Projet 3 - Act-7008 Sujets spéciaux

Li Zhu
Université Laval

2 mai 2022

Table des matières

1 avant-propos

Pour commencer la lecture de ce document, il faut comprendre d'abord deux objectifs que j'ai pour le cours de ACT-7008 Sujets spéciaux.

Premièrement, c'est pour le plaisir de recherche. Recherche comme le mot lui-même a montré, c'est un processus de 'Chercher', 'Chercher' et 'Rechercher'. Le processus peut être souvent long et des fois non-rentable, mais il y a des plaisirs de découvrir et en fin de trouver les résultats. Je m'amuse avec ce processus.

Deuxième, c'est d'améliorer la façon de présenter les résultats, peu importe dans un contexte académique ou non. Dans le cadre du cours, la concentration se porte sur la présentation dans le milieu académique. Mais je trouve que beaucoup des éléments qu'on a pris dans le cours s'appliquent ailleurs.

D'ailleurs, un des points difficiles est la recherche que j'identifie c'est la compréhension des langages incluant les notations dans les différents domaines. Souvent, le même concept dans des différents domaines ne partage pas la même présentation. Alors je pense que la simplification et des fois la visualisation des résultats sont essentielles pour la communication des idées.

Je reviens sur le projet 3. C'est un projet très intéressant qui résume bien ce que nous avons appris dans le cours. La contrainte principale est le temps. Pour faire la recherche, l'organiser les idées et éventuellement de le présenter, de mon côté, il me faut beaucoup plus de temps. Afin de faire l'optimisation avec contraintes, je me suis concentré sur la partie recherche et l'organisation des idées. Le côté présentation est relativement faible pour ce document. Ce document peut être vu comme un squelette pour le document plus riche et complète.

2 Introduction

Ce document se porte sur les modèles multivariés avec dépendance, spécifiquement le modèle Poisson composée MA (1) et la copule hiérarchique. Le premier se concentre sur l'inférence pour le modèle avec paramètres tandis que le deuxième travaille avec la Copula pour la structure de dépendance.

3 Distribution Poisson composée multivariée

Dans cette section, nous étudions la section du modèle Poisson composée MA (1) qui est présenté dans [Cossette et al., 2011]. Dans la référence et l'énoncé du travail, nous avons regardé la définition des variables, la structure du modèle et certaines propriétés des fonctions comme les fonctions génératrices de probabilité et les fonctions génératrices de moment. Nous n'allons pas à répéter les mêmes informations dans cette section. Mais quelques précisions reliées aux questions posées dans l'énoncé du travail seront données.

L'ordre de présentation dans cette section suit l'énoncé du travail donné. Nous allons d'abord aborder les hypothèses du modèle (voir question 1). Par la suite, nous allons apprendre la distribution des quelques variables simples (voir question 2 et 3) et les statistiques de ces variables (voir questions 4 à 6). Ensuite, nous allons discuter la distribution des variables composées et les statistiques de ces variables (voir questions 7 à 11). Puis, la mesure entropique sera étudiée. (voir question 12 et 13). En fin, un cas spécial sera examiné. (voir question 14) . Bien que les exercices numériques soient demandés à la fin de cette section, dû à la limite de temps, les analyses ne sont pas complétées, alors les résultats ne seront pas présentés dans ce document.

Pour chaque sujet (or question), il y a souvent quatre sous sections données : la question, les réponses, les explications et la discussion. La question et les réponses sont présentés en premier pour faciliter la correction. Les explications donnent souvent les preuves et les intuitions. Et la discussion est pour proposer des solutions alternatives ou bien commenter la question, les réponses et les explications.

0. Question bonus : Processus Poisson MA(1)
1. L'hypothèse du modèle pour $\underline{X}$:

Réponse :

$$X_k = \sum_{j=1}^{M_k} B_{k,j}$$

a) $B_{k,j}$ sont i.i.d.
b) M_k et $B_{k,j}$ sont indépendents
c) M_i et M_j ne sont pas indépendents

2. La distribution marginale de M_i :

Réponse :

$$M_i \sim Poisson(\lambda)$$

Explications :
La structure du modèle peut écrire comme

$$M_k = \alpha \circ \xi_{k-1} + \xi_k.$$

On a

$$\xi_i \sim Poisson(\frac{\lambda}{1+\alpha}),$$

alors

$$\begin{aligned}
E(M_i) &= E(\alpha \circ \xi_{k-1} + \xi_k) \\
&= E(\sum_{j=1}^{\xi_{k-1}} \delta_j) + E(\xi_k) \\
&= E[E(\sum_{j=1}^{\xi_{k-1}} \delta_j \mid \xi_{k-1})] + E(\xi_k) \\
&= E(\alpha * \xi_{k-1}) + E(\xi_k) \\
&= \alpha \frac{\lambda}{1+\alpha} + \frac{\lambda}{1+\alpha} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Discussion :
Une alternative pour obtenir $E(M_i)$ est de travailler avec le fgp. On peut prendre la dérivée première du fgp évalué au $M_i = 1$.

