

# Modèle binomial markovien

Propriétés et application à la théorie de la ruine

Présenté par

**Olivier Côté**

**ACT-7008**

24 février 2022



# Table des matières

---

- 1 Processus d'occurrence
- 2 Processus du montant des pertes
- 3 Probabilité de ruine sur un horizon fini
- 4 Conclusion

# Processus d'occurrence

- 1 Processus d'occurrence
  - Définitions
  - Exemples d'application
  - Résultats importants
  - Fonction génératrice des probabilités
  - Exemple
- 2 Processus du montant des pertes
- 3 Probabilité de ruine sur un horizon fini
- 4 Conclusion

## Variable aléatoire d'occurrence de sinistre

---

Nous allons commencer doucement avec une seule suite de variable aléatoire.

Soit  $I_k$  une variable aléatoire indiquant la présence d'un sinistre à la période de temps  $k$ .

Comme dans Cossette et collab. (2003), on définit  $\{I_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$  comme étant une chaîne de Markov avec les états  $\{0, 1\}$  et la matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \pi)q & (1 - \pi)q \\ (1 - \pi)(1 - q) & \pi + (1 - \pi)q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

## Cas limites de $\pi$

---

On a

$$P = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \pi)q & (1 - \pi)q \\ (1 - \pi)(1 - q) & \pi + (1 - \pi)q \end{bmatrix}$$

On doit avoir les inégalités suivantes :

$$0 \leq 1 - (1 - \pi)q \leq 1$$

$$0 \leq (1 - \pi)(1 - q) \leq 1$$

$$-1 \left( \frac{1 - q}{q} \right) \leq \pi \leq 1$$

$$-1 \left( \frac{q}{1 - q} \right) \leq \pi \leq 1$$

$$-1 \cdot \min \left( \frac{1 - q}{q}, \frac{q}{1 - q} \right) \leq \pi \leq \frac{1}{q}$$

## Cas limites de $\pi$

---

On a

$$P = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \pi)q & (1 - \pi)q \\ (1 - \pi)(1 - q) & \pi + (1 - \pi)q \end{bmatrix}$$

On doit avoir les inégalités suivantes :

$$0 \leq 1 - (1 - \pi)q \leq 1$$

$$-1 \left( \frac{1 - q}{q} \right) \leq \pi \leq 1$$

$$0 \leq (1 - \pi)(1 - q) \leq 1$$

$$-1 \left( \frac{q}{1 - q} \right) \leq \pi \leq 1$$

$$-1 \cdot \min \left( \frac{1 - q}{q}, \frac{q}{1 - q} \right) \leq \pi \leq \frac{1}{q}$$

## Cas limites de $\pi$

---

On a

$$P = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \pi)q & (1 - \pi)q \\ (1 - \pi)(1 - q) & \pi + (1 - \pi)q \end{bmatrix}$$

On doit avoir les inégalités suivantes :

$$0 \leq 1 - (1 - \pi)q \leq 1$$

$$-1 \left( \frac{1 - q}{q} \right) \leq \pi \leq 1$$

$$0 \leq (1 - \pi)(1 - q) \leq 1$$

$$-1 \left( \frac{q}{1 - q} \right) \leq \pi \leq 1$$

$$-1 \cdot \min \left( \frac{1 - q}{q}, \frac{q}{1 - q} \right) \leq \pi \leq \frac{1}{q}$$

# Visualisation de la borne minimale

Borne minimale du paramètre  $\pi$  selon  $q$

Pour un modèle binomial markovien

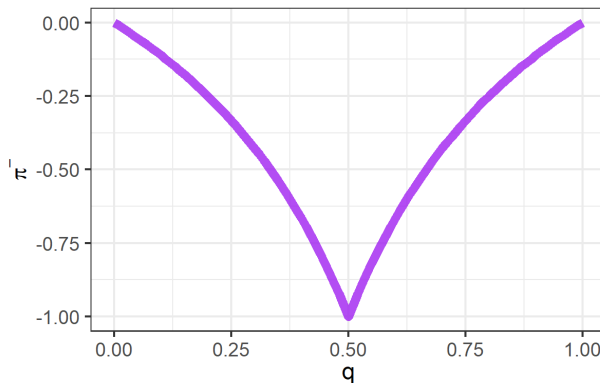


Figure – Visualisation de  $\pi^-$  selon  $q$



## Matrice de transition

---

Pour la matrice de transition, on peut réécrire

$$P = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ 1-q & q \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} q & -q \\ -(1-q) & (1-q) \end{bmatrix} = A + \pi B$$

On a  $A, B$  idempotentes et  $AB = BA = 0$ . En se servant de ces propriétés, on obtient

$$P^n = A + \pi^n B = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \pi^n)q & (1 - \pi^n)q \\ (1 - \pi^n)(1 - q) & q + \pi^n(1 - q) \end{bmatrix}$$

Les probabilités initiales du processus sont

$$P(I_0 = 1) = q = 1 - P(I_0 = 0)$$

## Probabilités initiales du processus

---

Avec les éléments de la dernière diapositive, on obtient

$$\begin{aligned}P(I_k = 1) &= P(I_0 = 1)P_{11}^k + P(I_0 = 0)P_{01}^k \\&= qP_{11}^k + (1 - q)P_{01}^k \\&= q\left(q + \pi^k(1 - q)\right) + (1 - q)(q - \pi^k q) \\&= q^2 + q\pi^k(1 - q) + q - q^2 - q\pi^k(1 - q) \\&= q\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la suite de variable aléatoire est stationnaire (Cossette et collab., 2003). On peut aussi déduire que

$$I_k \sim \text{Bern}(q)$$

## Probabilité conditionnelle

---

À première vue, nous avons une suite de variables aléatoires indépendantes.

