Act-7008 Sujets spéciaux
Projet no3

Etienne Marceau, professeur titulaire

École d'actuariat, Université Laval, Québec (Qc), Canada

22 avril 2022

Résumé

Le projet no3 (sur 3) aborde différents thèmes étudiés pendant le cours. Il se présente sous la forme de questions de recherche.

Table des matières

1 Description du projet

Objectifs :

1. Aborder un thème en lien avec les modèles de risque en temps discret avec dépendance.
2. Développer une expertise à faire de la recherche.
3. Développer une expertise à présenter des travaux de recherche dans un contexte académique.
4. Développer une expertise à évaluer les travaux de recherche d'un.e chercheur.e.

Consignes :

1. Présenter les résultats sous la forme d'un rapport académique/scientifique.
2. Construire le rapport selon le canevas fourni pour le cours.
3. Important : le rapport doit comporter les sections suivantes :
   - une introduction ;
   - une section par question de recherche ;
   - une conclusion ;
   - une bibliographie ;
   - une annexe ou plusieurs annexes, si nécessaire.
4. Citer adéquatement tous les articles et utiliser `BibTeX` pour les fournir en référence dans la bibliographie.
5. Effectuer les calculs en R et déposer les codes dans un répertoire `GitHub` accesible aux étudiantes et étudiants du cours.
6. Important : un code R n'est pas une réponse.
7. Dans une section pour une question de recherche, on présente vos réponses sous la forme d'un texte en continue, comme dans un livre, une monographie, un rapport, etc. Important : ce n'est pas un solutionnaire.
8. Le travail de recherche se fait individuellement et le rapport est rédigé individuellement.
9. Audience : étudiantes, étudiants, chercheures, chercheurs, professeures, professeurs, etc. familières et familiers avec le thème.
10. **LaTeX : Suivre les conventions décrites au chapitre 8 de [Higham, 2020] pour l'écriture selon le style mathématique.**
11. Format pdf : Le document à remettre est en format pdf.
12. Nom du fichier : `Act7008Projet3NomPrenom.pdf` (exemple : `Act7008Projet3MarceauEtienne.pdf`)
13. **Date de remise du rapport : dimanche 1er mai 2022, 20h22.**
14. Courriel : Le document est transmis à l'adresse `etienne.marceau@act.ulaval.ca` en indiquant "Isfa2021" dans l'objet du courriel.

2 Questions de recherche

2.1 Distribution Poisson composée multivariée

Soit un vecteur de v.a. discrètes $\underline{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ dont la fgp conjointe est définie par

$$\mathcal{P}_{\underline{M}}(s_1, \ldots, s_n) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{1+\alpha}\left(\alpha(t_1-1)+\alpha(t_n-1)+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}(s_i-1)+\alpha\sum_{i=1}^{n-1}(s_i s_{i+1}-1)\right)}, \quad |s_i| \leq 1, \quad i \in A_n = \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

Question bonus : On peut construire la fgp en (1) à partir d'un modèle dynamique pour un processus en temps discret. Quel est ce modèle ? Dans le Projet 1, Li et Rostan ont présenté des extensions de ce modèle. Je vous invite à jeter un coup d'oeil à l'équation (11) de [Cossette et al., 2011].

On définit un vecteur de v.a. positives $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ dont la TLS multivariée est définie par

$$\mathcal{L}_{\underline{X}}(t_1, \ldots, t_n) = \mathcal{P}_{\underline{M}}(\mathcal{L}_{B_1}(t_1), \ldots, \mathcal{L}_{B_n}(t_n)), \quad t_i \geq 0, \quad i \in A_n, \tag{2}$$

où $\mathcal{L}_{B_i} = \mathcal{L}_B$ est la TLS d'une v.a. positive $B_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} B$, $i \in A_n$. On suppose que $E[B] = a < \infty$.

On définit les v.a. $N_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $W_n = \frac{1}{n} S_n$, $n \in \mathbb{N}_2 = \{2, 3, \ldots\}$.