3. La distribution marginale de X_i :

Réponse :
X_i suit une loi Poisson composée.

Explications :

$$X_k = \sum_{j=1}^{M_k} B_{k,j}$$

et M_k suit une loi poisson.

4. $E(X_i)$:

Réponse :

$$E(X_i) = E(\sum_{j=1}^{M_i} B_{i,j}) = E(M_i)E(B_i) = \lambda a$$

5. $Cov(M_i, M_{i'})$:

Réponse :

$$Cov(M_i, M_{i'}) = \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha} 1_{\{|i-i'|=1\}} \tag{1}$$

Explications :

a) Quelques préparations pour les preuves :

Résultat 1 :

$$Y \sim Bin(N, P) => Cov(N, Y) = 0 \tag{2}$$

Preuve du résultat 1 : Soit Y le nombre de succès et Z le nombre d'échec. Alors, $N = Y + Z$

$$\begin{aligned}
Cov(N, Y) = Cov(Y + Z, Y) &= Cov(Y, Y) + Cov(Z, Y) \\
&= Var(Y) + corr(Y, Z)\sigma_Y \sigma_Z \\
&= Var(Y) - \sigma_Y \sigma_Z = 0
\end{aligned}$$

b) Preuve pour l'équation (1)

$$
\begin{aligned}
Cov(M_i, M_{i'}) &= Cov(\alpha \circ \xi_{i-1} + \xi_i, \alpha \circ \xi_{i'-1} + \xi_{i'}) \\
&= Cov(\sum_{j=1}^{\xi_{i-1}} \delta_{i-1,j} + \xi_i, \sum_{j=1}^{\xi_{i'-1}} \delta_{i'-1,j} + \xi_{i'}) \\
&= Cov(\sum_{j=1}^{\xi_{i-1}} \delta_{i-1,j}, \sum_{j=1}^{\xi_{i'-1}} \delta_{i'-1,j}) + Cov(\sum_{j=1}^{\xi_{i-1}} \delta_{i-1,j}, \xi_{i'}) + Cov(\sum_{j=1}^{\xi_{i'-1}} \delta_{i'-1,j}, \xi_i) + Cov(\xi_i, \xi_{i'})
\end{aligned}
$$

Quand $i \neq i'$, on a

$$
Cov(\sum_{j=1}^{\xi_{i-1}} \delta_{i-1,j}, \sum_{j=1}^{\xi_{i'-1}} \delta_{i'-1,j}) = 0
$$

et

$$
Cov(\xi_i, \xi_{i'}) = 0
$$

. Quand $\mid i - i' \mid \neq 1$, on a

$$
Cov(\sum_{j=1}^{\xi_{i-1}} \delta_{i-1,j}, \xi_{i'}) = Cov(\sum_{j=1}^{\xi_{i'-1}} \delta_{i'-1,j}, \xi_i) = 0
$$

. Donc,

$$
Cov(M_i, M_{i'}) = 0, \text{ quand } \mid i - i' \mid \neq 1
$$

Quand $\mid i - i' \mid = 1$, la question devient de déterminer $Cov(\sum_{j=1}^{\xi_i} \delta_{i,j}, \xi_i)$

$$
Cov(\sum_{j=1}^{\xi_i} \delta_{i,j}, \xi_i) = E[Cov(\sum_{j=1}^{\xi_i} \delta_{i,j}, \xi_i) \mid \xi_i] + Cov[E(\sum_{j=1}^{\xi_i} \delta_{i,j} \mid \xi_i), E(\xi_i \mid \xi_i)]
$$

On a montré dans l'équation (2)

$$
Cov(\sum_{j=1}^{\xi_i} \delta_{i,j}, \xi_i) = 0.
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
Cov(\sum_{j=1}^{\xi_i} \delta_{i,j}, \xi_i) &= 0 + Cov(\xi_i, \alpha\xi_i) \\
&= \alpha Var(\xi_i) \\
&= \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha}
\end{aligned}
$$

Finalement, on conclut que

$$
Cov(M_i, M_{i'}) = \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha} 1_{\{|i-i'|=1\}}
$$