Par contre, on constate que la probabilité d'observer une occurrence à une année  $k$  sachant une occurrence à l'année  $j$  ( $k > j$ ) fera usage de la matrice de transition

$$P(I_k = 1 | I_j = 1) = P_{11}^{k-j}$$

On introduit une dépendance temporelle entre nos variables bernoullis grâce au paramètre  $\pi$  de notre chaîne de Markov. ( $\pi = 0$  rime avec indépendance)

## Application du modèle binomial markovien

---

Le modèle binomial markovien est applicable dans tous les contextes où on croit qu'il y a corrélation entre des occurrences successives.

- Météorologie (Klotz, 1973)
- Marchés boursiers (Dekking et Kong, 2011)
- Génétique (Edwards, 1960)
- Contrôle de la qualité (Dekking et Kong, 2011)

## Covariance entre éléments distinct du processus

---

Nous aurons besoin de la covariance entre  $I_j$  et  $I_{j+h}$

$$\begin{aligned}\text{Cov}[I_j, I_{j+h}] &= E[I_j I_{j+h}] - E[I_j]E[I_{j+h}] \\&= P(I_j = 1, I_{j+h} = 1) - P(I_j = 1)P(I_{j+h} = 1) \\&= P(I_{j+h} = 1 | I_j = 1)P(I_j = 1) - P(I_j = 1)P(I_{j+h} = 1) \\&= P_{11}^h P(I_j = 1) - P(I_j = 1)P(I_{j+h} = 1) \\&= (q + \pi^h(1 - q))q - q^2 \\&= q^2 + \pi^h(1 - q)q - q^2 \\&= q(1 - q)\pi^h\end{aligned}$$

Ce calcul nous sera utile pour la suite.

## Corrélation entre éléments distinct du processus

---

On peut aussi s'intéresser à la corrélation entre  $I_j$  et  $I_{j+h}$

$$\begin{aligned}\rho_P(I_j, I_{j+h}) &= \frac{\text{Cov}[I_j, I_{j+h}]}{\sqrt{\text{Var}(I_j)\text{Var}(I_{j+h})}} \\ &= \frac{\text{Cov}[I_j, I_{j+h}]}{\text{Var}(I_j)} \quad \text{i.d.} \\ &= \frac{q(1-q)\pi^h}{q(1-q)} \\ &= \pi^h\end{aligned}$$

La corrélation ne dépend pas de  $q$ , seulement de  $\pi$

## Somme des v.a. d'occurrence

---

Somme d'occurrences (Cossette et collab., 2003)

On définit

$$M_k = I_1 + \dots + I_k$$









On dit que  $M_k$  obéit à une loi Markov-binomiale avec paramètres  $k, q$  et  $\pi$  (paramètre de dépendance).

On a

$$E[M_k] = kq$$

## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					



## Quiz 1.1

---

On a

$$W_k = \frac{M_k}{k} = \frac{I_1 + \dots + I_k}{k}$$

On veut trouver  $E[W_k]$

$$E[W_k] = \frac{1}{k}E[M_k] = \frac{1}{k}kq = q$$

## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Variance selon la méthode de Cossette et collab. (2003)

Pour la variance, on a

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[M_k] &= \sum_{j=1}^k \text{Var}[I_j] + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{h=1}^{k-j} \text{Cov}[I_j, I_{j+h}] \\
 &= kq(1-q) + 2q(1-q) \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{h=1}^{k-j} \pi^h \\
 &= kq(1-q) + 2q(1-q)\pi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \pi^{k-j}}{1 - \pi} \\
 &= kq(1-q) + \frac{2q(1-q)\pi}{1 - \pi} \sum_{j=1}^{k-1} 1 - \pi^{k-j} \\
 &= kq(1-q) + \frac{2q(1-q)\pi}{1 - \pi} \left( (k-1) - \frac{\pi(1 - \pi^{k-1})}{1 - \pi} \right)
 \end{aligned}$$

## Variance selon la méthode de Dekking et Kong (2011)

On calcule le deuxième moment

$$\begin{aligned}
 E[M_k^2] &= E \left[ \left( \sum_{i=1}^k I_i \right)^2 \right] = E \left[ \sum_{i=1}^k I_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_j I_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^k P(I_i = 1) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(I_j = 1, I_i = 1) \\
 &= kq + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(I_j = 1 | I_i = 1) P(I_i = 1) \\
 &= kq + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} P_{11}^{j-i} q \\
 &= kq + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (q + \pi^{i-j}(1-q))q
 \end{aligned}$$

## Variance selon la méthode de Dekking et Kong (2011)

$$\begin{aligned}
 E[M_k^2] &= kq + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (q + \pi^{i-j}(1-q))q \\
 &= kq + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (q^2 + \pi^{i-j}q(1-q)) \\
 &= kq + 2q^2 \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 \right) + 2q(1-q) \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pi^{i-j} \right) \\
 &= kq + q^2 k(k-1) + 2q(1-q) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pi^{i-j} \\
 &= kq + q^2 k(k-1) + 2q(1-q) \frac{1 - \pi^k - k(1-\pi)}{(1-\pi^{-1})(1-\pi)} \\
 &= kq + q^2 k(k-1) - \frac{2\pi q(1-q)(1-\pi^k)}{(1-\pi)^2} + \frac{2q(1-q)\pi k}{1-\pi}
 \end{aligned}$$

## Variance selon la méthode de Dekking et Kong (2011)

---

$$\begin{aligned}\text{Var}[M_k] &= \mathbb{E}[M_k^2] - \mathbb{E}[M_k]^2 \\ &= kq + q^2 k(k-1) - \frac{2\pi q(1-q)(1-\pi^k)}{(1-\pi)^2} + \frac{2q(1-q)\pi k}{1-\pi} - (kq)^2 \\ &= kq(1-q) - \frac{2\pi q(1-q)(1-\pi^k)}{(1-\pi)^2} + \frac{2q(1-q)\pi k}{1-\pi}\end{aligned}$$

