Act-7008 Sujets spéciaux
Projet no2

Etienne Marceau, professeur titulaire

École d'actuariat, Université Laval, Québec (Qc), Canada

4 mars 2022

Résumé

Le projet no2 (sur 3) aborde des thèmes en lien avec la théorie des mesures de risque. Des quiz seront transmis séparément.

Table des matières

1 Description du projet

Objectifs :

1. Aborder un thème en lien avec les modèles de risque en temps discret avec dépendance.
2. Développer une expertise à faire de la recherche.
3. Développer une expertise à présenter des travaux de recherche dans un contexte académique.
4. Développer une expertise à évaluer les travaux de recherche d'un.e chercheur.e.

Consignes :

1. Présenter les résultats sous la forme d'un exposé académique/scientifique.
2. Construire les diapos en utilsant `LaTeX` à l'aide du package `Beamer` (selon le canevas fourni pour le cours).
3. Citer adéquatement tous les articles et utiliser `BibTeX` pour les fournir en référence.
4. Effectuer les calculs en R et déposer les codes dans un répertoire `GitHub` accesible aux étudiantes et étudiants du cours.
5. Audience : étudiantes, étudiants, chercheures, chercheurs, professeures, professeurs, etc. familières et familiers avec le thème.

2 Volet en équipe

2.1 Objectif général

L'objectif général du volet *en équipe* du projet no2 est de préparer en commun un cours sur les thèmes de la présente section. Comme vous le remarquerez, on vise dans la présente section à mieux comprendre la mesure TVaR.

Dans la construction de vos diapositives, je vous prierais de tenir compte des recommandations des auteurs de [Crameri et al., 2020] pour le choix des couleurs.

Je mentionne que certains/certaines auteurs/autrices utilisent les expressions *Conditional Value-at-Risk (CVaR)* ou *Expected Shortfall (EC)* pour désigner la mesure TVaR comme on la définit dans le présent cours.

L'équipe est composée de Benjamin, Li, Rostan et Olivier.

Instructions supplémentaires :

- Durée : 3h.
- Date : jeudi 17 mars.
- Indiquez précisémment les résultats que vous puisez dans les références que vous utilisez (exemple : Théorème 9.87 de Spirou et Fantasio (1971)).
- Tous les membres doit participer.

2.2 Mesures VaR et TVaR

Dans [Rockafellar and Uryasev, 2002], les auteurs définissent les mesures VaR et TVaR en se basant sur une approche basée sur la minimisation.

Dans cette sous-section, on vise à rencontrer les objectifs spécifiques suivants :

- Comprendre/expliquer/interpréter/illustrer la représentation fournie au Théorème 1 de la mesure VaR.
- Comprendre/expliquer/interpréter/illustrer la représentation fournie au Théorème 3 de la mesure TVaR.

Définition 1 (Mesure VaR)**.** *Soit un risque X avec une fonction quantile F_X^{-1}.*

La mesure VaR avec un niveau de confiance κ associée à la v.a. X est définie par

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa), \quad \kappa \in (0,1).$$

On introduit la fonction ReLU.

Définition 2 (Fonction ReLU)**.** *Soit la fonction $(x)_+ = \max(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction $(x)_+$ est convexe. La fonction $(x)_+$ est homogène d'ordre 1. Puisque la fonction $(x)_+$ est convexe et homogène d'ordre 1, la fonction $(x)_+$ est aussi sous-additive.*

Remarques sur la fonction ReLU

- ReLU = **Re**ctified **L**inear **U**nit.
- La fonction ReLU est une fonction d'activation utilisée dans les réseaux de neurones profonds.
- En actuariat, on utilise la fonction ReLU pour définir la fonction *stop-loss*.

- Traduction française de ReLU : ULRe = Unité Linéaire Rectifiée.

Instructions :

- Les questions et les références sont destinées à vous aider à rencontrer les objectifs.

On a la représentation suivante de la mesure VaR, comme étant l'argument à un problème de minimisation.