Discussion : La question pourrait également être résolue par la fonction fgp. Pour se donner une idée rapide : si on a une distribution bivariée $(M1, M2)$,

$$
E(M_1 M_2) = \frac{\partial^2 \mathcal{P}_M(s_1, s_2)}{\partial s_1 \partial s_2}\Big|_{s_1=s_2=1} = \lambda^2 + \frac{\lambda\alpha}{1+\alpha}.
$$

Avec $E(M_i) = \lambda$, on a alors $Cov(M1, M2) = \frac{\lambda\alpha}{1+\alpha}$. On peut généraliser ce calcul pour $\mid i - i' \mid = 1$

6. $Cov(X_i, X_{i'})$:

Réponse :

$$Cov(X_i, X_{i'}) = \frac{\alpha\lambda a^2}{1+\alpha} 1_{\{|i-i'|=1\}}$$

Explications : X suit une loi Poisson composée, on a alors

$$\mathcal{P}_X(r) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_B(r))$$

Maintenant, supposons la distribution X est bivariée (X1, X2), on a

$$\mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1, r_2) = \mathcal{P}_{M_1M_2}(\mathcal{P}_{B_1}(r_1), \mathcal{P}_{B_2}(r_2)) \tag{3}$$

avec

$$\mathcal{P}_{M_1M_2}(s_1, s_2) = exp\Big[\frac{\lambda}{1+\alpha}(s_1 + s_2 + \alpha s_1 s_2 - \alpha - 2)\Big]. \tag{4}$$

La loi de B est inconnue, on peut supposer que la fgp de B suit la forme suivante :

$$\mathcal{P}_{B_1}(r) = p_0 + p_1 r + \cdots + p_\nu r^\nu \tag{5}$$

où $p_0 + p_1 + \cdots + p_\nu = 1$.
et

$$\mathcal{P}_{B_2}(r) = q_0 + q_1 r + \cdots + q_z r^z \tag{6}$$

où $q_0 + q_1 + \cdots + q_z = 1$.

On remplace les termes dans l'équation (3) par les équations (4),(5) et (6), on obtient

$$\mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1, r_2) = exp\{\frac{\lambda}{1+\alpha}[p_0+p_1r+\cdots+p_\nu r^\nu+q_0+q_1r+\cdots+q_zr^z+\alpha(q_0+q_1r+\cdots+q_zr^z)(p_0+p_1r+\cdots+p_\nu r^\nu)-\alpha-2]\}.$$

Afin de calculer $E(X1, X2)$, on fait la dérivée suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2}\mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1, r_2)\Big|_{r_1=r_2=1} &= \frac{\lambda}{1+\alpha}(p_1 + \cdots + \nu p_\nu)\alpha(q_1 + \cdots + zq_z) \\
&+ \frac{\lambda}{1+\alpha}(1+\alpha)(q_1 + \cdots + zq_z)\frac{\lambda}{1+\alpha}(1+\alpha)(p_1 + \cdots + \nu p_\nu) \\
&= \frac{\alpha}{1+\alpha}\lambda E(B)^2 + \lambda^2 E(B)^2
\end{aligned}$$

Voir l'Annexe pour les détails du calcul de la dérivée. Avec $E(X) = \lambda E(B)$, On a alors

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{\alpha\lambda a^2}{1+\alpha}$$

On peut généraliser ce calcul pour $\mid i - i' \mid= 1$.

Pour $\mid i - i' \mid\neq 1$,

$$Cov(X_i, X_{i'}) = Cov(\sum_{j=1}^{M_i} B_{i,j}, \sum_{k=1}^{M_i'} B_{i',k}).$$

Dans ce cas, M_i et $M_{i'}$ sont indépendents, et B_i et $B_{i'}$ sont indépendents. On a alors

$$Cov(X_i, X_{i'}) = 0$$

Pour conclure,

$$Cov(X_i, X_{i'}) = \frac{\alpha\lambda a^2}{1+\alpha} 1_{\{|i-i'|=1\}}$$

Discussion :

La démonstration est longue, car je suppose que les lois de B_1 et B_2 ne sont pas identiques au début. Si on fait la loi B indentique dès le départ, la démonstration sera beaucoup moins longue.

