $m = 100$ échantillons de $n = 10\,000$ observations pour l'estimation.

Résultat (Tableau)

Table – Estimations pour l'exemple d'une loi $N(0, 1)$ ($\alpha = 95\%$)

| | $VaR_{0.99}(X)$ | $TVaR_{0.99}(X)$ |
|------------------|-----------------|------------------|
| Borne Inférieure | 2.326390 | 2.663779 |
| Moyenne | 2.332699 | 2.672631 |
| Borne supérieure | 2.339009 | 2.681483 |
| Vraie valeur | 2.326348 | 2.665214 |

Résultat (Graphique)

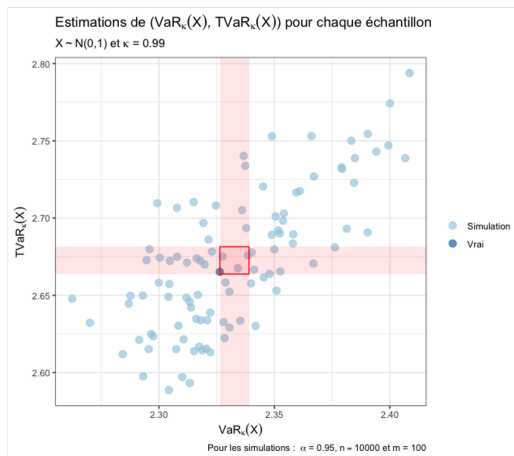


Figure – Simulation de l'exemple sur la loi normale

Exemple Loi exponentielle

Exemple loi exponentielle

Dans cet exemple, supposons que $X \sim \text{Exp}(1)$ On cherche à estimer

$VaR_{\kappa}(X)$ et $TVaR_{\kappa}(X)$ avec $\kappa = 0.99$ à l'aide d'un intervalle de confiance de niveau $\alpha = 0.95$.

Il faut faire $m = 100$ échantillons de $n = 10\,000$ observations pour l'estimation.

Code R : Intervalle de confiance

```
## simulation des m réalisations n fois
data_rostan <- lapply(1:m, function(i){
  rexp(n)
})

## Quantile empirique
VaR <- lapply(data_rostan, function(dat){
  quantile(dat, kappa, type = 4)
})

## Moyenne au dessus de la VaR
TVaR <- lapply(1:length(data_rostan), function(i){
  mean(data_rostan[[i]][data_rostan[[i]] > VaR[[i]]])
})
```

Résultat (Tableau)

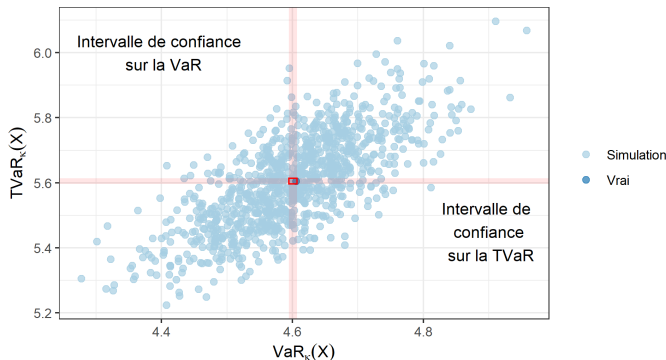
Table – Estimations pour l'exemple d'une loi $Exp(1)$ ($\alpha = 95\%$)

| | $VaR_{0.99}(X)$ | $TVaR_{0.99}(X)$ |
|------------------|-----------------|------------------|
| Borne Inférieure | 4.591423 | 5.589099 |
| Moyenne | 4.597791 | 5.598304 |
| Borne supérieure | 4.604159 | 5.607510 |
| Vraie valeur | 4.60517 | 5.60517 |

Résultat (Graphique)

Estimations de $(\text{VaR}_\kappa(X), \text{TVaR}_\kappa(X))$ pour chaque échantillon

$X \sim \text{Exp}(1)$ où $\kappa = 0.99$



Pour les simulations : $\alpha = 0.95$, $n = 10000$ et $m = 100$

Figure – Simulation de l'exemple sur la loi exponentielle

Procédure d'estimation 2 - I

On va poser : $v_\alpha = VaR_\alpha(X)$ et $c_\alpha = TVaR_\alpha(X)$

Estimation par la méthode de Monte Carlo (Hong et collab., 2014)

- Simuler n réalisations de la variable aléatoire X d'intérêt
- Ranger par ordre croissant pour obtenir $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$
- Estimations ponctuelles :

$$\hat{v}_\alpha^n = X_{[n\alpha]:n}$$

$$\hat{c}_\alpha^n = \hat{v}_\alpha^n + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n \max\{X_i - \hat{v}_\alpha^n, 0\}$$

où $[u] = (\text{partie entière de } u) + 1$ et $X_{i:n} = X_{(i)}$

Procédure d'estimation 2 - II

Intuition derrière ces formules :

■ Cas de v_α

La fonction de répartition empirique de X s'écrit

$$F_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq y\}}.$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\hat{v}_\alpha^n &= F_n^{-1}(\alpha) = \inf\{y \in \mathbb{R}, F_n(y) \geq \alpha\} \\ &= \inf\left\{y \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq y\}} \geq n\alpha\right\}\end{aligned}$$

Procédure d'estimation 2 - III

■ Cas de c_α

En utilisant la relation suivante (ACT-2001, Marceau) :

$$c_\alpha = v_\alpha + \frac{1}{1 - \alpha} E[(X - v_\alpha)_+]$$

On voit que d'un point de vue empirique, on a :

$$\hat{c}_\alpha^n = \hat{v}_\alpha^n + \frac{1}{n(1 - \alpha)} \sum_{i=1}^n \max\{X_i - \hat{v}_\alpha^n, 0\}$$

Procédure d'estimation 2 - IV

Comportement asymptotique :

Postulats : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = F$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_\alpha^n = v_\alpha$

■ Cas de v_α

Idée : Formule de Taylor pour une fonction différentiable :

$$f(x) = f(y) + f'(y)(x - y) + O_{1,n} \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} O_{1,n} = 0$$

D'après la formule de Taylor (utilisée dans Sun et Hong (2010)), on a :

$$F(v_\alpha^n) - F(v_\alpha) = f(v_\alpha)(v_\alpha^n - v_\alpha) + O_{1,n} \quad (4)$$

$$\text{Donc } v_\alpha^n = v_\alpha + \frac{F(v_\alpha^n) - F(v_\alpha)}{f(v_\alpha)} - \frac{O_{1,n}}{f(v_\alpha)} \quad (5)$$

$$\text{De même, } F_n(v_\alpha^n) - F_n(v_\alpha) = f(v_\alpha)(v_\alpha^n - v_\alpha) + O_{2,n} \quad (6)$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} O_{1,n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} O_{2,n} = 0$

Procédure d'estimation 2 - V

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_{1,n} - O_{2,n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v_\alpha) - F_n(v_\alpha^n) + F(v_\alpha^n) - F(v_\alpha)$$

$$\text{Posons } O_{3,n} = F_n(v_\alpha) - F_n(v_\alpha^n) + F(v_\alpha^n) - F(v_\alpha)$$

$$\text{Et } O_{4,n} = F_n(v_\alpha^n) - F(v_\alpha)$$

$$\text{On a bien } \lim_{n \rightarrow \infty} O_{3,n} = 0$$

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow \infty} O_{4,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v_\alpha^n) - F(v_\alpha) = F(v_\alpha) - F(v_\alpha) = 0$$

On voit que :

$$F(v_\alpha^n) - F(v_\alpha) = O_{3,n} + O_{4,n} + F(v_\alpha) - F_n(v_\alpha) \quad (7)$$

Procédure d'estimation 2 - VI

A partir de l'équation 7, l'équation ?? devient :

$$\begin{aligned}v_{\alpha}^n &= v_{\alpha} + \frac{F(v_{\alpha}) - F_n(v_{\alpha})}{f(v_{\alpha})} + \frac{O_{3,n} + O_{4,n} - O_{1,n}}{f(v_{\alpha})} \\&= v_{\alpha} + \frac{F(v_{\alpha}) - F_n(v_{\alpha})}{f(v_{\alpha})} + A_n \\&= v_{\alpha} + \frac{1}{f(v_{\alpha})} \left(\alpha - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq v_{\alpha}\}} \right) + A_n\end{aligned}\tag{8}$$

