

Act-7008 Sujets spéciaux

Projet final

Benjamin Côté
Université Laval, Québec (Québec), Canada

12 janvier 2023

Résumé

Rapport contenant les fruits du projet final de Benjamin Côté effectué dans le cadre du cours ACT-7008. L'énoncé du travail a été émis par le Professeur Étienne Marceau de l'Université Laval. Le projet explore, en trois temps, une distribution composée multivariée, des mesures de risques homogène et leur allocation, et des distributions Bernoulli multivariées.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Distribution composée multivariée	4
3	Mesures de risque et allocation d'Euler	13
4	Distributions Bernoulli multivariées	19
5	Questions d'approfondissement	27
6	Conclusion	29

1 Introduction

L'étude de sujets avancés en actuariat est primordiale pour tout actuaire qui se respecte, tout autant pour le chercheur que celui s'orientant vers la pratique. En effet, l'actuariat est une discipline mettant de l'avant une philosophie nietschéenne, où le dépassement de soi est valorisé. Pour se considérer pleinement comme un expert du risque, l'actuaire doit cultiver cette expertise. Il doit donc se garder au faite des connaissances de sa discipline, s'il veut pouvoir modéliser le risque de la façon la plus exacte possible. Qui plus est, en plus de ces considérations professionnelles, il est important de stimuler l'éveil intellectuel pour être une personne de bons goûts.

C'est dans cet esprit que le présent rapport est rédigé.

Une distribution composée multivariée sera d'abord étudiée, pouvant notamment être mise en application en assurances dommages pour modéliser la sinistralité. Ensuite, des mesures de risques très présentes dans la littérature scientifique seront présentées. Elles peuvent servir à un assureur pour quantifier son risque de façon adéquate, notamment d'un point de vue corporatif. En ce sens, un fois son risque total quantifié, l'assureur pourrait vouloir savoir quelle est la contribution de chaque ligne d'affaires à ce risque. La méthode d'allocation d'Euler est, à cet effet, étudiée pour chacune des mesures de risque présentée. Enfin, la dépendance étant très importante en actuariat puisqu'elle a un impact direct sur la capacité de mutualisation, des lois Bernoulli multivariées échangeables seront étudiées. L'accent sera mis sur leurs cas limites de dépendance, car, comme il sera vu, ils permettent de décrire l'entière des possibilités de schémas de dépendance échangeables.

2 Distribution composée multivariée

Soit le vecteur de variables aléatoires \underline{M} dont la fonction génératrice des probabilités (fgp) est donnée par

$$\mathcal{P}_{\underline{M}}(s_1, \dots, s_n) = e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha(s_1-1)+\alpha(s_n-1)+(1-\alpha)\sum_{i=1}^n(s_i-1)+\alpha\sum_{i=1}^{n-1}(s_i s_{i+1}-1))}, \quad |s_i| \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Par identification de la fgp, il est possible de constater qu'il s'agit d'un modèle Poisson MA_1 - notamment étudié par [Cossette et al., 2011] - dont α est le taux de propagation de sinistralité pour chaque période.

Chaque variable aléatoire composant la fgp multivariée représente le nombre de sinistre d'une période. Le modèle Poisson MA_1 introduit de la dépendance sur une période, c'est-à-dire que le nombre de sinistres d'une période donnée est uniquement influencé par celui de la période précédente, et ce, dans la mesure du paramètre α . D'ailleurs, si $\alpha = 0$, on retrouve la fgp d'une loi Poisson multivariée sans dépendance.

Pour bien comprendre le comportement du modèle Poisson MA_1 , il importe de s'attarder en premier lieu aux lois marginales le composant. Ce sera fait en trois temps, puisque les périodes initiale et finale ont des comportements distincts (l'initiale ne reçoit pas d'influence de la période précédente; la finale ne donne pas d'influence à la période suivante).

Pour la période initiale :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_1}(s_1) &= \mathcal{P}_{\underline{M}}(s_1, 1, \dots, 1) \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha(s_1-1)+\alpha(0)+(1-\alpha)(s_1-1)+\alpha(s_1(1)-1))} \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(s_1-1+\alpha s_1-\alpha)} \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}((s_1-1)(1+\alpha))} \\ &= e^{\lambda(s_1-1)}, \quad |s_1| \leq 1 \quad \text{donc } M_1 \sim \text{Poisson}(\lambda) \end{aligned}$$

Pour les périodes intermédiaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_i}(s_i) &= \mathcal{P}_{\underline{M}}(1, \dots, s_i, \dots, 1) \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha(0)+\alpha(0)+(1-\alpha)(s_i-1)+2\alpha(s_i-1))} \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}((s_i-1)(1-\alpha+2\alpha))} \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}((s_i-1)(1+\alpha))} \\ &= e^{\lambda(s_i-1)}, \quad |s_i| \leq 1 \quad \text{donc } M_i \sim \text{Poisson}(\lambda) \end{aligned}$$

Pour la période finale :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{M_n}(s_n) &= \mathcal{P}_{\underline{M}}(1, \dots, 1, s_n) \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha(0)+\alpha(s_n)+(1-\alpha)(s_1-1)+\alpha((1)s_n-1))} \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(s_n-1+\alpha s_n-\alpha)} \\ &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}((s_n-1)(1+\alpha))} \\ &= e^{\lambda(s_n-1)}, \quad |s_n| \leq 1 \quad \text{donc } M_n \sim \text{Poisson}(\lambda) \end{aligned}$$

On remarque que chaque variable aléatoire composant le vecteur \underline{M} , peu importe sa position dans le vecteur, suit une loi de Poisson de paramètre λ . Le fait que les marginales soient identiquement distribuées n'implique pas que les variables aléatoires soient échangeables. Au contraire ! Dans ce cas-ci, les variables

ne sont pas échangeables, car elles n'ont pas toutes le même schéma de dépendance entre elles. Par exemple, si on prend un sous-couple de deux variables aléatoires, la dépendance ne sera pas la même s'il s'agit de deux périodes voisines ou non. Pour s'en rendre compte, étudions la covariance.

Cas non consécutif (i, j non consécutifs) :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(M_i, M_j) &= E[M_i M_j] - E[M_i]E[M_j] \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} \mathcal{M}_{M_i, M_j}(s_i, s_j) \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - (\lambda)(\lambda) \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} \mathcal{M}_{\underline{M}}(0, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, 0) \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} e^{\frac{\lambda}{1+\alpha} (2\alpha(e^{s_i}-1) + 2\alpha(e^{s_j}-1) + (1-\alpha)(e^{s_i}e^{s_j}-1) + (1-\alpha)(e^{s_j}-1))} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} e^{\frac{\lambda}{1+\alpha} ((1+\alpha)(e^{s_i}-1 + e^{s_j}-1))} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \frac{d}{ds_i} \lambda e^{s_j} e^{\lambda(e^{s_i}-1 + e^{s_j}-1)} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \lambda \lambda e^{s_i} e^{s_j} e^{\lambda(e^{s_i}-1 + e^{s_j}-1)} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \lambda^2 - \lambda^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Cas consécutif (i, j consécutifs) :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(M_i, M_j) &= E[M_i M_j] - E[M_i]E[M_j] \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} \mathcal{M}_{M_i, M_j}(s_i, s_j) \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - (\lambda)(\lambda) \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} \mathcal{M}_{\underline{M}}(0, \dots, s_i, s_j, \dots, 0) \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} e^{\frac{\lambda}{1+\alpha} ((1-\alpha)(e^{s_i}-1) + (1-\alpha)(e^{s_j}-1) + \alpha(e^{s_i}e^{s_j}-1) + \alpha(e^{s_i}-1) + \alpha(e^{s_j}-1))} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \frac{d^2}{ds_i ds_j} e^{\frac{\lambda}{1+\alpha} (e^{s_i}-1 + e^{s_j}-1 + \alpha(e^{s_i}e^{s_j}-1))} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \frac{d}{ds_i} \lambda \left(\frac{e^{s_j} + \alpha e^{s_i} e^{s_j}}{1 + \alpha} \right) e^{\frac{\lambda}{1+\alpha} (e^{s_i}-1 + e^{s_j}-1 + \alpha(e^{s_i}e^{s_j}-1))} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \left(\lambda \left(\frac{\alpha e^{s_i} e^{s_j}}{1 + \alpha} \right) + \lambda^2 \left(\frac{e^{s_j} + \alpha e^{s_i} e^{s_j}}{1 + \alpha} \right) \left(\frac{e^{s_i} + \alpha e^{s_i} e^{s_j}}{1 + \alpha} \right) \right) e^{\frac{\lambda}{1+\alpha} (e^{s_i}-1 + e^{s_j}-1 + \alpha(e^{s_i}e^{s_j}-1))} \Big|_{s_i=0}^{s_j=0} - \lambda^2 \\
 &= \lambda \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) + \lambda^2 \left(\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha} \right) \left(\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha} \right) - \lambda^2 \\
 &= \lambda \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)
 \end{aligned}$$

La covariance est nulle entre période non voisines (ce qui n'implique pas forcément leur indépendance). Néanmoins, il appert clair que la dépendance entre périodes consécutives est une fonction croissante du paramètre α .

Introduisons maintenant une distribution somposée multivariée pour le vecteur aléatoire \underline{X} , où la loi étudiée précédemment agirait à titre de loi de fréquence. Autrement dit,

$$X_i = \sum k = 1^{M_i} B_k, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Il importe de spécifier que les lois de sévérité B sont indépendantes et identiquement distribuées, en plus d'être indépendantes de la loi multivariée de fréquence. Définissons $E[B] = a$ et $E[B^2] = b$.