Soit une v.a. Y pour laquelle il existe $t_0 \in (0, \infty)$ tel que $\mathcal{M}_Y(t) < \infty$, $t \in (0, t_0)$. La mesure entropique pour la v.a. Y est

$$\psi_Y(\rho) = \frac{1}{\rho} \ln\left(\mathcal{M}_Y(\rho)\right), \quad \rho \in (0, t_0). \tag{3}$$

Questions :

1. Indiquez clairement les hypothèses du modèle pour $\underline{X}$ sous-çajentes à l'expression en (2).
2. Identifiez la distribution marginale de M_i, $i \in A_n$.
3. Identifiez la distribution marginale de X_i, $i \in A_n$.
4. Développez l'expression de $E[X_i]$, $i \in A_n$.
5. Développez l'expression de $Cov(M_i, M_{i'})$, $i \neq i' \in A_n$.
6. Développez l'expression de $Cov(X_i, X_{i'})$, $i \neq i' \in A_n$, en supposant que $E[B^2] < \infty$.
7. Démontrez que $E[W_n] = a\lambda$, $n \in \mathbb{N}_2$.
8. Démontrez que $Var(W_n) = g(n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}_2$, en supposant que $E[B^2] < \infty$, où g est une fonction décroissante en $n \in \mathbb{N}_2$. Identifiez clairement la fonction g.
9. Démontrez que $W_n \xrightarrow{P} a\lambda$, quand $n \to \infty$. Interprétez ce résultat.
10. Démontrez que N_n obéit à une distribution Poisson composée. Identifiez clairement les paramètres de la distribution.
11. Démontrez que S_n obéit à une distribution Poisson composée. Identifiez clairement les paramètres de la distribution.
12. Soit B tel que sa fgm existe. Démontrez

$$\Pr(W_n > \psi_{W_n}(\rho) + u) \leq \mathrm{e}^{-\rho \mathrm{u}}, \quad \rho \leq 0.$$

13. Hypothèse additionnelle : $B \sim Gamma(\eta, \beta)$. Développez l'expression de la mesure entropique $\psi_{W_n}(\rho)$, $\rho \in (0, t_0)$. Identifiez t_0. Développez l'expression dans le cas particulier où $\eta = 1$.
14. Hypothèse additionnelle : $B \sim MixErlang(\underline{\gamma}, \beta)$ avec $\underline{\gamma} = (\gamma_j \geq 0, j \in \mathbb{N}_1 : \sum_{j\in\mathbb{N}_1} \gamma_j = 1)$. On introduit la v.a. discrète J avec $\mathcal{P}_J(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_1} \gamma_j s^j$, $|s| \leq 1$, et $\gamma_j = \Pr(J = j)$, $j \in \mathbb{N}_1 = \{1, 2, \ldots\}$. Alors, la TLS de B est définie par

$$\mathcal{L}_B(t) = \mathcal{P}_J(\mathcal{L}_D(t)), \quad t \leq 0,$$

où $\mathcal{L}_D = \frac{\beta}{\beta+t}$, $t \geq 0$.

(a) Démontrez que S_n obéit à distribution mélange d'Erlang avec

$$F_{S_n}(x) = \nu_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j H(x; k, \beta), \quad x \geq 0. \tag{4}$$

Identifiez clairement les valeurs de ν_j, $j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(b) Démontrez que W_n obéit à une distribution mélange d'Erlang avec

$$F_{W_n}(x) = \nu_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j H(x; k, n\beta), \quad x \geq 0. \tag{5}$$

Identifiez clairement les valeurs de ν_j, $j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(c) Développez l'expression pour $\psi_{W_n}(\rho)$.