## Variance de $M_k$ selon Dekking et Kong (2011) et Cossette et collab. (2003)







---

On peut réarranger pour obtenir l'**expression exacte** de Cossette et collab. (2003)

$$\begin{aligned}\text{Var}[M_k] &= kq(1-q) - \frac{2\pi q(1-q)(1-\pi^k)}{(1-\pi)^2} + \frac{2q(1-q)\pi k}{1-\pi} \\ &= kq(1-q) + 2q(1-q) \frac{\pi}{1-\pi} \left( k - \frac{(1-\pi^k)}{(1-\pi)} \right) \\ &= kq(1-q) + 2q(1-q) \frac{\pi}{1-\pi} \left( (k-1) - \frac{\pi(1-\pi^{k-1})}{(1-\pi)} \right)\end{aligned}$$

## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					



## Quiz 1.2

---

On veut trouver  $Var[W_k]$







$$\begin{aligned} Var[W_k] &= Var\left[\frac{M_k}{k}\right] = \frac{1}{k^2} Var[M_k] \\ &= \frac{1}{k^2} \left\{ kq(1-q) + 2q(1-q) \frac{\pi}{1-\pi} \left( (k-1) - \frac{\pi(1-\pi^{k-1})}{(1-\pi)} \right) \right\} \\ &= \frac{q(1-q)}{k} + \frac{2q(1-q)}{k} \frac{\pi}{1-\pi} \left( \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{\pi(1-\pi^{k-1})}{k(1-\pi)} \right) \end{aligned}$$

On constate aisément que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Var[W_k] = 0 \quad (\text{utile plus tard})$$




## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Quiz 1.3

Soit une fonction croissante  $g(\cdot)$  sur le domaine de  $X$  :

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= E[g(X)1_{\{X \in [0, \alpha[ \}} + g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \quad \forall \alpha > 0 \\ &\geq E[g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \end{aligned}$$

Ensuite, puisque  $g(\cdot)$  est une application strictement dans  $\mathbb{R}^+$ , on a

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\geq E[g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \\ &\geq E[g(\alpha)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \\ &= g(\alpha)P(X \geq \alpha) \end{aligned}$$

Finalement, on réarrange

Inégalité de Tchebychev

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\alpha)}$$

## Quiz 1.3

Soit une fonction croissante  $g(\cdot)$  sur le domaine de  $X$  :

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= E[g(X)1_{\{X \in [0, \alpha[ \}} + g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \quad \forall \alpha > 0 \\ &\geq E[g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \end{aligned}$$

Ensuite, puisque  $g(\cdot)$  est une application strictement dans  $\mathbb{R}^+$ , on a

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\geq E[g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \\ &\geq E[g(\alpha)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \\ &= g(\alpha)P(X \geq \alpha) \end{aligned}$$

Finalement, on réarrange

Inégalité de Tchebychev

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\alpha)}$$

## Quiz 1.3

Soit une fonction croissante  $g(\cdot)$  sur le domaine de  $X$  :

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= E[g(X)1_{\{X \in [0, \alpha[ \}} + g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \quad \forall \alpha > 0 \\ &\geq E[g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \end{aligned}$$

Ensuite, puisque  $g(\cdot)$  est une application strictement dans  $\mathbb{R}^+$ , on a

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\geq E[g(X)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \\ &\geq E[g(\alpha)1_{\{X \in [\alpha, \infty[ \}}] \\ &= g(\alpha)P(X \geq \alpha) \end{aligned}$$

Finalement, on réarrange

Inégalité de Tchebychev

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\alpha)}$$

## Quiz 1.3

### Inégalité de Tchebychev

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\alpha)}$$

Dans notre cas, on a  $g(u) = u$ ,  $X = (W_k - q)^2$  et  $\alpha = \varepsilon^2$

$$P((W_k - q)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(W_k - q)^2]}{\varepsilon^2}$$

$$P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[W_k]}{\varepsilon^2}$$





Il s'agit d'une inégalité bien connue

### Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[W_k]}{\varepsilon^2}$$

## Carte du quiz



---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					



## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Quiz 1.4

### Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[W_k]}{\varepsilon^2}$$

On a donc

$$0 \leq P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[W_k]}{\varepsilon^2}$$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Var}[W_k]$$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq 0$$

Par le théorème du sandwich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) = 0$$

## Quiz 1.4

### Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[W_k]}{\varepsilon^2}$$

On a donc

$$0 \leq P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[W_k]}{\varepsilon^2}$$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Var}[W_k]$$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) \leq 0$$

Par le théorème du sandwich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) = 0$$

## Quiz 1.4

---

On a donc




$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|W_k - E[W_k]| \geq \varepsilon) = 0$$

Il s'agit précisément de la condition nécessaire et suffisante pour dire

$$W_k \xrightarrow{\mathbb{P}} E[W_k]$$


## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Quiz 1.5

Pour interpréter, supposons

$$\text{Cov}(I_j, I_{j+h}) = q(1-q)\pi^h \approx 0 \quad \forall h > b$$

où  $b$  est une constante relativement élevée. Lorsque  $k$  est peu élevé, alors  $b$  peut occuper une grande proportion de  $k$ .

- La dépendance est locale, mais  $b/k > 0$
- Si ma maison brûle, le coût moyen en sinistre d'incendie de ma rue risque d'augmenter, surtout avec la dépendance.

Lorsque  $k$  très élevé,  $b$  sera une proportion quasi nulle de  $k$

- La dépendance est locale, mais  $b/k \approx 0$ .
- Si ma maison brûle, le coût moyen en sinistre de la planète terre ne risque pas d'augmenter, même avec la dépendance

## Quiz 1.5

---

Pour interpréter, supposons

$$\text{Cov}(I_j, I_{j+h}) = q(1-q)\pi^h \approx 0 \quad \forall h > b$$

où  $b$  est une constante relativement élevée. Lorsque  $k$  est peu élevé, alors  $b$  peut occuper une grande proportion de  $k$ .

