Analyse d'un modèle de risque en temps discret avec un processus INAR(1)

Achille Rostan Fossouo Tadjuidje

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

18 février 2022

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

Quelques outils préliminaires

Définition - Binomial thinning

Binomial thinning (Weiß, 2008)

Considérons une variable aléatoire discrète X à valeurs dans {0, 1, . . ., n}, et $\lambda \in [0; 1]$

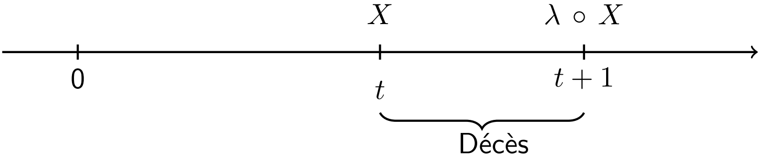
On définit une nouvelle variable aléatoire à l'aide d'une *binomial thinning operation* par :

$$\lambda \circ X = \sum_{i=1}^{X} Y_i$$

où les Y_i sont i.i.d, indépendants à X et $Y_i \sim Y \sim Bernouilli(\lambda)$

Interprétation (Weiß, 2008)

- Considérons une population de taille X au temps t
- La même population au temps $t+1$ aura une taille différente dûe aux décès survenus entre t et $t+1$
- Supposons l'indépendance entre les décès individuels sur la période $[t;\ t+1]$, et notons λ la probabilité de survie pour chaque individu durant cette période.
- Alors le nombre de survivants au temps $t+1$ est donné par $\lambda \circ X$



Définition - Distribution d'Erlang

Notations :

- $\psi_k(x;\beta)$: Fonction de densité d'une distribution d'Erlang d'ordre k
- $\Psi_k(x;\beta)$: Fonction de répartition d'une distribution d'Erlang d'ordre k

où $x > 0$, $\beta > 0$ (paramètre d'échelle) et $k = 1, 2, \ldots$

Formules :

$$\psi_k(x;\beta) = \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\beta x}$$

$$\Psi_k(x;\beta) = 1 - e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$$

Remarque : Lien avec la distribution $Gamma(\alpha, \beta)$! ! !

Définition - Mélange d'Erlang I

Définition - Mélange d'Erlang

Soit une variable aléatoire Y suivant une loi mélange d'Erlang de paramètres $\underline{q} = \{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ et β.

Alors ses fonctions de densité et de répartition s'écrivent comme suit :

$$f_Y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \psi_j(x;\beta)$$

$$F_Y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Psi_j(x;\beta)$$

Notation : $Y \sim MixErl(\underline{q}, \beta)$

Définition - Mélange d'Erlang II

Remarques :

- Dans le cas où il y a une masse de probabilité non nulle en 0, la fonction de répartition s'écrit :

$$F_Y(x) = q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Psi_j(x;\beta)$$

- q_j est un poids positif attribué à la distribution d'Erlang d'ordre j
- $\sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1$

On peut donc définir une variable aléatoire discrète J dont la masse de probabilité est $f_J(j) = \Pr[J = j] = q_j$, $j \in \mathbb{N}$

Autre remarque (Cossette et collab., 2012, 2013)

On peut également représenter une distribution de mélange d'Erlang par une somme aléatoire. En effet, si $Y \sim MixErl(\underline{q}, \beta)$, alors :

$$Y = \begin{cases} \sum_{j=1}^{J} C_j & , J > 0 \\ 0 & , J = 0 \end{cases}$$

avec :

- $f_J(j) = \Pr[J = j] = q_j,\ j \in \mathbb{N}$
- les variables C_j sont $i.i.d$ et indépendantes à J
- $C_j \sim C \sim Exp(\beta), j = 1, 2, \ldots$

On a donc que : $\mathcal{L}_Y(z) = P_J\left(\mathcal{L}_C(z)\right) = P_J\left(\frac{\beta}{\beta+z}\right)$

Propriétés importantes (Cossette et collab., 2012, 2013) I

Propriété 1 : Somme de deux Mélanges d'Erlang indépendants

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes avec

- $X_i \sim MixErl(\underline{q}^{(i)}, \beta)$ pour $i = 1, 2$
- $\Pr[J_i = j] = q_j^{(i)}$ pour $i = 1, 2$

