Modèles de ruine en temps discret : Stratégie optimale de réassurance dans un modèle avec chocs communs

Benjamin Côté

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

12 janvier 2023

UNIVERSITÉ LAVAL

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

Présentation du modèle

Risques

On définit une quantité de risques (k) pouvant engendrer des réclamations.

On pourrait voir, par exemple, les risques suivants :

Risques (k)
Incendie
Accident
Dégât d'eau
Cambriolage

$N^{(k)}(t)$: Nombre de sinistres étant survenus de $(0, t]$ dûs au risque k.

$N^{(k)}(t)$ est un processus de Poisson homogène. Ainsi,

$$N^{(k)}(t) \sim Poisson(\eta_k t)$$

Classes

Ajoutons que chaque sinistre peut entraîner des réclamations de différentes classes (i). On a donc, par exemple :

Risques (k)	Classes (i)
Incendie	Auto
Accident	Habitation
Dégât d'eau	Vie
Cambriolage	

α_{ik} : probabilité que le risque k se concrétise en une réclamation pour i.
$N_i(t)$: Nombre de réclamations étant enregistrées de $(0, t]$ dues à la classe i.

Classes

$$N_i(t) = \sum_k \alpha_{ik} \circ N^{(k)}(t)$$

$\alpha_{ik} \circ N^{(k)}(t)$ est une procédure d'amincissement. Pour chaque sinistre étant survenu, une loi Bernoulli d'espérance α_{ik} détermine s'il y a eu sinistre ou non. Résultat : le nombre de sinistre de classe est toujours entier malgré qu'α_{ik} ne le soit pas. Il en résulte que :

$$N_i(t) \sim Poisson\left(\lambda_i = \sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)$$

La preuve se fait en employant les fgm.

Réclamations

$X_j^{(i)}$: Sévérité du $j$ième sinistre de la classe i.

On suppose tous les $X_j^{(i)}$ indépendantes et qu'elles sont identiquement distribuées dans une même classe.

Portefeuille d'une classe :

$$S_i(t) = X_1^{(i)} + ... + X_{N_i(t)}^{(i)}$$

Portefeuille complet :

$$S(t) = \sum_i S_i(t)$$

Primes

P_i : taux de primes récolté par unité de temps pour la classe i.

$$P_i = (1 + \theta_i)(\lambda_i)(E[X^{(i)}])$$

Où θ est choisi par l'assureur. $\theta > 0$
Les primes totales sont

$$P = \sum_i Pi$$

Il en résulte que le surplus de l'assureur (sans réassurance) au temps t peut être décrit par :

$$U(t) = u + Pt - S(t)$$

avec u étant le surplus initial.

Réassurance

L'assureur a deux moyens de transférer le risque à l'assureur.

- M_i : limite
- a_i : taux de partage

Le but de Hu et Zhang (2016) est de trouver quels sont les M_i et les a_i optimaux du point de vue de l'assureur pour réduire le plus possible son risque de ruine.

UNIVERSITÉ LAVAL

Réassurance

$\tilde{X}^{(i)}$: montant payé par l'assureur pour un sinistre de la classe i.

$$\tilde{X}^{(i)} = min(a_i X^{(i)}, M_i)$$

$\hat{X}^{(i)}$: montant payé par le réassureur pour un sinistre de la classe i.

$$\hat{X}^{(i)} = max((1 - a_i)X^{(i)}, X^{(i)} - M_i)$$

Notons : $X^{(i)} = \tilde{X}^{(i)} + \hat{X}^{(i)}$

Réassurance - Espérance de $\hat{X}_{(i)}$

$$
\begin{aligned}
E[\hat{X}^{(i)}] &= E\left[max\left((1-a_i)X^{(i)}; X^{(i)} - M_i\right)\right] \\
&= \int_0^{\frac{M_i}{a_i}} (1-a_i)x f_{X^{(i)}}(x)dx + \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{\infty} (x - M_i) f_{X^{(i)}}(x)dx \\
&= \int_0^{\infty} (1-a_i)x f_{X^{(i)}}(x)dx - \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{\infty} (1-a_i)x f_{X^{(i)}}(x)dx + \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{\infty} (x - M_i) f_{X^{(}} \\
&= (1-a_i)\int_0^{\infty} x f_{X^{(i)}}(x)dx + \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{\infty} (-x + a_i x + x - M_i) f_{X^{(i)}}(x)dx \\
&= (1-a_i)E[X^{(i)}] + \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{\infty} (a_i x - M_i) f_{X^{(i)}}(x)dx
\end{aligned}
$$