Théorème 1 (Mesure VaR = argument à un problème de minimisation)**.** *Soit la v.a. X telle que $E[X] < \infty$. Alors, on a*

$$VaR_\kappa(X) = \arg\min_{x\in\mathbb{R}}\{E[(X-x)_+] + (1-\kappa)x\}. \tag{1}$$

Preuve. *Voir § 2.3.2.10 dans [Denuit et al., 2006a], Proposition 7.4(d) dans [Rüschendorf, 2013] et [Robert, 2011]. Voir aussi l'importante référence [Rockafellar and Uryasev, 2002].*

Questions à propos du Théorème 1 :

1. Démontrez (prouvez) le Théorème 1.
2. Interprétez le résultat du Théorème 1.
3. Pour $X \sim Exp(\beta)$, utilisez la relation en (1) pour identifier l'expression de $VaR_\kappa(X)$. Dessinez le graphe de la fonction $E[(X-x)_+] + (1-\kappa)x$, pour $\beta = 1$ et $\kappa = 0.99$.

Définition 3 (Mesure TVaR)**.** *La mesure TVaR avec un niveau de confiance κ est définie par*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u, \quad \kappa \in (0,1), \tag{2}$$

avec

$$\lim_{\kappa\to 0} TVaR_\kappa(X) = TVaR_0(X) = \int_0^1 F_X^{-1}(u)\mathrm{d}u = E[X].$$

Théorème 2 (Deux expressions pour la mesure TVaR)**.** *Soit une v.a. X avec $E[X] < \infty$. Alors, à partir de (2), on déduit les deux expressions suivantes :*

1. *Expression avec la prime stop-loss :*

$$TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + \frac{1}{1-\kappa}\Pi_X(VaR_\kappa(X)) \tag{3}$$

2. *Expression avec l'espérance tronquée :*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) = & \frac{1}{1-\kappa}E[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] \\ & + \frac{1}{1-\kappa}VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa). \end{aligned} \tag{4}$$

À partir du Théorème 1, on déduit la représentation suivante de la mesure TVaR, comme étant le résultat à un problème de minimisation.

Théorème 3 (Mesure TVaR = résultat à un problème de minimisation)**.** *Soit la v.a. X telle que $E[X] < \infty$. Alors, on a*

$$TVaR_\kappa(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ \frac{1}{1-\kappa} E[(X-x)_+] + x \}. \tag{5}$$

Preuve. *Voir Chapitre 2 dans [Denuit et al., 2006a], § 7.1.2 dans [Rüschendorf, 2013] et [Robert, 2011]. Voir aussi [Rockafellar and Uryasev, 2002].*

Questions à propos du Théorème 3

1. Démontrez (prouvez) le Théorème 3.
2. Interprétez le résultat du Théorème 3.
3. Pour $X \sim Exp(\beta)$, utilisez la relation en (5) pour identifier l'expression de $VaR_\kappa(X)$. Dessinez le graphe de la fonction $\frac{1}{1-\kappa} E[(X-x)_+] + x$, pour $\beta = 1$ et $\kappa = 0.99$.

2.3 Approximation par la méthode MC stochastique des mesures VaR et TVaR

On a précédemment étudié l'approche Monte Carlo dite naïve ou brute (*crude MC*) pour évaluer les mesures VaR et TVaR (voir, par exemple, [Cossette and Marceau, 2021].

Dans cette sous-section, on vise les deux objectifs spécifiques suivants :

1. démontrer le comportement asympotique des approximations par la méthode MC stochastique des mesures VaR et TVaR ;
2. utiliser ces résultats pour construire des intervalles de confiance pour les deux approximations.

Afin de répondre à cet objectif, on se réfère à ces deux articles :

- [Hong et al., 2014].
- [Glynn et al., 2020].

On conclut cette sous-section avec quatre exemples numériques. Chaque membre de l'équipe prépare individuellement un exemple numérique.

2.4 Propriété de sous-additivité de la mesure TVaR

Dans [Embrechts and Wang, 2015], les auteurs présentent sept preuves pour démontrer que la mesure TVaR satistifait la propriété de sous-additivité.

Les objectifs spécifiques de cette sous-section sont :

- Comprendre/présenter/expliquer les preuves 1-6 que la mesure TVaR satisfait la propriété de sous-additivité.
- Expliquer les différentes motivations des auteurs pour présenter les 7 preuves.
- Expliquer les contextes proposés par les auteurs pour présenter chacune des preuves 1-6.
- Expliquer la subtilité de la section 2.2.

2.5 Applications de la mesure TVaR

Chaque membre de l'équipe doit trouver un article paru dans les années 2017 à 2022 qui utilise dans un contexte autre que l'actuariat et la gestion quantitative des risques financiers (QRM). L'article doit être publié dans une revue avec comité de lecture.