On pose $Y = X_1 + X_2$. Alors :

$$Y \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$$

avec $\underline{\nu} = \{\nu_j\}_{j=0}^{\infty}$ tel que $\Pr[J_1 + J_2 = j] = \nu_j$

Propriétés importantes (Cossette et collab., 2012, 2013) II

Preuve : La Transformée de Laplace de Y est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y(z) &= E\left[e^{-zY}\right] = \prod_{i=1}^{2} E\left[e^{-zX_i}\right] = \prod_{i=1}^{2} P_{J_i}\left(\mathcal{L}_C(z)\right)\\ &= E\left[\left(\mathcal{L}_C(z)\right)^{J_1}\right] \times E\left[\left(\mathcal{L}_C(z)\right)^{J_2}\right] = E\left[\left(\mathcal{L}_C(z)\right)^{J_1+J_2}\right]\\ &= P_{J_1+J_2}\left(\mathcal{L}_C(z)\right)\end{aligned}$$

où $P_{J_1+J_2}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j z^j$.

On conclut donc que $Y \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$ où $\underline{\nu} = \{\nu_j\}_{j=0}^{\infty}$ peut être obtenu à l'aide d'un produit de convolution ou de l'algorithme FFT.

Propriétés importantes (Cossette et collab., 2012, 2013) III

Remarque : Somme de n Mélanges d'Erlang indépendants

On peut étendre le résultat précédent à $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_1, \ldots, X_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_i \sim MixErl(\underline{q}^{(i)}, \beta)$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Dans ce cas : $Y_n \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$ et $\mathcal{L}_{Y_n}(z) = P_{M_n}\left(\mathcal{L}_C(z)\right)$
où $P_{M_n}(z) = P_{J_1+\ldots+J_n}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j z^j$.

Ici encore, $\underline{\nu} = \{\nu_j\}_{j=0}^{\infty}$ peut être obtenu à l'aide d'un produit de convolution ou de l'algorithme FFT.

Propriétés importantes (Cossette et collab., 2012, 2013) IV

Propriété 2 : Somme aléatoire de Mélanges d'Erlang indépendants

Soit une variable aléatoire X qui obéit à une loi composée telle que

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k & , M > 0 \\ 0 & , M = 0 \end{cases}$$

où $B_k \sim B \sim MixErl(\underline{q}, \beta)$.

Alors on a également $X \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$

Preuve : Puisque $B \sim MixErl(\underline{q}, \beta)$, alors on peut représenter B par une somme aléatoire :

$$B = \begin{cases} \sum_{j=1}^{J} C_j & , J > 0 \\ 0 & , J = 0 \end{cases}$$

Propriétés importantes (Cossette et collab., 2012, 2013) V

Avec $f_J(j) = \Pr[J = j] = q_j$ et $C_j \sim C \sim Exp(\beta)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(z) &= P_M\left(\mathcal{L}_B(z)\right) = P_M\left(P_J\left(\mathcal{L}_C(z)\right)\right) \\ &= P_K\left(\mathcal{L}_C(z)\right) \end{aligned}$$

où $P_K(z) = P_M\left(P_J(z)\right)$ est la fonction génératrice des probabilités d'une variable aléatoire K discrète.
Cela permet donc de conclure que $X \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$ avec :

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} C_k & , K > 0 \\ 0 & , K = 0 \end{cases}$$

et $f_K(k) = \Pr[K = k] = \nu_k, \ k \in \mathbb{N}$. Comme toujours, le célèbre algorithme FFT pourra être utilisé pour trouver les ν_k

Primes - Définitions (Kaas et collab., 2008)

Soit Y une variable aléatoire. Soient r et d deux éléments de $\mathbb{R}_+$

Définition : La prime stop-loss

La prime stop-loss de Y avec priorité d est l'espérance de la fonction $m(y) = max(y - d, 0)$.

Elle est notée $\pi_d^{st}(Y)$ et on a $\pi_d^{st}(Y) = E(max(Y - d, 0))$

Définition : La prime exponentielle

La prime exponentielle de Y avec aversion au risque r est définie par :

$$\pi_r^{exp}(Y) = \frac{1}{r} log E\left(e^{rY}\right)$$

Mesures de risques - Définition (Denuit et collab., 2006)

Mesures de risques à définir : Value at Risk (VaR) et Tail Value at Risk (TVaR).