Annexe :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r_1}\mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1,r_2) &= \mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1,r_2)\frac{\lambda}{1+\alpha}[(p_1+\cdots+\nu p_\nu r_1^{\nu-1})+\alpha(q_0+\cdots+q_z r_2^z)(p_1+\cdots+\nu p_\nu r_1^{\nu-1})] \\
&= \mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1,r_2)\frac{\lambda}{1+\alpha}[1+\alpha(q_0+\cdots+q_z r_2^z)](p_1+\cdots+\nu p_\nu r_1^{\nu-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2}\mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1,r_2) &= \mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1,r_2)\frac{\lambda}{1+\alpha}(p_1+\cdots+\nu p_\nu r_1^{\nu-1})\alpha(q_1+\cdots+zq_z r_2^{z-1}) \\
&+\mathcal{P}_{X_1X_2}(r_1,r_2)\frac{\lambda}{1+\alpha}(p_1+\cdots+\nu p_\nu r_1^{\nu-1})[1+\alpha(q_0+\cdots+zq_z r_2^z)] \\
&\frac{\lambda}{1+\alpha}(q_1+\cdots+zq_z r_2^{z-1})[1+\alpha(p_0+\cdots+p_\nu r_1^\nu)]
\end{aligned}$$

7. $E(W_n)$:

Réponse :

$$E(W_n) = E(\frac{1}{n}S_n) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = E(X_i) = \lambda a$$

8. $Var(W_n)$:

Réponse :

$$Var(W_n) = \frac{1}{n^2}[n\lambda E(B^2) + 2(n-1)\frac{\alpha}{1+\alpha}\lambda E(B)^2]$$

Explications : On calcule d'abord $Var(X_i)$.

$$\begin{aligned}
Var(X_i) &= Var(\sum_{j=1}^{M_i} B_{i,j}) = Var[E(\sum_{j=1}^{M_i} B_{i,j} \mid M_i)] + E[Var(\sum_{j=1}^{M_i} B_{i,j} \mid M_i)] \\
&= E[M_i Var(B_i)] + Var[M_i E(B_i)] \\
&= Var(B)\lambda + E(B)^2\lambda \\
&= \lambda E(B^2)
\end{aligned}$$

Combiné avec les résultats pour la question 6 ($Cov(X_i, X_{i'})$), on obtient

$$\begin{aligned}
Var(S_n) &= \sum_{i=1} nVar(X_i) + \sum_{i\neq j} Cov(X_i, X_j) \\
&= n\lambda E(B^2) + 2(n-1)\frac{\alpha}{1+\alpha}\lambda E(B)^2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$Var(W_n) = Var(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n^2}[n\lambda E(B^2) + 2(n-1)\frac{\alpha}{1+\alpha}\lambda E(B)^2]$$

9. $W_n \xrightarrow{P} a\lambda$:

Réponse :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mid W_n - a\lambda \mid > \epsilon) = 0$$

Explications :

a) Rappel : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout réel strictement positif α, alors

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha\right) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

b) Preuve :

$$\mathbb{P}\left(|W_n - a| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2_{W_n}}{\epsilon^2} = \frac{1}{n^2\epsilon^2}[n\lambda E(B^2) + 2(n-1)\frac{\alpha}{1+\alpha}\lambda E(B)^2]$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mid W_n - a\lambda \mid > \epsilon) = 0$$

Discussion :

La convergence en probabilité affirme que parmi tous les échantillons de valeurs possibles, ceux dont la moyenne s'éloigne de la probabilité sont rares,et que cette rareté s'accentue avec la taille de l'échantillon.

10. Loi du N_n :

Réponse :

N_n suit une loi Poisson composée avec

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha + n)$$

Explications :

$N_n = \sum_{i=1}^n M_i$, on a alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{N_n}(r) &= E(r^{N_n}) = E(r^{\sum_{i=1}^n M_i}) \\
&= E(r^{M_1} \cdots r^{M_n}) \\
&= \mathcal{P}_M(r, ..., r) \\
&= exp\{\frac{\lambda}{1+\alpha}[\alpha(r-1) + \alpha(r-1) + (1-\alpha)n(r-1) + \alpha(n-1)(r^2-1)]\} \\
&= exp\{\frac{\lambda}{1+\alpha}[\alpha(n-1)r^2 + (n+2\alpha-n\alpha)r - \alpha - n]\} \\
&= exp\{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n)\Big[\frac{\alpha(n-1)}{\alpha+n}r^2 + \frac{n+2\alpha-n\alpha}{\alpha+n}r - 1\Big]\} \\
&= e^{\lambda'(H(r)-1)}
\end{aligned}$$

où

$$H(r) = p_1 r + p_2 r^2, \text{ avec } p_1 + p_2 = 1$$

et

$$p_1 = \frac{n+2\alpha-n\alpha}{\alpha+n},$$

$$p_2 = \frac{\alpha(n-1)}{\alpha+n}.$$

$e^{\lambda'(H(r)-1)}$ est la fgp d'une loi Poisson composée.

