Approche axiomatique des mesures de risque

Benjamin Côté

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

12 janvier 2023

UNIVERSITÉ LAVAL

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Contexte

Pourquoi les mesures de risque ?

- Comme les marchés ne permettent pas de couvrir complètement son risque, on veut savoir à quelle quantité de risque on est exposé pour des raisons de solvabilité.
- L'attitude de l'agent décisionnel par rapport à la couverture du risque dépend de son attitude par rapport au risque. Autrement dit, la mesure de risque peut servir pour la tarification de couvertures de risques.

Contexte

Il y a donc deux façons de voir les mesures de risque :

1. Mathématiquement : Capturer un comportement d'une variable aléatoire.
2. Économiquement : Capturer les préférences d'un acteur rationnel sur les marchés.

Chacune de ces deux façons de voir mène à une approche différente et des axiomes différents pour définir les mesures de risque. Denuit et collab. (2006) a pour but d'introduit la seconde approche axiomatique des mesures de risque, qui n'était, à l'époque, pas vraiment considérée dans un milieu actuariel.

Approches axiomatiques

Comment définir les mesures de risque ? Il existe deux méthodes dites *axiomatiques*.

- **Approche A** On impose des axiomes sur le comportement du risque de variables aléatoire.
- **Approche B** On impose des axiomes à une fonction représentant les préférences d'un agent décisionnel vis-à-vis du risque. La mesure de risque est celle amenant une indifférence économique sous un principe d'équivalence.

Approches axiomatiques

En actuariat, on emploie généralement l'approche A pour juger d'une mesure de risque.

On peut retrouver des mesures de risque que l'on connaît bien avec l'approche A (ex : VaR, TVaR, ...) sous l'approche B.

Denuit et collab. (2006) tient à introduire l'approche B dans un contexte actuariel, puisqu'elle permet plus aisément l'emploi de fonctions d'utilité. Souvent, les mesures de risque exprimées sous l'approche A ont une fonction d'utilité linéaire, ce qui n'est pas très réaliste.

Approche A

Axiomes possibles de l'approche A. Le risque se comporte avec...

- Objectivité : (ne dépend que de la distribution)
- Monotonicité faible : Si $P(X_1 \leq X_2) = 1$, alors $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$
- Monotonicité forte : Si $X_1 \preceq_{ds} X_2$, alors $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$
- Homogénéité positive : $\rho(aX) = a\rho(X)$, avec $a > 0$
- Invariance à la translation : $\rho(X + b) = \rho(X) + b$
- Sous-additivité : $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$
- Convexité : $\rho(\alpha X + (1-\alpha)X') \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(X')$ avec $\alpha \in [0, 1]$
- Marge non excessive : Si $P(X \leq b) = 1$, alors $\rho(X) \leq b$
- Marge justifiée : $\rho(a) = a$
- ...Il y en a plein d'autres ! (Additivité de risques comonotones, marge positive, additivité de risques indépendants, etc.)

Les propriétés désirées dépendent du domaine d'application.
On va choisir la mesure de risque qui répond à nos propriétés désirées.

Approche B

Cette fois, on définit des axiomes sur le comportement décisionnel. On définit ce qui fait en sorte qu'un agent pourrait avoir une préférence ($\preceq$).

- Objectivité : deux risques identiques entraînent une indifférence.
-
$$\text{Caractéristiques d'ordre} \begin{cases} \text{total : il est toujours possible de comparer} \\ \text{transitif : } a \preceq b, \quad b \preceq c, \text{ alors } a \preceq c \\ \text{réflexif : } a \preceq a \end{cases}$$
- Monotonicité forte : on préfère ce qui est en général mieux.
- Continuité : Il existe toujours une situation moins préférable.

On ajoute un **cinquième axiome** aux quatre précédents, qui servira à spécifier la forme de la préférence.

Approche B

On va étudier :

$$\begin{aligned} \mathrm{EU} &: \text{Expected Utility} \\ \mathrm{DU} &: \text{Distorted Utility} \\ \mathrm{RDEU} &: \text{Rank-Dependent Expected Utility} \\ \mathrm{CEU} &: \text{Choquet's Expected Utility} \\ \mathrm{MEU} &: \text{Maximin Expected Utility} \end{aligned}$$

Chacun se distinguant par la forme que prend le comportement décisionnel.