- La dépendance est locale, mais  $b/k > 0$
- Si ma maison brûle, le coût moyen en sinistre d'incendie de ma rue risque d'augmenter, surtout avec la dépendance.

Lorsque  $k$  très élevé,  $b$  sera une proportion quasi nulle de  $k$

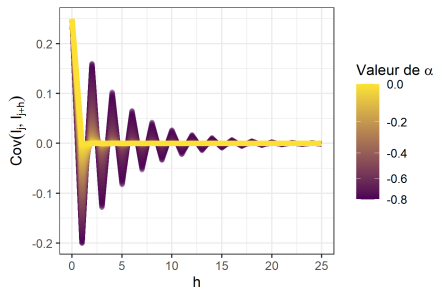
- La dépendance est locale, mais  $b/k \approx 0$ .
- Si ma maison brûle, le coût moyen en sinistre de la planète terre ne risque pas d'augmenter, même avec la dépendance



## Quiz 1.5

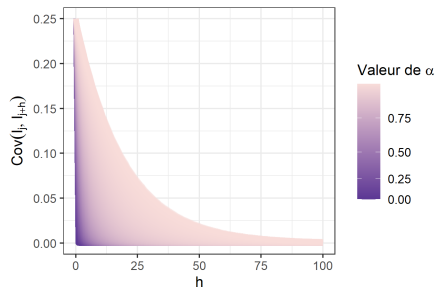
Covariance entre  $I_j$  et  $I_{j+h}$  pour  $\pi < 0$

$q = 0.5$




Covariance entre  $I_j$  et  $I_{j+h}$  pour  $\pi > 0$

$q = 0.5$






## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Quiz 2 et 3

### Inégalité de Tchebychev

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[g(X)]}{g(\alpha)}$$

Dans notre cas, on a  $X = M_k$ ,  $\alpha = (1 + \delta)nq$  et  $g(u) = e^{tu}$ . On obtient

$$\begin{aligned} P(M_k \geq (1 + \delta)nq) &\leq e^{-t(1+\delta)nq} M_{M_k}(t) \\ &= \exp \{ \ln M_{M_k}(t) - t(1 + \delta)nq \} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

On observe que

$$P(M_k \geq (1 + \delta)nq) \leq \exp \left\{ \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \ln M_{M_k}(t) - t(1 + \delta)nq \} \right\} \quad (1)$$

## Quiz 2 et 3

---

Nous avons

$$P(M_k \geq (1 + \delta)nq) \leq e^{\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \ln M_{M_k}(t) - t(1 + \delta)nq \}} \quad (2)$$

On peut optimiser numériquement ou dériver selon  $t$ . La dérivée de matrice risque d'être désagréable. On peut aussi continuer de borner

$$\begin{aligned} M_{M_k}(t) &= E[e^{tM_k}] \\ &\leq E[e^{tkI_1}] \\ &= (1 - q) + qe^{tk} = M_{M_k^+}(t) \end{aligned}$$

On peut montrer que cette expression est minimisée pour

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{1 - q}{kq} \right)$$

## Quiz 2 et 3

---

Nous avons

$$M_{M_k^+}(t^*) = (1 - q) + \frac{1 - q}{k}$$

On a finalement

$$P(M_k \geq (1 + \delta)nq) \leq e^{\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \{ \ln M_{M_k}(t) - t(1 + \delta)nq \}} \leq e^{\ln(1 - q + \frac{1 - q}{k}) - t(1 + \delta)nq}$$

## Carte du quiz



---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					



## Carte du quiz

---

	1	2	3	4	5
Question 1					
Question 2					
Question 3					

## Exemple numérique avec $M_k$

### Exemple associé à la table 1 de Cossette et collab. (2003)

- Calculer  $P(M_k = j)$  pour  $j = 0, 1, \dots, 20$
- Utiliser  $k = 20$  et  $q = 0.1$
- Répéter l'exercice pour  $\pi = 0$  (indépendance), 0.2, 0.4, 0.6 et 0.8

# Résolution du problème

---

Le problème se résout de plusieurs manières

- 1 En utilisant la fonction génératrice des probabilités (Gani, 1982)
- 2 En utilisant la fonction de masse de probabilité (Dekking et Kong, 2011)
- 3 En utilisant une approximation Poisson-Géométrique

## Fonction génératrice des probabilités matricielle

Gani (1982) a proposé d'utiliser la forme suivante pour la fonction génératrice des probabilités de  $M_k$  ( $0 \leq s \leq 1$ )

$$P_{M_k}(s) = \begin{bmatrix} 1 - q & qs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - (1 - \pi)q & (1 - \pi)qs \\ (1 - \pi)(1 - q) & [(1 - \pi)q + \pi]s \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il est possible d'exprimer la matrice centrale sous sa forme canonique Gani (1982)

$$P_{M_k}(s) = \begin{bmatrix} 1 - q & qs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Où  $x_1, x_2, y_1$  et  $y_2$  sont les composantes des vecteurs propres associés aux vecteurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

## Code R pour générer $P$ I

```
matrix_bm <- function(p, pi, s, power = 1, eig = FALSE){  
  if(power <= 0) return(diag(2)) # Condition d'arrêt  
  
  p_00 <- 1- (1-pi) * p           # élément 00  
  p_01 <- (1 - pi) * p * s        # élément 01  
  p_10 <- (1 - pi) * (1 - p)      # élément 10  
  p_11 <- ((1 - pi) * p + pi) * s # élément 11  
  
  mat <- matrix(c(p_00, p_01,      # Matrice P  
                  p_10, p_11),  
                byrow = TRUE,  
                nrow = 2) # On poursuit à la prochaine diapo
```