Avec ce dernier résultat, on a :

$$E[v_{\alpha}^n - v_{\alpha}] = \frac{1}{f(v_{\alpha})} \left(\alpha - \frac{1}{n} n \Pr\{X_i \leq v_{\alpha}\} \right) = \frac{1}{f(v_{\alpha})} (\alpha - \alpha) = 0$$

Procédure d'estimation 2 - VII

$$\text{Et } \text{Var}[v_\alpha^n - v_\alpha] = \frac{1}{f(v_\alpha)^2} \left(\frac{n\alpha(1-\alpha)}{n^2} \right) = \frac{1}{f(v_\alpha)^2} \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{n} \right)$$

$$\text{On a donc : } \sqrt{n} (v_\alpha^n - v_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{f(v_\alpha)} N(0, 1)$$

Intervalle de confiance de niveau $(1 - \beta)$ de v_α

$$IC(v_\alpha) = \hat{v}_\alpha^n \pm z_{\beta/2} \frac{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{\sqrt{n} f(v_\alpha)} \quad (9)$$

Procédure d'estimation 2 - VIII

■ Cas de c_α :

$$\begin{aligned}c_\alpha^n &= v_\alpha^n + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n (X_i - v_\alpha^n)_+ \\&= v_\alpha + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n (X_i - v_\alpha)_+ + (v_\alpha^n - v_\alpha) \\&\quad + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n ((X_i - v_\alpha^n)_+ - (X_i - v_\alpha)_+)\end{aligned}$$

Procédure d'estimation 2 - IX

Or

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((X_i - v_\alpha^n)_+ - (X_i - v_\alpha)_+) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((X_i - v_\alpha^n) 1_{X_i \geq v_\alpha^n} - (X_i - v_\alpha) 1_{X_i \geq v_\alpha}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_\alpha - v_\alpha^n) 1_{X_i \geq v_\alpha^n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - v_\alpha) (1_{X_i \geq v_\alpha^n} - 1_{X_i \geq v_\alpha}) \\ &= (v_\alpha - v_\alpha^n) (1 - F_n(v_\alpha^n)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - v_\alpha) (1_{X_i \geq v_\alpha^n} - 1_{X_i \geq v_\alpha}) \end{aligned}$$

→ 0 pour n suffisamment grand

Procédure d'estimation 2 - X

Donc

$$\begin{aligned}c_{\alpha}^n &= v_{\alpha} + \frac{1}{n(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n (X_i - v_{\alpha})_+ + B_n \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[v_{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} (X_i - v_{\alpha})_+ \right] + B_n \\&= c_{\alpha} + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[v_{\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} (X_i - v_{\alpha})_+ \right] - c_{\alpha} \right) + B_n\end{aligned}$$

Procédure d'estimation 2 - XI

Espérance et variance de $(c_\alpha^n - c_\alpha)$

$$E[c_\alpha^n - c_\alpha] = v_\alpha + \frac{1}{(1-\alpha)} E[(X_i - v_\alpha)_+] - c_\alpha = c_\alpha - c_\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[c_\alpha^n - c_\alpha] &= \frac{1}{n^2(1-\alpha)^2} n \text{Var}[(X_i - v_\alpha)_+] \\ &= \frac{1}{n(1-\alpha)^2} \text{Var}[(X_i - v_\alpha)_+] \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } \sqrt{n} (c_\alpha^n - c_\alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{D}} \frac{\sqrt{\text{Var}[(X_i - v_\alpha)_+]}}{1-\alpha} N(0, 1)$$

Procédure d'estimation 2 - XII

Intervalle de confiance de niveau $(1 - \beta)$ de c_α

$$IC(c_\alpha) = \hat{c}_\alpha^n \pm z_{\beta/2} \frac{\sqrt{\text{Var}[(X_i - v_\alpha)_+]}}{1 - \alpha} \quad (10)$$

Exemple avec la loi exponentielle ($\beta = 1$)

Soit $X \sim \text{Exp}(1)$. Posons $Y = (X_i - v_\alpha)_+$

- $v_\alpha = -\ln 1 - \alpha$
- $c_\alpha = v_\alpha + 1$
- $\text{Var}[(X_i - v_\alpha)_+] = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y^2) - (e^{-v_\alpha})^2$

Procédure d'estimation 2 - XIII

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{v_\alpha}^{\infty} (x - v_\alpha)^2 e^{-x} \\ &= \left[\left(-(x - v_\alpha)^2 - 2(x - v_\alpha) - 2 \right) e^{-x} \right]_{v_\alpha}^{\infty} \\ &= 0 + 2e^{-v_\alpha} \end{aligned}$$

$$Var[Y^2] = 2e^{-v_\alpha} - e^{-2v_\alpha}$$

Résultat Monte Carlo

Table – Estimations pour l'exemple d'une loi $Exp(1)$ ($\alpha = 95\%$)

| | $VaR_{0.99}(X)$ | $TVaR_{0.99}(X)$ |
|-----------------------|-----------------|------------------|
| Borne inférieure | 4.472687 | 4.625041 |
| Valeur estimée | 4.548864 | 5.517773 |
| Borne supérieure | 4.625041 | 5.625775 |
| Vraie valeur | 4.605170 | 5.605170 |

(Voir Code R)

Exemple

Deuxième exemple

On définit la variable aléatoire S ,

$$S = X_1 + X_2$$

où $X_1 \sim \text{Pareto}(\alpha = 2, \lambda = 100)$ et $X_2 \sim \text{Pareto}(\alpha = 3, \lambda = 200)$

Il n'est pas possible de déterminer analytiquement la loi de S , ni de calculer sa TVaR.

Cependant, il sera possible d'avoir une approximation grâce à la simulation Monte-Carlo.

Résultats

Table – Estimations pour l'exemple d'une somme de Pareto ($\alpha = 95\%$, $\kappa = 90\%$)

| | $\text{VaR}_{0.90}(S)$ | $\text{TVaR}_{0.90}(S)$ |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| Borne inférieure | 410.68 | 776.47 |
| Valeur estimée | 411.91 | 782.02 |
| Borne supérieure | 413.22 | 787.58 |

(Voir Code R)

Résultats

Table – Estimations pour l'exemple d'une somme de Pareto ($\alpha = 95\%$, $\kappa = 99\%$)

| | $\text{VaR}_{0.99}(S)$ | $\text{TVaR}_{0.99}(S)$ |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| Borne inférieure | 1222.76 | 2159.17 |
| Valeur estimée | 1233.65 | 2203.61 |
| Borne supérieure | 1244.27 | 2248.05 |

(Voir Code R)

Sous-additivité de la TVaR

- 1 Introduction
- 2 VaR
- 3 TVaR
- 4 Estimation
- 5 Sous-additivité de la TVaR**
- 6 Applications de la TVaR

Sous-additivité de la TVaR

La sous-additivité de la mesure de risque TVaR est bien connue dans le milieu académique. Toutefois, en faire la preuve est plus complexe que pour ses autres propriétés et souvent moins bien maîtrisé. Embrechts et Wang (2015) propose sept preuves de la sous-additivité de la TVaR, faisant appel à des concepts mathématiques variés, permettant ainsi de s'adapter selon les connaissances de son public. Nous nous attarderons aux sept preuves.

Preuve 1

Cette preuve emploie la comonotonicité de variables aléatoires Bernoulli.

On définit \mathcal{B}_p l'ensemble de toutes les variables aléatoires Bernoulli(p).

On définit $A_X = 1_{\{U_X \geq p\}}$ donc $A_X \in \mathcal{B}_p$.

Lemme 1001

$E[XA_X] \geq E[XB]$ où $B \in \mathcal{B}_p$

L'espérance la plus élevée est atteinte quand la variable aléatoire Bernoulli est comonotone.

Preuve :

$$\begin{aligned} E[XA_X] - E[XB] &= E[X(A_X - B)] \\ &= E[X(A_X - B)] + mE[A_X] - mE[B] \quad \text{même espérance} \\ &= E[(X - m)(A_X - B)] \end{aligned}$$

Preuve 1

Si on choisit $m = \text{VaR}_p(X)$, alors on remarque que la quantité $E[(X - m)(A_x - B)]$ est toujours positive.

| | $(X - \text{VaR}_p(X))$ | $(A_x - B)$ |
|--------------------------|-------------------------|----------------|
| si $X > \text{VaR}_p(X)$ | positif | positif ou nul |
| si $X < \text{VaR}_p(X)$ | négatif | négatif ou nul |
| si $X = \text{VaR}_p(X)$ | nul | positif ou nul |

On a donc $E[XA_x] - E[XB] \geq 0$ ce qui confirme le lemme 1001.