Ainsi, comme on sait également les marginales de \underline{M} identiquement distribuées, il est possible de conclure que les marginales de \underline{X} ont toutes la même distribution.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{X_i}(s_i) &= \mathcal{P}_{\underline{X}}(1, \dots, s_i, \dots, 1) \\ &= \mathcal{P}_{\underline{M}}(\mathcal{P}_{B_1}(1), \dots, \mathcal{P}_{B_i}(s_i), \dots, \mathcal{P}_{B_i}(1)) \\ &= \mathcal{P}_{\underline{M}}(1, \dots, \mathcal{P}_{B_i}(s_i), \dots, 1) \\ &= \mathcal{P}_{M_i}(\mathcal{P}_{B_i}(s_i)) \\ &= e^{\lambda(\mathcal{P}_{B_i}(s_i)-1)} \quad \text{donc } X_i \sim \text{PoissonComp}(\lambda; F_B) \end{aligned}$$

Puisqu'on sait que les marginales de \underline{X} suivent une loi composée, il est aisé de déterminer son espérance et sa variance.

$$\begin{aligned} E[X] &= E[M]E[B] \quad \text{formule de Wald} \\ &= \lambda a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[M]\text{Var}(B) + E[B]^2\text{Var}(M) \\ &= \lambda(E[B]^2 + \text{Var}(B)) \\ &= \lambda E[B^2] \\ &= \lambda b \end{aligned}$$

Il peut être intéressant de s'attarder à la covariance entre éléments du vecteur aléatoire \underline{X} .

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] \\ &= E[E[X_1 X_2 | M_1 M_2]] - (\lambda a)(\lambda a) \\ &= E[E[(B_1 + \dots + B_{M_i})(A_1 + \dots + A_{M_j})] - \lambda^2 a^2 \quad \text{les } A_i \stackrel{D}{=} B \text{ (seulement pour éviter une confusion plus loin)} \\ &= E[M_i E[B(A_1 + \dots + A_{M_j})]] - \lambda^2 a^2 \quad \text{les } B_i \text{ sont identiquement distribués} \\ &= E[M_i M_j E[BA]] - \lambda^2 a^2 \quad \text{les } A_i \text{ sont identiquement distribués} \\ &= E[M_i M_j E[B]E[A]] - \lambda^2 a^2 \quad \text{indépendance entre } A \text{ et } B \\ &= E[(a)(a)M_i M_j] - \lambda^2 a^2 \\ &= a^2 (E[M_i M_j] - \lambda^2) \\ &= a^2 \text{Cov}(M_i, M_j) \end{aligned}$$

Comme il aurait pu être prédit, la dépendance entre les éléments du vecteur \underline{X} est exclusivement définie par la dépendance de la loi de fréquence, puisqu'il n'y a qu'elle qui introduit de la dépendance dans le modèle.

Soit les trois variables aléatoires suivantes :

$$N_n = \sum_{i=1}^n M_i \quad , \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad , \quad W_n = \frac{S}{n}$$

Dans le modèle fréquence-sévérité défini précédemment, N_n représenterait le nombre total de sinistres ; S_n , la valeur totale des sinistres ayant eu lieu et W_n , la moyenne de cette valeur par période.

L'espérance de W_n est donc la prime pure pour une période.

$$\mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n}(n\mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[X] = a\lambda$$

Dans le même ordre d'idée, la variance de W_n renseigne sur le risque résiduel par contrat.

$$\begin{aligned}\text{Var}(W_n) &= \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{Cov}(X_i, X_j)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(n\lambda(b - a^2) + 2(n-1)a^2\text{Cov}(M_i, M_{i+1})\right) \quad \text{dépendance seulement entre voisins} \\ &= \frac{1}{n^2}\left(n\lambda(b - a^2) + 2(n-1)a^2\lambda\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\right)\end{aligned}$$

On remarque que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(W_n) = 0$ puisque la plus grande puissance de n est au dénominateur.

En ce sens, cela permet de prouver que $W_n \xrightarrow{P} a\lambda$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour ce faire, il faut que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|W_n - a\lambda| > \varepsilon) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|W_n - a\lambda| > \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(|W_n - \mathbb{E}[W_n]| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{\text{Var}(W_n)}} \sqrt{\text{Var}(W_n)}\right) \\ &\leq \frac{\text{Var}(W_n)}{\varepsilon^2} \quad \text{par Tchebychev} \\ \text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|W_n - a\lambda| > \varepsilon) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(W_n)}{\varepsilon^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Par le théorème du sandwich, on peut conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|W_n - a\lambda| > \varepsilon) = 0$, ce qui prouve la convergence en probabilité. Cela signifie qu'il est possible d'obtenir une mutualisation parfaite, et ce, malgré la dépendance induite sur une période par la loi de fréquence, si on regarde une infinité de périodes.

En continuant l'analyse d'un point de vue macroscopique, il peut être pertinent de déterminer la loi régissant le nombre de sinistre totaux.

$$\begin{aligned}
 N_n &= M_1 + \dots + M_n \\
 \text{Ainsi, } \mathcal{P}_{N_n}(t) &= \mathcal{P}_{\underline{M}}(t, \dots, t) \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha(t-1)+\alpha(t-1)+(1-\alpha)\sum_{i=1}^n(t-1)+\alpha\sum_{i=1}^{n-1}(t^2-1))} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha(t-1)+\alpha(t-1)+(1-\alpha)n(t-1)+\alpha(n-1)(t^2-1))} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha nt^2 - \alpha t^2 + \alpha t + nt - n - \alpha n)} \\
 &= e^{\frac{\lambda}{1+\alpha}(\alpha(n-1)t^2 + (\alpha+n)t - n(1+\alpha))} \\
 &= e^{\lambda(\frac{\alpha(n-1)}{1+\alpha}t^2 + \frac{(\alpha+n)}{1+\alpha}t - n)} \\
 &= e^{\lambda n(\frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)}t^2 + \frac{(\alpha+n)}{n(1+\alpha)}t - 1)} \\
 &= e^{\lambda n(\mathcal{P}_C(t)-1)} \quad \text{donc, } N \sim \text{PoissonComp}(\lambda, F_C) \\
 \text{avec } f_C(x) &= \begin{cases} \frac{n+\alpha}{n(1+\alpha)} & \text{si } x = 1 \\ \frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)} & \text{si } x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Puisque tous les sinistres ont la même loi de sévérité, il est aisé, une fois la loi de N_n connue, de déterminer la loi de la valeur totale des sinistres S_n . En effet, il suffit de voir celle-ci comme une loi composée définie de manière usuelle, avec N_n comme loi de fréquence et B comme loi de sévérité.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{S_n}(t) &= \mathcal{P}_{N_n}(\mathcal{P}_B(t)) \\
 &= e^{\lambda n(\frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)}\mathcal{P}_B(t)^2 + \frac{(\alpha+n)}{n(1+\alpha)}\mathcal{P}_B(t) - 1)} \\
 &= e^{\lambda n(\mathcal{P}_D(t)-1)} \quad \text{donc, } N \sim \text{PoissonComp}(\lambda, F_D) \\
 \text{avec } f_D(x) &= \frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)}f_{B^{*2}}(x) + \frac{n+\alpha}{n(1+\alpha)}f_B(x)
 \end{aligned}$$

B^{*2} représente la loi B convoluée sur elle-même. On remarque donc que la loi de S_n est aisée à travailler lorsque la loi de sévérité est fermée sur la convolution (la loi gamma, par exemple). Elle ne requiert cependant qu'un seul produit de convolution dans tous les cas, ce qui est tout de même très pratique.

La fgp de S_n sue (et donc sa fgm également), il est possible de déterminer la fgm de W_n par la relation suivante :

$$\mathcal{M}_{W_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tW_n}] = \mathbb{E}[e^{t\frac{S_n}{n}}] = \mathcal{M}_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right)$$

De connaître la fgm de W_n est très pratique, car cela permet de mesurer le risque pour une période, notamment au moyen de la mesure entropique.

La mesure entropique est une mesure de risque définie de la sorte :

$$\psi_{W_n}(\rho) = \frac{1}{\rho} \ln \mathcal{M}_{W_n}(\rho)$$

Puisque c'est une mesure de risque, elle peut servir à déterminer le montant à provisionner pour une période afin de se prémunir contre le risque. Ainsi, la probabilité de ruine pour une période serait donnée par $\mathbb{P}(W_n \geq \psi_{W_n}(\rho) + u)$. Autrement dit, la probabilité que le montant de sinistre moyen dépasse le montant provisionné en plus du capital excédentaire détenu par l'assureur (u). Il est possible de démontrer que cette probabilité de ruine est bornée à l'aide de l'inégalité de Chernoff.

On sait $1_{\{W_n \geq a\}} \leq e^{\rho(W_n - a)}, \quad \rho \geq 0$

$$1_{\{W_n \geq a\}} \leq e^{\rho W_n} e^{-\rho a}$$

On choisit $a = \frac{1}{\rho} \ln \mathcal{M}_{W_n}(\rho) + u$

$$1_{\{W_n \geq \frac{1}{\rho} \ln \mathcal{M}_{W_n}(\rho)\}} \leq e^{\rho W_n} e^{-\rho(\frac{1}{\rho} \ln \mathcal{M}_{W_n}(\rho) + u)}$$

$$1_{\{W_n \geq \psi_{W_n}(\rho)\}} \leq e^{\rho W_n} e^{-\ln \mathcal{M}_{W_n}(\rho)} e^{-\rho u}$$

$$1_{\{W_n \geq \psi_{W_n}(\rho)\}} \leq e^{\rho W_n} \frac{1}{\mathcal{M}_{W_n}(\rho)} e^{-\rho u}$$

$$\mathbb{E}[1_{\{W_n \geq \psi_{W_n}(\rho)\}}] \leq \mathbb{E}[e^{\rho W_n} \frac{1}{\mathcal{M}_{W_n}(\rho)} e^{-\rho u}]$$

$$\mathbb{P}(W_n \geq \psi_{W_n}(\rho) + u) \leq \frac{e^{-\rho u}}{\mathcal{M}_{W_n}(\rho)} \mathbb{E}[e^{\rho W_n}]$$

$$\mathbb{P}(W_n \geq \psi_{W_n}(\rho) + u) \leq e^{-\rho u}$$

Cette borne est intéressante puisque simple à visualiser. Connaissant ses montants provisionnés et son capital excédentaire, l'assureur peut ainsi facilement évaluer son niveau de risque.