## Code R pour générer $P$ II

```
if(eig == TRUE){ # Si on veut utiliser la matrice canonique
  a <- eigen(mat) # On va chercher vecteurs/valeurs propres
  return(a$vectors %*%           # Vecteurs propres
         diag(a$values^(power)) %*% # Matrice diagonale avec lambda
         solve(a$vectors))       # Inverse des vecteurs propres
}
## Sinon, on va multiplier manuellement
mat %*%           # multiplication matricielle
matrix_bm(p, pi, s,           # Même paramètres
          power = power - 1, # (relation récursive)
          eig = FALSE)
} # fin de la fonction
```

## Code R pour $P_{M_k}(s)$ selon l'approche Gani (1982)

```
## fgp de
P_M_mat <- function(n, s_tot, p, pi, eig = FALSE){
  ## Possibilité de vecteur pour s
  sapply(s_tot, function(s){
    left <- matrix(c(1 - p, p * s), nrow = 1) # Élément de gauche
    middle <- matrix_bm(p, pi, s, power = n - 1,
                        eig = eig) # Élément du milieu
    right <- matrix(c(1, 1), nrow = 2) # Élément de droite
    (left %*% middle %*% right)[1, 1] # On retourne
  })
}
```

## Fonction de masse de probabilité explicite

---

Dekking et Kong (2011) proposent, en jouant avec certaines relations récursives, une forme explicite peu élégante pour la fonction de masse de probabilité de  $M_k$

$$f_{M_k}(j) = \begin{cases} (1-q)(P_{00})^k + qP_{10}(P_{00})^{k-1} & j = k \\ \text{Trop lourd pour cette présentation} & 1 \leq j \leq k-1 \\ (1-q)P_{01}(P_{11})^{k-1} + q(P_{11})^k & j = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



## Code R pour $f_{M_k}(s)$ selon Dekking et Kong (2011) I

Fonctions utiles aux prochaines diapositives.

```
## Notation de Dekkingkong
c_dk <- function(j, k, n, vs, vf, a, b){
  term1 <- vs * choose(n - 2 - j, k - 1)
  term2 <- (vs * a + vf * b)/(1 - b) * choose(n - 2 - j, k)
  term3 <- (vf * a * b)/(1 - b)^2 * choose(n - 2 - j, k + 1)
  return(term1 + term2 + term3)
}

## Notation de Dekkingkong
del <-function(a, b){
  a*b/((1 - a) * (1 - b))
}
```

## Code R pour $f_{M_k}(s)$ selon Dekking et Kong (2011) II

```
## fmp avec notation dekking kong
f_M <- function(n, j, vs, vf = 1 - vs, a, b){
  if(j < 0 || j > n) return(0) # Hors domaine
  if(j == 0) return(vf * (1 - b)^(n - 1)) # Valeur min
  if(j == n) return(vs * (1 - a)^(n - 1)) # Valeur max

  terms <- sapply(0:(j - 1), function(k){
    choose(j - 1, k) * del(a, b)^k * c_dk(j = j-1, k = k,
                                             n = n, vs = vs, vf = vf,
                                             a = a, b = b)
  })
  (1 - b)^(n - j) * (1 - a)^(j - 1) * sum(terms) # Retourner
}
```

## Code R pour $f_{M_k}(s)$ selon Dekking et Kong (2011) III

```
## Notation Cossette 2003 dans la fmp de Dekkingkong
f_M_applied <- function(n, j_tot, p, pi){
  mp <- matrix_bm(p = p, pi = pi, s = 1, power = 1, eig = FALSE)
  sapply(j_tot, function(j){ # Pour chaque j
    term1 <- ifelse(j == 0, mp[1,1]^n, ifelse(j == n,
      mp[1, 2] * mp[2,2]^(n - 1),
      f_M(n, n - j, vs = mp[1,1], vf = mp[1, 2],
      a = (1 - pi) * p, b = (1 - pi) * (1 - p))))
    term2 <- ifelse(j == 0, mp[2, 1] * mp[1,1]^(n - 1),
      ifelse(j == n, mp[2,2]^n,
      f_M(n, n - j, vs = mp[2,1],
      vf = mp[2, 2], a = (1 - pi) * p,
      b = (1 - pi) * (1 - p))))
    (1 - p) * term1 + p * term2}}}
```

## Code R pour $P_{M_k}(s)$ selon Dekking et Kong (2011)

On peut se servir de  $f_{M_k}$  pour créer une fonction génératrice de probabilité

```
## fgp Cossette et collab 2003 avec fmp de Dekking kong
P_M_expl <- function(n, s_tot, p, pi){
  sapply(s_tot, function(s){ # Pour chaque s
    probs <- sapply(0:n, function(j){
      f_M_applied(n, j, p = p, pi = pi)
    }) # Évaluer les probs

    sum(s^(0:n) * probs) # Appliquer la définition d'une fgp
  })
}
```

## Approximation Poisson-Géométrique

---

Il peut être démontré (Cossette et collab., 2003) que si  $M_k$  suit une loi binomiale markovienne stationnaire, alors

$$\lim_{\substack{qk \rightarrow \lambda \\ k \rightarrow \infty}} M_k \rightarrow N = \begin{cases} \sum_{j=1}^K Z_j, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases}$$

Où  $K \sim \text{Pois}((1 - \pi)\lambda)$  et  $Z_j \sim \text{Géo}(1 - \pi)$ .

- Ainsi, utiliser une approximation Poisson-Géométrique peut nous permettre d'avoir une **expression plus familière**.
- Par contre, il s'agit d'une approximation qui est **possiblement très loin de la réalité**.