Preuve 1

Il est possible de représenter la TVaR différemment

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sup\{B \in \mathcal{B}_\kappa; E[XB]\}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\text{TVaR}_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 F_X^{-1}(u) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[F_X^{-1}(U_X) 1_{\{U_X \geq \kappa\}}] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[XA_X] \quad \text{Théo. fnct. quantile} \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sup\{B \in \mathcal{B}_\kappa; E[XB]\} \quad \text{Lemme 1001}\end{aligned}$$

Preuve 1

Il est possible de prouver la sous-additivité avec cette nouvelle représentation de la TVaR.

$$\begin{aligned}\text{TVaR}_\kappa(X + Y) &= \frac{1}{1 - \kappa} \sup\{B \in \mathcal{B}_\kappa; E[(X + Y)B]\} \\ &= \frac{1}{1 - \kappa} \sup\{B \in \mathcal{B}_\kappa; E[XB] + E[YB]\} \\ &\leq \frac{1}{1 - \kappa} (\sup\{B \in \mathcal{B}_\kappa; E[XB]\} + \sup\{B \in \mathcal{B}_\kappa; E[YB]\}) \\ &= \text{TVaR}_\kappa(X) + \text{TVaR}_\kappa(Y)\end{aligned}$$

Preuve 2

Cette preuve emploie la troisième représentation de la TVaR :

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}; t + \frac{\pi_X(t)}{1-\kappa} \right\}$$

Par cette représentation, il est possible de déterminer que

$$\text{TVaR}_\kappa(X) \leq t + \frac{\pi_X(t)}{1-\kappa} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Preuve 2

Partant de cette inégalité, on sait :

$$\begin{aligned}\text{TVaR}_\kappa(X + Y) &\leq t + \frac{\pi_{X+Y}(t)}{1 - \kappa} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &= t + \frac{\mathbb{E}[\max(X + Y - t; 0)]}{1 - \kappa}\end{aligned}$$

On choisit $t = \text{VaR}_\kappa(X) + \text{VaR}_\kappa(Y)$ et on continue :

$$= \text{VaR}_\kappa(X) + \text{VaR}_\kappa(Y) + \frac{\mathbb{E}[\max(X + Y - \text{VaR}_\kappa(X) + \text{VaR}_\kappa(Y)); 0]}{1 - \kappa}$$

Preuve 2

La fonction ReLU possède cette propriété : $(k_1 + k_2)_+ \leq (k_1)_+ + (k_2)_+$

$$\begin{aligned}
 &\leq \text{VaR}_\kappa(X) + \text{VaR}_\kappa(Y) + \frac{\mathbb{E}[\max(X - \text{VaR}_\kappa(X); 0) + \max(Y - \text{VaR}_\kappa(Y); 0)]}{1 - \kappa} \\
 &= \text{VaR}_\kappa(X) + \text{VaR}_\kappa(Y) + \frac{\pi_X(\text{VaR}_\kappa(X))}{1 - \kappa} + \frac{\pi_Y(\text{VaR}_\kappa(Y))}{1 - \kappa} \\
 &= \text{VaR}_\kappa(X) + \frac{\pi_X(\text{VaR}_\kappa(X))}{1 - \kappa} + \text{VaR}_\kappa(Y) + \frac{\pi_Y(\text{VaR}_\kappa(Y))}{1 - \kappa} \\
 &= \text{TVaR}_\kappa(X) + \text{TVaR}_\kappa(Y)
 \end{aligned}$$

Preuve 3

Cette preuve emploie la représentation de la TVaR suivante :

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \frac{\mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X > \text{VaR}_\kappa(X)\}}]}{1 - \kappa} + \frac{\text{VaR}_\kappa(X) (F_X(\text{VaR}_\kappa(X)) - \kappa)}{1 - \kappa}$$

Si on définit l'opérateur

$$1_{\{X \geq x\}}^{(p)} = \begin{cases} 1_{\{X > x\}} & \text{si } \Pr(X = x) = 0 \\ 1_{\{X > x\}} + \frac{F_X(x) - p}{P(X=x)} 1_{\{X=x\}} & \text{si } \Pr(X = x) > 0 \end{cases} \quad (\text{masse})$$

alors on peut réexprimer :

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \frac{\mathbb{E}[X \cdot 1_{\{X > \text{VaR}_\kappa(X)\}}^{(p)}]}{1 - \kappa}$$

Preuve 3

Pour que la TVaR soit sous-additive, on veut :

$$\text{TVaR}_p(X) + \text{TVaR}_p(Y) - \text{TVaR}_p(X + Y) \geq 0$$

Équivalamment :

$$(1 - p) (\text{TVaR}_p(X) + \text{TVaR}_p(Y) - \text{TVaR}_p(X + Y)) \geq 0$$

L'idée de la preuve est de développer l'expression de gauche et de vérifier si elle est toujours positive.

Preuve 3

On se lance :

$$\begin{aligned}
 & (1 - p) (\text{TVaR}_p(X) + \text{TVaR}_p(Y) - \text{TVaR}_p(X + Y)) \\
 &= E[X \cdot 1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)}] + E[Y \cdot 1_{\{Y > \text{VaR}_p(Y)\}}^{(p)}] - E[(X + Y) \cdot 1_{\{X + Y > \text{VaR}_p(X + Y)\}}^{(p)}] \\
 &= E[X \cdot (1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)} - 1_{\{X + Y > \text{VaR}_p(X + Y)\}}^{(p)})] + E[Y \cdot (1_{\{Y > \text{VaR}_p(Y)\}}^{(p)} - 1_{\{X + Y > \text{VaR}_p(X + Y)\}}^{(p)})]
 \end{aligned}$$

Aparthé

On sait que $E[1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)}] = 1 - p \quad \forall X$ car c'est comme cela qu'on a défini notre opérateur. Ainsi,

$$E[\text{VaR}_p(X) (1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)} - 1_{\{X + Y > \text{VaR}_p(X + Y)\}}^{(p)})] = 0$$

On peut donc soustraire cette quantité sans problème.

Preuve 3

$$\begin{aligned}
 &= E[X \cdot (1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)} - 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)})] - E[\text{VaR}_p(X) (1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)} - 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)})] \\
 &+ E[Y \cdot (1_{\{Y > \text{VaR}_p(Y)\}}^{(p)} - 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)})] - E[\text{VaR}_p(Y) (1_{\{Y > \text{VaR}_p(Y)\}}^{(p)} - 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)})] \\
 &= E[(X - \text{VaR}_p(X)) \cdot (1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)} - 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)})] \\
 &+ E[(Y - \text{VaR}_p(Y)) \cdot (1_{\{Y > \text{VaR}_p(Y)\}}^{(p)} - 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)})]
 \end{aligned}$$

On remarque que chacune de ces espérances est toujours positive. En effet, on sait que $0 \leq 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)} \leq 1$. (Voir prochaine diapositive)

Preuve 3

| | | |
|--------------------------|-------------------------|--|
| | $(X - \text{VaR}_p(X))$ | $\left(1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}}^{(p)} - 1_{\{X+Y > \text{VaR}_p(X+Y)\}}^{(p)}\right)$ |
| si $X > \text{VaR}_p(X)$ | positif | positif ou nul |
| si $X < \text{VaR}_p(X)$ | négatif | négatif ou nul |
| si $X = \text{VaR}_p(X)$ | nul | positif ou négatif |

Ce qui permet de conclure que

$$(1 - p) (\text{TVaR}_p(X) + \text{TVaR}_p(Y) - \text{TVaR}_p(X + Y)) \geq 0,$$

donc que la TVaR est sous-additive.

Preuve 4

Cette preuve emploie des techniques de discrétisation et la convergence en probabilité.

Idée de la preuve : On commence par faire la preuve pour un vecteur aléatoire n -discret, puis pour un couple de variables aléatoires chacune n -discrète. Puis on prouve que cela converge dans un cas continu.

Variable aléatoire n -discrète

Une variable aléatoire est n -discrète si elle prend au plus n valeurs, chacune avec des poids de $\frac{1}{n}$ ou un multiple.

Preuve 4

Vecteur aléatoire n -discret

Un vecteur aléatoire (X, Y) est n -discret s'il a au plus n vecteurs, chacun avec des poids de $\frac{1}{n}$ ou un multiple.