Aversion au risque

Avant de se lancer, attardons-nous au concept d'aversion au risque.

Aversion au risque

Il existe deux types d'aversion au risque :

- faible : On préfère $\mathrm{E}[X]$ que X.
- forte : si $X \preceq_{cv} Y$, X est préféré sur Y.

Principe EU - *Expected Utility*

Le principe d'*expected utility* stipule que l'agent décisionnel connaît les vraies probabilités associées aux événements. Il possède une fonction d'utilité u et préférera la situation qui la maximise.

Utilité

L'utilité permet de représenter la valeur marginale fluctuante de chaque élément ajouté.
Idée : recevoir 1$ quand on possède 5$ est plus significatif que de recevoir 1$ quand on possède 1000$.

La fonction d'utilité est généralement concave.
Exemple d'un u concave : taux d'imposition.

Principe EU - *Expected Utility*

Anthropologie et utilité

Des études sur des peuples indigènes et moins développés sont parvenues à démontrer que le cerveau emploie naturellement une fonction d'utilité concave. Avant d'être conditionnés à penser de façon linéaire, nous avons tendance à réfléchir de façon logarithmique.

Figure – La tribu Munduruku habite la forêt amazonienne - BBC News

Principe EU - *Expected Utility*

Cinquième axiome

Le cinquième axiome prend la forme suivante sous EU. On va préférer la perspective X qui maximise :

$$\mathbb{U}_{EU}[X|u] = \int u(X)\mathrm{d}P = \mathrm{E}[u(X)]$$

Aversion au risque

Sous EU, la seule condition d'aversion au risque est que la fonction u soit concave. Si c'est le cas, il est trivial que l'aversion faible et que l'aversion forte sont respectées.

Sous EU, l'aversion du risque ne tient qu'au comportement que l'on a envers la richesse. Les deux sont indissociables.

Principe EU - *Expected Utility*

Tarification

Pour tarifer le risque, on veut être indifférent au fait de le couvrir ou non :

$$\mathbb{U}_{EU}[w + \rho(Y) - Y|u] = \mathbb{U}_{EU}[w|u]$$

où w est le surplus initial de l'assureur, Y est le risque et $\rho(Y)$ la prime chargée pour la couverture.
On veut trouver la prime $\rho(X)$ pour laquelle l'égalité tient. En général, on veut que la tarification se fasse sans considération de la situation financière de l'entreprise. Donc pour la suite, on aura $w = 0$.

$$\mathbb{U}_{EU}[\rho(Y) - Y|u] = 0$$
$$\mathrm{E}[u(\rho(X) - X)] = 0$$

Principe EU - *Expected Utility*

Mesure entropique

La mesure entropique est définie sous le principe EU avec l'utilité $u = 1 - \mathrm{e}^{-cX}$.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}_{EU}[\rho(Y) - Y | u] &= \mathrm{E}[u(\rho(X) - X)] \\
&= \mathrm{E}[1 - \mathrm{e}^{-c(\rho(X) - X)}] \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-c\rho(X)} \mathrm{E}[\mathrm{e}^{cX}]
\end{aligned}
$$

On veut que cela donne 0 pour avoir l'indifférence.

$$
\begin{aligned}
1 - \mathrm{e}^{-c\rho(X)} \mathrm{E}[\mathrm{e}^{cX}] &= 0 \\
\mathrm{e}^{-c\rho(X)} \mathrm{E}[\mathrm{e}^{cX}] &= 1 \\
\mathrm{e}^{c\rho(X)} &= \mathrm{E}[\mathrm{e}^{cX}] \\
\rho(X) &= \frac{1}{c} \ln \mathrm{E}[\mathrm{e}^{cX}]
\end{aligned}
$$

Principe DU - *Distorted Utility*

Le principe de *distorted utility* stipule que l'agent décisionnel déforme les probabilités d'occurence des sinistres selon sa propre perception.

Psychologie et distorsion

En psychologie, la **règle heuristique de la disponibilité** fait référence au fait que les événements rare mais marquants nous semblent plus probables d'arriver qu'ils ne le sont réellement.