UNIVERSITÉ LAVAL

Réassurance - Prime

$\tilde{P}_i$: portion de la prime restant à l'assureur.

$$\tilde{P}_i = P_i - \hat{P}_i$$

$\hat{P}_i$: portion de la prime payée au réassureur.

$$\hat{P}_i = (1 + \hat{\theta}_i)E[\hat{X}_i]\lambda_i$$

Il faut que $\theta_i < \hat{\theta}_i$ pour que la réassurance soit cohérente.

UNIVERSITÉ LAVAL

Réassurance - Surplus et Profit

Avec la réassurance, le surplus de l'assureur au temps t devient :

$$U(t) = u + \tilde{P}t - \tilde{S}(t)$$

$Y_i(t)$: le profit net de l'assureur par unité de temps pour la classe i.

$$Y_i(t) = \tilde{P}_i - \frac{\tilde{S}_i(t)}{t}$$

Puisque $\tilde{S}_i(t)$ est Poisson composée, on a

$$E[Y_i(t)] = \tilde{P}_i - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}]$$

Dans un contexte de ruine, il importe que cette quantité soit positive. Autrement, on aurait ruine certaine.

Propriétés du modèle

Covariance entre les classes

On étudie la relation de dépendance entre le nombre de réclamations de deux classes distinctes.

$$
\begin{aligned}
Cov\left(N_i(t); N_j(t)\right) &= Cov\left(\sum_k \alpha_{ik} \circ N^{(k)}(t); \sum_l \alpha_{jl} \circ N^{(l)}(t)\right) \\
&= \sum_k \sum_l Cov\left(\alpha_{ik} \circ N^{(k)}(t); \alpha_{jl} \circ N^{(l)}(t)\right)
\end{aligned}
$$

nul si $l \neq k$ car les risques sont indép. donc si $l = k$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_k E[Cov\left(\alpha_{ik} \circ N^{(k)}(t) | N^{(k)}(t); \alpha_{jk} \circ N^{(k)}(t) | N^{(k)}(t)\right)] \\
&+ Cov\left(E[\alpha_{ik} \circ N^{(k)}(t) | N^{(k)}(t)]; E[\alpha_{jk} \circ N^{(k)}(t) | N^{(k)}(t)]\right)
\end{aligned}
$$

Covariance entre les classes

$$= \sum_k Cov(\alpha_{ik} N^{(k)}(t); \alpha_{jk} N^{(k)}(t))$$

$$= \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} Var(N^{(k)}(t))$$

$$= \sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk} \eta_k t$$

Covariance entre les classes

Par conséquent, le coefficient de corrélation de Pearson est :

$$\begin{aligned}\rho(N_i(t); N_j(t)) &= \frac{Cov(N_i(t); N_j(t))}{\sqrt{Var(N_i(t))Var(N_j(t))}} \\ &= \frac{\sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk}\eta_k t}{\sqrt{\lambda_i t \lambda_j t}} \\ &= \frac{\sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk}\eta_k}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}\end{aligned}$$

Proposition 1

Proposition 1

La fonction génératrice des moments de S(t) est :

$$M_{S(t)}(r) = e^{t\sum_k \eta_k \left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{X(i)}(r) + (1-\alpha_{ik})\right) - 1)}$$