## Code R pour $P_N$ avec l'approximation Poisson-Géométrique

```
P_Z <- function(s, pi){                                # FGP de Z
  (1 - pi) * s / (1 - pi * s)                          # Géo
}

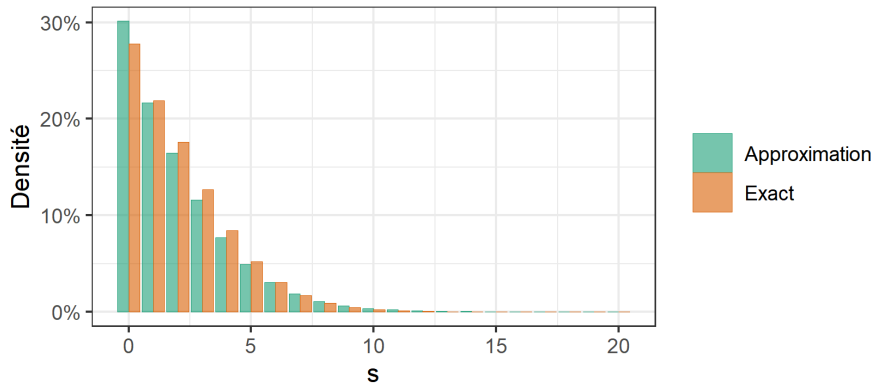
P_K <- function(s, lam){                                # FGP de K
  exp(lam * (s - 1))                                    # Pois
}

P_N <- function(n, s_tot, p, pi){                       # FGP de N
  lam <- n * p
  sapply(s_tot, function(ss){
    P_K(P_Z(ss, pi), lam = (1 - pi) * lam) # Loi composée
  })
}
```

# Comparaison entre l'approximation et la distribution exacte

Comparaison entre  $f_{M_{20}}(s)$  et  $f_N(s)$

Modèle binomial markovien avec  $\pi = 0.4$  et  $q = 0.1$



## Calcul pour la Table 1 de Cossette et collab. (2003) I

On commence par utiliser la fonction génératrice des probabilité de Gani (1982) et FFT.

```
pi_to_calculate <- c(0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8)
table1_mk <- sapply(pi_to_calculate, function(piii){
  f_const <- c(0, 1)      # Sévérité dégénérée à 1
  aa <- 2^8                # Longueur désirée
  nb <- length(f_const)   # Longueur actuelle
  ftc <- fft(c(f_const, rep(0, aa - nb))) # FFT sev
  f_M_k <- Re(fft(P_M_mat(20, ftc, 0.1, pi = piii, eig = TRUE),
    TRUE))/aa # On inverse avec la fgp de Gani
  return(round(f_M_k, 6)[1:21])
})
```



## Calcul pour la Table 1 de Cossette et collab. (2003) II

On peut ensuite utiliser le format explicite de Dekking et Kong (2011).

```
table1_mk2 <- sapply(pi_to_graph, function(piii){  
  ## Nous avons le format explicite  
  f_M_k <- f_M_applied(20, 1:1e3, p = 0.1,  
                       pi = piii)  
  return(round(f_M_k, 6)[1:21])  
})
```

## Calcul pour la Table 1 de Cossette et collab. (2003) III

Finalement, on peut approximer avec la loi Poisson-Géométrique

```
table1_mk3 <- sapply(pi_to_graph2, function(piii){  
  f_const <- c(0, 1)      # Sévérité dégénérée à 1  
  aa <- 2^8               # Longueur désirée  
  nb <- length(f_const)  # Longueur actuelle  
  ftc <- fft(c(f_const, rep(0, aa - nb))) # FFT sev  
  f_M_k <- Re(fft(P_N(20, ftc, 0.1, pi = piii), TRUE))/aa # On inn  
  return(round(f_M_k, 6)[1:21])  
})
```

## Reconstitution de la Table 1 de Cossette et collab. (2003)

$j$	$\pi = 0$	$\pi = 0.2$	$\pi = 0.4$	$\pi = 0.6$	$\pi = 0.8$
0	0.121577	0.184591	0.277761	0.414377	0.613109
1	0.270170	0.258218	0.218789	0.151075	0.066393
2	0.285180	0.229564	0.176109	0.120051	0.056652
3	0.190120	0.158101	0.126901	0.092122	0.048010
4	0.089779	0.091064	0.084107	0.068579	0.040413
5	0.031921	0.045603	0.052058	0.049682	0.033794
6	0.008867	0.020308	0.030371	0.035100	0.028072
7	0.001970	0.008155	0.016801	0.024217	0.023165
8	0.000356	0.002979	0.008845	0.016331	0.018987
9	0.000053	0.000996	0.004442	0.010769	0.015456
10	0.000006	0.000305	0.002130	0.006944	0.012493
11	0.000001	0.000086	0.000975	0.004376	0.010025

**Table** -  $P(M_{20} = j)$  pour  $q = 0.1$  et  $\pi \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6\}$

# Processus du montant des pertes

- 1 Processus d'occurrence
- 2 **Processus du montant des pertes**
  - Définition
  - Résultats importants
  - Aggrégation
  - Exemples numériques
- 3 Probabilité de ruine sur un horizon fini
- 4 Conclusion

## Modèle binomial markovien composé

Maintenant que nous avons toutes les quantités d'intérêt concernant notre processus d'occurrence de sinistres, on peut s'intéresser au montant total des pertes associés à ces occurrences.

On définit

$$S_k = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M_k} X_j, & M_k > 0 \\ 0, & M_k = 0 \end{cases}$$

On définit (ou rappelle) donc

- $X_j$  fait partie d'une suite de variables aléatoires iid qui représente le montant du  $j^{\text{ème}}$  sinistre.
- $M_k$  représente le nombre total de réclamations sur les  $k$  périodes.
- $S_k$  qui représente le montant total des coûts sur les  $k$  périodes.