(d) Hypothèses pour un exemple numérique :
- $\lambda = \frac{1}{2}|D|$, où $|D|$ = surface d'exposition d'une propriété assurée.
- D = octogone régulier avec des côtés de longueur $c = 1$.
- $\alpha \in \{0, 0.5, 0.99\}$, $\beta = 0.1$, $\rho \in \{0.01, 0.05\}$.
- $n \in \{1, 10, 100, 1000\}$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_5) = (0.3, 0.2, 0.1, , 0.15, 0.25)$, $\kappa \in \{0.01, 0.5, 0.99\}$.

i. Calculez $E[W_n]$.
ii. Calculez $Var(W_n)$.
iii. Calculez $\psi_{W_n}(\rho)$.
iv. Calculez $VaR_\kappa(W_n)$.
v. Calculez $TVaR_\kappa(W_n)$.

2.2 Modèle basé sur une copule archimédienne imbriquée

On considère le modèle décrit dans l'Exemple 20 de [Cossette et al., 2018], dans lequel $S = X_1 + \cdots + X_5$. La fonction de répartition de $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_5)$ est $F_{\underline{X}}$ où $F_{\underline{X}} \in \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_5)$, $\mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_5)$ est la classe de Fréchet générée à partir des marginales $F_1, \ldots, F_5$, et F_i est la fonction de répartition d'une loi binomiale avec la paire de paramètres $(10, 0.05i)$, $i \in \mathbb{I}_5 = \{1, \ldots, 5\}$. La fonction de répartition $F_{\underline{X}}$ est définie via la copule archimédienne imbriquée que l'on indique dans l'Exemple 20 de [Cossette et al., 2018] et les marginales marginales $F_1, \ldots, F_5$.

Dans [Escobar and Pflug, 2020], on présente le principe de distorsion pour le calcul de prime en assurance.

Attention : Il ne faut pas effectuer les calculs basés sur la simulation MC, comme il est fait dans l'Exemple 20 de [Cossette et al., 2018].

Questions :

1. Décrivez soigneusement le modèle en vous appuyant sur le contenu de la Section 7 de [Cossette et al., 2018].
2. Développez l'expression de la fmp f_S de la v.a. $S = X_1 + \cdots + X_5$.
3. Calculez les valeurs de f_S, $\quad k \in A_n = \{0, 1, \ldots, n\}$, pour $n = 50$.
4. Vérifiez que les valeurs sont bonnes en présentant une approche de validation via $E[S]$.
5. Calculez la variance de S.
6. Calculez les valeurs de la matrice variance-covariance $Cov(\underline{X})$.
7. Calculez $E[S]$ et $\sqrt{Var(S)}$ ainsi que $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $EVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa \in \mathbb{K} = \{0.5, 0.9, 0.95, 0.99, 0.995, 0.9995\}$.
8. Développez l'expression pour calculer la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à $\sqrt{Var(S)}$.

9. Calculez les contributions la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in A_5$, selon la méthode d'Euler à $\sqrt{Var(S)}$.
10. Développez l'expression pour calculer la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à la mesure VaR.
11. Calculez les contributions la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in A_5$, selon la méthode d'Euler à la mesure VaR, $\kappa \in \mathbb{K}$.
12. Développez l'expression pour calculer la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à la mesure TVaR.
13. Calculez les contributions la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à la mesure TVaR, $\kappa \in \mathbb{K}$.
14. Développez l'expression pour calculer la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à la mesure EVaR.
15. Calculez les contributions la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à la mesure EVaR, $\kappa \in \mathbb{K}$.
16. Développez l'expression pour calculer les primes $\Pi^{(s)}(X_i)$, $i \in \mathbb{I}_5$, et $\Pi^{(s)}(S)$ selon le principe de distorsion avec $0 < s < 1$.
17. Développez l'expression pour calculer les primes $\Pi^{(s)}(X_i)$, $i \in \mathbb{I}_5$, et $\Pi^{(s)}(S)$ selon le principe de distorsion avec $s > 1$.
18. Calculez les primes $\Pi^{(s)}(X_i)$, $i \in \mathbb{I}_5$, et $\Pi^{(s)}(S)$ selon le principe de distorsion pour $s \in \mathbb{S} = \{0.5, 0.8, 1, 1.25, 2\}$.
19. Développez l'expression pour calculer la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à la prime $\Pi^{(s)}(S)$.
20. Calculez les contributions la contribution C_i du risque X_i, $\forall i \in \mathbb{I}_5$, selon la méthode d'Euler à la prime $\Pi^{(s)}(S)$, $s \in \mathbb{S}$.

