Fonction quantile univariée

Définition, propriétés et résultats

Présenté par

Achille Rostan Fossouo Tadjuidje, **Benjamin Côté**, **Olivier Côté** et **Li Zhu**

ACT-7008

2022.02.17

Table des matières

1 Définition

2 Propriétés

3 Exemples et contrexemples

Définition

1 Définition

2 Propriétés

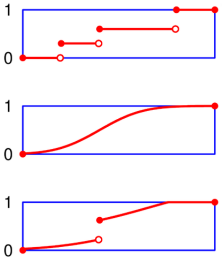
3 Exemples et contrexemples

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est la fonction F_X qui, à tout réel x, associe la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

La fonction de répartition est une fonction non-décroissante et continue à droite. Pour les variables discrètes, les variables continues et les variables mixtes, les fonctions de répartition peuvent être différentes.



Fonction inversée

- Inverse ordinaire : $f : I \longrightarrow f(I)$, supposée être continue et strictement monotone sur l'intervalle I, est donc inversible, d'inverse notée f^{-1}.

- Inverse généralisé : on peut abandonner les hypothèses de continuité et de stricte monotonie pour obtenir la notion d'inverse généralisé. Embrechts et Hofert (2013)

Fonction Quantile - continue et strictement croissante

La fonction quantile d'une variable aléatoire (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition.

Quand cette fonction de répartition est continue et strictement croissante, la fonction quantile peut prendre la forme de la fonction inversée ordinaire définie par :

Le quantile q d'une variable aléatoire X est une valeur notée par $F_o^{-1}(q)$, telle que :

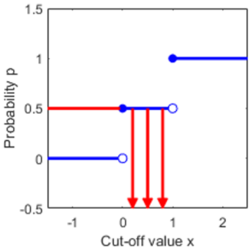
$$\mathbb{P}(X \leq F_o^{-1}(q)) = q \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(X > F_o^{-1}(q)) = 1 - q \tag{2}$$

où o représente ordinaire.

Fonction Quantile - Définition Généralisée - I

La fonction de répartition peut être plate sur certains intervalles. Alors l'équation (1) a plusieurs solutions.



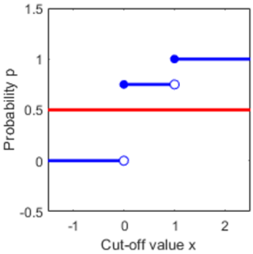
Taboga (2021)

On généralise la défintion par

$$F^{-1}(q) = inf\{x : F(x) = q\}$$

Fonction Quantile - Définition Généralisée - II

La fonction de répartition peut également avoir des sauts. Alors, l'équation (1) n'a pas de solutions.



Taboga (2021)

On généralise la défintion par

$$F^{-1}(q) = inf\{x : F(x) \geq q\}$$

Fonction Quantile - Définition Finale

Définition

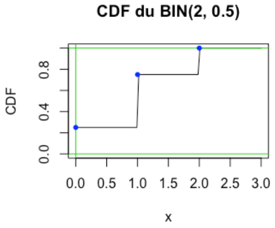
Soit $F(x)$ une fonction de répartition, la fonction quantile associée à F est l'inverse généralisée de F, tel que

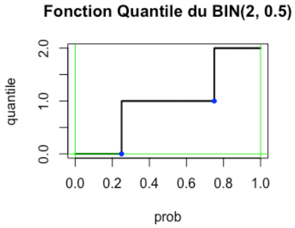
$$F^{-1}(q) \equiv F^{-}(q) = inf\{x : F(x) \geq q\}, 0 < q < 1.$$

Dufour (1995)

Exemple

La fonction de répartition et la fonction de quantile pour un Binomial($n = 2$, $p = 0.5$).