Soit Y une variable aléatoire avec fonction de répartition F_Y et fonction quantile F_Y^{-1}. Alors la VaR et la $TVaR$ de Y au niveau κ, $0 \leq \kappa < 1$ sont définies par :

$$
\begin{aligned}
VaR_\kappa(Y) &= F_Y^{-1}(\kappa) = inf\,\{x \in \mathbb{R} : F_Y(x) \geq \kappa\} \\
et & \\
TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{\kappa - 1}\int_\kappa^1 VaR_u(Y)du \\
&= VaR_\kappa(Y) + \frac{1}{\kappa - 1}\pi^{st}_{VaR_\kappa(Y)}(Y)
\end{aligned}
$$

Contexte de l'article et définitions

Contexte et notations (Guan et Hu, 2021) I

L'une des tâches les plus importantes dans le secteur de l'assurance est d'évaluer le montant total des sinistres agrégés découlant d'un portefeuille de risques.

Objectif de l'article : Etudier la distribution des montants agrégés (actualisées et non) des réclamations durant une période fixée.

Pour une période k donnée, $k = 1, 2, \ldots$, considérons les informations suivantes pour un portefeuille d'assurance :

- W_k : le montant agrégé des réclamations durant la période k. Les W_k identiquement distribuées mais pas nécessairement indépendantes.
- N_k : le nombre de réclamations enregistrées durant la période k.

Contexte et notations (Guan et Hu, 2021) II

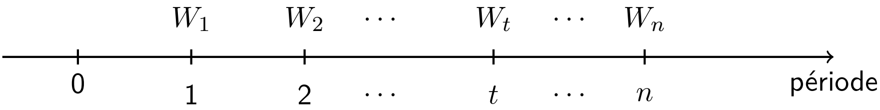
- La séquence des variables aléatoires strictement positives $\{B_{k,j}\}_{j=1}^{\infty}$ qui représentent les montants individuels des réclamations durant la période k.
- Les B_k sont $i.i.d$ et on a $B_{k,j} \sim B$
- Les B_k et indépendants aux N_k,

À partir de ces informations, on peut donc définir W_k comme la somme aléatoire suivante :

$$W_k = \sum_{j=1}^{N_k} B_{k,j}$$

Contexte et notations (Guan et Hu, 2021) III

On peut également définir le montant agrégé global (actualisé ou non) des réclamations au cours des n premières périodes :



- Somme non actualisée : $S_n = W_1 + \ldots + W_t + \ldots + W_n$
- Somme actualisée : $Z_n = vW_1 + \ldots + v^t W_t + \ldots + v^n W_n$

où v^t correspond à la valeur actualisée de 1 \$ due au temps t.

Dans la suite de l'exposé, nous nous attarderons à étudier uniquement la distribution de la somme S_n

Contexte et notations (Guan et Hu, 2021) IV

Postulats énoncés dans l'article :

- Il existe une structure de dépendance temporelle entre les fréquences des réclamations.
- Un processus INAR(1) (en anglais : first-order integer-valued autoregressive process) est adopté pour modéliser la dépendance temporelle entre les nombres de réclamations N_k.
- La classe des distributions de Mélange d'Erlang sera utilisée pour modélisée les montants des réclamations individuelles B

Remarque : les distributions exponentielles et Erlang sont des cas particulier de la classe des Mélanges d'Erlang. Elles peuvent donc également être utilisées pour modéliser B :)

Contexte et notations (Guan et Hu, 2021) V

Définition d'un processus INAR(1)

Soit $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ une séquence de variables aléatoires $i.i.d$ discrètes avec pour support $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, $E[\varepsilon_k] = \mu_\varepsilon$ et $Var[\varepsilon_k] = \sigma_\varepsilon^2$.