En ce sens, obtenir une expression analytique de la mesure entropique, faciliterait la mise en oeuvre de cette borne pour l'assureur, puisqu'il pourrait déterminer à quel seuil ρ correspondent ses provisions vis-à-vis de la mesure entropique.

Présumons que la loi de sévérité est celle d'une loi Gamma(η, β), paramétrisée de telle sorte que son espérance est $\eta\beta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi_{W_n}(\rho) &= \frac{1}{\rho} \ln \mathcal{M}_{S_n} \left(\frac{\rho}{n} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\lambda n \left(\frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta - \frac{\rho}{n}} \right)^{2\eta} + \frac{n+\alpha}{n(1+\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta - \frac{\rho}{n}} \right)^\eta - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Supposer $\eta = 1$, c'est-à-dire que les sinistre suivent une loi exponentielle, permet d'obtenir une expression analytique encore plus intéressante.

$$\begin{aligned} \psi_{W_n}(\rho) &= \frac{1}{\rho} \left(\lambda n \left(\frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta - \frac{\rho}{n}} \right)^2 + \frac{n+\alpha}{n(1+\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta - \frac{\rho}{n}} \right) - 1 \right) \right) \\ &= \frac{\lambda n}{\rho} \left(\frac{\alpha(n-1)n^2\beta^2}{n(1+\alpha)(\beta n - \rho)^2} + \frac{(n+\alpha)\beta n}{n(1+\alpha)(\beta n - \rho)} - 1 \right) \\ &= \frac{\lambda n}{\rho(1+\alpha)(\beta n - \rho)} (\alpha n(n-1)\beta^2 + (n+\alpha)\beta(\beta n - \rho) - (1+\alpha)(\beta n - \rho)^2) \\ &= \frac{\lambda n}{\rho(1+\alpha)(\beta n - \rho)} (\rho\beta n - \alpha\rho\beta - \rho^2 + 2\alpha\rho\beta n - \alpha\rho^2) \\ &= \frac{\lambda n}{\rho(1+\alpha)(\beta n - \rho)} ((1+\alpha)(\beta n - \rho) + \alpha\beta(n-1)) \\ &= \frac{\lambda n}{\beta n - \rho} + \frac{\lambda n(n-1)\alpha\beta}{(1+\alpha)(\beta n - \rho)^2} \end{aligned}$$

L'hypothèse d'une loi gamma régissant la sévérité des sinistre peut cependant être une hypothèse un peu simpliste. Afin d'élargir les possibilités de modélisation, il convient de choisir plutôt une loi mélange

d'Erlang comme loi de sévérité. En effet, on la sait dense sur les réels positifs, c'est-à-dire que toute distribution définie sur un support positif peut être représentée comme un mélange d'Erlang.

Si $B \sim \text{MixErlang}(\underline{\gamma}, \beta)$, alors on sait qu'il est possible de représenter sa TLS comme celle d'une loi composée

$$\mathcal{L}_B(t) = \mathcal{P}_J(\mathcal{L}_K(t)) \quad \text{avec } K \sim \text{Exp}(\beta)$$

Il est donc possible de représenter la loi du montant total des sinistres S_n .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S_n}(t) &= \mathcal{P}_N(\mathcal{L}_B(t)) \\ &= \mathcal{P}_N(\mathcal{P}_J(\mathcal{L}_K(t))) \\ &= e^{\lambda n \left(\frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)} (\mathcal{P}_J(\mathcal{L}(t)))^2 + \frac{n+\alpha}{n(1+\alpha)} \mathcal{P}_J(\mathcal{L}(t)) - 1 \right)} \end{aligned}$$

C'est une fgp évaluée à $\mathcal{L}(t)$!

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{\infty} f_E(i) (\mathcal{L}_K(t))^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f_E(i) \left(\frac{\beta}{\beta + t} \right)^i \end{aligned}$$

Puisque Laplace inverse possède la propriété de linéarité :

$$F_S(t) = f_E(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_E(k) H(x; k, \beta) \quad \text{loi gamma fermée sous la convolution}$$

avec $E \sim \text{PoissonComp}(\lambda n, F_{D'})$

$$f_{D'}(x) = \frac{\alpha(n-1)}{n(1+\alpha)} f_{J^{*2}}(x) + \frac{(n+\alpha)}{n(1+\alpha)} f_J(x)$$

Dans le même esprit, la fonction de répartition du montant de sinistre moyen peut être déterminée :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W_n}(t) &= \mathcal{L}_{S_n} \left(\frac{t}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f_E(i) \left(\mathcal{L}_K \left(\frac{t}{n} \right) \right)^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f_E(i) \left(\frac{\beta}{\beta - \frac{t}{n}} \right)^i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f_E(i) \left(\frac{n\beta}{n\beta - t} \right)^i \end{aligned}$$

Puisque Laplace inverse possède la propriété de linéarité :

$$F_S(t) = f_E(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_E(k) H(x; k, n\beta) \quad \text{loi gamma fermée sous la convolution}$$

avec E défini tel que précédemment

Cela permet de retrouver une forme analytique pour la mesure entropique. L'assureur employant une loi

mélange d'Erlang pour plus de précision pourra donc, lui aussi, borner son risque de ruine.

$$\begin{aligned}\psi_{W_n}(\rho) &= \frac{1}{\rho} \ln \mathcal{M}_{W_n}(t) \\ &= \frac{1}{\rho} \ln \mathcal{L}_{W_n}(-t) \\ &= \frac{1}{\rho} \ln \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_E(i) \left(\frac{n\beta}{n\beta - t} \right)^i \right)\end{aligned}$$

Exemple

Les propriétés assurées ont la forme d'un octogone régulier de côté 1. Le nombre de sinistre moyen pour une propriété est la moitié de son aire. La dépendance dans la fréquence de sinistres est définie selon le modèle Poisson MA₁ tel qu'étudié dans [Cossette et al., 2011]. La sévérité des sinistres n'a pas de dépendance et suit un mélange d'Erlang de paramètres $(\underline{\gamma}, 0.1)$. $\underline{\gamma} = (\gamma_1 = 0.3, 0.2, 0.1, 0.15, 0.25)$ Étudions le risque pour un assureur assurant 1,10 ou 100¹ propriétés, pour une structure de dépendance $\alpha \in \{0, 0.5, 0.99\}$.

L'apothème d'un octogone régulier est $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. L'aire d'un octogone régulier est donné par

$$A = \frac{c \cdot a \cdot n}{2} = \frac{1(\sqrt{2}+1)(8)}{2} = 2(\sqrt{2}+1)$$

$$\text{Ainsi, } \lambda = 0.5A = 0.5(2(\sqrt{2}+1)) = \sqrt{2}+1$$

Connaissant les paramètres de la loi Mélange d'Erlang et de la loi de fréquence multivariée, il est possible de trouver la fonction de masse de probabilité de la variable aléatoire E telle que définie plus haut, de façon à pouvoir ensuite calculer la fonction de répartition de W_n avec la relation :

$$F_{W_n} = \sum_{k=1}^{\infty} f_E(k) H(x; k, n\beta)$$

Il faut toutefois avoir recours à la discrétisation pour le mettre en oeuvre numériquement. Une fois cela sù, espérances, variance et mesures de risque peuvent être calculées de la façon usuelle quand on connaît la fonction de masse d'une variable aléatoire.

On obtient alors les résultats :

α	n	$E[W_n]$	$\text{Var}(W_n)$	$\psi_{W_n}(0.01)$	$\psi_{W_n}(0.05)$	$\text{VaR}_{0.01}$	$\text{VaR}_{0.5}$	$\text{VaR}_{0.99}$	$\text{TVaR}_{0.01}$	$\text{TVaR}_{0.50}$	$\text{TVaR}_{0.99}$
0	1	67.64	2880.67	83.70	141.43	0.1	58.2	200.1	68.33	110.83	200.10
0	10	68.76	325.92	70.41	77.82	31.6	67.8	115.2	69.17	83.12	122.98
0	100	68.76	32.59	68.92	69.58	56	68.8	82.6	68.90	73.1	84.60
0.5	1	67.64	2880.67	83.70	141.43	0.1	58.2	200.1	68.33	110.83	200.10
0.5	10	89.40	541.28	92.18	104.90	41.5	88.2	149.2	89.94	107.91	159.23
0.5	100	91.46	56.29	91.74	92.89	74.7	91.4	109.6	91.65	97.45	112.27
0.99	1	67.64	2880.67	83.70	141.43	0.1	58.2	200.1	68.33	110.83	200.10
0.99	10	99.56	646.77	102.88	117.99	46.9	98.3	164.8	100.15	119.81	175.35
0.99	100	102.64	67.96	102.98	104.36	84.2	102.6	122.5	102.86	109.22	125.47

Il est plutôt curieux que l'espérance de W_n augmente avec le paramètre α , car celui-ci est sensé n'avoir un impact que sur la dépendance et non sur les marginales. Néanmoins, l'exemple numérique illustre

1. Le cas où $n = 1000$ a été écarté pour des raisons computationnelles.

bien l'effet de la dépendance sur la mutualisation. En effet, on remarque que le risque (représenté par les mesures de risque ou la variance) décroît en ajoutant des propriétés au portefeuille. Cependant, cette mutualisation s'effectue dans une moindre mesure lorsqu'on ajoute de la dépendance au moyen du paramètre α . On remarque que les valeurs pour un portefeuille d'une propriété ne sont pas influencées par le paramètre α puisque la dépendance n'existe pas en univarié. Enfin, profitons-en pour remarquer que la mesure de risque VaR n'est pas sous-additive.