Exemple d'un vecteur aléatoire 4-discret :

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 0.25 & x = 3, \quad y = 4 \\ 0.5 & x = 3, \quad y = 5 \\ 0.25 & x = 7, \quad y = 6 \end{cases}$$

Autrement dit, on a une masse à $(3, 4)$, à $(3, 5)$, encore à $(3, 5)$ et à $(7, 6)$.

Note : Un vecteur n -discret est forcément composé de variables n -discrètes, mais l'inverse n'est pas forcément vrai.

Preuve 4

On remarque que si (X, Y) est n -discret et que q est un multiple de $\frac{1}{n}$, $\text{TVaR}_q(X + Y)$ est la moyenne des $n(1 - q)$ plus grandes valeurs avec des masses.

Preuve 4

Soit A , un ensemble de $n(1 - q)$ vecteurs ayant des masses. Et B , un ensemble de $n(1 - q)$ valeurs ayant des masses.

$$\begin{aligned}
 \text{TVaR}_q(X + Y) &= \frac{1}{n(1 - q)} \sup \left\{ A_{X+Y}; \sum_{i=1}^{n(1-q)} A_{X+Y,[i]} \right\} \\
 &= \frac{1}{n(1 - q)} \sup \left\{ A_{X+Y}; \sum_{i=1}^{n(1-q)} A_{X,[i]} + \sum_{i=1}^{n(1-q)} A_{Y,[i]} \right\} \\
 &\leq \frac{1}{n(1 - q)} \left(\sup \left\{ B_X; \sum_{i=1}^{n(1-q)} B_{X,[i]} \right\} + \sup \left\{ B_Y; \sum_{i=1}^{n(1-q)} B_{Y,[i]} \right\} \right) \\
 &= \text{TVaR}_q(X) + \text{TVaR}_q(Y)
 \end{aligned}$$

Preuve 4

Note : Si une variable aléatoire est n -discrète, il est possible de réexprimer tout $p \in \mathbb{Q}$ pour être un multiple de $\frac{1}{n}$ à l'aide de dénominateurs communs.

Exemple : X est 4-discrète et $q = \frac{1}{3}$, alors on peut le voir comme X est 12-discrète et $q = \frac{4}{12}$.

Note : La TVaR est une mesure de risque continue (sans bond). Donc puisque la TVaR est continue sur q , si $q \in \mathbb{Q}$, il faut simplement prendre un q rationnel très proche et on sait qu'on va tendre vers la bonne valeur.

Si $k \rightarrow \infty$ fait $q_k \rightarrow q$, alors $\text{TVaR}_{q_k}(X) \rightarrow \text{TVaR}_q(X)$.

On sait donc que la TVaR est sous-additive dans le cas de variables aléatoires n -discrète.

Preuve 4

Lemme 4001

Soit une variable aléatoire $X_k \rightarrow^p X$, alors

$$\text{VaR}_q(X_k) \rightarrow \text{VaR}_q(X) \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

(et par conséquent $\text{TVaR}_q(X_k) \rightarrow \text{TVaR}_q(X)$)

La preuve de ce lemme est très formelle, bien que le résultat ne semble pas étonnant.

Maintenant, on veut se débrouiller pour que cela fonctionne si X et Y sont chacune n -discrètes, sans que leur vecteur ne le soit forcément.

Preuve 4

Soit A_i l'ensemble contenant les probabilités du couple (x_i, y_i) , alors on peut trouver un ensemble B_i^k qui lui est souscrit où on ne prend que la partie k -discrète de l'ensemble. Autrement dit, on a forcément

$$\Pr(A_i) - \Pr(B_i^k) < \frac{1}{k}$$

donc si $k \rightarrow \infty$, alors $\Pr(B_i^k) = \Pr(A_i)$.

On définit

$$X_k = \sum_{i=1}^k X 1_{\{B_i^k\}} \quad \text{et} \quad Y_k = \sum_{i=1}^k Y 1_{\{B_i^k\}}$$

Puisque, si $k \rightarrow \infty$, $\Pr(B_i^k) = \Pr(A_i)$, alors on sait que $X_k \rightarrow^p X$ et $Y_k \rightarrow^p Y$ quand $k \rightarrow \infty$.

(X_k, Y_k) est un vecteur k -discret, donc :

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_q(X_k + Y_k) &\leq \text{TVaR}_q(X_k) + \text{TVaR}_q(Y_k) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \text{TVaR}_q(X_k + Y_k) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \text{TVaR}_q(X_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} \text{TVaR}_q(Y_k) \\ \text{TVaR}_q(X + Y) &\leq \text{TVaR}_q(X) + \text{TVaR}_q(Y) \quad \text{Lemme 4001} \end{aligned}$$

Donc on sait la TVaR sous-additive pour n'importe quel couple de variables aléatoires n -discrète peu importe leur dépendance entre-elles.

Preuve 4

Enfin, si on définit $U_X, U_Y \sim U(0, 1)$ et $V_{X,m} = \frac{\lfloor U_X 2^m \rfloor}{2^m}, V_{Y,m} = \frac{\lfloor U_Y 2^m \rfloor}{2^m}$.

On sait que $V_{X,m}$ et $V_{Y,m} \xrightarrow{d} U(0, 1)$ si $m \rightarrow \infty$.

On définit

$$X_m = F_X^{-1}(V_{X,m}) \quad \text{et} \quad Y_m = F_Y^{-1}(V_{Y,m})$$

Par le théorème de la fonction quantile et la convergence établie plus haut, on sait que $X_m \xrightarrow{p} X$ et que $Y_m \xrightarrow{p} Y$.

Or, X_m et Y_m sont chacune 2^m -discrètes, donc leur TVaR est sous-additive.

Par le lemme 4001, on sait donc que la TVaR est sous-additive pour X et Y , donc pour n'importe quelles variables aléatoires dont la fonction quantile existe.

Preuve 5

Cette preuve emploie l'estimation Monte-Carlo et la loi des grands nombres.

On sait (ACT-2001, Marceau) que l'estimateur de la TVaR à partir de réalisations est :

$$\widehat{\text{TVaR}}_{\kappa}^{(m)}(X) = \left(\frac{m - \lfloor \kappa m \rfloor}{m - \kappa m} \right) \left(\frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m X^{[j:m]} \right) + \left(1 - \frac{m - \lfloor \kappa m \rfloor}{m - \kappa m} \right) X^{[\lceil \kappa m \rceil : m]}$$

où m est le nombre de réalisations et $X^{[j:m]}$ le j ième élément d'un vecteur ordonné des réalisations.

On peut voir l'équation comme une combinaison convexe de la moyenne des éléments supérieurs à la VaR et de la VaR elle-même.

Preuve 5

On remarque :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m - \lfloor \kappa m \rfloor}{m - \kappa m} \right) = 1$$

Autrement dit, il ne reste que la part «moyenne».

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\text{TVaR}}_{\kappa}^{(m)}(X) = \left(\frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m X^{[j:m]} \right)$$

Preuve 5

On définit $Z = X + Y$.

On note :

$$\begin{aligned}\sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m Z^{[j:m]} &= \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m (X + Y)^{[j:m]} \\ &\leq \sum_{i=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m X^{[i:m]} + \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m Y^{[j:m]}\end{aligned}$$

Interprétation : les plus grandes réalisations de Z ne sont pas forcément composées des plus grandes réalisations respectives de X et de Y .
(Sommer puis ordonner) \leq (Ordonner puis sommer)

Preuve 5

Ainsi,

$$\frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m Z^{[j:m]} \leq \frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{i=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m X^{[i:m]} + \frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m Y^{[j:m]}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m Z^{[j:m]} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{i=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m X^{[i:m]} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m - \lfloor \kappa m \rfloor} \sum_{j=\lfloor \kappa m \rfloor + 1}^m Y^{[j:m]}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\text{TVaR}}_{\kappa}^{(m)}(Z) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\text{TVaR}}_{\kappa}^{(m)}(X) + \lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{\text{TVaR}}_{\kappa}^{(m)}(Y)$$

$$\text{TVaR}_{\kappa}(Z) \leq \text{TVaR}_{\kappa}(X) + \text{TVaR}_{\kappa}(Y) \quad \text{loi des grands nombres}$$

$$\text{TVaR}_{\kappa}(X + Y) \leq \text{TVaR}_{\kappa}(X) + \text{TVaR}_{\kappa}(Y)$$

Preuve 6

Cette preuve emploie l'ordre convexe et ses propriétés.

Rappel sur l'ordre convexe

Si $E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]$ pour toute fonction φ convexe, alors $X \preceq_{cx} Y$.