UNIVERSITÉ LAVAL

Proposition 1 - Preuve

On sait que $S(t)$ se comporte comme une somme composée. Par contre, on va plutôt regarder selon le risque et ensuite décomposer les réclamations chaque classes. Il en résulte que :

$$
\begin{aligned}
M_{S(t)}(r) &= \prod_k \mathcal{P}_{N(k)}\left(\prod_i \mathcal{P}_{Bern}(M_{X^{(i)}}(r))\right) \\
&= \prod_k \mathcal{P}_{N(k)}\left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{X^{(i)}}(r) + 1 - \alpha_{ik})\right) \\
&= \prod_k e^{\eta_k t\left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{X^{(i)}}(r) + 1 - \alpha_{ik})\right)} \\
&= e^{t \sum_k \eta_k \left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{X^{(i)}}(r) + (1 - \alpha_{ik})\right) - 1)}
\end{aligned}
$$

Proposition 2

Proposition 2

La fonction génératrice des moments de S(t) est :

$$M_{\tilde{S}(t)}(r) = e^{t\sum_k \eta_k \left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{\tilde{X}^{(i)}}(r) + (1-\alpha_{ik})\right) - 1)}$$

Par simplicité, on définit

$$g(r) = \sum_k \eta_k \left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{\tilde{X}^{(i)}}(r) + (1-\alpha_{ik})\right) - 1)$$

Ainsi, la proposition 2 devient

$$M_{\tilde{S}(t)}(r) = e^{tg(r)}$$

Preuve identique à la proposition 1, mais avec $M_{\tilde{X}^{(i)}}(r)$.

Probabilité de ruine

Temps de ruine et probabilité de ruine

On définit le temps de ruine T de la façon usuelle, c'est à dire le plus petit t tel que $U(t) < 0$.

Dans cette optique, il est possible de définir la probabilité de ruine $\psi(u)$,

$$\psi(u) = P(T < \infty)$$

$\psi(u)$ est une fonction de u, car il dépend du niveau de réserve initial (c'est-à-dire de combien il est acceptable que le processus descende).

Borne de Lundberg

Borne de Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-uR}$$

où R est le coefficient d'ajustement (définition plus loin).

La preuve peut se faire par induction sur le nombre de périodes écoulées. En faisant tendre celui-ci vers l'infini, on obtient $\psi(u)$.

Coefficient d'ajustement de Lundberg

Définition : Le coefficient d'ajustement de Lundberg est le $r > 0$ permettant de satisfaire l'équation :

$$E[e^{r(coûts-revenus)}] = 1$$

Coefficient d'ajustement

Avec le modèle décrit par Hu et Zhang (2016), le coefficient d'ajustement R est le $r > 0$ résolvant

$$g(r) - r\tilde{P} = 0$$

Coefficient d'ajustement de Lundberg

Preuve.

$$
\begin{aligned}
E[e^{r(coûts - revenus)}] &= 1 \\
E[e^{r(\tilde{S}(1)-\tilde{P})}] &= 1 \\
e^{-r\tilde{P}} E[e^{r\tilde{S}(1)}] &= 1 \\
e^{-r\tilde{P}} e^{g(r)} &= 1 \\
g(r) - rP &= 0
\end{aligned}
$$

Condition d'existence de R

Pour que le coefficient d'ajustement de Lundberg existe, il faut que $\tilde{P}$ soit plus élevée que l'espérance des coûts. Autrement dit, il faut que $E[Y_i] > 0 \quad \forall i$.

UNIVERSITÉ LAVAL

Borne de Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-uR}$$

Le but de Hu et Zhang (2016) est de maximiser le coefficient d'ajustement R, de telle sorte que la borne de Lundberg soit la plus petite possible. On cherche donc quels M_i et a_i maximisent R.

Stratégies de réassurance possibles

Lemme 1

Le coefficient d'ajustement est positif si et seulement si a_i et M_i respectent ces conditions :

- $0 < a_i < 1$
- $M_i > 0$
- $E[Y_i] > 0$, autrement dit $\tilde{P}_i - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}] > 0$

Alors que ces deux premières conditions tiennent pour respecter le concept de réassurance, la troisième conditions reflète la condition que l'espérance de profit doit être absolument positive. Si c'est le cas, alors la solution de l'équation de Lundberg existe forcément et est positive.