Figure – Un crash d'avion est rare mais marquant - survieetsurvivalisme.com

Principe DU - *Distorted Utility*

Rappel :

$$\mathrm{E}[X] = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} S_X(x)\mathrm{d}x$$

On va appliquer une fonction de distorsion $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ aux probabilités de survie.

Cinquième axiome

Le cinquième axiome prend la forme suivante sous DU. On va préférer la perspective X qui maximise :

$$\mathbb{U}_{DU}[X|\varphi] = -\int_{-\infty}^{0} (1 - \varphi(S_X(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \varphi(S_X(x))\mathrm{d}x$$

Principe DU - *Distorted Utility*

Aversion au risque

Sous DU, les deux types d'aversion au risque ne sont plus équivalentes. Pour avoir l'aversion faible, on peut n'avoir que $\varphi(p) \leq p$. Toutefois, pour avoir l'aversion au risque forte, il faut absolument que φ soit convexe (qu'on accorde plus de poids aux événements rares).

fonction de distorsion duelle : $\bar{\varphi} = 1 - \varphi(1 - x)$
Si φ est convexe, alors $\bar{\varphi}$ est concave, et vice-versa.
On remarque

$$\mathbb{U}_{DU}[-X|\varphi] = -\mathbb{U}_{DU}[X|\bar{\varphi}]$$

Principe DU - *Distorted Utility*

Tarification

On trouve $\rho(X)$ qui engendre une indifférence.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}_{DU}[\rho(X) - X|\varphi] &= \mathbb{U}_{DU}[0|\varphi] \\
\rho(X) + \mathbb{U}_{DU}[-X|\varphi] &= 0 \\
\rho(X) - \mathbb{U}_{DU}[X|\bar{\varphi}] &= 0 \\
\rho(X) &= \mathbb{U}_{DU}[X|\bar{\varphi}] \\
\rho(X) &= -\int_{-\infty}^{0} (1 - \bar{\varphi}(S_X(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \bar{\varphi}(S_X(x))\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Principe DU - *Distorted Utility*

Value-at-Risk

La mesure VaR est définie sous le principe DU avec distorsion

$$\bar{\varphi}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad q > 1-p \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $0 \leq q \leq 1$.

Preuve.

$$\begin{aligned} \rho(X) &= -\int_{-\infty}^{0} (1 - \bar{\varphi}(S_X(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \bar{\varphi}(S_X(x))\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-\infty}^{0} (1-1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\mathrm{VaR}_p(X)} 1\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\mathrm{VaR}_p(X)} 1\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{VaR}_p(X) \end{aligned}$$

Principe DU - *Distorted Utility*

Tail-Value-at-Risk

La mesure TVaR est définie sous le principe DU avec distorsion

$$\bar{\varphi}(q) = \min\left(\frac{x}{1-p}\right) \qquad 0 \leq q \leq 1$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= -\int_{-\infty}^{0} (1 - \bar{\varphi}(S_X(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \bar{\varphi}(S_X(x))\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{0} (1-1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\mathrm{VaR}_p(X)} 1\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{VaR}_p(X)}^{\infty} \frac{S_X(x)}{1-p}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{VaR}_p(X) + \frac{1}{1-p}\pi_X(\mathrm{VaR}_p(X)) \\
&= \mathrm{TVaR}_p(X)
\end{aligned}$$

Principe DU - *Distorted Utility*

On se rend compte que toute mesure de risque sous le principe DU peut être représentée comme une combinaison de transformations de VaR's.

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \int_0^\infty \bar{\varphi}(S_X(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_0^{S_X(x)} 1\mathrm{d}\bar{\varphi}(q)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^{\mathrm{VaR_{1-q}(X)}} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}\bar{\varphi}(q) \\
&= \int_0^1 \mathrm{VaR}_{1-q}(X)\mathrm{d}\bar{\varphi}(q)
\end{aligned}$$

Note : si $\bar{\varphi}$ est concave, $\rho(X)$ est sous-additive.

Principe RDEU - *Rank-Dependent Expected Utility*

Le principe RDEU combine les principes EU et DU.

L'agent décisionnel vise à maximiser son utilité. De plus, il déforme les probabilités selon sa perception de la réalité.