Notons que l'ordre convexe nécessite des espérances égales

$E[X] = E[Y]$.

Notons aussi que $\pi_X(d) \leq \pi_Y(d) \quad \forall d$, car la fonction stop-loss est convexe.

Preuve 6

Lemme 6001

Si $X \preceq_{cX} Y$ alors $\text{TVaR}_\kappa(X) \leq \text{TVaR}_\kappa(Y)$.

Preuve :

$$\begin{aligned}\text{TVaR}_\kappa(X) &= \inf \left\{ d \in \mathbb{R}, d + \frac{\pi_X(d)}{1 - \kappa} \right\} \\ &\leq d + \frac{\pi_X(d)}{1 - \kappa} \quad d \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

On choisit $d = \text{VaR}_\kappa(Y)$

$$\begin{aligned}&= \text{VaR}_\kappa(Y) + \frac{\pi_X(\text{VaR}_\kappa(Y))}{1 - \kappa} \\ &\leq \text{VaR}_\kappa(Y) + \frac{\pi_Y(\text{VaR}_\kappa(Y))}{1 - \kappa} \quad \text{car ordre convexe} \\ &= \text{TVaR}_\kappa(Y)\end{aligned}$$

Preuve 6

Lemme 6002

$$X + Y \preceq_{cx} X^c + Y^c$$

où X^c et Y^c sont des variables aléatoires respectivement identiquement distribuées à X et à Y , mais comonotones entre elles.

Preuve :

$$\begin{aligned}\pi_{X+Y}(d) &= \mathbb{E}[\max(X + Y - d; 0)] \\ &= \mathbb{E}[\max(X - d_1 + Y - d_2; 0)] \quad \text{avec } d = d_1 + d_2 \\ &\leq \mathbb{E}[\max(X - d_1; 0) + \max(Y - d_2; 0)] \quad \text{propriété fonction ReLU} \\ &= \mathbb{E}[\max(X - d_1; 0)] + \mathbb{E}[\max(Y - d_2; 0)] \\ &= \pi_{X^c + Y^c}(d)\end{aligned}$$

Preuve 6

La dernière égalité peut sembler suprenante.

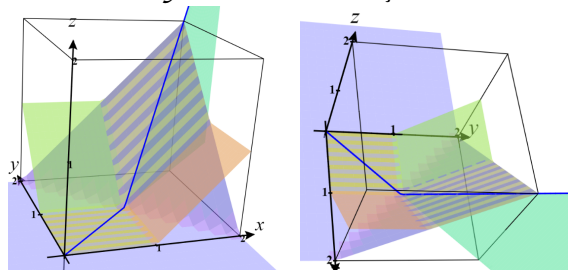
Elle est obtenue en appliquant le théorème 6 de Dhaene et collab. (2002) qui stipule que la somme de deux stop-loss peut être réécrite comme la stop-loss de la somme des variables comonotones correspondantes. (Illustré à la prochaine diapo)

Preuve 6

Illustration du théorème de Dhaene et collab. (2002) :

$(x + y - d)_+$ a une intersection avec $(x - d_1)_+ + (y - d_2)_+$.

En choisissant les bons d_1 et d_2 , on a l'intersection qui correspond au cas où x et y évoluent de façon comonotone.



Violet : $(x + y - d)_+$; Vert rougeâtre : $(x - d_1)_+ + (y - d_2)_+$;

Courbe bleue : intersection de comonotonicité

Preuve 6

Lemme 6003

$$\text{TVaR}_\kappa(X^c + Y^c) = \text{TVaR}_\kappa(X) + \text{TVaR}_\kappa(Y)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\text{TVaR}_\kappa(X^c + Y^c) &= \frac{1}{1 - \kappa} \int_\kappa^1 \text{VaR}_u(X + Y) du \\ &= \frac{1}{1 - \kappa} \int_\kappa^1 \text{VaR}_u(\varphi(U)) du \quad \text{où } U \sim U(0, 1), \quad \text{car comonotones} \\ &= \frac{1}{1 - \kappa} \int_\kappa^1 \varphi(\text{VaR}_u(U)) du \quad \text{car la somme de quantiles est une fonction croissante}\end{aligned}$$

Preuve 6

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 F_X^{-1}(\text{VaR}_u(U)) + F_Y^{-1}(\text{VaR}_u(U)) du \\
 &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 F_X^{-1}(\text{VaR}_u(U)) du + \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 \text{VaR}_u(F_X^{-1}(U)) du \\
 &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 \text{VaR}_u(F_X^{-1}(U)) du + \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 \text{VaR}_u(F_Y^{-1}(U)) du \\
 &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 \text{VaR}_u(X) du + \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 \text{VaR}_u(Y) du \quad \text{théo. fonction quantile} \\
 &= \text{TVaR}_{\kappa}(X) + \text{TVaR}_{\kappa}(Y)
 \end{aligned}$$

Preuve 6

Combinons les lemmes prouvés.

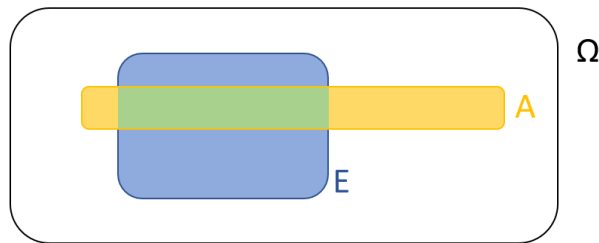
$$X + Y \preceq_{cX} X^c + Y^c \quad (\text{Lemme 6002})$$

donc

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_\kappa(X + Y) &\leq \text{TVaR}_\kappa(X^c + Y^c) \quad (\text{Lemme 6001}) \\ &= \text{TVaR}_\kappa(X) + \text{TVaR}_\kappa(Y) \quad (\text{Lemme 6003}) \end{aligned}$$

Preuve 7

Cette preuve emploie la théorie des mesures.



Soit μ , une mesure.

Soit ν , une mesure portée sur E .

Il est possible de décomposer la mesure $\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$ de telle sorte que $\mu_1 \ll \nu$ et que $\mu_2 \perp \nu$.

$\nu(A) \neq \mu_1(A)$ car ce sont des mesures différentes.

Preuve 7

Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue

$$\mu_1(A) = \int_A f d\nu$$

Il existe une fonction f qui permet de passer d'une mesure à l'autre.

Cette fonction s'appelle la dérivée de Radon-Nikodym, notée $\frac{d\mu_1}{d\nu}$.

Application :

$$\mathbb{E}^\nu \left[\frac{d\mu_1}{d\nu} X \right] = \mathbb{E}^{\mu_1} [X]$$

Preuve 7

On a deux mesures : Q et R .

φ est la dérivée de Radon-Nikodym $\frac{dR}{dQ}$.

On définit $\psi^0 = 1_{\{\varphi > c\}} + k1_{\{\varphi = c\}}$ avec k de telle sorte que $E^Q[\psi^0] = \alpha$.

On définit ψ , une v. aléa. quelconque définie sur $[0,1]$ dont $E^Q[\psi^0] \leq \alpha$.

Lemme 7001

$$E^R[\psi^0] \geq E^R[\psi]$$

Preuve :

On remarque que

$$(\psi^0 - \psi)(\varphi - c) \geq 0$$

Preuve 7

Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 &\leq E^Q[(\psi^0 - \psi)(\varphi - c)] \\ &= E^Q[\varphi(\psi^0 - \psi)] - cE^Q[\psi^0 - \psi] \\ &\leq E^Q[\varphi(\psi^0 - \psi)] \\ &= E^R[\psi^0 - \psi] \quad \text{car } \varphi \text{ est la dérivée de Radon-Nikodym} \\ &= E^R[\psi^0] - E^R[\psi] \end{aligned}$$

donc $E^R[\psi^0] \geq E^R[\psi]$.

Preuve 7

On peut représenter la TVaR d'une autre façon.

Représentation de la TVaR avec la théorie de la mesure

$$\text{TVaR}_\kappa(X) = \sup \{Q \in \mathcal{Q}; E^Q[X]\}$$

où Q est la mesure qui maximise parmi l'ensemble de toutes les mesures \mathcal{Q} avec dérivées de Radon-Nikodym $\frac{dQ}{dPr} \leq \frac{1}{1-\kappa}$.

Pour le prouver, on va partir de cette nouvelle représentation et essayer de retrouver une autre forme connue de la TVaR.

On va avoir besoin de définir la mesure R dont la dérivée de Radon-Nikodym est $\frac{dR}{dPr} = \frac{X}{E[X]}$.