La preuve a été faite en classe. Elle emploie les dérivées premières et deuxièmes de $E[e^{r(coûts-revenus)}]$.

Lemme 2

Les conditions énoncées précédemment sont équivalentes aux suivantes :

- $a_i^{'} < a_i < 1$
- $M_i > \Phi(a_i)$
- $\tilde{P}_i - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}] > 0$

Autrement dit, la part retirée des deux premières conditions entraient en concurrence avec la troisième. Il peut être interprété que l'assureur doit supporter une certaine part du risque au minimum, autrement il se ruinerait avec certitude.

Lemme 2 - Preuve

On étudie d'abord les cas limites de M_i.

Si $M = 0$, alors tout est payé par le réassureur. Donc,

$$\begin{aligned} E[Y_i] &= \tilde{P}_i - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}] \\ &= \tilde{P}_i \\ &= (\lambda_i)((1+\theta)E[X^{(i)}] - (\hat{\theta}-\theta)E[\hat{X}^{(i)}] \\ &= -(\lambda_i)((\hat{\theta}-\theta)E[X^{(i)}] \end{aligned}$$

Puisque c'est négatif, c'est la ruine certaine. R n'existe pas.

Lemme 2 - Preuve

Si $M \to \infty$, alors il n'y a pas de limite donc $\tilde{X}^{(i)} = a_i X^{(i)}$ et $\hat{X}^{(i)} = (1 - a_i) X^{(i)}$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
E[Y_i] &= \tilde{P}_i - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}] \\
&= (\lambda_i)((1+\theta)E[\tilde{X}^{(i)}] - (\hat{\theta} - \theta)E[\hat{X}^{(i)}] - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}] \\
&= \lambda_i E[X^{(i)}](\theta - \hat{\theta} + \hat{\theta} a_i)
\end{aligned}
$$

On veut le cas limite où le profit serait nul.

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda_i E[X^{(i)}](\theta - \hat{\theta} + \hat{\theta} a_i) \\
0 &= (\theta - \hat{\theta} + \hat{\theta} a_i) \\
a_i &= \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\theta}}
\end{aligned}
$$

Lemme 2 - Preuve

Ce qui nous permet de définir

$$a_i^{'} = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\theta}}$$

Ensuite, on aborde le cas général pour M_i.

$$\begin{aligned}
E[Y_i] &= \tilde{P}_i - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}] \\
&= (\lambda_i)((1+\theta_i)E[\tilde{X}^{(i)}] - (\hat{\theta}_i - \theta_i)E[\hat{X}^{(i)}] - \lambda_i E[\tilde{X}^{(i)}] \\
&= \lambda_i(\theta_i E[X^{(i)}] - \hat{\theta}_i E[\hat{X}^{(i)}]) \\
&= \lambda_i \theta_i E[X^{(i)}] - \lambda_i \hat{\theta}_i (1 - a_i) E[X^{(i)}] + \lambda_i \hat{\theta}_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{\infty} (a_i x - M_i) f_{X^{(i)}}(x) dx
\end{aligned}$$

Lemme 2 - Preuve

On dérive par rapport à M_i pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dM_i}(E[Y_i]) &= \lambda_i\hat{\theta}_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{\infty} f_{X^{(i)}}(x)dx \\ &= \lambda_i\hat{\theta}_i(1 - F_{X^{(i)}}\left(\frac{M_i}{a_i}\right))\end{aligned}$$

Puisque $\frac{d}{dM_i}E[Y_i]$ est toujours positif, on conclut que le profit croît quand la limite croît (monotonicité). Puisqu'on sait que $E[Y_i]$ est négatif à $M_i = 0$ et positif à $M_i \to \infty$ (si $a_i^{'} < a_i < 1$) alors il y a forcément une solution où $E[Y_i] = 0$, par continuité. C'est cette borne inférieure $\Phi_i(a_i)$.