2.3 Distributions Bernoulli multivariées

Les distributions Bernoulli multivariées jouent un rôle important dans plusieurs domaines :

1. Probabilités ;
2. Statistiques ;
3. Actuariat ;
4. Apprentissage automatique et science des données ;
5. Finance mathématique ;
6. Etc.

On vise à montrer ce qu'il y aurait pu être intéressant à étudier sur le ce sujet. Hélas, nous n'avons pas eu assez de temps pour l'aborder.

La présente question se base sur les articles suivants :

1. [Diaconis, 1977] ;
2. [Diaconis and Freedman, 1980] ;
3. [Fontana and Semeraro, 2018] ;
4. [Fontana et al., 2021] ;
5. [Fontana and Semeraro, 2021] ;
6. [Blier-Wong et al., 2022].

Définitions :

1. $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, \ldots\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ [Question : est-ce que cette notation est circulaire ?].

2. $I_i \sim Bern(q_i)$, $q_i \in (0,1)$, $i \in \mathbb{I}_n = \{1, \ldots, n\}$.
3. $N_n = \sum_{i=1}^n I_i$, $n \in \mathbb{N}_2$.
4. $\mathcal{B}(q_1, \ldots, q_n) = \mathcal{CF}(F_1, \ldots, F_n) =$ classe de Fréchet dont les marginales sont les fonctions de répartition de loi Bernoulli avec des paramètres $q_1, \ldots, q_n$.
5. $\mathcal{E}(q,n) \subset \mathcal{B}(q,n) = \mathcal{B}(q_1 = q, \ldots, q_n = q) =$ ensemble de toutes les fonctions de répartition de loi Bernoulli multivariée échangeable pour lesquelles toutes les marginales sont identiques et de loi Bernoulli avec paramètre $q \in (0,1)$.
6. $\mathcal{E}^{(ext)}(q,n) =$ points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathcal{E}(q,n)$.
7. $|\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)| =$ nombre de points extrémaux de $\mathcal{E}(q,n)$.
8. $F_{\underline{I}^{(ext,j)}} \in \mathcal{E}^{(ext)}(q,n) =$ jième point extrémal de $\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)$, $j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}$.
9. $\underline{I}^{(ext,j)} = (I_1^{(ext,j)}, \ldots, I_n^{(ext,j)})$ et $N^{(ext,j)} = \sum_{i=1}^n I_i^{(ext,j)}$, $j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}$.
10. $\psi =$ mesure de risque satisfaisant la propriété de convexité.
11. $\rho_P =$ coefficient de corrélation de Pearson.

Questions :