Preuve 7

On se lance tout doucement.

$$\begin{aligned}
 \sup \{Q \in \mathcal{Q}; E^Q[X]\} &= \sup \left\{ Q \in \mathcal{Q}; E \left[\frac{dQ}{d\Pr} X \right] \right\} \\
 &= \sup \left\{ Q \in \mathcal{Q}; E \left[\frac{dQ}{d\Pr} \frac{X}{E[X]} E[X] \right] \right\} \\
 &= \sup \left\{ Q \in \mathcal{Q}; E[X] E \left[\frac{dQ}{d\Pr} \frac{dR}{d\Pr} \right] \right\} \\
 &= E[X] \sup \left\{ Q \in \mathcal{Q}; E^R \left[\frac{dQ}{d\Pr} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$= E[X] \sup \left\{ Z \in \mathcal{Z}; \quad E^R[Z]; \quad 0 \leq Z \leq \frac{1}{1-p}, \quad E[Z] = 1 \right\} \quad (11)$$

$$= \frac{E[X]}{1-p} \sup \{W \in \mathcal{W}; \quad E^R[W]; \quad 0 \leq W \leq 1, \quad E[W] \leq 1-p\} \quad (12)$$

Preuve 7

Des détails sur l'intuition de (3) et de (4) sont donnés en classe.

Par le lemme 7001, on sait que le supremum dans (4) est atteint à ψ^0 avec $\alpha = 1 - p$.

Son c est donné par :

$$\begin{aligned}c &= \inf \{x \in \mathbb{R}; E[1_{\{\varphi < x\}}] \geq p\} \\&= \inf \left\{ x \in \mathbb{R}; E \left[1_{\left\{ \frac{X}{E[X]} < x \right\}} \right] \geq p \right\} \\&= \inf \left\{ x \in \mathbb{R}; E \left[1_{\left\{ X < \frac{x}{E[X]} \right\}} \right] \geq p \right\} \\&= \inf \{x' \in \mathbb{R}; E[1_{\{X < x'\}}] \geq p\} \\&= \text{VaR}_p(X)\end{aligned}$$

Preuve 7

On peut continuer à partir de ce qu'on a obtenu. Nous avons donc que :

$$\begin{aligned}
 \text{préc.} &= \frac{\mathbb{E}[X]}{1-p} \mathbb{E}^R[\psi^0] \\
 &= \frac{\mathbb{E}[X]}{1-p} \mathbb{E}^R \left[1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}} + k 1_{\{X = \text{VaR}_p(X)\}} \right] \\
 &= \frac{\mathbb{E}[X]}{1-p} \mathbb{E}^R \left[1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}} + \frac{\Pr(X \leq \text{VaR}_p(X)) - p}{\Pr(X = \text{VaR}_p(X))} 1_{\{X = \text{VaR}_p(X)\}} \right] \\
 &= \frac{\mathbb{E}[X]}{1-p} \mathbb{E} \left[\frac{X}{\mathbb{E}[X]} \left(1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}} + \frac{\Pr(X \leq \text{VaR}_p(X)) - p}{\Pr(X = \text{VaR}_p(X))} 1_{\{X = \text{VaR}_p(X)\}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{1-p} \left(\mathbb{E} \left[X \cdot 1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}} \right] + \frac{\Pr(X \leq \text{VaR}_p(X)) - p}{\Pr(X = \text{VaR}_p(X))} \mathbb{E} \left[X \cdot 1_{\{X = \text{VaR}_p(X)\}} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{1-p} \left(\mathbb{E} \left[X \cdot 1_{\{X > \text{VaR}_p(X)\}} \right] + (\Pr(X \leq \text{VaR}_p(X)) - p) \text{VaR}_p(X) \right)
 \end{aligned}$$

Preuve 7

Maintenant qu'on sait que notre nouvelle représentation de la TVaR est valide, on peut l'employer pour prouver sa sous-additivité.

$$\begin{aligned}\text{TVaR}_\kappa(X + Y) &= \sup \{Q \in \mathcal{Q}; E^Q[X + Y]\} \\ &= \sup \{Q \in \mathcal{Q}; E^Q[X] + E^Q[Y]\} \\ &\leq \sup \{Q \in \mathcal{Q}; E^Q[X]\} + \sup \{Q \in \mathcal{Q}; E^Q[Y]\} \\ &= \text{TVaR}_\kappa(X) + \text{TVaR}_\kappa(Y)\end{aligned}$$

Applications de la TVaR

1 Introduction

2 VaR

3 TVaR

4 Estimation

5 Sous-additivité de la TVaR

6 Applications de la TVaR

- Science opérationnelle
- Agronomie
- Climat et rendements agricoles
- Énergies renouvelables et véhicules électriques

CVaR dans la science opérationnelle - I

Risk-averse multi-product selective newsvendor problem with different market entry scenarios under CVaR criterion

- [Abdel-Aal et Selim \(2017\)](#)

Domaine d'application :

Le problème de marchand de journaux (Newsvendor problem) est l'un des les problèmes classiques bien connus dans la littérature sur la gestion des inventaires.

CVaR dans la science opérationnelle - II

Contexte :

Le décideur du problème classique du marchand de journaux a décidé de la quantité de commande à approvisionner, afin de maximiser (minimiser) le profit (coût). La décision de l'approvisionnement doit être prise avant la réalisation de la demande. Sur demande, soit les stocks restants, soit la rupture de stock se produira à la fin de la période de vente. La décision du fabricant devrait envisager ces deux possibilités lors de la processus de prise de décision.

Exemple simple

Soit X la demande aléatoire à support non négatif et soit p, c, z la prix de vente unitaire, coût d'achat et valeur de récupération, respectivement. Nous supposons $p > c > z$.

Soit y la quantité commandée. Alors le profit aléatoire est donné par

$$\begin{aligned}g(y, X) &= p \min(x, y) - cy + z \max(y - x, 0) \\&= (p - c)y - (p - z)(y - X)^+\end{aligned}$$

Pour $Z = g(y, X)$, on a

$$\begin{aligned}CVaR_\alpha(Z) &= E(Z \mid Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)) \\&= E(Z \mid Z \leq VaR_\alpha(Z))\end{aligned}$$

La quantité de commande est dérivée qui maximise $CVaR_\alpha$

$$\max_y CVaR_\alpha(g(y, X))$$

voir [Jammerneegg et Kischka \(2012\)](#)

CVaR dans la science opérationnelle - III

Objectif et méthodologie :

- Dans un problème classique

Deux fonctions de pertes sont considérées : le profit et le coût.

L'objectif est de trouver la quantité de commande optimale afin de maximiser le CVaR.

- Dans l'article

Des extensions multiproduits sont étudiées dans l'article. Il ajoute aussi une décision de sélection supplémentaire parmi un ensemble de marchés potentiels. En plus, le décideur doit prendre une décision d'acheter un put contre le risque de faible demande.

CVaR dans la science opérationnelle - IV

Conclusion :

Des solutions de forme fermée sont dérivées pour la décisions d'ordonnancement et de couverture. Ils examinent également comment certains des paramètres, comme l'incertitude de la demande, affectent la valeur de l'option.

Barrage de Karkheh, Iran



Figure – Localisation du barrage Karkheh (Azarang et collab., 2016)

Rivière Karkheh, Iran



Figure – Localisation de Paypol (Azarang et collab., 2016)

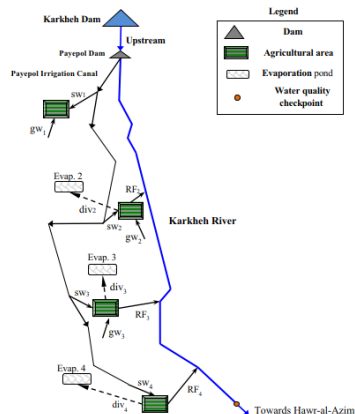


Figure – Schéma de la rivière Karkheh (Soltani et collab., 2018)

Faits divers sur la rivière Karkheh

Selon Soltani et collab. (2018) :

- La rivière Karkheh est la troisième plus grosse rivière en Iran.
- Elle est la source principale d'eau de surface pour beaucoup de résidents et de fermes locales.
- Elle se jette éventuellement dans la zone humide de Hawr-al-Azim, une importante source de biodiversité et de vie pour les locaux.

Problématique

Problèmes récents (Soltani et collab., 2018) :

- Sécheresse
- Rejets importants dans la rivière Karkheh, causant beaucoup de pollution

Ces éléments mènent à **revoir la planification et la gestion des courants** dans la rivière Karkheh.