Lemme 2c)

Lemme 2c)

Si $M_i \to \Phi(a_i) \quad \forall i$, alors $R \to 0$

Preuve.
Si $M_i \to \Phi_i(a_i)$ alors $E[Y_i] \to 0$ par définition de $\Phi_i(a_i)$.
De fait, on sait alors que $\frac{d}{dr}E[e^{r(coûts-revenus)}]|_{r=0} \to 0$. Il est possible de conclure que $R \to 0$.

Stratégie de réassurance optimale

Niveaux de rétention optimaux

Rappel : Notre but est de maximiser R, le coefficient d'ajustement de Lundberg.

Une fois qu'on sait quelles options sont accessibles, il importe de se demander quelle est la meilleure. Dans un premier temps, on veut optimiser R selon M_i ; dans un second temps, on veut l'optimiser selon a_i.

Théorème 1

Théorème 1

M_i^* , le vecteur de M_i maximisant R, est celui où chacun satisfait cette équation :

$$\sum_k \alpha_{ik}\eta_k e^{RM_i}(1 - F_{X^{(i)}}(\frac{M_i}{a_i})) \prod_{j,j\neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 - \alpha_{jk}) - \left(\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)(1+\hat{\theta}_i)(1 - F_i(\frac{M_i}{a_i})) = 0$$

Théorème 1 - Preuve

Preuve : D'abord, on veut trouver le point critique de la fonction R

Note : R est une fonction implicite de M_i, c'est-à-dire qu'elle varie par rapport à elle qu'en se définissant par rapport à une autre équation. C'est pourquoi on emploie le théorème de la fonction implicite pour dériver.

Théorème de la fonction implicite

À employer quand certaines variables ne peuvent être définies que via une autre fonction.

$$\frac{d}{dx}\varphi(x_0) = \frac{-\frac{d}{dx}f(x_0, y_0)}{\frac{d}{dy}f(x_0, y_0)}$$

à condition que $f(x_0, y_0) = 0$.

Théoreme 1 - Preuve

On a donc :

$$\frac{d}{dM_i}R = \left.\frac{-\frac{d}{dM_i}(g(r) - \tilde{P}r)}{\frac{d}{dr}(g(r) - \tilde{P}r)}\right|_{r=R}$$

On sait que $\frac{d}{dr}(g(r) - \tilde{P}r)$ est toujours positif (démontré au Lemme 1). Ainsi, il faut que $\frac{d}{dM_i}(g(r) - \tilde{P}r) = 0$ pour que $\frac{d}{dM_i}R = 0$

Théorème 1 - Preuve

On aura besoin de ces résultats préliminaires :

- $\frac{d}{dM_i} M_{\tilde{X}^{(i)}}(r) = re^{rM_i}(1 - F_{X^{(i)}}\left(\frac{M_i}{a_i}\right))$
- $\frac{d}{dM_i} E[\tilde{X}^{(i)}] = (1 - F_{X^{(i)}}\left(\frac{M_i}{a_i}\right))$
- $\frac{d}{dM_i} E[\hat{X}^{(i)}] = -(1 - F_{X^{(i)}}\left(\frac{M_i}{a_i}\right))$

Théorème 1 - Preuve

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dM_i}(g(r) - \tilde{P}r) &= \frac{d}{dM_i}\left[\sum_k \eta_k \left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + (1-\alpha_{ik})) - 1\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)((1+\theta_i)E[\tilde{X}^{(i)}] - (\hat{\theta}_i - \theta_i)E[\hat{X}^{(i)}])\right] \\
&= \sum_k \eta_k \alpha_{ik} \frac{d}{dM_i} M_{\tilde{X}^{(i)}}(r) \left(\prod_{j,j\neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(j)}}(R) + (1-\alpha_{jk})\right) \\
&\quad - \left(\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)\left(\frac{d}{dM_i}(E[\tilde{X}^{(i)}] + E[X^{(i)}] - \hat{\theta} E[\hat{X}^{(i)}])\right)
\end{aligned}
$$