Probabilité	0	0.2	0.25	0.5	0.75	0.8	1
Quantile	0	0	0	1	1	2	2

Propriétés

1 Définition

2 Propriétés
- Propriété 1
- Propriété 2
- Propriété 3
- Propriété 4
- Propriété 5
- Propriété 7
- Propriété 8

3 Exemples et contrexemples

Définitions clés I

Pour les propriétés à venir, nous utiliserons la fonction quelconque $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$\text{Nous avons} \quad \lim_{x \downarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \uparrow \infty} F(x) = 1$$

On définit aussi

$$F(x_+) \equiv \lim_{y \downarrow x} F(y) \text{ et } F(x_-) \equiv \lim_{y \uparrow x} F(y)$$

Comme mentionné précédemment, une fonction de répartition est continue à droite, nous avons donc

$$F(x_+) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Définitions clés II

On définit l'étendue des valeurs pouvant être prise par X comme étant

$$\begin{aligned}\text{Support}\{X\} = \{x \in \mathbb{R} : P(X \in N_x) > 0 \\ \text{pour chaque élément de } N_x \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}\end{aligned}$$

Exemple pour une fonction F

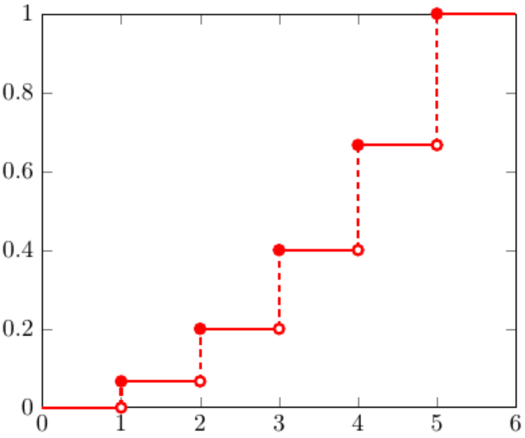


Figure – Fonction de répartition discrète quelconque

Propriété des fonctions de répartition

F est continue si

$$P[X = x] = F(x) - F(x_-) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F est non décroissante si

$$F(x) \leq F(y) \text{ pour tout } x < y$$

Cette proposition et les suivantes sont tirées de Embrechts et Hofert (2013)

Proposition 1

(1)

$$F_X^{-1}(0) = -\infty$$

et

$$F_X^{-1}(1+\varepsilon) = \infty$$

La preuve découle de la définition.

Proposition 2

(2a)

F_X^{-1} est une fonction non-décroissante, i.e

$$F_X^{-1}(u_2) \geq F_X^{-1}(u_1) \quad \text{si} \quad u_2 > u_1$$

Preuve :
$\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u_2\}$ est un sous-ensemble de
$\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u_1\}$ si $u_2 > u_1$.
Donc forcément,
$inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u_2\} \geq inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u_1\}$

Proposition 2

(2b)

F_X^{-1} est une fonction continue à gauche.

Preuve :
On définit $u < u_0$
$x = F_X^{-1}(u)$ et $x_0 = F_X^{-1}(u_0)$.
On fait tendre $u \to u_0$.

- Si $x = x_0$, alors c'est continu à gauche.
- Si $x < x_0$, alors c'est discontinu à gauche.

Proposition 2

On fait la preuve par l'absurde. La fonction F est continue à droite, donc au point de rupture, on a :

$$F_X(x-\varepsilon) < u \leq F_X(x+\varepsilon) \quad \text{si} \quad \varepsilon > 0$$

On choisit $\varepsilon = \frac{x_0 - x}{2}$ donc $\varepsilon > 0$ si $x = x_0$.
De cette façon, on obtient

$$F_X(x+\varepsilon) = F_X(x_0+\varepsilon)$$

. Donc,

$$u \leq F_X(x+\varepsilon) = F_X(x_0+\varepsilon) < u_0$$

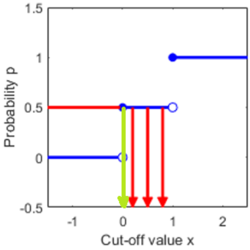
C'est absurde, donc il faut absolument que $x = x_0$.

Proposition 3

(3)

- $F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x$ si loi discrète ou mixte
- $F_X^{-1}(F_X(x)) = x$ si loi continue

On emploie un inf dans la définition généralisée.



Taboga (2021)(mod)

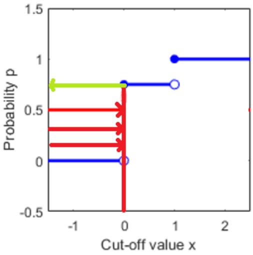
Proposition 4

(4)

- $F_X(F_X^{-1}(u)) \geq u$ si loi discrète ou mixte
- $F_X(F_X^{-1}(u)) = u$ si loi continue

Conditions : F doit être continue à droite et u tel que $F_X^{-1}(u) < \infty$.

On emploie un $\geq$ dans la définition généralisée.