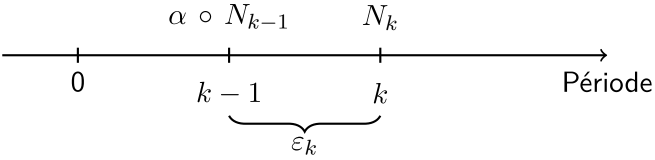
Un processus $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ est un processus INAR(1) s'il suit la formule de récursivité suivante :

$$N_k = \alpha \circ N_{k-1} + \varepsilon_k \quad \text{pour} \quad \alpha \in (0,\, 1)$$

Comme expliqué dans les préliminaires, $\alpha \circ N_{k-1} = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} \delta_{k-1,j}$ où $\delta_{k-1,j} \sim \delta \sim Bernouilli(\alpha)$.

Contexte et notations (Guan et Hu, 2021) VI

Interprétation :



$$N_k = \text{Nombre de réclamations à la période } k$$

$$= \begin{cases} \alpha \circ N_{k-1} & : \text{Proportion des réclamations durant la période } k-1 \\ + & \\ \varepsilon_k & : \text{Nombre de réclamations nouvelles entre } k-1 \text{ et } k \end{cases}$$

Propriété importante I

Propriété

La condition $\alpha \in (0,\ 1)$ implique que le processus INAR(1) $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ est un processus stationnaire. Et de là, on peut tirer la relation suivante :

$$P_N(z) = P_N(1-\alpha+\alpha z)P_\varepsilon(z)$$

Preuve : On sait que $N_k = \alpha \circ N_{k-1} + \varepsilon_k$. Donc :

$$\begin{aligned} P_{N_k}(z) &= E\left[z^{N_k}\right] = E\left[z^{\alpha \circ N_{k-1} + \varepsilon_k}\right] = E\left[z^{\alpha \circ N_{k-1}}\right] E\left[z^{\varepsilon_k}\right] \\ &= E\left[z^{\alpha \circ N_{k-1}}\right] P_\varepsilon(z) \end{aligned}$$

Propriété importante II

Or

$$
\begin{aligned}
E\left[z^{\alpha \circ N_{k-1}}\right] &= E\left[E\left[z^{\alpha \circ N_{k-1}} \,|\, N_{k-1}\right]\right] \\
&= E\left[E\left[z^{Bin(N_{k-1},\, \alpha)} \mid N_{k-1}\right]\right] \\
&= E\left[(1-\alpha+\alpha z)^{N_{k-1}}\right] \\
&= P_{N_{k-1}}(1-\alpha+\alpha z)
\end{aligned}
$$

on a donc $P_{N_k}(z) = P_{N_{k-1}}(\alpha z + 1 - \alpha) P_\varepsilon(z)$.

Puisque les N_k sont identiquement distribués, on obtient donc :

$$P_N(z) = P_N(1-\alpha+\alpha z) P_\varepsilon(z)$$

Définition - Processus de Poisson INAR(1) (Notation Poi-INAR(1)) I

Définition - Processus Poi-INAR(1)

Un processus INAR(1) $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ est un processus de poisson INAR(1) si la séquence des innovations $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ sont $i.i.d$ et suivent une distribution de Poisson.

Dans ce cas, si $\varepsilon_k \sim \varepsilon \sim Pois(\lambda)$, alors $N \sim Pois\left(\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)$

Preuve : Supposons que $N \sim Pois(\lambda_N)$ et déterminons λ_N en utilisant la relation $P_N(z) = P_N(1 - \alpha + \alpha z)P_\varepsilon(z)$

Définition - Processus de Poisson INAR(1) (Notation Poi-INAR(1)) II

On a les égalités suivantes : $P_N(z) = e^{\lambda_N(z-1)}$ et $P_\varepsilon(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

Donc : $P_N(1-\alpha+\alpha z) = e^{\lambda_N(-\alpha+\alpha z)}$.