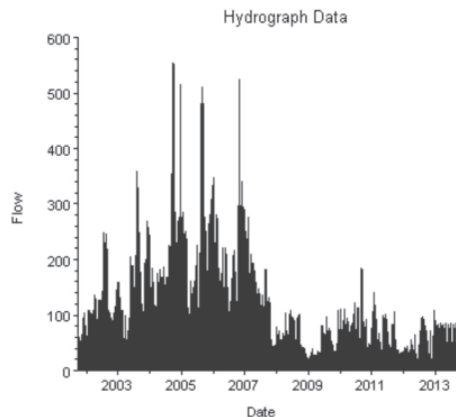


Figure – Écoulement à la station Paypol ($\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$) (Azarang et collab., 2016)

Problématique

Problèmes récents (Soltani et collab., 2018) :

- Sécheresse
- Rejets importants dans la rivière Karkheh, causant beaucoup de pollution

Ces éléments mènent à **revoir la planification et la gestion des courants** dans la rivière Karkheh.

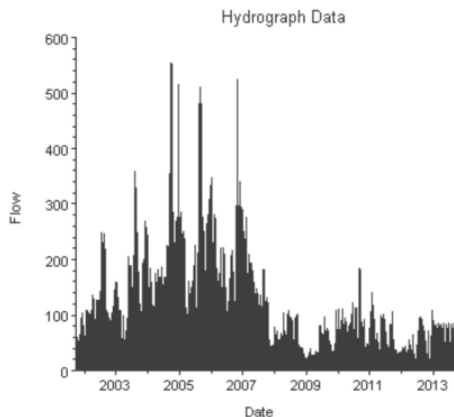


Figure – Écoulement à la station Paypol ($\frac{m^3}{s}$) (Azarang et collab., 2016)

Allocation des courants

Pour mieux gérer les courants, on a recours à une procédure d'optimisation non linéaire.

Caractéristiques du problème :

- 1 fonction objective à maximiser
- ≈ 27 contraintes (in)égalités
- ≈ 49 variables

Contrainte 1 :

$$\xi_{\beta} + \frac{1}{1 - \beta} \sum_s P_s [L_s - \xi_{\beta}]_+ \leq CVaR$$



Figure – Problème complexe (Soltani et collab., 2018)

Allocation des courants

Pour mieux gérer les courants, on a recours à une procédure d'optimisation non linéaire.

Caractéristiques du problème :

- 1 fonction objective à maximiser
- ≈ 27 contraintes (in)égalités
- ≈ 49 variables

Contrainte 1 :

$$\xi_{\beta} + \frac{1}{1 - \beta} \sum_s P_s [L_s - \xi_{\beta}]_+ \leq CVaR$$



Figure – Problème complexe (Soltani et collab., 2018)

Allocation des courants

Pour mieux gérer les courants, on a recours à une procédure d'optimisation non linéaire.

Caractéristiques du problème :

- 1 fonction objective à maximiser
- ≈ 27 contraintes (in)égalités
- ≈ 49 variables

Contrainte 1 :

$$\xi_{\beta} + \frac{1}{1 - \beta} \sum_s P_s [L_s - \xi_{\beta}]_+ \leq CVaR$$



Figure – Problème complexe (Soltani et collab., 2018)

Résultats

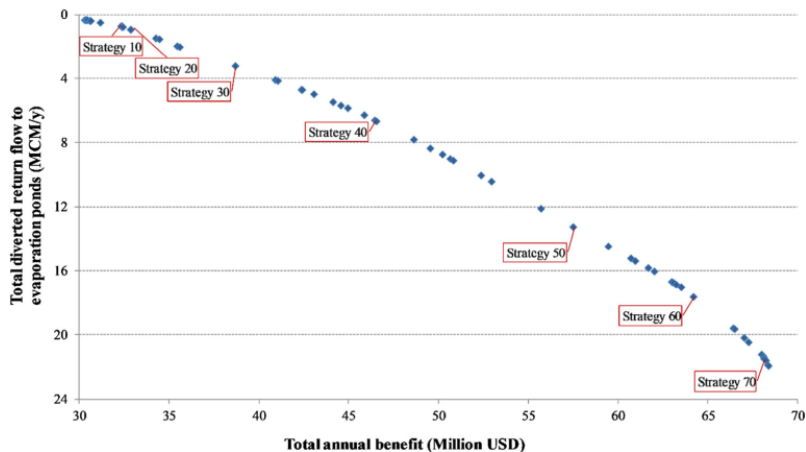


Figure – Stratégies possible avec la borne $CVaR = 10.5$ millions USD (Soltani et collab., 2018)

Sommaire de l'application en agronomie

- « Compared to expected value and scenario analysis approaches, CVaR has been shown to give more reasonable cost estimations and a better control on high-risk losses in water allocation problems » Soltani et collab. (2018)
- « CVaR constraint is utilized to limit the extreme probabilistic losses that are expected to occur, because of the existing uncertainties in volume of annually available surface water. » Soltani et collab. (2018)
- « For the first time in this model, conditional value at risk (CVaR) and the info-gap decision theory are integrated to better handle the different levels of uncertainty in parameters impacting water and waste load allocation » Soltani et collab. (2018)

Sommaire de l'application en agronomie

- « Compared to expected value and scenario analysis approaches, CVaR has been shown to give more reasonable cost estimations and a better control on high-risk losses in water allocation problems » Soltani et collab. (2018)
- « CVaR constraint is utilized to limit the extreme probabilistic losses that are expected to occur, because of the existing uncertainties in volume of annually available surface water. » Soltani et collab. (2018)
- « For the first time in this model, conditional value at risk (CVaR) and the info-gap decision theory are integrated to better handle the different levels of uncertainty in parameters impacting water and waste load allocation » Soltani et collab. (2018)

Sommaire de l'application en agronomie

- « Compared to expected value and scenario analysis approaches, CVaR has been shown to give more reasonable cost estimations and a better control on high-risk losses in water allocation problems » Soltani et collab. (2018)
- « CVaR constraint is utilized to limit the extreme probabilistic losses that are expected to occur, because of the existing uncertainties in volume of annually available surface water. » Soltani et collab. (2018)
- « For the first time in this model, conditional value at risk (CVaR) and the info-gap decision theory are integrated to better handle the different levels of uncertainty in parameters impacting water and waste load allocation » Soltani et collab. (2018)

Kath et collab. (2018) - I

■ Contexte

- ▶ Les pertes en rendement de cultures sont généralement dues aux conditions climatiques extrêmes (l'une des principales causes à l'échelle mondiale)
- ▶ Ces pertes peuvent compromettre la durabilité financière de la production agricole
- ▶ Les produits d'assurance disponibles qui offrent une couverture complète de toutes les pertes sont très coûteuses
- ▶ La diminution des rendements agricoles pourrait devenir plus fréquent sous l'effet des changements climatiques

Kath et collab. (2018) - II

Objectif : Étudier la faisabilité d'un indice de précipitations excessives pour assurer la production agricole.

En d'autres termes, vérifier si l'assurance de l'indice des précipitations excessives est bénéfique pour les producteurs.

- production choisie : canne à sucre
 - ▶ Largement cultivée dans le monde
 - ▶ sensible aux événements climatiques extrêmes (sécheresse et précipitations excessives)
- Données utilisées : Ensemble de données sur le rendement et le climat à long terme (80 ans) en Australie

Kath et collab. (2018) - III

Méthodologies utilisées : (Kath et collab., 2018)

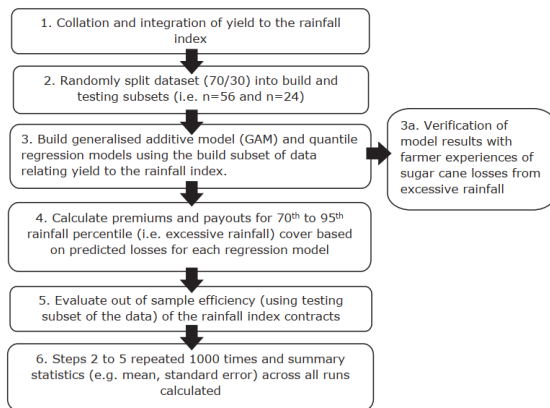


Fig. 2. Schematic of the analysis framework for assessing the efficiency of climate index insurance for sugar cane producer insurance.