Taboga (2021)(mod)

Proposition 5

(5a)

$$F_X(x) \geq ux \geq F_X^{-1}(u)$$

La preuve $\implies$ découle de la définition de F_X^{-1}.

$$F_X^{-1}(u) = inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u_1\}$$

Preuve $\leftarrow$:

$$F_X^{-1}(u) \leq x$$
$$F_X(F_X^{-1}(u)) \leq F_X(x)$$

Or on sait que $u \leq F_X(F_X^{-1}(u))$ par la proposition 4. Ainsi, $F_X(x) \leq u$

Proposition 5

(5b)

$$F_X(x) < u \implies x \leq F_X^{-1}(u)$$

Preuve : On choisit un x' tel que $F_X(x') \geq u$ donc forcément $x' \geq x$ puisque F_X est croissante. Par la définition de F^{-1}, il s'ensuit que $F_X^{-1}(u) \geq x$

Proposition 7

(7a)

F_X est continue si F_X^{-1} est strictement croissante.

Ce sont les masses de probabilité qui causent les discontinuités de F_X.

(7b)

F_X^{-1} est continue si F_X est strictement croissante.

Ce sont les probabilités nulles qui causent les discontinuités de F_X^{-1}.

Proposition 8

(8)

$(\mathrm{F}_{X_1}(F_{X_2}))^{-1}(u) = F_{X_2}^{-1}(F_{X_1}^{-1}(u))$

Preuve :
On applique successivement la proposition 5.

$$
\begin{aligned}
(F_{X_1}(F_{X_2}))^{-1}(u) &= inf\{x \in \mathbb{R} : F_{X_1}(F_{X_2}(x)) \geq u\} \\
&= inf\{x \in \mathbb{R} : F_{X_2}(x) \geq F_X^{-1}(u)\} \\
&= inf\{x \in \mathbb{R} : (x) \geq F_{X_2}^{-1}F_{X_1}^{-1}(u)\} \\
&= F_{X_2}^{-1}(F_{X_1}^{-1}(u)) \quad \text{par tautologie}
\end{aligned}
$$

Exemples et contrexemples

1 Définition

2 Propriétés

3 Exemples et contrexemples
- Proposition 2
- Proposition 3
- Proposition 4
- Contres exemples

Proposition

Proposition 2 de Embrechts et Hofert (2013)

Si F est une fonction de répartition tel que $X \sim F$, alors

1. si F est continue, $F(X) \sim \text{Unif}(0,1)$
2. si $U \sim \text{Unif}(0,1)$, $F^{-1}(U) \sim F$

Proposition 2 : preuves I

Preuve pour l'élément 1 Grâce à la propriété 7, on a que F^{-1} est strictement croissant en $[0, 1]$ pour une fonction continue. Ainsi,

$$P(F(X) \leq u) = P\left(F^{-1}(F(X)) \leq F^{-1}(u)\right)$$

Par la suite, même si F n'est pas toujours strictement croissante, elle le sera sur Support$\{X\}$. On obtient donc

$$P\left(F^{-1}(F(X)) \leq F^{-1}(u)\right) = P\left(X \leq F^{-1}(u)\right) = F(F^{-1}(u))$$

À l'aide de la propiété 3, on a que $F(F^{-1}(u)) = u \quad \forall u \in [0, 1]$. Ainsi,

$$P(F(X) \leq u) = u \quad \forall u \in [0, 1]$$

Cette dernière relation implique $F(X) \sim \text{Unif}(0, 1)$ $\square$

Proposition 2 : preuves II

Preuve pour l'élément 2 À l'aide de la propriété 5, on a que

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition

Proposition 3 de Embrechts et Hofert (2013)

Soit $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ayant une distribution conjointe $F_{\underline{X}}$ et des marges continues $F_{X_j}, j \in \{1, \dots d\}$.