## Espérance et variance des coûts $S_k$

---

On peut calculer l'espérance comme suit

$$\begin{aligned}E[S_k] &= E[M_k]E[X] \\ &= kqE[X]\end{aligned}$$

La variance s'obtient comme suit

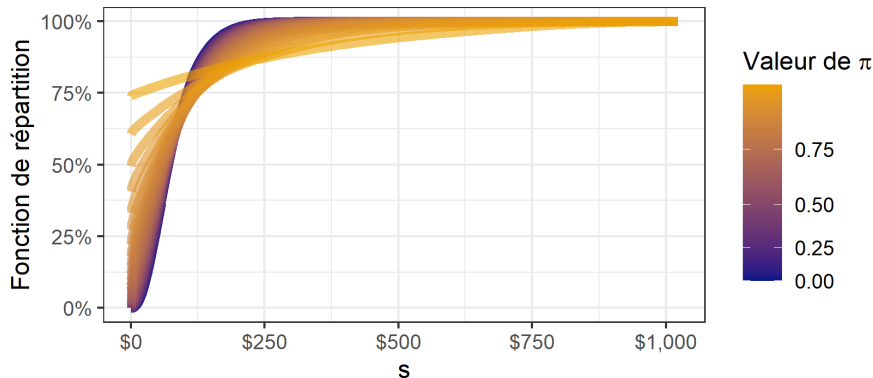
$$\begin{aligned}\text{Var}[S_k] &= E[M_k]\text{Var}[X] + \text{Var}[M_k]E[X]^2 \\ &= kq\text{Var}[X] + \text{Var}[M_k]E[X]^2\end{aligned}$$

Cette quantité a été calculée plus tôt, mais n'a pas été retranscrite ici par soucis de simplicité.

# Comparaison des fonctions de répartition selon $\pi$

$F_{S_{100}}(s)$  selon la valeur  $\pi$

$q = 0.1$  et sévérité  $X \sim \text{logarithmique}(\beta = 26.51902)$



## Exemple numérique avec $S_k$

### Exemple associé à la table 2 de Cossette et collab. (2003)

- Calculer  $F_{S_{100}}(j)$  pour  $j = 0, 1, \dots, 300$
- $X \sim \text{logarithmique}(\beta = 26.519019)$
- Utiliser  $k = 20$  et  $q = 0.1$
- Répéter l'exercice pour  $\pi = 0$  (indépendance), 0.4 et 0.8



## Code R pour la Table 2 de Cossette et collab. (2003)

```
beta <- 26.519019
f_log <- sapply(1:2e2, function(j)
  beta^j/(j * (1 + beta)^j * log(1 + beta)))

pi_for_table2 <- c(0, 0.4, 0.8) # Pi à essayer
table2basic <- sapply(pi_for_table2, function(piiii){
  aa <- 2^10; nb <- length(f_log)
  ft_log <- fft(c(0, f_log, rep(0, aa - 1 - nb))) #FFT sev
  f_S_n <- Re(fft(P_M_mat(100, ft_log, p = 0.1, pi = piiii, eig =
    TRUE)))/aa # On inverse
  F_S_n <- cumsum(f_S_n)
  F_S_n[1:301]
})
```

## Table 2 de Cossette et collab. (2003)

$s$	$\pi = 0$	$\pi = 0.4$	$\pi = 0.8$
0	0.000027	0.001967	0.121793
5	0.001694	0.015717	0.175101
10	0.008407	0.036629	0.213830
25	0.073175	0.131571	0.314676
50	0.294404	0.341559	0.460844
100	0.725822	0.707847	0.685624
150	0.920067	0.895331	0.828891
200	0.980005	0.967197	0.911973
250	0.995436	0.990615	0.956810
300	0.998960	0.997439	0.979639

**Table** –  $F_{S_k}(s)$  selon différentes valeurs de  $\pi$  et  $q = 0.1$

# Probabilité de ruine sur un horizon fini

1 Processus d'occurrence

2 Processus du montant des pertes

3 Probabilité de ruine sur un horizon fini

- Procédure de simulation pour la probabilité de ruine sur un horizon de temps fini
- Illustration

4 Conclusion

## Définition

---

On approche le problème d'une manière différente, on peut écrire  $S_k$  de la manière suivante

$$S_k = \sum_{i=1}^k Y_i \quad \text{où } Y_i = I_i B_i$$

La réserve d'une compagnie au temps  $k$  s'écrit donc

$$U_k = U_{k-1} + 1 - Y_k \quad \text{avec une prime par période tel que } 1 = (1 + \eta)E[Y]$$

La probabilité de ruine pour une compagnie ayant un capital initial  $U_0 = u$  sur un horizon de temps  $n$  est donc

$$\psi(u, n) = 1 - P(U_k \geq 0, \in 1, 2, \dots, n)$$

## Définition

---

Pour notre algorithme de simulation pour évaluer la probabilité de ruine sur un horizon de temps fini, nous aurons besoin de s'intéresser davantage à  $Y_j$ .