Théorème 1 - Preuve

$$= \sum_k \alpha_{ik}\eta_k R e^{RM_i}(1 - F_{X^{(i)}}(\frac{M_i}{a_i})) \prod_{j,j\neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 - \alpha_{jk})$$
$$- \left(\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)(1+\hat{\theta}_i)R(1 - F_i(\frac{M_i}{a_i}))$$

..on pose égale à zéro et on divise par R de chaque côté pour retrouver le résultat du théorème 1.

Théorème 1 - Preuve

Maintenant, on veut dériver une seconde fois pour s'assurer qu'il s'agisse bien d'un maximum.
En employant encore le théorème de la fonction implicite :

$$\frac{d^2}{dM_i^2}R = \left.\frac{-\frac{d^2}{dM_i^2}(g(r)-\tilde{P}r)}{\frac{d}{dr}(g(r)-\tilde{P}r)}\right|_{r=R}$$

Pour que ce soit un maximum, il faut que la dérivée seconde soit négative.
Puisqu'on sait que $\frac{d}{dr}(g(r)-\tilde{P}r)$ est toujours positif, il faut que $\frac{d^2}{dM_i^2}(g(r)-\tilde{P}r) > 0$ pour que $\frac{d^2}{dM_i^2}R < 0$.

Théorème 1 - Preuve

On se lance dans la deuxième dérivée en partant de la première.

$$\frac{d^2}{dM_i^2}(g(r) - \tilde{P}r) = \frac{d}{dt}\Bigg[\sum_k \alpha_{ik}\eta_k Re^{RM_i}(1 - F_{X^{(i)}}(\frac{M_i}{a_i}))\prod_{j,j\neq i}(\alpha_{jk}M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 -$$

$$- \left(\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)(1+\hat{\theta}_i)R(1 - F_i(\frac{M_i}{a_i}))\Bigg]$$

$$= \Bigg[\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\left(R^2 e^{RM_i}(1 - F_{X^{(i)}}(\frac{M_i}{a_i})) - \frac{Re^{RM_i}}{a_i}f_X^{(i)}(\frac{M_i}{a_i})\right)\prod_{j,j\neq}$$

$$- \left(\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)(1+\hat{\theta}_i)\frac{R}{a_i}(f_{X^{(i)}}(\frac{M_i}{a_i}))\Bigg]$$

UNIVERSITÉ LAVAL

Théorème 1 - Preuve

On évalue au point où

$$\frac{d^2}{dM_i}(g(r) - \tilde{P}r) = 0$$
$$\sum_k e^{RM_i} \prod_{j,j\neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 - \alpha_{jk}) = (1 + \hat{\theta}_i)$$

Ce qui permet de ne conserver que :

$$= \sum_k \alpha_{ik}\eta_k (R^2 e^{RM_i}(1 - F_{X^{(i)}}(\frac{M_i}{a_i}))) \prod_{j,j\neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 - \alpha_{jk})$$

Ainsi, on peut remarquer que la deuxième dérivée est toujours positive, ce qui implique que $\frac{d^2}{dM_i^2}R$ est toujours négative. Par conséquent, on a bien un maximum et on sait qu'il est unique.

Théorème 2

Théorème 2

Si on choisit M_i^* comme limites de réassurance, alors a_i^*, le a_i optimal, est 1.

On veut maximiser R^* (R avec les meilleurs M_i). Interprétation : une fois les meilleures limites établies pour chaque type de réclamation, l'assureur est mieux de garder tout le risque sous cette limite.