On a donc la fonction u jouant le rôle de l'utilité ainsi que la fonction $\bar{\varphi}$ jouant la rôle de la distorsion.

« rank-dependent » : à cause de la distorsion sur la fonction de survie, le nouveau poids associé à chaque utilité dépend du rang de chaque possibilité.

Principe RDEU - *Rank-Dependent Expected Utility*

Cinquième axiome

Le cinquième axiome prend la forme suivante sous RDEU. On va préférer la perspective X qui maximise :

$$\mathbb{U}_{RDEU}[X|u,\varphi] = -\int_{-\infty}^{0}(1-\varphi(S_{u(X)}(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\varphi(S_{u(X)}(x))\mathrm{d}x$$

On remarque que

- si $\varphi(q) =$ q alors on retrouve le principe EU
- si $u(x) = x$ alors on retrouve le principe DU

Principe RDEU - *Rank-Dependent Expected Utility*

Aversion au risque

L'aversion au risque est double sous le principe RDEU

- à cause de la valeur décroissante de la richesse (u doit être concave).
- à cause du pessimisme dont on fait preuve en accordant plus de poids aux événements défavorables (φ doit être convexe).

Il est important d'avoir les deux conditions pour avoir une aversion au risque.

Tarification

On trouve $\rho(X)$ qui engendre une indifférence.

$$\mathbb{U}_{RDEU}[\rho(X) - X|u, \varphi] = 0$$

Il n'est généralement pas possible de trouver une forme analytique intéressante pour la mesure de risque $\rho(X)$, à moins d'avoir de fonctions très simples.

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

Le principe CEU requiert d'employer les capacités.

Une capacité est une fonction attribuant un nombre à un ensemble. Contrairement aux mesures de probabilité, les capacités ne requièrent pas d'être additives lorsque l'on combine des ensemble. Il faut seulement que le fait d'ajouter un ensemble amène une augmentation.

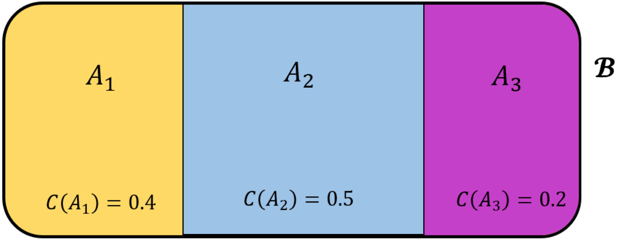
Mathématiquement, cela s'exprime sous deux conditions :

- $C : \mathcal{B} \to [0, 1]\,;\, C(\mathcal{B}) = 1$
- si $A \subseteq A'$, alors $C(A) \leq C(A')$

Important : une somme de capacités peut dépasser 1 !

L'**incertitude** représente la distorsion amenée par le fait d'employer une capacité plutôt qu'une mesure de probabilité.

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*



$C(A_1 \cup A_2) = 0.6$ $\quad$ $C(A_2 \cup A_3) = 0.9$

$C(A_1 \cup A_3) = 0.5$

$$\boxed{\boldsymbol{C(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1}}$$

Figure – Exemple d'une capacité

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

Capacité cohérente

Une capacité est cohérente s'il existe un $\mathcal{M}$ tel que
$$C(A) = \sup\{P \in \mathcal{M} | P(A)\}$$

Capacité duelle : $\bar{C}(A) = 1 - C(\bar{A})$.

Incertitude

Pour une capacité cohérente, il est possible de représenter l'incertitude sous la forme de l'intervalle :
$$[\bar{C}(A), C(A)] = [\inf\{P \in \mathcal{M} | P(A)\}, \sup\{P \in \mathcal{M} | P(A)\}]$$

On voit bien que si $\bar{C}(A) = C(A)$ alors il n'y a aucune ambiguité sur la mesure de probabilité et aucune incertitude amenée de ce fait.