À faire :

- Indiquez le domaine d'application.
- Indiquez l'objectif visé par les auteurs/autrices en utilisant la mesure TVaR.
- Décrivez brièvement la méthodologie (les méthodologies) utilisée (ées) les auteurs/autrices pour appliquer la mesure TVaR.
- Décrivez brièvement les conclusions des auteurs/autrices.
- 20 lignes environ.

Exemple d'une application de la mesure TVaR dans un section hors actuariat et QRM :

- [Spada et al., 2018] : accidents dans le secteur de l'énergie et stratégies dans la prise de décision en utilisant les mesures VaR et TVaR.
- Il ne faut pas choisir cet article.

3 Volet individuel

3.1 Objectif général

L'objectif général du volet *individuel* du projet no2 est de préparer individuellement un cours sur les thèmes de la présente section. Dans la présente section, on vise à explorer divers aspects de la théorie des mesures de risque.

Dans la construction de vos diapositives, je vous prierais de tenir compte des recommandations des auteurs de [Crameri et al., 2020] pour le choix des couleurs.

Instructions supplémentaires :

- Durée par exposé : 1h.
- Date : jeudi 28 mars.
- Indiquez précisémment les résultats que vous puisez dans les références que vous utilisez (exemple : Théorème 9.87 de Spirou et Fantasio (1971)).
- Chaque exposé est préparé (les diapos, notamment) et présenté individuellement.
- Bien entendu, vous pouvez vous entraider et consulter Christopher.
- Présentez (1 ou 2 diapositives) une contribution (article paru en 2010 et plus) dans laquelle les travaux de votre article ont mené à une application, une extension ou une généralisation. Cette contribution doit être par d'autres auteurs/autrices que ceux/celles de votre article.

3.2 Thème spécifique à Benjamin

Article de référence : [Denuit et al., 2006b] (toutes les sections).

3.3 Thème spécifique à Li

Article de référence : [Deprez and Gerber, 1985] (sections 1-7).

3.4 Thème spécifique à Rostan

Article de référence : [Wang, 1996] (toutes les sections).

3.5 Thème spécifique à Olivier

Article de référence : [Ahmadi-Javid, 2012] (sections 1-4 seulement).

Références

[Ahmadi-Javid, 2012] Ahmadi-Javid, A. (2012). Entropic value-at-risk : A new coherent risk measure. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 155(3) :1105–1123.

[Cossette and Marceau, 2021] Cossette, H. and Marceau, E. (2021). *Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives*. Monographie.

[Crameri et al., 2020] Crameri, F., Shephard, G. E., and Heron, P. J. (2020). The misuse of colour in science communication. *Nature communications*, 11(1) :1–10.

[Denuit et al., 2006a] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2006a). *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons.

[Denuit et al., 2006b] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., and Laeven, R. (2006b). Risk measurement with equivalent utility principles. *Statistics & Risk Modeling*, 24(1) :1–25.

[Deprez and Gerber, 1985] Deprez, O. and Gerber, H. U. (1985). On convex principles of premium calculation. *Insurance : Mathematics and Economics*, 4(3) :179–189.

[Embrechts and Wang, 2015] Embrechts, P. and Wang, R. (2015). Seven proofs for the subadditivity of expected shortfall. *Dependence Modeling*, 3(1).

[Glynn et al., 2020] Glynn, P. W., Fan, L., Fu, M. C., Hu, J.-Q., and Peng, Y. (2020). Central limit theorems for estimated functions at estimated points. *Operations Research*, 68(5) :1557–1563.

[Hong et al., 2014] Hong, L. J., Hu, Z., and Liu, G. (2014). Monte carlo methods for value-at-risk and conditional value-at-risk : a review. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 24(4) :1–37.

[Robert, 2011] Robert, C. Y. (2011). Risk measures for insurance and finance. Diapositives.

[Rockafellar and Uryasev, 2002] Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, 26(7) :1443–1471.

[Rüschendorf, 2013] Rüschendorf, L. (2013). Mathematical risk analysis. *Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng. Springer, Heidelberg.*

[Spada et al., 2018] Spada, M., Paraschiv, F., and Burgherr, P. (2018). A comparison of risk measures for accidents in the energy sector and their implications on decision-making strategies. *Energy*, 154 :277–288.

[Wang, 1996] Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 26(1) :71–92.