3 Mesures de risque et allocation d'Euler

Les mesures de risques sont à la base de la science actuarielle, puisqu'elle permettent de quantifier rationnellement le comportement d'une variable aléatoire. Cela peut être utile pour un assureur, pour savoir quelle quantité de provisions doit-il conserver pour se prémunir en cas d'expérience défavorable. En outre, les mesures de risque - si elles sont homogènes positive de degré 1 - permettent une décomposition du risque global pour chaque élément aléatoire le composant au moyen de la méthode d'allocation d'Euler. Cela peut être pratique pour un assureur s'il veut étudier la contribution individuelle de chacune de ses lignes d'affaires à son risque. Seront étudiés les cas de cinq assureurs ayant chacun choisi une mesure de risque homogène de degré 1.

Un premier assureur pourrait choisir la mesure de risque Cantelli pour évaluer son risque :

$$\psi_\kappa(S) = E[S] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \sqrt{\text{Var}(S)}$$

Il remarquera que celle-ci est positive homogène de degré 1.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1, \dots, \lambda x_5) &= E[\lambda X_1 + \dots + \lambda X_5] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \sqrt{\text{Var}(\lambda X_1 + \dots + \lambda X_5)} \\ &= E[\lambda(X_1 + \dots + X_5)] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \sqrt{\text{Var}(\lambda(X_1 + \dots + X_5))} \\ &= \lambda E[X_1 + \dots + X_5] \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \sqrt{\lambda^2 \text{Var}(X_1 + \dots + X_5)} \\ &= \lambda \left(E[X_1 + \dots + X_5] \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \sqrt{\text{Var}(X_1 + \dots + X_5)} \right) \\ &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_5) \end{aligned}$$

Cela lui permettra donc d'exprimer, pour la mesure de risque Cantelli, la contribution d'un contrat au

risque. En appliquant la méthode d'Euler,

$$\begin{aligned}
 C_i(x_1, \dots, x_5) &= \frac{d}{d\lambda_i} \varphi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_5 x_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= \frac{d}{d\lambda_i} E[\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \sqrt{\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5)} \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= E\left[\frac{d}{d\lambda_i} (\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5)\right] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \frac{1}{2} (\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n))^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\lambda_i} \text{Var}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= E[X_i] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \frac{1}{2} (\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n))^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\lambda_i} (E[(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5)^2] - E[\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5]^2) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= E[X_i] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \frac{1}{2} (\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n))^{-\frac{1}{2}} (E[\frac{d}{d\lambda_i} (\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5)^2] - 2E[S]E[\frac{d}{d\lambda_i} \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5]) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= E[X_i] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \frac{1}{2} (\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n))^{-\frac{1}{2}} (E[2\lambda_i X_i (\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5)] - 2E[S]E[X_i]) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= E[X_i] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} (\text{Var}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n))^{-\frac{1}{2}} (E[\lambda_i X_i (\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5)] - E[S]E[X_i]) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= E[X_i] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} (\text{Var}(S))^{-\frac{1}{2}} (E[X_i(S)] - E[S]E[X_i]) \\
 &= E[X_i] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \frac{\text{Cov}(S, X_i)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \\
 &= E[X_i] + \sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa}} \frac{\text{Var}(X_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \text{Cov}(X_j, X_i)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}
 \end{aligned}$$

L'assureur avisé aura remarqué que la somme des contributions de chaque risque lui donne bien son risque total. En effet, on voit directement que

$$\sum_{i=1}^5 E[X_i] = E[S] \quad \text{et} \quad \frac{\sum_{i=1}^5 \text{Cov}(S, X_i)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} = \frac{\text{Cov}(S, S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} = \sqrt{\text{Var}(S)}$$

Un deuxième assureur pourrait, lui, choisir la mesure de risque VaR pour évaluer son risque :

$$\text{VaR}_\kappa(S) = F_S^{-1}(\kappa)$$

Il remarquera que celle-ci est positive homogène de degré 1.

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda x_1, \dots, \lambda x_5) &= \text{VaR}(\lambda X_1 + \dots + \lambda X_5) \\
 &= \text{VaR}(\lambda(X_1 + \dots + X_5)) \\
 &= \lambda \text{VaR}((X_1 + \dots + X_5)) \quad \text{car la multiplication par un scalaire positif est une fonction croissante} \\
 &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_5)
 \end{aligned}$$

Cela lui permettra donc d'exprimer, pour la mesure de risque VaR, la contribution d'un contrat au risque.

En appliquant la méthode d'Euler,

$$\begin{aligned}
 C_i(x_1, \dots, x_5) &= \frac{d}{d\lambda_i} \varphi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_5 x_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= \frac{d}{d\lambda_i} \text{VaR}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= \frac{d}{d\lambda_i} \mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5 | S = \text{VaR}_\kappa(S)] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \quad \text{voir p.163 de [Cossette and Marceau, 2021] pour plus d'intuition sur cette transition} \\
 &= \mathbb{E} \left[\frac{d}{d\lambda_i} \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5 | S = \text{VaR}_\kappa(S) \right] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= \mathbb{E}[X_i | S = \text{VaR}_\kappa(S)] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \quad \text{la contrainte n'affecte pas la dérivation} \\
 &= \mathbb{E}[X_i | S = \text{VaR}_\kappa(S)] \\
 &= \frac{\mathbb{E}[X_i \cdot 1_{\{S = \text{VaR}_\kappa(S)\}}]}{f_S(\text{VaR}_\kappa(S))}
 \end{aligned}$$

Il est d'une évidence que la somme des contribution fera retrouver le risque total.

Un troisième assureur pourrait, pour sa part, choisir la mesure de risque TVaR pour évaluer son risque :

$$\begin{aligned}
 \text{TVaR}_\kappa(S) &= \int_\kappa^1 \text{VaR}_u du \\
 &= \frac{1}{1-\kappa} \pi_S(\text{Var}_\kappa(S)) + \text{VaR}_\kappa(S)
 \end{aligned}$$

Il remarquera que celle-ci est positive homogène de degré 1.

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda x_1, \dots, \lambda x_5) &= \text{TVaR}(\lambda X_1 + \dots + \lambda X_5) \\
 &= \text{TVaR}(\lambda(X_1 + \dots + X_5)) \\
 &= \int_\kappa^1 \text{VaR}_u(\lambda(X_1 + \dots + X_5)) du \\
 &= \int_\kappa^1 \lambda \text{VaR}_u(X_1 + \dots + X_5) du \quad \text{la VaR est positive homogène de degré 1} \\
 &= \lambda \int_\kappa^1 \text{VaR}_u((X_1 + \dots + X_5)) du \quad \text{la VaR est positive homogène de degré 1} \\
 &= \lambda \text{TVaR}_\kappa(X_1 + \dots + X_5) \\
 &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_5)
 \end{aligned}$$

Cela lui permettra donc d'exprimer, pour la mesure de risque TVaR, la contribution d'un contrat au

risque. En appliquant la méthode d'Euler,

$$\begin{aligned}
 C_i(x_1, \dots, x_5) &= \frac{d}{d\lambda_i} \varphi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_5 x_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= \frac{d}{d\lambda_i} \text{TVaR}(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= \frac{d}{d\lambda_i} \left(\frac{1}{1-\kappa} \mathbb{E}[\max(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5 - \text{VaR}_\kappa(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5); 0)] + \text{VaR}_\kappa(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) \right) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
 &= \frac{1}{1-\kappa} \mathbb{E} \left[\frac{d}{d\lambda_i} \max(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5 - \text{VaR}_\kappa(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5); 0) \right] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} + C_i^{\text{VaR}}(x_1, \dots, x_5) \\
 &= \frac{1}{1-\kappa} \mathbb{E}[1_{\{S \geq \text{VaR}_\kappa(S)\}} \frac{d}{d\lambda_i} (\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5 - \text{VaR}_\kappa(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5))] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} + C_i^{\text{VaR}}(x_1, \dots, x_5) \quad \text{propriété de la fonction ReLU} \\
 &= \frac{1}{1-\kappa} \mathbb{E}[1_{\{S \geq \text{VaR}_\kappa(S)\}} (X_i - C_i^{\text{VaR}}(x_1, \dots, x_5))] + C_i^{\text{VaR}}(x_1, \dots, x_5)
 \end{aligned}$$

Encore une fois, il appert évident qu'on retrouve la valeur de la mesure de risque totale lorsqu'on somme les contributions respectives de tous les risques.

Un quatrième assureur pourrait, quant à lui, choisir la mesure de risque EVaR pour évaluer son risque :

$$\text{EVaR}_\kappa(S) = \inf_{z>0} \left\{ \frac{1}{z} \ln \frac{\mathcal{M}_S(z)}{1-\kappa} \right\}$$

Il remarquera que celle-ci est positive homogène de degré 1.