11. Loi du S_n :

Réponse :

S_n suit une loi Poisson composée avec

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n)$$

Explications :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{S_n}(r) &= E(e^{rS_n}) = E(e^{r\sum_{i=1}^n X_i}) \\
&= \mathcal{M}_{X_1,...,X_n}(r,...,r) \\
&= \mathcal{P}_{M_1,...,M_n}(\mathcal{M}_B(r),...,\mathcal{M}_B(r)) \\
&= exp\{\frac{\lambda}{1+\alpha}[\alpha(\mathcal{M}_B(r)-1)+\alpha(\mathcal{M}_B(r)-1)+(1-\alpha)n(\mathcal{M}_B(r)-1)+\alpha(n-1)(\mathcal{M}_B(r)^2-1)]\} \\
&= exp\{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n)\Big[\frac{\alpha(n-1)}{\alpha+n}\mathcal{M}_B(r)^2+\frac{n+2\alpha-n\alpha}{\alpha+n}\mathcal{M}_B(r)-1\Big]\} \\
&= e^{\lambda'[\mathcal{M}_G(r)-1]}
\end{aligned}$$

Discussion :

si $\alpha = 0$, on a alors

$$\mathcal{M}_{S_n}(r) = e^{n\lambda[M_B(r)-1]}$$

12. $\mathbb{P}(W_n > \psi_\rho(W_n)+u) \leqslant e^{-\rho u}$

Réponse :

a) Rappel : l'inégalité de Markov
Soit ϕ une fonction croissante positive ou nulle. Soit X une variable aléatoire réelle. Alors

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(\phi(x))}{\phi(a)}$$

b) Preuve :

Prends $\phi(x)$ étant $e^{\rho x}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_n > \psi_\rho(W_n)+u) &= \mathbb{P}(W_n > \frac{1}{\rho}ln[\mathcal{M}_{W_n}(\rho)]+u) \\
&\leqslant \frac{E(e^{\rho W_n})}{e^{\rho\{\frac{1}{\rho}ln[\mathcal{M}_{W_n}(\rho)]+u\}}} \\
&= \frac{\mathcal{M}_{W_n}(\rho)}{\mathcal{M}_{W_n}(\rho)e^{\rho u}} \\
&= e^{-\rho u}
\end{aligned}$$

13. $\psi_\rho(W_n)$, quand $B \sim Gamma(\eta, \beta)$

Réponse :

$$\psi_\rho(W_n) = \frac{1}{\rho}\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n)\Big[\frac{\alpha(n-1)}{\alpha+n}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)^{2\eta} + \frac{n+2\alpha-n\alpha}{\alpha+n}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)^{\eta} - 1\Big]$$

où $\rho < n\beta$. $t_0 = n\beta$.

Quand $\eta = 1$, on a

$$\psi_\rho(W_n) = \frac{1}{\rho}\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n)\Big[\frac{\alpha(n-1)}{\alpha+n}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)^{2} + \frac{n+2\alpha-n\alpha}{\alpha+n}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big) - 1\Big]$$

Explications :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{W_n}(\rho) &= E(e^{\rho W_n}) = E(e^{\frac{\rho}{n}S_n}) \\ &= exp\{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n)\Big[\frac{\alpha(n-1)}{\alpha+n}\mathcal{M}_B(\frac{\rho}{n})^2 + \frac{n+2\alpha-n\alpha}{\alpha+n}\mathcal{M}_B(\frac{\rho}{n}) - 1\Big]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_\rho(W_n) &= \frac{1}{\rho}ln[\mathcal{M}_{W_n}(\rho)] \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n)\Big[\frac{\alpha(n-1)}{\alpha+n}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)^{2\eta} + \frac{n+2\alpha-n\alpha}{\alpha+n}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)^{\eta} - 1\Big]\end{aligned}$$

14. a) S_n suit la loi mélange d'Erlang

Réponse :

$$F_{S_n}(x) = \upsilon_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\upsilon_j H(x; k, \beta)$$

avec

$$\begin{aligned}\upsilon_0 &= e^{-\lambda'} \\ \upsilon_1 &= \upsilon_0\lambda' z_1 \\ \upsilon_j &= \frac{\lambda'}{n}(\upsilon_{j-1}z_1 + 2\upsilon_{j-2}z_2) \text{ , quand } j > 2\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\lambda' &= \frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n) \\ z_1 &= \frac{n+2\alpha-n\alpha}{n+\alpha} \\ z_2 &= \frac{\alpha(n-1)}{n+\alpha)}\end{aligned}$$