Le vecteur aléatoire $\underline{X}$ est caractérisé par la copule C **si et seulement si**

$$\left(F_{X_1}(X_1), \dots, F_{X_d}(X_d)\right) \sim C$$

Proposition 3 : preuves I

Preuve 1 Premièrement, tel que vu à l'élément 1 de la proposition 2, nous avons que puisque F_{X_j} est continue, $F_{X_j}(X_j) \sim \text{Unif}(0,1)$

Ensuite, grâce à la propriété 5, nous avons

$$\begin{aligned}
P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, \ldots, F_{X_d}(X_d) \leq u_d) &= P(F_{X_1}(X_1) < u_1, \ldots, F_{X_d}(X_d) < u_d) \\
&= P(X_1 < F_{X_1}^{-1}(u_1), \ldots, X_d < F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= P(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u_1), \ldots, X_d \leq F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \ldots, F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= C(\underline{u})
\end{aligned}$$

On retrouve une partie du théorème de Sklar $\square$

Proposition 3 : preuves II

Preuve 2 Premièrement, on rappelle que F_{X_j} est strictement croissante sur le Support$\{X\} \quad \forall j \in \{1, \dots d\}$.
Ensuite, grâce à la propriété 3 et 5, nous avons

$$\begin{aligned}
P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) &= P(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)) \leq x_1, \dots, F_{X_d}^{-1}(F_{X_d}(X_d)) \leq x_d) \\
&= P(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(X_d) \leq F_{X_d}(x_d)) \\
&= P(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), \dots, U_d \leq F_{X_d}(x_d)) \\
&= F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d))
\end{aligned}$$

On retrouve l'autre partie du théorème de Sklar $\square$

Proposition

Proposition 4 de Embrechts et Hofert (2013)

1. Soit $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ayant une distribution conjointe $F_{\underline{X}}$ et des marges continues $F_{X_j}, j \in \{1, \dots d\}$ et la copule C.

   Soit $T_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante sur le Support$\{X\}$.

   Le vecteur aléatoire $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ aura aussi la copule C.

2. Soit $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ayant une distribution conjointe $F_{\underline{X}}$ et des marges continues $F_{X_j}, j \in \{1, \dots d\}$ et la copule C.

   Soit $T_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à droite et strictement croissante sur le Support$\{X\}$.

   Le vecteur aléatoire $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ aura aussi la copule C.

Proposition 4 : preuves I

Preuve pour l'élément 1 Premièrement, tel que vu à l'élément 1 de la proposition 2, nous avons que puisque F_{X_j} est continue, $F_{X_j}(X_j) \sim \text{Unif}(0,1)$

Ensuite, grâce à la propriété 5, nous avons

$$\begin{aligned}
P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, \dots, F_{X_d}(X_d) \leq u_d) &= P(F_{X_1}(X_1) < u_1, \dots, F_{X_d}(X_d) < u_d) \\
&= P(X_1 < F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, X_d < F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= P(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, X_d \leq F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= C(\underline{u})
\end{aligned}$$

On retrouve une partie du théorème de Sklar □

Proposition 4 : preuves II

Preuve pour l'élément 2 Premièrement, on rappelle que F_{X_j} est strictement croissante sur le Support$\{X\} \quad \forall j \in \{1, \ldots d\}$.
Ensuite, grâce à la propriété 3 et 5, nous avons

$$\begin{aligned}
P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d) &= P(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)) \leq x_1, \ldots, F_{X_d}^{-1}(F_{X_d}(X_d)) \leq x_d) \\
&= P(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_d}(X_d) \leq F_{X_d}(x_d)) \\
&= P(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), \ldots, U_d \leq F_{X_d}(x_d)) \\
&= F_{\underline{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \ldots, F_{X_d}^{-1}(u_d)) \\
&= C(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_d}(x_d))
\end{aligned}$$

On retrouve l'autre partie du théorème de Sklar $\square$

Contre Exemple 1 - (Gwanoya, 2007) I

Statement 1

Gwanoya (2007) affirment dans leur article que si F est une fonction croissante, alors $F(F^{-1}(u)) \geq u$

Nous allons désaprouver cela par un contre exemple :
Considérons la fonction indicatrice des nombres réels positifs :
$F(x) = 1_{(0,\infty)}(x), \; x \in \mathbb{R}$
Alors, on a $F(F^{-1}(1/2)) = F(0) = 0 < \frac{1}{2}$. Ce qui contredit cette affirmation de Gwanoya (2007)
Remarques :

1. Rappel : $F^{-1}(1/2) = inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1/2\}$
2. F doit également être continue à droite (Ce n'est pas le cas en 0)

Contre Exemple 1 - (Gwanoya, 2007) II

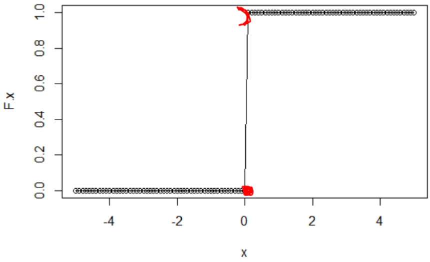


Figure – Courbe de la fonction F

La déclaration suivante montrera que même la continuité à droite et la monotonie croissante ne suffisent pas pour approuver la déclaration