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda x_1, \dots, \lambda x_5) &= \text{EVaR}(\lambda X_1 + \dots + \lambda X_5) \\
 &= \inf_{z>0} \left\{ \frac{1}{z} \ln \frac{\mathcal{M}_{\lambda X_1 + \dots + \lambda X_5}(z)}{1-\kappa} \right\} \\
 &= \inf_{z>0} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda} \frac{1}{z} \ln \frac{\mathbb{E}[e^{z(\lambda X_1 + \dots + \lambda X_5)}]}{1-\kappa} \right\} \\
 &= \lambda \inf_{z>0} \left\{ \frac{1}{\lambda z} \ln \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda z(X_1 + \dots + X_5)}]}{1-\kappa} \right\} \\
 &= \lambda \inf_{z>0} \left\{ \frac{1}{\lambda z} \ln \frac{\mathcal{M}_{X_1 + \dots + X_5}(\lambda z)}{1-\kappa} \right\} \\
 &= \lambda \inf_{z>0} \left\{ \frac{1}{z^*} \ln \frac{\mathcal{M}_{X_1 + \dots + X_5}(z^*)}{1-\kappa} \right\} \\
 &= \lambda \text{EVaR}(X_1 + \dots + X_5) \\
 &= \lambda \varphi(x_1, \dots, x_5)
 \end{aligned}$$

Cela lui permettrait donc d'exprimer la contribution d'un contrat au risque pour la mesure de risque EVaR selon la méthode d'Euler. Cependant, il n'est pas possible d'obtenir une forme analytique pour la dérivée d'un infimum. L'actuaire avisé pourrait cependant approximer numériquement le calcul en faisant varier infinitésimalement la réalisation de la variable aléatoire dont on veut calculer l'allocation.

$$\begin{aligned}
 C_i(x_1, \dots, x_5) &= x_i \frac{d}{dx_i} \varphi(x_1, \dots, x_5) \\
 &\approx x_i \frac{\varphi(x_1, \dots, (1+\varepsilon)x_i, \dots, x_5) - \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_5)}{x_i \varepsilon} \quad \text{avec } \varepsilon \text{ petit} \\
 &= \frac{\varphi(x_1, \dots, (1+\varepsilon)x_i, \dots, x_5) - \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_5)}{\varepsilon}
 \end{aligned}$$

Après avoir lu [Escobar and Pflug, 2020], un cinquième assureur pourrait plutôt choisir la mesure de distorsion pour évaluer son risque :

$$\Pi_s(S) = \int_0^\infty g_s(S_S(x))dx$$

La fonction de distorsion g_s est définie selon le seuil s choisi pour l'évaluation de la mesure de risque.

$$g_s(v) = \begin{cases} v^s & \text{si } 0 < s < 1 \\ 1 - (1 - v)^s & \text{si } 1 \leq s \end{cases}$$

Ainsi, la mesure de distorsion devient :

$$\Pi_s(S) = \begin{cases} \int_0^\infty (S_S(x))^s dx & \text{si } 0 < s < 1 \\ \int_0^\infty 1 - (F_S(x))^s dx & \text{si } 1 \leq s \end{cases}$$

Ou encore, en changeant le sens d'intégration :

$$\Pi_s(S) = \begin{cases} \int_0^1 \text{VaR}_u(S) s(1-u)^{s-1} du & \text{si } 0 < s < 1 \\ \int_0^1 \text{VaR}_u(S) s u^{s-1} du & \text{si } 1 \leq s \end{cases}$$

Sachant la VaR positive homogène de degré 1, l'assureur verra de toute évidence le principe de distorsion comme étant lui-même positif homogène de degré 1. Ainsi, il pourra appliquer la méthode d'Euler pour calculer la contribution respective de chaque risque.

$$\begin{aligned} C_i(x_1, \dots, x_5) &= \frac{d}{d\lambda_i} \varphi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_5 x_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\ &= \frac{d}{d\lambda_i} \Pi_s(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\ &= \frac{d}{d\lambda_i} \int_0^1 \text{VaR}_u(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) h(s, u) du \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \quad \text{avec } h(s, u) = \begin{cases} s(1-u)^{s-1} \\ s u^{s-1} \end{cases} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\lambda_i} \text{VaR}_u(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) h(s, u) du \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \quad \text{par Leibnitz} \\ &= \int_0^1 C_i^{\text{VaR}_u}(x_1, \dots, x_5) h(s, u) du \end{aligned}$$

Or, cette expression de la contribution peut être difficile à mettre en oeuvre d'un point de vue numérique pour un assureur. En employant la théorie de la mesure, la mesure de distorsion peut être vue comme une espérance sous une nouvelle mesure de probabilité, dont la dérivée de Radon-Nikodym retrouverait la distorsion g_s . On notera cette mesure G . Ainsi,

$$\Pi_s(S) = E^G[S]$$

La contribution d'un risque est alors beaucoup plus simple :

$$\begin{aligned}
C_i(x_1, \dots, x_5) &= \frac{d}{d\lambda_i} \varphi(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_5 x_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
&= \frac{d}{d\lambda_i} \Pi_s(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5) \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
&= \frac{d}{d\lambda_i} E^G[\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
&= E^G \left[\frac{d}{d\lambda_i} \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_5 X_5 \right] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
&= E^G[X_i] \Big|_{\underline{\lambda}=(1,1,1,1,1)} \\
&= E^G[X_i]
\end{aligned}$$

Il est évident, par la propriété de linéarité des espérances, que la somme des contribution permet de retrouver la mesure de distorsion.

Si l'on connaît la loi de probabilité sous-jacente, il est aisé de calculer $E^G[X_i]$. En effet, il suffit d'appliquer la distorsion aux probabilités, puis de calculer l'espérance au moyen de ces nouvelles probabilités.

4 Distributions Bernoulli multivariées

Les distributions Bernoulli multivariées sont importantes d'un point de vu actuariel, puisqu'elles peuvent servir à modéliser la dépendance dans la survenance de sinistres. Notamment, il peut être important que ces variables puissent être échangeables, c'est-à-dire qu'elles aient toutes le même schéma de dépendance entre elles.

L'échangeabilité se définit comme suit pour un vecteur bivarié : il faut que

$$(X_i, X_j) =^D (X_j, X_i)$$

ou de façon plus générale : il faut que

$$(X_1, \dots, X_n) =^D (X_{\pi_1[i]}, \dots, X_{\pi_n[i]}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n!\}$$

avec $\pi_j[i]$ représentant le j ième élément de l' i ème permutation du vecteur.

Il est évident qu'il faut absolument que les distributions marginales soient toutes identiques pour pouvoir avoir de l'échangeabilité. Cependant, ce n'est pas suffisant. Tandis que deux lois Bernoulli identiquement distribuées sont forcément échangeables, un vecteur de trois variables ou plus admet des schémas de dépendance non échangeable.

Pensons à un modèle de dépendance temporelle défini selon les chaînes de Markov, où la matrice de probabilité de transition est

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 - (1 - \alpha)q & (1 - \alpha)q \\ (1 - \alpha)(1 - q) & \alpha + (1 - \alpha)q \end{bmatrix}$$

Soit le vecteur aléatoire (I_1, \dots, I_n) représentant les expériences de Bernoulli se succédant selon ce modèle. Il peut être prouvé que la dépendance entre I_i décroît de façon exponentielle selon leur distance relative. Il est donc clair que

$$(I_1, I_i) \neq^D (I_1, I_{i+1})$$

ce qui contrecarrera les permutations dans le vecteur au complet.

Un exemple plus simple prouvant qu'il est possible d'avoir un vecteur non échangeable dès que $n \geq 3$ est l'antimonotonie. En effet, supposons un vecteur trivarié dont un couple de variable est antimonotone. Il sera impossible pour la troisième variable d'être antimonotone avec les deux à la fois. En effet, l'antimonotonie avec l'une impliquerait forcément la comonotonie avec l'autre. De ce fait, le vecteur aléatoire ne serait pas échangeable.

On comprend donc que les distributions multivariées Bernoulli échangeables sont un sous-ensemble des distributions multivariées Bernoulli. [Diaconis, 1977] propose une représentation sous la forme d'un tétraèdre de toute les distributions Bernoulli trivariées échangeables. Il ne l'illustre cependant pas. Ainsi, la figure suivante est du crû de l'auteur.

Les probabilités doivent être lues de telle sorte que la première ligne est la probabilité de n'avoir que des 0. La deuxième ligne est les probabilités des trois possibilités d'avoir un seul 1. La troisième ligne est les probabilités des trois possibilités d'avoir deux 1. La dernière ligne est la probabilité de n'avoir que des 1.

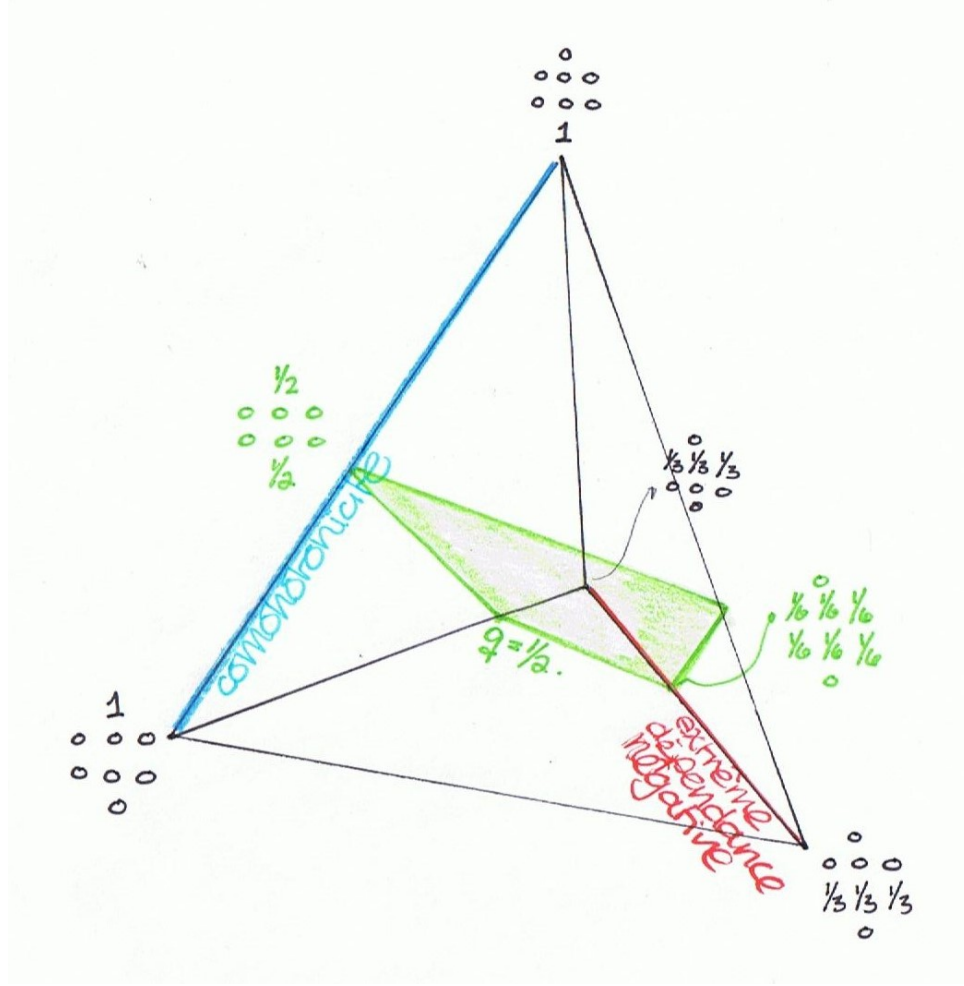


ILLUSTRATION 1 – Tétrahèdre de dépendance trivariée de lois Bernoulli échangeables