1. Presentez un contre-exemple pour expliquer qu'il n'est pas possible que $\mathcal{E}(q,n) = \mathcal{B}(q,n)$ quand $n \in \mathbb{N}_3$. Suggestion : se rappeler du premier projet d'Olivier.
2. Donnez une représentation géométrique de $\mathcal{E}(q,n)$, pour $n = 3$ et $q = \frac{1}{2}$.
3. Soit $\underline{I} = (I_1, \ldots, I_n)$ avec $F_{\underline{I}} \in \mathcal{E}(q,n)$. Démontrez
$$\underline{\rho}_P(q) \leq \rho(I_i, I_j) \leq \overline{\rho}_P(q), \quad i \neq j \in \mathbb{I}_n.$$
Identifiez clairement les expressions de $\underline{\rho}_P(q)$ et $\overline{\rho}_P(q)$ (en fonction de q et n, éventuellement). Indiquez les valeurs de $\underline{\rho}_P(q)$ et $\overline{\rho}_P(q)$ pour $q = \frac{1}{2}$. Décrivez le comportement de $\underline{\rho}_P(q)$, quand $n \to \infty$. Décrivez le comportement de $\overline{\rho}_P(q)$, quand $n \to \infty$.
4. Énoncez la version initiale du Théoème de De Finetti de représentation pour $F_{\underline{I}} \in \mathcal{E}(q,n)$. En vous basant sur [Diaconis, 1977], expliquez le problème avec cette version initiale. Énoncez la version modifiée du Théorème, proposée par [Diaconis, 1977].
5. Puisque $\mathcal{E}(q,n)$ est un ensemble convexe, il en s'ensuit que
$$F_{\underline{I}}(x) = \sum_{j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}} \gamma_j F_{\underline{I}^{(ext,j)}}(x), \quad x \geq 0, \tag{6}$$
où $\gamma_j \geq 0$, $j \in j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}$, et $\sum_{j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}} \gamma_j = 1$. Démontrez que
$$E[\varphi(\underline{I})] = \sum_{j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}} \gamma_j E[\varphi(\underline{I}^{(ext,j)})]. \tag{7}$$
6. Soit $q = \frac{1}{2}$ et $n = 3$.
   (a) Pour chaque $j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}$, identifiez le point extrémal $F_{\underline{I}^{(ext,j)}}$ de $\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)$.
   (b) Si possible, décrivez brièvement la structure de dépendance associée à chacun de ces éléments.
   (c) Pour chaque $j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}$, calculez $E[N^{(exp,j}]$, $Var(N^{(exp,j)})$, $F_{N^{(exp,j)}}(k)$, $k \in A_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ et $\pi_{N^{(exp,j)}}(k)$, $k \in A_n$. Commentez les résultats obtenus. Idenfiez le point extremal qui mène à plus petite valeur de $\pi_{N^{(exp,j)}}(k)$, peu importe $k \in A_n$. Idenfiez le point extremal qui mène à plus grande valeur de $\pi_{N^{(exp,j)}}(k)$, peu importe $k \in A_n$.
   (d) Pour chaque $j \in \{1, \ldots, |\mathcal{E}^{(ext)}(q,n)|\}$, calculez la valeur de mesure entropique $\psi_\rho(N^{(exp,j)})$, $\rho \in \{0.001, 0.01, 0.1\}$. Idenfiez le point extremal qui mène à plus petite valeur de $\psi_\rho(N^{(exp,j)})$, peu importe ρ. Idenfiez le point extremal qui mène à plus grande valeur de $\psi_\rho(N^{(exp,j)})$, peu importe ρ.
   (e) Etc.
7. Refaire l'item 6 pour $q = \frac{1}{2}$ et $n = 4$.
8. Refaire l'item 6 pour $q = \frac{1}{2}$ et $n = 5$.
9. Etc.

2.4 Bonus

Questions :

1. Quel est le terme typographique pour le symbole mathématique $\div$?
2. Quel fut l'emploi de De Finetti avant qu'il devienne professeur en mathématique et statistique ?
3. À qui doit-on la loi de Bernoulli ? Sans rire. La réponse doit être précise.

N'oubliez pas de fournir vos sources.

3 Instructions

3.1 Rapport

1. `R` : On doit effectuer les calculs en `R`.
2. `LaTeX` : On doit présenter les solutions aux exercices sous la forme d'un rapport. On doit rédiger le rapport en `LaTeX`.