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

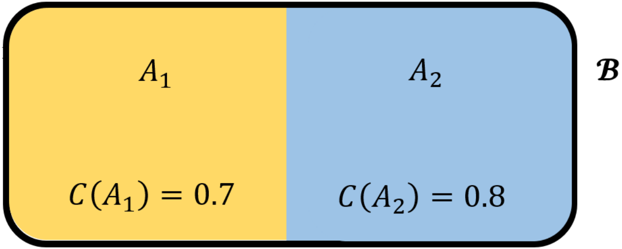


Figure – Exemple d'une capacité cohérente

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

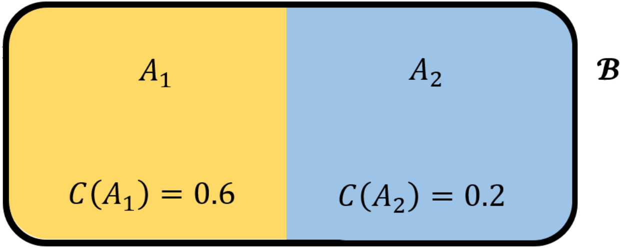


Figure – Exemple d'une capacité non cohérente

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

Sous le principe CEU, on emploie une capacité pour représenter l'incertitude qu'a l'agent décisionnel par rapport à ses probabilités et pour représenter ses préférences en matière de combinaison. Outre cela, il cherche encore à maximiser son utilité.

Pour construire une capacité, on peut appliquer une distorsion à une mesure de probabilité. $C = \varphi \circ P$
Par contre, cela arrive souvent qu'aucune distorsion ne parvienne à représenter la capacité voulue. On voit que CEU est une généralisation de RDEU.

CEU est très pratique dans la mesure où il permet de représenter une interaction entre les événements dans le processus décisionnel.

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

Cinquième axiome

Le cinquième axiome prend la forme suivante sous CEU. On va préférer la perspective X qui maximise :

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{CEU}[X|u,C] &= \mathrm{E}^{C}[u(X)] \\ &= -\int_{-\infty}^{0}(1 - C(u(X) > x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} C(u(X) > x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On remarque que si la capacité C est une mesure de probabilité, on retrouve le principe EU.

Tel qu'énoncé précédemment, si la cpacité C peut être exprimée comme une distorsion $\varphi(P)$, on retrouve le principe RDEU.

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

Aversion à l'incertitude
Il y a plusieurs façon de voir l'aversion à l'incertitude. Chateauneuf et collab. (2000) a établi que l'aversion à l'incertitude est lorsque ces deux conditions sont réunies :

- u est concave ;
- la capacité est convexe.

La capacité C est convexe si l'inégalité suivante est respectée

$$C(A \cup B) + C(A \cap B) \geq C(A) + C(B)$$

On remarque que dans le cas de la distorsion, si $C = \varphi \circ P$, la convexité de φ amène la convexité de notre capacité.

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

Coeur d'une capacité

$$\text{coeur}(C) = \{\text{mesure de prob. } P \quad | \quad P(A) \geq C(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}\}$$

La capacité a un coeur si l'ensemble n'est pas vide.

Si on a la convexité, on sait que le coeur existe.

La convexité est pratique, car elle permet de réécrire l'intégrale de Choquet.

$$\mathrm{E}^{C}[u(X)] = \int u(X)\mathrm{d}C = \inf P \in \text{coeur}; \mathrm{E}^{P}[u(X)]$$

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

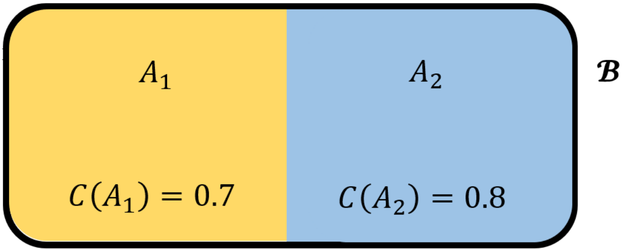


Figure – Exemple d'une capacité dont le coeur est vide

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

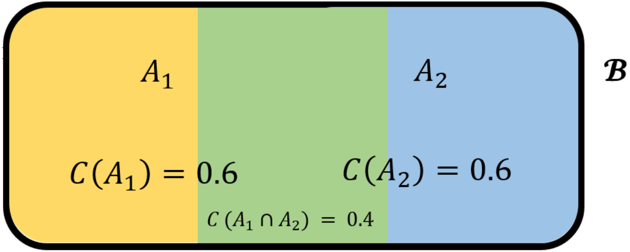


Figure – Exemple d'une capacité dont le coeur existe

Principe CEU - *Choquet's Expected Utility*

Tarification

On trouve $\rho(X)$ qui engendre une indifférence.
On suppose, pour fins de simplicité, que la fonction d'utilité est $u(x) = x$.