L'arête bleue regroupe toutes les lois Bernoulli trivariées échangeables comonotones ; l'arête rouge, toutes les lois Bernoulli trivariées échangeables d'extrême dépendance négative. Le plan vert illustre toutes les lois Bernoulli trivariées dont les marginales ont le paramètre $q = \frac{1}{2}$. Notez que le plan touche en un point à quatre des six arêtes du tétraèdre, dont celles de comonotonie et d'extrême dépendance négative.

Ce sont bien les termes « extrême dépendance négative » qui sont employés, car, tel qu'établi précédemment, l'antimonotonie n'est pas possible lorsqu'il y a un vecteur de plus de deux. Cela laisse à se demander quelle sont les niveaux de dépendance extrême possible pour des lois Bernoulli de paramètre $q = \frac{1}{2}$. Pour ce faire, observons le comportement du coefficient de corrélation de Pearson.

Pour la dépendance positive, il est évident que des variables comonotones sont échangeables. Il s'agit là de la forme de dépendance la plus élevée.

$$\bar{\rho}_P(q) = \frac{\text{Cov}(I_i, I_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}} = \frac{E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]}{q(1-q)} = 1$$

Pour la dépendance négative, il est moins évident de définir quel schéma de dépendance induit le plus petit coefficient de corrélation de Pearson.

N'ayant étonnamment rien trouvé à cet effet dans la littérature proposée, ni même avec des recherches personnelles, l'auteur propose son propre raisonnement. Il ne s'attardera qu'au cas où les marginales

Bernoulli ont un paramètre $q = \frac{1}{2}$.

On remarque que

$$\rho_P(q) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}} = \frac{E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]}{q(1-q)} = \frac{E[X_i X_j] - q^2}{q(1-q)} = \frac{E[X_i X_j] - 0.25}{0.25} = 4E[X_i X_j] - 1$$

Il faut donc minimiser $E[X_i X_j]$. Cette quantité prend la valeur 1 aux points où X_i et X_j valent toutes deux 1, et 0 autrement. Ainsi, il faut minimiser les poids (en termes de probabilité) associés à ces points. Cependant, sous la contraintes que les lois doivent être échangeables, les probabilités doivent être identiques pour tous les éléments du support ayant le même nombre d'expérience réussies ν (le même nombre de 1). Ainsi, c'est réellement - pour une même valeur de ν - la proportion d'éléments où à la fois X_i et X_j valent 1 qui doit être considérée. D'un point de vue combinatoire, cette proportion $\xi_n(\nu)$ peut être exprimée

$$\xi_n(\nu) = \frac{\binom{n-2}{\nu-2}}{\binom{n}{\nu}}, \quad \text{avec } \xi_n(0) = \xi_n(1) = 1$$

On choisit donc la combinaison convexe, octroyant des marginales Bernoulli(q), minimisant cette proportion. On lui attribue tout le poids de probabilités pour minimiser $E[X_i X_j]$.

Par la convexité de la factorielle, il est possible de remarquer que $\xi(\nu)$ est également convexe. De fait, la combinaison convexe minimisant $E[X_i X_j]$ sera celle composés des éléments les plus près de $\nu = nq$ (pour que les marginales soient Bernoulli(q)).

Dans le cas où $q = \frac{1}{2}$, on choisira $\nu = nq$, si n est pair, ou une combinaison des deux éléments les plus près $\nu = nq - 0.5$ et $\nu = nq + 0.5$ si n est impair. On obtient :

pour $n = 2$	$\underline{\rho}_P(0.5) = 4E[X_i X_j] - 1 = 4(\xi_2(1)) - 1 = 4(0) - 1$	$= -1$
pour $n = 3$	$\underline{\rho}_P(0.5) = 4E[X_i X_j] - 1 = 4(0.5\xi_3(1) + 0.5\xi_3(2)) - 1 = 4(0 + 0.5 * \frac{1}{3}) - 1$	$= -\frac{1}{3}$
pour $n = 4$	$\underline{\rho}_P(0.5) = 4E[X_i X_j] - 1 = 4(\xi_4(2)) - 1 = 4(\frac{1}{6}) - 1$	$= -\frac{1}{3}$
pour $n = 5$	$\underline{\rho}_P(0.5) = 4E[X_i X_j] - 1 = 4(0.5\xi_5(2) + 0.5\xi_5(3)) - 1 = 4(0.5 * \frac{1}{10} + 0.5 * \frac{3}{10}) - 1$	$= -\frac{1}{5}$
pour $n = 6$	$\underline{\rho}_P(0.5) = 4E[X_i X_j] - 1 = 4(\xi_6(3)) - 1 = 4(\frac{1}{5}) - 1$	$= -\frac{1}{5}$
pour $n = 7$	$\underline{\rho}_P(0.5) = 4E[X_i X_j] - 1 = 4(0.5\xi_7(3) + 0.5\xi_7(4)) - 1 = 4(0.5 * \frac{1}{7} + 0.5 * \frac{2}{7}) - 1$	$= -\frac{1}{7}$

Au vu de ses résultats, il est possible de conjecturer que le plus petit coefficient de corrélation de Pearson pouvant être obtenu pour des marginales de paramètre $q = \frac{1}{2}$ est

$$\underline{\rho}_P(0.5) = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ -\frac{1}{n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Par ailleurs, il convient de définir de façon plus formelle l'échangeabilité d'un vecteur aléatoire. Pour ce faire, [Finetti, 1992] a énoncé un théorème sur l'échangeabilité de variables aléatoires Bernoulli.

Théorème (de Finetti)

Soit $\{X_i\}_{i=1}^\infty$, une séquence infinie de variables aléatoires échangeables. Pour toutes les décompositions d'un n -vecteur ($\forall n$), il existe une mesure de probabilités μ , unique, telle que

$$P(X_1 = e_1, \dots, X_n = e_n) = \int_0^1 p^k (1-p)^{n-k} d\mu(p)$$

avec \underline{e} , tout vecteur de 0 et de 1.

[Diaconis, 1977] soulève un problème avec le précédent théorème : il nécessite une séquence infinie pour décrire l'échangeabilité. En effet, il peut être vu que de Finetti définit des variables aléatoires échangeables comme un mélange, sur une même mesure, de variables indépendantes (qu'on sait échangeables). Or, en n'ayant qu'un nombre fini de variables aléatoires, il y a des mesures échangeables qui ne peuvent être exprimées comme un mélange d'indépendantes. Par exemple, il est impossible, pour une séquence de deux variables Bernoulli antimonotones (qu'on sait échangeables) d'être représentées par des lois indépendantes, puisque le mélange attribuera toujours une masse à (0,0) et à (1,1). Il est possible de représenter l'ensemble de deux variables Bernoulli échangeables ne pouvant être représentées par la version classique de De Finetti (voir illustration). Le coin supérieur du triangle représente l'antimonotonicité tandis que le côté inférieur, la comonotonicité. L'aire hachurée ne peut être représentée par un mélange de variables indépendantes.

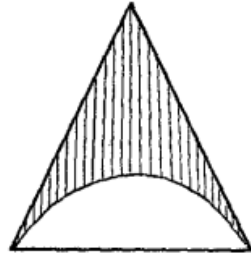


ILLUSTRATION 2 – Variables Bernoulli bivariées échangeables non représentables avec De Finetti
[Diaconis, 1977]

Ainsi, [Diaconis, 1977] ajuste le théorème pour tenir compte des cas de séquence finie en spécifiant que

$$P(X_1 = e_1, \dots, X_r = e_r) = \int_0^1 p^k (1-p)^{r-k} d\mu(p)$$

avec \underline{e} , tout vecteur de 0 et de 1, peut s'appliquer pour une séquence finie, si et seulement si celle-ci peut être extensible à l'infinie, c'est-à-dire qu'il est possible de rajouter des variables aléatoires en gardant le même schéma de dépendance.

Il a été question, à plusieurs reprises, de l'ensemble de toutes les mesures Bernoulli échangeables d'une distribution donnée. Pour la suite, représentons cet ensemble par $\mathcal{E}(n, q)$, où n est le nombre de variables aléatoires et q , le paramètre des marginales (qui sont, rappelons-nous, forcément identiques). [Fontana and Semeraro, 2021] analyse en détail la structure géométrique de $\mathcal{E}(n, q)$.