La distribution conditionnelle de  $Y_j$  est la suivante (supposant un support strictement positif pour  $B_j$ ) :

$$(Y_j | Y_{j-1} = y) = (I_j | I_{j-1} = \mathbf{1}_{\{y>0\}}) B_j$$

Finalement, pour faire des simulations, on utilisera le théorème de la fonction quantile, qui nous permet de simuler une réalisation d'une variable aléatoire quelconque  $X^{(1)}$  à l'aide de la réalisation d'une loi uniforme  $U^{(1)}$  et de la fonction de répartition inverse  $F_X^{-1}$

$$X^{(1)} = F_X^{-1}(U^{(1)})$$

# Algorithme de simulation

## Algorithme de simulation pour l'occurrence de la ruine

- 1 Initialiser un vecteur  $\underline{I} = \{I_0, I_1, \dots, I_k\}$
- 2 Simuler une réalisation  $I_0$  tel que  $P(I_0 = 1) = q$
- 3 Pour chaque  $j \in \{1, \dots, k\}$ 
  - ▶ Simuler une réalisation de  $I_j$  conditionnellement à la simulation de  $I_{j-1}$  (en utilisant que  $P(I_j = b | I_{j-1} = a) = P_{ab}$ )
  - ▶ Simuler une réalisation de  $B_j$ .
  - ▶ Calculer la réalisation de  $Y_j$  tel que  $Y_j = I_j B_j$
  - ▶ Retourner  $U_j = U_{j-1} + 1 - Y_j$
- 4 Retourner  $\mathbf{1}_{\{\min(\underline{U}) < 0\}}$

## Algorithme de simulation

Soit  $R_k(u)$  une variable aléatoire indiquant une ruine après  $k$  période avec capital initial  $u$  et  $n$  le nombre de simulation désiré pour l'algorithme

### Algorithme de simulation pour la probabilité de ruine

- 1 Initialiser un vecteur  $\underline{R_k(u)} = \{R_k^{(1)}(u), R_k^{(2)}(u), \dots, R_k^{(n)}(u)\}$
- 2 Pour chaque  $j \in \{1, \dots, n\}$ 
  - Simuler une occurrence de ruine sur horizon de temps discret  $\tilde{R}_k^{(j)}(u)$  à l'aide de l'algorithme précédent
- 3 Retourner la probabilité de ruine estimée  $\tilde{\psi}(u, k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{R}_k^{(j)}(u)$

# Code R pour les simulations I

---

```
## Paramètres pour la simulation
k_per <- 50          # nombre de périodes
n_simul <- 50        # Quantité de parcours à simuler
eta <- 0.15          # Marge de profit désirée
u <- 13              # Capital initial

## Paramètres pour la fréquence et la sévérité
p <- 0.3              # paramètre q de la binomiale markovienne
pi <- 0.2             # paramètre de dépendance de la BM
lam <- (p*(1 + eta)) # Paramètre lambda de la loi exponentielle
```



## Code R pour les simulations II

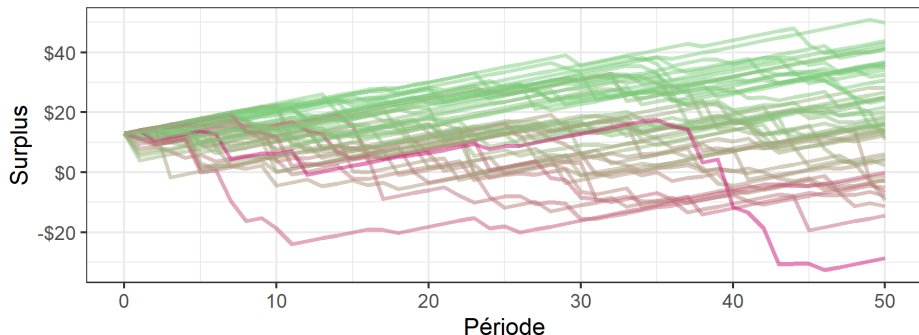
```
simuls <- sapply(1:n_simul, function(i){ # Pour chaque simul
  uu <- c(u, rep(0, k_per))                # Vec U_k
  ii <- c(rbinom(1, 1, p), rep(0, k_per)) # Vec I
  mat <- matrix_bm(p, pi, s = 1) # Matrice de transition

  for (k in 1:k_per) { # Pour chaque période
    ## Prob  $P(I_k = 1 | I_{k-1})$ 
    prob <- ifelse(ii[k] == 1, mat[2, 2], mat[1, 2])
    ii[k + 1] <- rbinom(1, 1, prob) # Simuler  $I_k$ 
    b <- rexp(1, lam) # Simuler la severite
    y <- ii[k + 1] * b # Calculer  $Y$ 
    uu[k + 1] <- uu[k] + 1 - y} #  $U_k = U_{k-1} + 1 - Y_k$ 
  return(uu) # Retourner la suite ( $U_1, \dots, U_n$ ) simulée
})
```

# Comparaison des fonctions de répartition selon $\pi$

Simulations de  $U_k$  avec modèle binomial markovien composé

$q = 0.3$ ,  $\pi = 0.2$ ,  $u = 13$ ,  $\eta = 0.15$  et sévérité  $X \sim \text{Exp}(\lambda = q(1 + \eta))$



# Conclusion

- 1 Processus d'occurrence
- 2 Processus du montant des pertes
- 3 Probabilité de ruine sur un horizon fini
- 4 Conclusion**

# Conclusion

---

Dans cette présentation, nous avons étudié le modèle binomial markovien.

- Nous avons comparé les approches de Cossette et collab. (2003), de Dekking et Kong (2011) et de Gani (1982).
- Nous avons pu étudier le modèle binomial composé avec des exemples numériques
- Nous avons pu aussi étudier les modèles de risques en temps discret

## Bibliographie I

---

- Cossette, H., D. Landriault et J. Marceau. 2003, « Ruin probabilities in the compound markov binomial model », *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2003, n° 4, p. 301-323.
- Dekking, M. et D. Kong. 2011, « Multimodality of the markov binomial distribution », *Journal of Applied Probability*, vol. 48, n° 4, p. 938-953.
- Edwards, A. 1960, « The meaning of binomial distribution », *Nature*, vol. 186, n° 4730, p. 1074-1074.
- Gani, J. 1982, « On the probability generating function of the sum of markov bernoulli random variables », *Journal of Applied Probability*, vol. 19, n° A, p. 321-326.
- Klotz, J. 1973, « Statistical inference in bernoulli trials with dependence », *The Annals of statistics*, p. 373-379.