$$\mathbb{U}_{CEU}[\rho(X) - X|u, C] = \mathbb{U}_{CEU}[0|u, C]$$
$$\mathrm{E}^{C}[u(\rho(X) - X)] = \mathrm{E}^{C}[u(0)]$$
$$\mathrm{E}^{C}[\rho(X) - X] = 0$$
$$\int (\rho(X) - X)\mathrm{d}C = 0$$
$$\rho(X) + \int (-X)\mathrm{d}C = 0$$
$$\rho(X) = -\int (-X)\mathrm{d}C$$

Principe MEU - *Maximin Expected Utility*

Pour employer le principe MEU, on définit un ensemble de mesures de probabilité. L'agent décisionnel est incertain de quelle mesure de probabilité est la bonne et choisit celle qui est la plus conservatrice.

Exemple

Cinq actuaires travaillent à la tarification d'un produit d'assurance-vie.
Chacun a son opinion sur la distribution de la mortalité.
La prime retenue sera la prime pure de l'actuaire qui donne les gains les moins élevés.

Figure – Le travail d'équipe est important en actuariat - Thomas Barwick, capital.fr

Principe MEU - *Maximin Expected Utility*

Cinquième axiome

Le cinquième axiome prend la forme suivante sous MEU. On va préférer la perspective X qui maximise :

$$\mathbb{U}_{MEU}[X|u,\mathcal{M}] = \inf \left\{ P \in \mathcal{M}; \mathrm{E}^{P}[u(X)] \right\}$$

On remarque que si l'ensemble $\mathcal{M}$ ne contient qu'une mesure de probabilité, on retrouve le principe EU.
On remarque aussi que si l'ensemble $\mathcal{M}$ est le coeur d'une capacité, on retrouve le principe CEU.

Aversion au risque

On a seulement besoin que u soit concave pour avoir aversion au risque. Par l'infimum, on prend naturellement la mesure de risque la plus pessimiste.

Principe MEU - *Maximin Expected Utility*

Tarification

On trouve $\rho(X)$ qui engendre une indifférence.

$$\mathbb{U}_{MEU}[\rho(X) - X | u, \mathcal{M}] = 0$$
$$\inf \left\{ P \in \mathcal{M}; \mathrm{E}^P[u(\rho(X) - X)] \right\} = 0$$

On choisit généralement la fonction d'utilité $u(x) = x$.

$$\inf \left\{ P \in \mathcal{M}; \mathrm{E}^P[\rho(X) - X] \right\} = 0$$
$$\rho(X) + \inf \left\{ P \in \mathcal{M}; \mathrm{E}^P[-X] \right\} = 0$$
$$\rho(X) = -\inf \left\{ P \in \mathcal{M}; -\mathrm{E}^P[X] \right\}$$
$$\rho(X) = \sup \left\{ P \in \mathcal{M}; \mathrm{E}^P[X] \right\}$$

Principe MEU - *Maximin Expected Utility*

On remarque que la TVaR peut également être définie selon le principe MEU avec l'ensemble $\mathcal{M}$ étant celui contenant les mesures de probabilité ayant une dérivée de Radon-Nikodym $\frac{1}{1-q}$.

Preuve : voir Embrechts et Wang (2015)

Bibliographie I

Chateauneuf, A., R.-A. Dana et J.-M. Tallon. 2000, « Optimal risk-sharing rules and equilibria with choquet-expected-utility », *Journal of Mathematical Economics*, vol. 34, n° 2, p. 191–214.

Denuit, M., J. Dhaene, M. Goovaerts, R. Kaas et R. Laeven. 2006, « Risk measurement with equivalent utility principles », *Statistics & Risk Modeling*, vol. 24, n° 1, p. 1–25.

Embrechts, P. et R. Wang. 2015, « Seven proofs for the subadditivity of expected shortfall », *Dependence Modeling*, vol. 3, n° 1.