Soit $|\mathcal{E}^{(ext)}(n, q)|$, les points extrémaux de l'ensemble $\mathcal{E}(n, q)$. Il est établi que $\mathcal{E}(n, q)$ est convexe, ce qui implique :

$$F_{\underline{I}}(x) = \sum_{j \in \{1, \dots, |\mathcal{E}^{(ext)}(n, q)|\}} \gamma_j F_{\underline{I}^{(ext, j)}}(x), \quad x \geq 0$$

Autrement dit, il est possible de représenter tout élément de $\mathcal{E}(n, q)$ comme une combinaison convexe de

ses extrémités. Cela peut également s'appliquer aux calculs d'espérances d'éléments de $\mathcal{E}(n, q)$.

$$\begin{aligned}
 E[\varphi(\underline{I})] &= \int_{\mathcal{D}} \varphi(x) dF_{\underline{I}}(x) \\
 &= \int_{\mathcal{D}} \varphi(x) d \sum_j \gamma_j F_{\underline{I}^{(ext, j)}}(x) \\
 &= \int_{\mathcal{D}} \varphi(x) \sum_j \gamma_j dF_{\underline{I}^{(ext, j)}}(x) \quad \begin{array}{l} \text{Propriété de l'intégrale de Riemann-Stieltjes} \\ \text{(la différentielle possède la propriété de linéarité)} \end{array} \\
 &= \sum_j \gamma_j \int_{\mathcal{D}} \varphi(x) dF_{\underline{I}^{(ext, j)}}(x) \\
 &= \sum_j \gamma_j E[\varphi(I^{(ext, j)})]
 \end{aligned}$$

Il peut donc être constaté que, pour bien comprendre le comportement de $\mathcal{E}(n, q)$, il suffit de s'attarder à ses points extrémaux.

[Fontana and Semeraro, 2021] s'y sont attardés et établissent leur comportement, et ce, peu importe la dimension.

Nous regarderons surtout le comportement de $N_n = \sum_{i=1}^n I_i$ à ces extrêmes. Toutefois, gardons en tête que, de par l'échangeabilité des variables aléatoires,

$$P(\underline{I} = \underline{e}) = \frac{\nu}{\binom{n}{\nu}} P(N_n = \nu), \quad \text{avec } \nu = \sum_{i=1}^n e_i$$

Regarder N_n ne réduit donc aucunement la portée de l'analyse.

Appartiendront à j_1 toutes les valeurs du support de N_n inférieures à nq et à j_2 celles supérieures. Si nq tombe juste, alors la valeur correspondante appartient à j_* .

Chaque extrémité de $\mathcal{E}(n, q)$ est décrite par un rayon extrémal r_j , $r_j(\nu)$ représentant $P(N_n = \nu)$ pour la j ième extrémité. Il y a autant de rayons extrémaux r_j que de couples (j_1, j_2) possibles, et un de plus s'il y a une valeur j_* .

Toujours selon [Fontana and Semeraro, 2021], les rayons extrémaux sont construits selon les couples (j_1, j_2) dont ils sont issus.

$$r_j(\nu) = \begin{cases} \frac{j_2 - nq}{j_2 - j_1} & \text{si } \nu = j_1 \\ \frac{nq - j_1}{j_2 - j_1} & \text{si } \nu = j_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et pour le rayon extrémal associé à } j_* \quad r_j(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = j_* \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Étudions le cas d'une loi Bernoulli trivariée dont les marginales sont paramétrisées $q = \frac{1}{2}$ et sont échangeables. Il est possible de connaître le comportement des extrémités de $\mathcal{E}(3, \frac{1}{2})$ avec la méthode de [Fontana and Semeraro, 2021]

On a $nq = 1.5$. Ainsi, $j_1 = \{0, 1\}$ et $j_2 = \{2, 3\}$.

	r_1	r_2	r_3	r_4
$P(N_3 = 0)$	0.25	0.5	0	0
$P(N_3 = 1)$	0	0	0.5	0.75
$P(N_3 = 2)$	0.75	0	0.5	0
$P(N_3 = 3)$	0	0.5	0	0.25
	a)	b)	c)	d)

Pour bien comprendre le comportement de chaque extrémité, on calcule, pour chacune, l'espérance, le deuxième moment, la variance, la fonction de répartition et la mesure entropique ($\psi_{N_n}(\rho)$) à divers seuils. Les indices d'énumération se réfèrent à ceux sous le tableau.

a)

$$\begin{aligned}
E[N_3] &= 0 + 0.75(2) = 1.5 \\
E[N_3^2] &= 0 + 0.75(2)^2 = 3 \\
\text{Var}(N_3) &= 3 - 1.5^2 = 0.75 \\
F_{N_3}(x) &= \begin{cases} 0.25 & \text{si } x \in [0, 2[\\ 1 & \text{si } x \in [2, \infty[\end{cases} \\
\psi_{N_3}(0.001) &= 1000 \ln((0.25) + e^{0.002}(0.75)) = 1.50037 \\
\psi_{N_3}(0.01) &= 100 \ln((0.25) + e^{0.02}(0.75)) = 1.50374 \\
\psi_{N_3}(0.1) &= 10 \ln((0.25) + e^{0.2}(0.75)) = 1.5362
\end{aligned}$$

b) Il s'agit du cas de comonotonie.

$$\begin{aligned}
E[N_3] &= 0 + 0.5(3) = 1.5 \\
E[N_3^2] &= 0 + 0.5(3)^2 = 4.5 \\
\text{Var}(N_3) &= 4.5 - 1.5^2 = 2.25 \\
F_{N_3}(x) &= \begin{cases} 0.5 & \text{si } x \in [0, 3[\\ 1 & \text{si } x \in [3, \infty[\end{cases} \\
\psi_{N_3}(0.001) &= 1000 \ln((0.5) + e^{0.003}(0.5)) = 1.501125 \\
\psi_{N_3}(0.01) &= 100 \ln((0.5) + e^{0.03}(0.5)) = 1.51125 \\
\psi_{N_3}(0.1) &= 10 \ln((0.5) + e^{0.3}(0.5)) = 1.612
\end{aligned}$$

c) Il s'agit du cas de dépendance négative extrême.

$$\begin{aligned}
E[N_3] &= 0.5(1) + 0.5(2) = 1.5 \\
E[N_3^2] &= 0.5(1)^2 + 0.5(2)^2 = 2.5 \\
\text{Var}(N_3) &= 2.5 - 1.5^2 = 0.25 \\
F_{N_3}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0.5 & \text{si } x \in [1, 2[\\ 1 & \text{si } x \in [2, \infty[\end{cases} \\
\psi_{N_3}(0.001) &= 1000 \ln(e^{0.001}(0.5) + e^{0.002}(0.5)) = 1.500125 \\
\psi_{N_3}(0.01) &= 100 \ln(e^{0.01}(0.5) + e^{0.02}(0.5)) = 1.50125 \\
\psi_{N_3}(0.1) &= 10 \ln(e^{0.1}(0.5) + e^{0.2}(0.5)) = 1.5125
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
E[N_3] &= 0.75(1) + 0.25(3) = 1.5 \\
E[N_3^2] &= 0.75(1)^2 + 0.25(3)^2 = 3 \\
\text{Var}(N_3) &= 3 - 1.5^2 = 0.75 \\
F_{N_3}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0.75 & \text{si } x \in [1, 3[\\ 1 & \text{si } x \in [3, \infty[\end{cases} \\
\psi_{N_3}(0.001) &= 1000 \ln(e^{0.001}(0.75) + e^{0.003}(0.25)) = 1.50037 \\
\psi_{N_3}(0.01) &= 100 \ln(e^{0.01}(0.75) + e^{0.03}(0.25)) = 1.50376 \\
\psi_{N_3}(0.1) &= 10 \ln(e^{0.1}(0.75) + e^{0.2}(0.25)) = 1.5387
\end{aligned}$$

En synthèse,

	r_1	r_2	r_3	r_4
$E[N_3]$	1.5	1.5	1.5	1.5
$\text{Var}(N_3)$	3	4.5	2.5	3
$\psi_{N_3}(1000)$	1.50037	1.501125	1.500125	1.50037
$\psi_{N_3}(100)$	1.50374	1.51125	1.50125	1.50376
$\psi_{N_3}(10)$	1.5362	1.612	1.5125	1.5387

Il peut être remarqué que toutes les distributions ont la même espérance, ce qui est prévisible puisque les marginales sont toutes identiques. C'est le cas de la comonotonicité (r_2) qui introduit la plus grande variance au niveau de N_n et les plus grandes valeurs de mesures entropiques. En effet, comme les variables aléatoires se suivent, il n'y a pas possibilité de mutualisation. Inversement, le cas d'extrême dépendance négative (r_3) est celle qui permet la meilleure mutualisation, et propose donc un risque plus faible.

Étudions ensuite le cas d'une loi Bernoulli quadrivariée dont les marginales sont paramétrisées $q = \frac{1}{2}$ et sont échangeables. Il est possible de connaître le comportement des extrémités de $\mathcal{E}(4, \frac{1}{2})$ encore une fois avec la méthode présentée par [Fontana and Semeraro, 2021]

On a $nq = 2$. Ainsi, $j_1 = \{0, 1\}$, $j_2 = \{3, 4\}$ et $j_* = 2$.

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
$P(N_4 = 0)$	$\frac{1}{3}$	0	0	0.5	0
$P(N_4 = 1)$	0	0.5	0	0	$\frac{2}{3}$
$P(N_4 = 2)$	0	0	1	0	0
$P(N_4 = 3)$	$\frac{2}{3}$	0.5	0	0	0
$P(N_4 = 4)$	0	0	0	0.5	$\frac{1}{3}$
	e)		f)		

e) Il s'agit du cas de dépendance négative extrême.

f) Il s'agit du cas de comonotonicité.

Cette fois, nous épargnons au lecteur les calculs et présentons directement la synthèse des résultats.

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
$E[N_4]$	2	2	2	2	2
$\text{Var}(N_4)$	2	1	0	4	2
$\psi_{N_4}(1000)$	2.001	2.0005	2	2.002	2.001
$\psi_{N_4}(100)$	2.01	2.005	2	2.02	2.01
$\psi_{N_4}(10)$	2.0964	2.05	2	2.1987	2.1031

Des constats similaires que précédemment peuvent être formulés vis-à-vis du comportement du risque selon le type d'extrémité. Notons toutefois que, puisque nq est entier, le cas d'extrême dépendance négative, associé à j_* , entraîne une mutualisation parfaite. En effet, la variable aléatoire N_4 est alors dégénérée à $nq = 2$. En ce sens, sa variance est nulle et les mesures entropiques correspondent toutes à son espérance, témoignant de l'absence de risque dans le cas de cette extrémité.