3.2 Guide de rédaction du rapport

1. Tous rapports doivent prendre le gabarit fourni pour le cours.
2. Pour les démonstrations, les étapes doivent être commentées. Quand c'est le cas, il faut indiquer les propriétés, les hypothèses et les résultats (théorèmes, lemmes, propositions, corollaires, etc.) utilisés pour faire avancer le raisonnement.
3. Pour les calculs, il faut indiquer les expressions menant aux réponses numériques et les valeurs demandées. Il n'est pas nécessaire de développer les dites expressions s'il n'est pas explicement demandé de "développer" les expressions.
4. Pour le développement des expressions, on doit effectuer clairement les étapes du développement. Quand c'est le cas, il faut indiquer les propriétés, les hypothèses et les résultats (théorèmes, lemmes, propositions, corollaires, etc.) utilisés pour faire avancer le raisonnement.
5. Les valeurs numériques, les tableaux de valeurs numériques, et les graphiques doivent être fournis dans le rapport.
6. Les codes R sont fournis dans le corps du rapport ou en annexe, en mentionnant les fonctions R et les packages R utilisées.
7. On doit exposer clairement les commentaires et les explications demandées.

3.3 Ressources LaTeX

1. Références :
   - Guide : http ://ctan.math.ca/tex-archive/info/examples/mil/mil.pdf
   - Guide : http ://ctan.math.ca/tex-archive/info/short-math-guide/short-math-guide.pdf
   - Liste de symboles : https ://mirror.csclub.uwaterloo.ca/CTAN/info/symbols/comprehensive/symbols-letter.pdf
2. Brève introduction à LaTeX (en 30 minutes) : https ://www.overleaf.com/learn/latex/Learn_LaTeX_in_30_minutes
3. Diapos d'un cours d'initiation à LaTeX : https ://dms.umontreal.ca/downloads/LaTeX-2-Diapositives.pdf
4. Site francophone intéressant : https ://dms.umontreal.ca/wiki/index.php/LaTeX#Examens

Écrire des textes mathématiques

1. Terence Tao : https ://terrytao.wordpress.com/advice-on-writing-papers/
2. Douglas West : https ://faculty.math.illinois.edu/~west/grammar.html

Références

[Blier-Wong et al., 2022] Blier-Wong, C., Cossette, H., and Marceau, E. (2022). Stochastic representation of fgm copulas using multivariate bernoulli random variables. *Computational Statistics & Data Analysis*, pages 1–33.

[Cossette et al., 2018] Cossette, H., Marceau, E., Mtalai, I., and Veilleux, D. (2018). Dependent risk models with archimedean copulas : A computational strategy based on common mixtures and applications. *Insurance : Mathematics and Economics*, 78 :53–71.

[Cossette et al., 2011] Cossette, H., Marceau, É., and Toureille, F. (2011). Risk models based on time series for count random variables. *Insurance : Mathematics and Economics*, 48(1) :19–28.

[Diaconis, 1977] Diaconis, P. (1977). Finite forms of de finetti's theorem on exchangeability. *Synthese*, 36(2) :271–281.

[Diaconis and Freedman, 1980] Diaconis, P. and Freedman, D. (1980). Finite exchangeable sequences. *The Annals of Probability*, pages 745–764.

[Escobar and Pflug, 2020] Escobar, D. D. and Pflug, G. C. (2020). The distortion principle for insurance pricing : properties, identification and robustness. *Annals of Operations Research*, 292(2) :771–794.

[Fontana et al., 2021] Fontana, R., Luciano, E., and Semeraro, P. (2021). Model risk in credit risk. *Mathematical Finance*, 31(1) :176–202.

[Fontana and Semeraro, 2018] Fontana, R. and Semeraro, P. (2018). Representation of multivariate bernoulli distributions with a given set of specified moments. *Journal of Multivariate Analysis*, 168 :290–303.

[Fontana and Semeraro, 2021] Fontana, R. and Semeraro, P. (2021). Exchangeable bernoulli distributions : high dimensional simulation, estimate and testing. *arXiv preprint arXiv :2101.07693*.

[Higham, 2020] Higham, N. J. (2020). *Handbook of writing for the mathematical sciences*. SIAM.