Explications :

On transforme la question et on continue à travailler avec les v.a. indépendentes. Donc, on redéfinit S_n par S_{N_n}, avec

$$S_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} Y_i$$

où $N_n = \sum i = 1^n M_i$ et Y_i est i.i.d. distribué comme B. On a alors

$$F_{S_n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_{N_n}(x)\mathbb{P}(N_n = j)$$

où $F_{N_n}(x)$ est la fonction répartition pour $B_1 + \cdots + B_{N_n}$. Donc, S_n suit une loi mélange d'Erlang, avec

$$\upsilon_0 = \mathbb{P}(N_n = 0) = \mathcal{P}_{N_n}(0) = e^{-\lambda'}$$

$$\upsilon_1 = \mathbb{P}(N_n = 1) = \mathcal{P}'_{N_n}(0) = e^{-\lambda'} z_1$$

$$\upsilon_2 = \mathbb{P}(N_n = 2) = \frac{1}{2!}\mathcal{P}''_{N_n}(0) = \frac{\lambda'}{n}(\upsilon_1 z_1 + 2\upsilon_0 z_2)$$

$$\upsilon_3 = \mathbb{P}(N_n = 3) = \frac{1}{3!}\mathcal{P}'''_{N_n}(0) = \frac{\lambda'}{n}(\upsilon_2 z_1 + 2\upsilon_1 z_2)$$

$$\cdots$$

$$\upsilon_j = \frac{\lambda'}{n}(\upsilon_{j-1} z_1 + 2\upsilon_{j-2} z_2).$$

14. b) W_n suit la loi mélange d'Erlang

Réponse :

$$\begin{aligned} F(W_n \leqslant w) = F(\frac{1}{n}S_n \leqslant w) = F(S_n \leqslant nw) \\ = F_{S_n}(nw) = \upsilon_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \upsilon_j H(nw; k, \beta) \\ = \upsilon_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \upsilon_j H(w; k, n\beta) \end{aligned}$$

où υ_j est le même comme dans la question 14 a).

Explications :

$$\mathcal{L}_{S_n}(nw) = \mathcal{P}_M(\mathcal{L}_B(nw)) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_J(\mathcal{L}_D(nw))) = \mathcal{P}_M(\mathcal{P}_J(\mathcal{L}_{D^*}(w)))$$

Soit $D \sim Erlang(l, \beta)$, alors

$$F_D(d) = 1 - e^{\beta d} \sum_{j=0} l - 1 \frac{(\beta d)^j}{j!}$$

$$F_D(nw) = 1 - e^{\beta nw} \sum_{j=0} l - 1 \frac{(\beta nw)^j}{j!} = F_{D^*}(nw)$$

Donc, $D^* \sim Erlang(l, n\beta)$.

14. c) $\psi_\rho(W_n)$

Réponse :

$$\psi_\rho(W_n) = \frac{1}{\rho} ln\mathcal{M}_{N_n}(\rho) = \frac{1}{\rho}\lambda'\Big[z_2\Big(\sum_{j\in N_1}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)\gamma_j\Big)^2 + z_1\Big(\sum_{j\in N_1}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)\gamma_j\Big) - 1\Big] = \frac{1}{\rho} ln[\sum_{i=0}^{\infty} exp(\frac{\rho i}{n})\nu_i]$$

où

$$\begin{aligned}
\lambda' &= \frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha+n) \\
z_1 &= \frac{n+2\alpha-n\alpha}{n+\alpha} \\
z_2 &= \frac{\alpha(n-1)}{n+\alpha)}
\end{aligned}$$

Explications : i)

$$\mathcal{M}_B(\frac{\rho}{n}) = \sum_{j\in N_1}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)\gamma_j$$

$$\mathcal{M}_{W_n}(\rho) = E(e^{\rho W_n}) = E\Big(e^{\frac{\rho}{n}S_n}\Big) = exp\Big\{\lambda'\Big[z_2\mathcal{M}_B^2\Big(\frac{\rho}{n}\Big) + z_1\mathcal{M}_B\Big(\frac{\rho}{n}\Big) - 1\Big]\Big\}$$