Et on a :

$$\begin{aligned} e^{\lambda_N(z-1)} &= e^{\lambda_N(-\alpha+\alpha z)} e^{\lambda(z-1)} \\ e^{\lambda_N(z-\alpha z-(1-\alpha))} &= e^{\lambda(z-1)} \\ e^{\lambda_N(1-\alpha)(z-1)} &= e^{\lambda(z-1)} \\ \lambda_N(1-\alpha)(z-1) &= \lambda(z-1) \\ \lambda_N &= \frac{\lambda}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Modèle de risque à travers un processus INAR(1)

Expression de $\mathcal{L}_{S_n}$ - Développement I

Proposition

La transformée de Laplace de S_n est donnée par :

$$\mathcal{L}_{S_n}(z) = P_{N_1}\left(G_n\left(\mathcal{L}_B(z)\right)\right) \prod_{k=2}^{n} P_{\varepsilon_k}\left(G_{n-k+1}\left(\mathcal{L}_B(z)\right)\right)$$

où $G_n : [0,1] \to [0,1]$ est la fonction polynôme de degré n satisfaisant la relation suivante :

$$\begin{cases} G_1(x) = x \\ G_n(x) = x\left(\alpha G_{n-1}(x) + 1 - \alpha\right) & \text{, pour } n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Expression de $\mathcal{L}_{S_n}$ - Développement II

Preuve : On rappelle les relations suivantes :

- $S_n = W_1 + \ldots + W_n$
- $W_k = \sum_{j=1}^{N_k} B_{k,j}$
- $B_{k,j} \sim B \sim MixErl(\underline{q}, \beta)$

On peut donc écrire $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \tilde{B}_j$ où $M_n = N_1 + \ldots + N_n$ et $\tilde{B}_j \sim B$.

On a donc : $\mathcal{L}_{S_n}(z) = P_{M_n}(\mathcal{L}_B(z))$

Le but est donc de déterminer l'expression de $P_{M_n}(z)$. La tâche n'étant pas facile, nous prendrons quelques cas particuliers de n :

Pour $n = 1$, on a $P_{M_1}(z) = P_{N_1}(z) = P_{N_1}(G_1(z))$ où $G_1(z) = z$

Expression de $\mathcal{L}_{S_n}$ - Développement III

Pour $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} P_{M_2}(z) &= E\left[z^{M_2}\right] = E\left[z^{N_1+N_2}\right] = E\left[z^{N_1+\alpha \circ N_1 + \varepsilon_2}\right] \\ &= E\left[z^{N_1+\alpha \circ N_1}\right] E\left[z^{\varepsilon_2}\right] = P_{N_1+\alpha \circ N_1}(z) P_{\varepsilon_2}(z) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} P_{N_1+\alpha \circ N_1}(z) &= E\left[z^{N_1} z^{\alpha \circ N_1}\right] = E\left[z^{N_1} E\left[z^{\alpha \circ N_1} | N_1\right]\right] \\ &= E\left[z^{N_1} (\alpha z + 1 - \alpha)^{N_1}\right] = P_{N_1}\left(G_2(z)\right) \end{aligned}$$

où $G_2(z) = z(\alpha z + 1 - \alpha) = z(\alpha G_1(z) + 1 - \alpha)$

Expression de $\mathcal{L}_{S_n}$ - Développement IV

On obtient donc $P_{M_2}(z) = P_{N_1}\left(G_2(z)\right) P_{\varepsilon_2}(G_1(z))$

Pour $n = 3$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{M_3}(z) &= E\left[z^{N_1} z^{N_2} z^{N_3}\right] = E\left[z^{N_1} z^{\alpha \circ N_1 + \varepsilon_2} z^{\alpha \circ N_2 + \varepsilon_3}\right] \\
&= E\left[z^{N_1} z^{\alpha \circ N_1 + \varepsilon_2} z^{\alpha \circ (\alpha \circ N_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_3}\right] \\
&= E\left[z^{N_1} z^{\alpha \circ N_1 + \varepsilon_2} z^{\alpha^2 \circ N_1 + \alpha \circ \varepsilon_2 + \varepsilon_3}\right] \\
&= E\left[z^{N_1 + \alpha \circ N_1 + \alpha^2 \circ N_1} z^{\alpha \circ \varepsilon_2 + \varepsilon_2} z^{\varepsilon_3}\right] \\
&= P_{N_1 + \alpha \circ N_1 + \alpha^2 \circ N_1}(z) P_{\alpha \circ \varepsilon_2 + \varepsilon_2}(z) P_{\varepsilon_3}(z)
\end{aligned}$$