Théorème 2 - Preuve

Encore une fois, on va employer le théorème de la fonction implicite :

$$\frac{d}{da_i}R^* = \frac{-\frac{d}{da_i}(g(r) - \tilde{P}r)}{\frac{d}{dr}(g(r) - \tilde{P}r)}\Big|_{r=R^*}$$

On sait que $\frac{d}{dr}(g(r) - \tilde{P}r)$ est toujours positif (démontré au Lemme 1). Ainsi, il faut que $\frac{d}{da_i}(g(r) - \tilde{P}r) = 0$ pour que $\frac{d}{da_i}R^* = 0$

Théorème 2 - Preuve

On aura besoin de ces résultats préliminaires :

- $\frac{d}{da_i} M_{\tilde{X}^{(i)}}(r) = \int_0^{\frac{M_i}{a_i}} rxe^{ra_ix}(f_{X^{(i)}}(x))dx$
- $\frac{d}{da_i} E[\tilde{X}^{(i)}] = E[X^{(i)} 1_{X<\frac{M_i}{a_i}}]$
- $\frac{d}{da_i} E[\hat{X}^{(i)}] = -E[X^{(i)} 1_{X<\frac{M_i}{a_i}}]$

Théorème 2 - Preuve

On a donc

$$\frac{d}{da_i}(g(r) - \tilde{P}r) = \frac{d}{da_i}\left[\sum_k \eta_k \left(\prod_i (\alpha_{ik} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + (1-\alpha_{ik})) - 1\right)\right.$$
$$\left. - \left(\sum_k \alpha_{ik}\eta_k\right)((1+\theta_i)E[\tilde{X}^{(i)}] - (\hat{\theta}_i - \theta_i)E[\hat{X}^{(i)}])\right]$$
$$= \sum_k \eta_k \alpha_{ik} \left(\int_0^{\frac{M_i}{a_i}} R^* x e^{R^* a_i x}(f_{X^{(i)}}(x))dx\right) \prod_{j, j\neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1$$
$$- \sum_k \alpha_{ik}\eta_k R^*((1+\hat{\theta})E[X^{(i)} 1_{X < \frac{M_i}{a_i}}])$$

Théorème 2 - Preuve

$$= \sum_k \eta_k \alpha_{ik} R^* \Bigg((\int_0^{\frac{M_i}{a_i}} R^* x e^{R^* a_i x} (f_{X^{(i)}}(x)) dx) \prod_{j, j \neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 - \alpha_{jk})$$

$$- ((1 + \hat{\theta}) E[X^{(i)} 1_{X < \frac{M_i}{a_i}}]) \Bigg)$$

$$= \sum_k \eta_k \alpha_{ik} R^* \left(\int_0^{\frac{M_i}{a_i}} x e^{R^* a_i x} (f_{X^{(i)}}(x)) dx - \int_0^{\frac{M_i}{a_i}} e^{R^* M_i} (f_{X^{(i)}}(x)) dx \right) \prod_{j, j \neq i} (\alpha_{jk}$$

$$= \sum_k \eta_k \alpha_{ik} R^* \left(\int_0^{\frac{M_i}{a_i}} x (e^{R^* a_i x} - e^{R M_i}) (f_{X^{(i)}}(x) dx) \right) \prod_{j, j \neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 - \alpha$$

UNIVERSITÉ LAVAL

Théorème 2 - Preuve

$=\sum_k \eta_k \alpha_{ik} R^* e^{RM_i} \left(\int_0^{\frac{M_i}{a_i}} x(e^{R^*(a_i x - M_i} - 1)(f_{X^{(i)}}(x)dx) \right) \prod_{j,j\neq i} (\alpha_{jk} M_{\tilde{X}^{(i)}}(R) + 1 - \alpha_{jk})$

Ainsi, puisque la dérivée est négative $\forall a_i \in [a_i^{'}, 1]$ alors $\frac{d}{da_i} R^*$ est positive sur cet intervalle.

Puisque R^* croît avec a_i, on va prendre le plus élevé possible, donc $a_i = 1$.

Exemple numérique avec R

UNIVERSITÉ LAVAL

Bibliographie I

Hu, X. et L. Zhang. 2016, « Ruin probability in a correlated aggregate claims model with common poisson shocks : application to reinsurance », *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 18, n° 3, p. 675–689.