L'avantage de la méthode d'analyse présentée par [Fontana and Semeraro, 2021] est qu'elle n'est pas limitée à un nombre de dimensions. Il est aisé de trouver les distributions des extrêmes de $\mathcal{E}(n, q)$ peu importe que n soit grand ou non. Il faut cependant être conscient que le nombre de ces extrémités croît factoriellement.

À cet effet, l'étude précédente peut être poursuivie pour la cinquième dimension. Les extrémités de $\mathcal{E}(5, \frac{1}{2})$ sont représentées ci-dessous.

On a $nq = 2.5$. Ainsi, $j_1 = \{0, 1, 2\}$ et $j_2 = \{3, 4, 5\}$.

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9
$P(N_5 = 0)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	0.5	0	0	0	0	0	0
$P(N_5 = 1)$	0	0	0	0.25	0.5	$\frac{5}{8}$	0	0	0
$P(N_5 = 2)$	0	0	0	0	0	0	0.5	0.75	$\frac{5}{6}$
$P(N_5 = 3)$	$\frac{5}{6}$	0	0	0.75	0	0	0.5	0	0
$P(N_5 = 4)$	0	$\frac{5}{8}$	0	0	0.5	0	0	0.25	0
$P(N_5 = 5)$	0	0	0.5	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{6}$

g)

h)

g) Il s'agit du cas de comonotonicité.

h) Il s'agit du cas de dépendance négative extrême.

En ajoutant encore une dimension, c'est $\mathcal{E}(6, \frac{1}{2})$ qui est analysé.

On a $nq = 3$. Ainsi, $j_1 = \{0, 1, 2\}$, $j_2 = \{4, 5, 6\}$ et $j_* = 3$.

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
$P(N_6 = 0)$	0.25	0.4	0.5	0	0	0	0	0	0	0
$P(N_6 = 1)$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0.5	0.6	0	0	0	0
$P(N_6 = 2)$	0	0	0	0	0	0	0.5	$\frac{2}{3}$	0.75	0
$P(N_6 = 3)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$P(N_6 = 4)$	0.75	0	0	$\frac{2}{3}$	0	0	0.5	0	0	0
$P(N_6 = 5)$	0	0.6	0	0	0.5	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0
$P(N_6 = 6)$	0	0	0.5	0	0	0.4	0	0	0.25	0

i)

j)

i) Il s'agit du cas de comonotonicité.

j) Il s'agit du cas de dépendance négative extrême.

Il peut être constaté de nouveau que, puisque nq est entier, la variable N_6 avec un schéma d'extrême dépendance négative est dégénérée à $nq = 3$ et représente alors une mutualisation parfaite.

5 Questions d'approfondissement

1. *Quel est le terme typographique pour le symbole mathématique \div ?*

Le symbole \div se nomme « obélus ». L'obélus est une version primitive de l'obèle (\dagger), dont il tire son nom. En rédaction manuscrite, un obèle est employé comme marque de référence. L'obélus était, quant à lui, employé pour marquer un passage d'un texte comme étant fallacieux ou trompeur, mais cet emploi n'est plus d'usage.

De nos jours, l'obélus est exclusivement employé comme opérateur de la division. C'est Johann H. Rahn, un mathématicien suisse qui a employé pour la première fois, en 1659, ce symbole pour exprimer la division. Il représente un vinculum (le trait horizontal de division) dont le numérateur et le dénominateur ont été remplacés par des points. L'usage de l'obélus s'est répandu surtout dans la littérature scientifique anglaise et américaine. Notons que certains pays emploient plutôt le deux-points ($:$) pour exprimer la division, mais c'est vraiment le vinculum qui a la reconnaissance internationale comme opérateur de la division.

Étymologiquement, « obélus » provient du grec ancien ὀβελός qui signifie « bâton aiguisé » et était également employé, par analogie, pour une dague.

Exemples d'emploi :

Ο ἡγεμὼν ἰχθὺά τοῖς θεοῖς θύει ὀβελοῖς.

Le chef sacrifie un poisson aux dieux à l'aide d'une dague.

Οργιζόμενος τὸν τοῦ ἄρχοντος ὀβελὸν βιαίῳ βάλλω.

En colère, je lance violemment la dague du magistrat.

ref : [Ballew, 2011], [Liddell and Scott, 1940] et [Allaby et al.,]

2. *Quel fut l'emploi de De Finetti avant qu'il ne devienne professeur en mathématiques et statistiques ?*

De Finetti voulait initialement devenir ingénieur comme son père et son grand-père. Cependant, alors qu'il était à la moitié de ses études, la Faculté de mathématiques a été fondée à Milan, où il étudiait. Il a décidé de changer de champ d'études et a obtenu un diplôme en mathématiques appliquées. De Finetti a alors eu un poste à l'Institut central de statistiques de Rome, où il a travaillé comme statisticien pendant quatre ans. En 1931, il a dû déménager à Trieste, une autre ville d'Italie, et s'est trouvé un emploi comme actuaire pour Assicurazioni Generali, l'entreprise d'assurances pour laquelle son grand-père et son père ont travaillé. Il a travaillé comme actuaire durant 16 ans, tandis qu'il enseignait à l'université de Trieste en parallèle. Ce n'est que quand il a obtenu son poste officiel de professeur de mathématiques financières qu'il a quitté son emploi d'actuaire. D'aucuns estiment que son expertise en actuariat lui a permis de devenir un précurseur en analyse numérique avec l'arrivée des ordinateurs, car il comprenait l'importance de pouvoir mettre en opération le fruit de recherches théoriques.

ref : [Cifarelli and Regazzini, 1996]

3. *À qui doit-on la loi de Bernoulli ?*

C'est le mathématicien suisse Jakob Bernoulli qui a introduit le concept d'expérience de Bernoulli ainsi que sa loi de probabilité sous-jacente, la loi Bernoulli. Il en fait état dans la première partie de son oeuvre *Ars Conjectandi*, où il étudie également le résultat de la somme de lois Bernoulli et introduit par le fait même la loi binomiale.

Jakob Bernoulli est le membre de la famille Bernoulli qui a résolu les équations différentielles de Bernoulli et qui a su prouver la divergence de la série harmonique. C'est également lui qui a défini le nombre d'Euler comme étant la base d'un taux d'intérêt composé une infinité de fois par année (une force d'intérêt). Autrement dit, il a défini $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

ref : [\[Schneider, 2006\]](#)

6 Conclusion

En somme, nous avons exploré un exemple de distribution composée multivariée et l'allocation d'Euler pour diverses mesures de risque. Une étude des distributions Bernoulli multivariées a également été présentée. L'étudiant présentant ce travail espère avoir répondu aux attentes du Professeur Étienne Marceau et lui avoir démontré par le fait même sa compréhension de ces sujets avancés.

Jeter un coup d'oeil dans la recherche scientifique est impressionnant, voire écrasant, pour un novice, mais un accompagnement dans la méthode permet de s'orienter et d'apprécier l'expérience. Quoi que puisse en dire Rousseau, cette quête est saine, ce sentiment irrésistible lorsqu'on comprend une notion nouvelle est énergisant. Il faut savoir apprécier la beauté sous toutes ses formes, puissent-elles même être des tétraèdres.

Mes yeux sont brillants. Merci.



ILLUSTRATION 3 – Le principe du plaisir
René Magritte
Huile sur toile, 73 × 54.5 cm, 1937

Références

- [Allaby et al.,] Allaby, M., Darvill, T., and Birch, D. Obelus. <https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/oi/authority.20110803100243403>. Accessed : 2022-04-27.
- [Ballew, 2011] Ballew, P. (2011). More word origins 7. <https://web.archive.org/web/20110807071158/http://www.pballew.net/arithme7.html>. Accessed : 2022-04-27.
- [Cifarelli and Regazzini, 1996] Cifarelli, D. M. and Regazzini, E. (1996). De finetti’s contribution to probability and statistics. *Statistical Science*, 11(4) :253–282.
- [Cossette and Marceau, 2021] Cossette, H. and Marceau, E. (2021). *Mathématiques actuarielles du risque : modèles, mesures de risque et méthodes quantitatives*. Monographie.
- [Cossette et al., 2011] Cossette, H., Marceau, É., and Toureille, F. (2011). Risk models based on time series for count random variables. *Insurance : Mathematics and Economics*, 48(1) :19–28.
- [Diaconis, 1977] Diaconis, P. (1977). Finite forms of de finetti’s theorem on exchangeability. *Synthese*, 36(2) :271–281.
- [Escobar and Pflug, 2020] Escobar, D. D. and Pflug, G. C. (2020). The distortion principle for insurance pricing : properties, identification and robustness. *Annals of Operations Research*, 292(2) :771–794.
- [Finetti, 1992] Finetti, B. d. (1992). Foresight : Its logical laws, its subjective sources. In *Breakthroughs in statistics*, pages 134–174. Springer.
- [Fontana and Semeraro, 2021] Fontana, R. and Semeraro, P. (2021). Exchangeable bernoulli distributions : high dimensional simulation, estimate and testing. *arXiv preprint arXiv :2101.07693*.
- [Liddell and Scott, 1940] Liddell, H. G. and Scott, R. (1940). ὀβελ-ός. In *A Greek-English lexicon*. Clarendon Press, Oxford. Accessed : 2022-04-27.
- [Schneider, 2006] Schneider, I. (2006). Direct and indirect influences of jakob bernoulli’s ars conjectandi in 18th century great britain. *Bernoulli*, 1713(3).