Puisque $P_{N_1 + \alpha \circ N_1}(z) = P_{N_1}\left(G_2(z)\right)$, alors $P_{\varepsilon_2 + \alpha \circ \varepsilon_2}(z) = P_{\varepsilon_2}\left(G_2(z)\right)$

Expression de $\mathcal{L}_{S_n}$ - Développement V

De plus,

$$\begin{aligned} P_{N_1+\alpha\circ N_1+\alpha^2\circ N_1}(z) &= E\left[z^{N_1} z^{\alpha\circ N_1} z^{\alpha^2\circ N_1}\right] = E\left[z^{N_1} z^{\alpha\circ N_1} z^{\alpha\circ(\alpha\circ N_1)}\right] \\ &= E\left[z^{N_1} z^{\alpha\circ N_1} E\left[z^{\alpha\circ(\alpha\circ N_1)} \mid \alpha \circ N_1\right]\right] \\ &= E\left[z^{N_1} z^{\alpha\circ N_1} (\alpha z + 1 - \alpha)^{\alpha\circ N_1}\right] \\ &= E\left[z^{N_1} (G_2(z))^{\alpha\circ N_1}\right] \\ &= E\left[z^{N_1} (\alpha G_2(z) + 1 - \alpha)^{N_1}\right] = P_{N_1}(G_3(z)) \end{aligned}$$

où $G_3(z) = z(\alpha G_2(z) + 1 - \alpha)$
On a donc $P_{M_3}(z) = P_{N_1}(G_3(z))\, P_{\varepsilon_2}(G_2(z))\, P_{\varepsilon_3}(G_1(z))$

UNIVERSITÉ LAVAL

Expression de $\mathcal{L}_{S_n}$ - Développement VI

Ce résultat peut donc être généralisé pour $n > 3$ et on retrouvera donc l'expression :

$$\mathcal{L}_{S_n}(z) = P_{N_1}\left(G_n\left(\mathcal{L}_B(z)\right)\right) \prod_{k=2}^{n} P_{\varepsilon_k}\left(G_{n-k+1}\left(\mathcal{L}_B(z)\right)\right)$$

Remarque : Le polynôme

$$G_n(x) = \begin{cases} x & , n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} g_{n,k} x^k & , n \geq 2 \end{cases}$$

et

$$g_{n,k} = \begin{cases} \alpha^{k-1}(1-\alpha) & , 1 \leq k \geq n-1 \\ \alpha^{n-1} & , k = n \end{cases}$$

Exemple numérique

Exemple numérique avec un processus Poi-INAR(1)

Application - processus Poi-INAR(1)

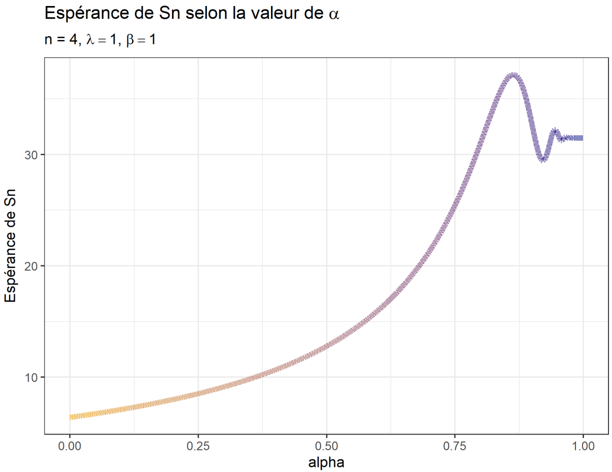
On suppose que le nombre de réclamations N_k suit un processus Poi-INAR(1) avec $\lambda = 1$

Montant des réclamations individuelles : $B \sim MixErl(\underline{q}, \beta)$ où $\underline{q} = \{0.4,\ 0.6\}$ et $\beta = 1$

On a donc $f_B(x) = 0.4\psi_1(x, 1) + 0.6\psi_2(x, 1)$

On s'intéresse à la distribution du montant global S_n des réclamations sur $n = 4$ périodes.