Kath et collab. (2018) - IV

Définition et utilité de la mesure TVaR :

■ Définition de la mesure TVaR :

$$TVaR_{\alpha} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{t,\alpha}$$

$R_{t,\alpha}$ = (Paielements - Primes) est le chiffre d'affaire au temps t avec un percentile de niveau α de l'indice des précipitations excessives (obtenus à l'aide des modèles de régression)

Kath et collab. (2018) - V

■ Utilité de la mesure TVaR :

- ▶ Évaluer l'efficacité de l'indice des précipitations extrêmes à des niveaux de risques différents
- ▶ Si le contrat d'assurance est efficace, les revenus de l'agriculteur devraient augmenter durant les années difficiles (les années où des précipitations excessives sont connues)
- ▶ Si le paiement est égal à la prime chaque année, l'agriculteur sera indifférent

Kath et collab. (2018) - VI

■ Résultats obtenus

- ▶ il pourrait y avoir des avantages financiers pour les producteurs de canne à sucre s'ils utilisent une assurance indice des précipitations excessives
- ▶ Globalement, sur les années difficiles, l'assurance pourrait augmenter les revenus des agriculteurs de 269,85 \$ CAD / ha
- ▶ ce type d'assurance peut également être viable pour les producteurs d'autres cultures dans les régions du monde où les précipitations extrêmes posent un risque pour la durabilité financière de la production

Énergies renouvelables et véhicules électriques

Mise en contexte

Principalement pour des raisons écologiques, les énergies renouvelables sont de plus en plus répandues et employées. Cependant, des sources d'énergie comme le solaire ou l'éolien ont des rendements très fluctuants, dépendant beaucoup des conditions météorologiques.



Figure – Énergies renouvelables - Licence Creative Commons

Énergies renouvelables et véhicules électriques

Pour contrer ce problème, il est de plus en plus commun d'employer la génération distribuée pour contrôler la source d'énergie. En bref, l'énergie produite par la source est emmagasinée dans une réserve énergétique qui lui est propre. L'énergie qui sort de la réserve est contrôlée par ordinateur.

En effet, toutes ces réserves énergétiques sont également reliées entre elles par le réseau principal. Par contre, les kilomètres de fils électriques entraînent une impédance non négligeable pour l'énergie qui circule dans le réseau principal. On veut donc limiter l'énergie qui circule dans le réseau principal.

Par contre, pour des raisons de sécurité, on ne veut pas créer une trop grande différence de potentiel dans la réserve énergétique. On ne peut donc pas non plus tout laisser en réserve.

Énergies renouvelables et véhicules électriques

Introduisons les voitures électriques. Encore une fois dans un contexte écologique, les voitures électriques se font de plus en plus populaires. Elle représentent toutefois un gros poids énergétique pour le système. On présume que la demande énergétique des voitures électriques se comporte de façon aléatoire, selon les grés des usagers. Les voitures électriques se branchent directement sur les générateurs distribués.

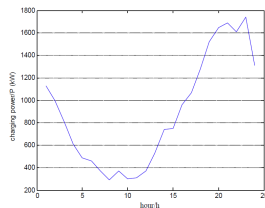


Fig. 5. Curve of the charging power of an EV in a day.

Figure – Demande énergétique des véhicules électriques pour une journée - Wu et collab. (2018)

Énergies renouvelables et véhicules électriques

S'il n'y a pas assez d'énergie dans une réserve en particulier, le réseau principal peut en fournir, mais cela entraîne des pertes énergétiques.

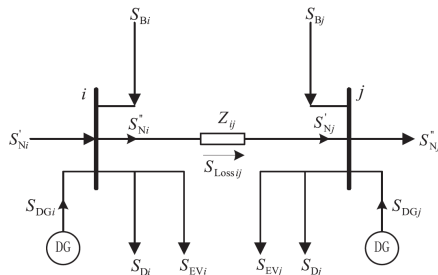


Figure – Schéma d'une génération distribuée - Wu et collab. (2018)

Énergies renouvelables et véhicules électriques

Les auteurs de Wu et collab. (2018) définissent une fonction de perte (soit $L(p, X)$) prenant tant en compte l'impédance que la perte énergétique si on alimente depuis le réseau principal.

p : l'énergie injectée dans le réseau.

X : l'énergie qui a due être donnée aux EV.

On veut réduire les pertes énergétiques, qui peuvent se produire tant dans le réseau (en bleu) que par un handicap de sécurité dans les réserve (en rouge).

$$\inf \{ \beta; \beta(1 - \alpha) + E[(L(p, X) - \beta)_+] \}$$

On reconnaît la TVaR. L'argument β représente l'énergie injectée dans le réseau. Ainsi, la VaR représenterait la quantité optimale d'énergie à injecter dans le réseau, pour minimiser les pertes énergétiques (tant vraies (impédance) qu'imaginaires (sécurité)), représentées par la TVaR.

Les ordinateurs des réserves énergétiques calculent donc des VaR et des TVaR pour minimiser les pertes d'énergie.

Bibliographie I

- Abdel-Aal, M. A. et S. Z. Selim. 2017, «Risk-averse multi-product selective newsvendor problem with different market entry scenarios under cvar criterion», *Computers Industrial Engineering*, vol. 103, p. 250-261, ISSN 0360-8352.
- Azarang, F., A. R. Telvari, H. Sedghi et M. S. Bajestan. 2016, «Application of hec-ras model for evaluating erosion and sedimentation of karkheh river», *Ecology, Environment and Conservation*, vol. 21, n° 4, p. 49-60.
- Denuit, M. e. a. 2005, *Measuring Risk*, chap. 2, John Wiley Sons, Ltd, ISBN 9780470016459, p. 59-102,
doi :<https://doi.org/10.1002/0470016450.ch2>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/0470016450.ch2>.

Bibliographie II

Dhaene, J., M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas et D. Vyncke. 2002, «The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : theory», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 31, n° 1, p. 3-33.

Embrechts, P. et R. Wang. 2015, «Seven proofs for the subadditivity of expected shortfall», *Dependence Modeling*, vol. 3, n° 1.

Glynn, P. W., L. Fan, M. C. Fu, J.-Q. Hu et Y. Peng. 2020, «Central limit theorems for estimated functions at estimated points», *Operations Research*, vol. 68, n° 5, p. 1557-1563.

Hong, L. J., Z. Hu et G. Liu. 2014, «Monte carlo methods for value-at-risk and conditional value-at-risk : a review», *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, vol. 24, n° 4, p. 1-37.

Bibliographie III

- Jammernegg, W. et P. Kischka. 2012, «Newsvendor Problems with VaR and CVaR Consideration», dans *Handbook of Newsvendor Problems*, édité par T.-M. Choi, chap. 0, International Series in Operations Research & Management Science, Springer, p. 197-216, doi :10.1007/978-1-4614-3600-3. URL https://ideas.repec.org/h/spr/isochp/978-1-4614-3600-3_8.html.
- Kath, J., S. Mushtaq, R. Henry, A. Adeyinka et R. Stone. 2018, «Index insurance benefits agricultural producers exposed to excessive rainfall risk», *Weather and climate extremes*, vol. 22, p. 1-9.
- Markowitz, H. 1952, «Portfolio selection», *The Journal of Finance*, vol. 7, n° 1, doi :10.2307/2975974, p. 77-91. URL <https://www.jstor.org/stable/2975974>.

Bibliographie IV

Peng, Y., M. C. Fu, J.-Q. Hu et B. Heidegott. 2018, «A new unbiased stochastic derivative estimator for discontinuous sample performances with structural parameters», *Operations Research*, vol. 66, n° 2, p. 487-499.

Rockafellar, R. T. et S. Uryasev. 2000, «Optimization of conditional value-at-risk», *Journal of Risk*, vol. 2, p. 21-41.

Soltani, M., R. Kerachian, M. R. Nikoo et H. Noory. 2018, «Planning for agricultural return flow allocation : application of info-gap decision theory and a nonlinear cvar-based optimization model», *Environmental Science and Pollution Research*, vol. 25, n° 25, p. 25 115-25 129.

Bibliographie V

- Sun, L. et L. J. Hong. 2010, «Asymptotic representations for importance-sampling estimators of value-at-risk and conditional value-at-risk», *Operations Research Letters*, vol. 38, n° 4, p. 246–251.
- Wu, J., Z. Wu, F. Wu, H. Tang et X. Mao. 2018, «Cvar risk-based optimization framework for renewable energy management in distribution systems with dgs and evs», *Energy*, vol. 143, p. 323–336.