Contre exemple 2 - (Resnick, 2008 ; Embrechts et collab., 2013) I

Statement 2

Resnick (2008) ; Embrechts et collab. (2013) affirment dans leur article que si F est une fonction croissante et continue à droite, alors $F(F^{-1}(u)) \geq u$

Contre exemple : Considérons la fonction logistique $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$ et $u = 2$
Alors, on a $F(F^{-1}(2)) = F(+\infty) = 1 < 2$
Remarques :

1. $F^{-1}(2) = inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 2\} = inf\{\emptyset\} = \infty$ (Par convention !)
2. Par définition, $F(+\infty) = 1$

Contre exemple 2 - (Resnick, 2008 ; Embrechts et collab., 2013) II

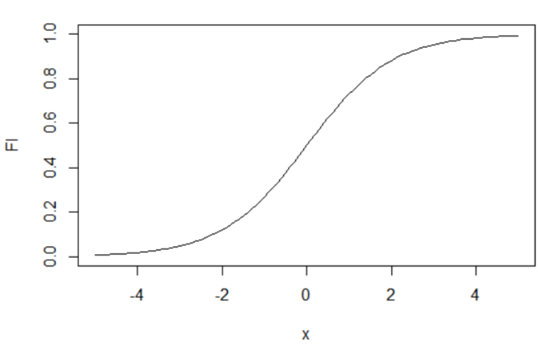


Figure – Courbe de la fonction F

Contre exemple 2 - (Resnick, 2008 ; Embrechts et collab., 2013) III

1. D'après la proposition 1(4), on sait que $F^{-1}(u) < \infty$ implique $F(F^{-1}(u)) \geq u$ (à condition que F soit continue à droite)
2. Par contre, si $u = sup\{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$, alors d'après la proposition 1(4), on doit avoir $F(F^{-1}(u)) = u$
3. On voit bien que $F(F^{-1}(1)) = F(+\infty) = 1$

Contre exemple 3 - (Embrechts et collab., 2013)

Statement 3

Embrechts et collab. (2013) affirment dans leur article que si F est croissante et continue à droite, alors $F(F^{-1}(u)) = u$

Nous allons juste considérer le contre exemple précédent en prenant $u = -1$.
Dans ce cas, on a :
$F^{-1}(-1) = inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq -1\} = inf\{\mathbb{R}\} = -\infty$
Et donc : $F(F^{-1}(-1)) = F(-\infty) = 0 \neq -1$

Ce qui donne en même temps un exemple pour la proposition 1(4) qui dit : Si $u < inf\{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$, alors $F(F^{-1}(u)) > u$

Contre exemple 4 - (Gwanoya, 2007)

Statement 4

Gwanoya (2007) affirment que si $F^{-1}(u) < \infty$ et si F est croissante et continue, alors $F(F^{-1}(u)) = u$

La proposition 1(4) l'affirme également, à condition que $u \in \{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$ avec les bornes incluses.

- **Cas particulier où F est une fonction de répartition**

Dans ce cas toutes ces déclarations deviendront correctes car $u \in [0, 1] = \{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$ (bornes incluses)

Bibliographie I

Dufour, J.-M. 1995, «Distribution and quantile functions», cahier de recherche, Technical report, McGill University, Montreal, Canada.

Embrechts, P. et M. Hofert. 2013, «A note on generalized inverses», *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 77, nº 3, p. 423–432.

Embrechts, P., C. Klüppelberg et T. Mikosch. 2013, *Modelling extremal events : for insurance and finance*, vol. 33, Springer Science & Business Media.

Gwanoya, T. 2007, «Quantitative risk management : Concepts, techniques, tools. by alexander j. mcneil, rüdiger frey & paul embrechts (princeton university press, 2005)», *Annals of Actuarial Science*, vol. 2, nº 1, p. 187–189.

Bibliographie II

Resnick, S. I. 2008, *Extreme values, regular variation, and point processes*, vol. 4, Springer Science & Business Media.

Taboga, M. 2021, «Quantile of a probability distribution», URL `https://www.statlect.com/fundamentals-of-probability/quantile`.