Donc,

$$\psi_\rho(W_n) = \frac{1}{\rho} ln\mathcal{M}_{N_n}(\rho) = \frac{1}{\rho}\lambda'\Big[z_2\Big(\sum_{j\in N_1}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)\gamma_j\Big)^2 + z_1\Big(\sum_{j\in N_1}\Big(\frac{\beta}{\beta-\frac{\rho}{n}}\Big)\gamma_j\Big) - 1\Big]$$

ii)

$$\begin{aligned}
\psi_\rho(W_n) &= \frac{1}{\rho} ln\mathcal{M}_{N_n}(\rho) \\
&= \frac{1}{\rho} ln[e^{\frac{\rho}{n}*0}\mathbb{P}(S_n=0) + e^{\frac{\rho}{n}*1}\mathbb{P}(S_n=1) + \cdots + e^{\frac{\rho}{n}*k}\mathbb{P}(S_n=k) + \cdots] \\
&= \frac{1}{\rho} ln[\sum_{i=0}^{\infty} exp(\frac{\rho i}{n})\nu_i]
\end{aligned}$$

4 Copule archimédienne imbriquée

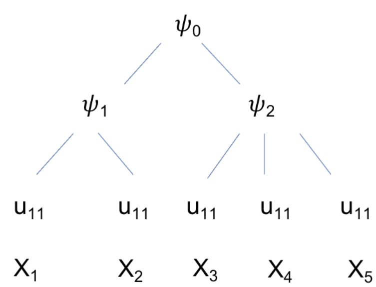
Dans cette section, nous allons présenter la Copula archimédienne. D'abord, nous allons introduire la copula archimédienne bivariée. Par la suite, nous allons étendre notre étude pour une structure de dépendance hiérarchique. Nous appelons donc la copula archimédienne imbriquée. Enfin, les efforts sont faits afin de calculer la fonction de masse pour la somme des variables dépendantes.

Cette section est une compréhension de l'article [Cossette et al., 2018] section 7.

Pour apprendre la copule archimédienne imbriquée, nous commençons par la copule archimédienne bivariée. Soient deux v.a. X_1,X_2 dépendantes, la structure de dépendance suit une copule AMH avec le paramètre de dépendance α. Alors,

$$\begin{aligned}
F_X(X_1, X_2) &= C_\alpha(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\
&= \mathcal{L}_\theta(\mathcal{L}_\theta^{-1}((F_{X_1}(x_1)) + \mathcal{L}_\theta(\mathcal{L}_\theta^{-1}((F_{X_2}(x_2))) \\
&= \sum_{\theta=1}^{\infty} e^{-\theta\mathcal{L}_\theta(\mathcal{L}_\theta^{-1}((F_{X_1}(x_1))} e^{-\theta\mathcal{L}_\theta(\mathcal{L}_\theta^{-1}((F_{X_2}(x_2))} f_\Theta(\theta) \\
&= \sum_{\theta=1}^{\infty} \Big[\Big(\frac{1-\alpha}{F_{X_1}(x_1)} + \alpha\Big)\Big(\frac{1-\alpha}{F_{X_2}(x_2)} + \alpha\Big)\Big]^{-\theta} f_\Theta(\theta)
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant étendre notre étude sur la copule archimédienne imbriquée. La copule archimédienne imbriquée introduit une structure de dépendance hiérarchique. Dans le cas du modèle à étudier, nous pouvons présenter le modèle dans la figure suivante :



Nous avons alors au premier niveau entre X_1 et X_2 une structure de dépendance ψ_1 dont la fonction de répartition conjointe est définie par une copule AMH avec paramètre α_1. Entre X_3,X_4 et X_5 une structure de dépendance ψ_2 dont la fonction de répartition conjointe est définie par une copule AMH avec paramètre α_2. Au deuxième niveau, entre (X_1, X_2) et (X_3, X_4, X_5), il y a une structure de dépendance ψ_0 dont la fonction de répartition conjointe est définie par une copule AMH avec paramètre α_0. Les $X_i, i = 1, ..., 5$ suit une loi $Binomial(10, 0.05i)$.

Afin de simplifier notre présentation, nous re-écrivons les X_1 étant X_{11}, X_2 étant X_{12}, X_3 étant X_{21}, X_4 étant X_{22} et X_5 étant X_{23}. La fonction de répartition pour X_{ij} est notée comme u_{ij}.