1. Espérance de S_n selon la valeur de α I



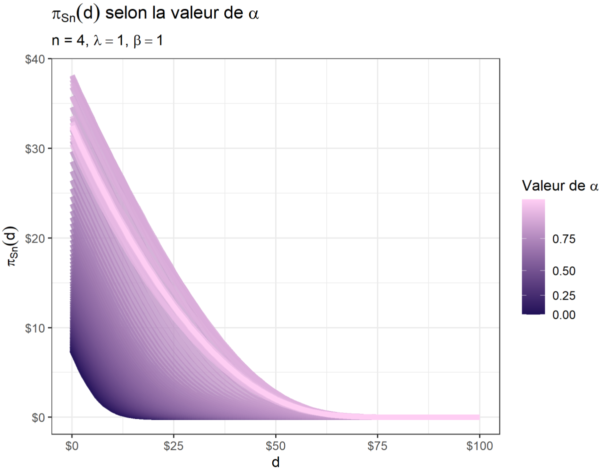
1. Espérance de S_n selon la valeur de α II

Interprétation :

- L'espérance de S_n croit globalement avec le paramètre de dépendance α
- Cependant, le comportement est instable pour des valeurs très élevées de α

Il serait intéressant d'étudier davantage le cas de la forte dépendance entre les fréquences des réclamations.

2. Prime stop-loss en fonction de d et α I

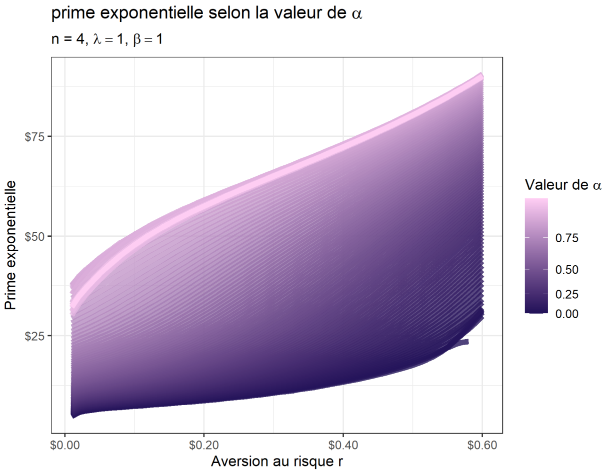


2. Prime stop-loss en fonction de d et α II

Interprétation :

- pour le cas particulier de $d = 0$, on constate que plus le paramètre de dépendance est élevé, plus l'espérance de S_n. (Même résultat que précédemment)
- Lorsqu'on compare 2 α (donc 2 courbes), les primes stop loss de la dépendance la plus forte semblent toujours systématiquement plus élevées.

Prime exponentielle



Conclusion

Dans cette présentation, nous avons étudié un modèle de risque à temps discret dans lequel :

- La structure de dépendance temporelle est modélisée par un processus INAR(1)
- La distribution du montant des réclamations individuelles fait partie de la classe des Mélanges d'Erlang

Cet article nous a également permis de :

- Elargir nos connaissances sur les propriétés liées aux mélanges d'Erlang
- Découvrir d'autres notions de primes telles que la prime exponentielle avec risque d'aversion.

Bibliographie I

Cossette, H., M.-P. Côté, E. Marceau et K. Moutanabbir. 2013, « Multivariate distribution defined with farlie–gumbel–morgenstern copula and mixed erlang marginals : Aggregation and capital allocation », *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 52, n° 3, p. 560–572.

Cossette, H., M. Mailhot et É. Marceau. 2012, « Tvar-based capital allocation for multivariate compound distributions with positive continuous claim amounts », *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 50, n° 2, p. 247–256.

Denuit, M., J. Dhaene, M. Goovaerts et R. Kaas. 2006, *Actuarial theory for dependent risks : measures, orders and models*, John Wiley & Sons.

Guan, G. et X. Hu. 2021, « On the analysis of a discrete-time risk model with inar (1) processes », *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 1–24.

Bibliographie II

Kaas, R., M. Goovaerts, J. Dhaene et M. Denuit. 2008, *Modern actuarial risk theory : using R*, vol. 128, Springer Science & Business Media.

Weiß, C. H. 2008, « Thinning operations for modeling time series of counts—a survey », *AStA Advances in Statistical Analysis*, vol. 92, n° 3, p. 319–341.