La fonction de la copule pourrait donc être écrite comme

$$\begin{aligned}
C(\boldsymbol{u}) &= \psi_0\{\psi_0^{-1}[\psi_1(\psi_1^{-1}(u_{11}) + \psi_1^{-1}(u_{12}))] + \psi_0^{-1}[\psi_2(\psi_2^{-1}(u_{21}) + \psi_2^{-1}(u_{22}) + \psi_2^{-1}(u_{23}))]\} \\
&= \int_0^\infty \psi_{01}\Big(\psi_1^{-1}(u_{11}) + \psi_1^{-1}(u_{12}); \theta_0\Big) * \psi_{02}\Big(\psi_2^{-1}(u_{21}) + \psi_2^{-1}(u_{22}) + \psi_2^{-1}(u_{23}); \theta_0\Big)\, dF_{\Theta_0}(\theta_0)
\end{aligned}$$

Prenez une branche de la copule

$$\psi_{01}\Big(\psi_1^{-1}(u_{11}) + \psi_1^{-1}(u_{12}); \theta_0\Big) = \int_0^\infty F_{X_{11}|\Theta_0=\theta_0,\Theta_{01}=\theta_{01}}(x_{11}) F_{X_{12}|\Theta_0=\theta_0,\Theta_{01}=\theta_{01}}(x_{12})\, dF_{\Theta_{01}}(\theta_{01}),$$

nous voulons calculer la fonction $F_{X_{11}|\Theta_0=\theta_0,\Theta_{01}=\theta_{01}}(x_{11})$.

Afin de résoudre le problème, nous transformons

$$F_{X_{11}|\Theta_0=\theta_0,\Theta_{01}=\theta_{01}}(x_{11}) = H_{11}(x_{11})^{\theta_{01}}.$$

Avec quelques manipulations, nous obtenons

$$H_{11}(x_{11}) = exp[-\mathcal{L}_{\theta_1}(u_{11})] = \frac{u_{11}}{1-\alpha_1+\alpha_1 u_{11}}.$$

Donc

$$F_{X_{11}|\Theta_0=\theta_0,\Theta_{01}=\theta_{01}}(x_{11}) = \Big(\frac{u_{11}}{1-\alpha_1+\alpha_1 u_{11}}\Big)^{\theta_{01}}$$

et

$$F_{X_{11}|\Theta_0=\theta_0}(x_{11}) = \Big(\frac{u_{11}}{1-\alpha_0+\alpha_0 u_{11}}\Big)^{\theta_0}$$

J'ai beaucoup essayé de dériver la fonction de masse $f_{X_{11}|\Theta_0=\theta_0,\Theta_{01}=\theta_{01}}(x_{11})$. Mais il semble difficile. Alors, je crois que la transformation de la fonction de masse pour f est plutôt numérique.

Le projet est devenir donc plutôt un exercice numérique. En suivant l'algorithme 18 de l'article, on peut obtenir la fonction de masse $f_{X_{11}|\Theta_0=\theta_0,\Theta_{01}=\theta_{01}}(x_{11})$. Ce qui est essentiel pour le calcul de la fonction masse de $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.

5 Bonus

Q1 : †

Q2 : actuaire et statisticien Source : https ://en.wikipedia.org/wiki/Bruno$_deFinetti$

Q3 : Jacob Bernoulli Source : https ://www.probabilisticworld.com/bernoulli-distribution-intuitive-understanding/History$_of_the_Bernoulli_distribution$

"The distribution is named after Bernoulli because he was the one who explicitly defined what we today call a Bernoulli trial. Namely, an experiment with only two possible outcomes. This tradition started from Bernoulli himself in his book Ars Conjectandi ("The Art of Conjecturing"), published 8 years after his death."

6 Conclusion

Avec ce travail et également ce que nous avons appris du cours, j'ai approfondi mes connaissances pour le modèle de Poisson composée multivariée. La prochaine étape pour moi est de comprendre l'application de ces modèles, par exemple, comment déterminer l'utilisation du modèle AR(1) et MA(1), quand il faut les généraliser.

J'ai également développé des intérêts pour les copulas. Si possible, j'aimerais continuer approfondir mes connaissances sur ce sujet. Par contre, avec les exercices, je trouve que ce n'est pas toujours facile de travailler avec les copulas sur la somme des variables. Cela pourrait être un domaine intéressant à explorer. D'ailleurs, les autres transformations des variables sur la copula sont intéressant aussi.

Pour conclure, dans le cours, nous n'avons pas seulement acquis les connaissances dans les modèles, mais également la façon pour la recherche et la présentation. Nous avons le fun pour le cours. Merci Étienne. Merci Christopher. Et merci Olivier, Rostan et Benjamin.

Références

[Cossette et al., 2018] Cossette, H., Marceau, E., Mtalai, I., and Veilleux, D. (2018). Dependent risk models with archimedean copulas : A computational strategy based on common mixtures and applications. *Insurance : Mathematics and Economics*, 78 :53–71.

[Cossette et al., 2011] Cossette, H., Marceau, É., and Toureille, F. (2011). Risk models based on time series for count random variables. *Insurance : Mathematics and Economics*, 48(1) :19–28.