

ACT-7102

MODÈLES AVANCÉS DE LA THÉORIE DU RISQUE

---

Développements  
Présentation thème 1

---

*Par*

Benjamin CÔTÉ

Olivier CÔTÉ

Achille Rostan FOSSOUO TADJUIDJE

*NI*

111 266 406

111 250 315

536 765 506

*Rapport présenté à*

*Madame*

HÉLÈNE COSSETTE

24 NOVEMBRE 2022



UNIVERSITÉ  
LAVAL

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>1 Notes de Hélène Cossette (2019)</b>	<b>1</b>
1.1 Retour sur les copules . . . . .	1
1.2 Théorème de Sklar . . . . .	1
1.3 Construction d'une copule . . . . .	2
1.4 Copules archimédiennes . . . . .	2
<b>2 Article de Cossette et collab. (2002a) : Common mixture in the individual risk model</b>	<b>6</b>
<b>3 Article de Cossette et collab. (2002b) : On two dependent individual risk models</b>	<b>8</b>
<b>4 Article de Cossette et collab. (2018)</b>	<b>15</b>
4.1 Théorie . . . . .	15
4.2 Exemples numériques . . . . .	16
<b>A Répartition Travail 1</b>	<b>26</b>
A.1 Cossette (2019) . . . . .	26
A.2 Cossette et collab. (2002a) . . . . .	26
A.3 Cossette et collab. (2002b) . . . . .	26
A.4 Cossette et collab. (2018) . . . . .	26
A.4.1 Exemple 1 . . . . .	26
A.4.2 Exemple 2 . . . . .	26
A.4.3 Exemple 3 . . . . .	27
A.4.4 Algorithme 6 . . . . .	27
A.4.5 Exemple 7 . . . . .	27
A.4.6 Exemple 8 . . . . .	27
A.4.7 Exemple 9 . . . . .	27
<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

# Chapitre 1

## Notes de Hélène Cossette (2019)

### 1.1 Retour sur les copules

Tout d'abord, il faut comprendre à quoi sert une copule. Les copules s'emploient dans un contexte multivarié. Elles permettent d'extraire la relation de dépendance entre deux (ou plus) variables sans égard à leur marginale.

Notation :  $C(u_1, u_2)$

Une copule est une fonction de répartition conjointe de variables aléatoires uniformes. Ainsi,

$$C(u_1, u_2) = F_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

Les copules appartiennent donc toutes à la même classe de Fréchet. Il y a une infinité de copules possible, comme il y a une infinité de liens de dépendance possible entre deux mêmes variables.

### 1.2 Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar est ce qui permet d'employer les copules comme moyen d'extraire la dépendance entre des variables aléatoires, peu importe leur loi marginale.

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (1.1)$$

Il peut être vu que n'importe quelle fonction de répartition conjointe peut être définie à l'aide d'une copule et de ses lois marginales. La copule n'a aucune incidence sur les marginales, *elle ne dicte donc que la dépendance entre elles*.

Preuve du Théorème de Sklar

$$\begin{aligned}
F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\
&= P(F_{X_1}^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F_{X_n}^{-1}(U_n) \leq x_n) \text{ par le théorème de la fonction quantile.} \\
&= P(F_{X_1}(F_{X_1}^{-1}(U_1)) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(F_{X_n}^{-1}(U_n)) \leq F_{X_n}(x_n)) \\
&= P((U_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, (U_n) \leq F_{X_n}(x_n)) \\
&= F_{U_1, \dots, U_n}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \\
&= C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))
\end{aligned}$$

### 1.3 Construction d'une copule

Inversement, on peut construire une copule à partir de n'importe quelle fonction de répartition. En remaniant le théorème de Sklar :

$$F_{X_1, \dots, X_n}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)) = C(u_1, \dots, u_n)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
F_{X_1, \dots, X_n}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)) &= P(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, X_n \leq F_{X_n}^{-1}(u_n)) \\
&= P(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)) \leq F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(F_{X_n}(X_n)) \leq F_{X_n}^{-1}(u_n)) \\
&= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, \dots, F_{X_n}(X_n) \leq u_n) \\
&= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \text{ par le théorème de la transformation de la probabilité} \\
&= F_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) \\
&= C(u_1, \dots, u_n)
\end{aligned}$$

### 1.4 Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes sont une famille de copules. Ce qui les caractérise est le fait qu'elle sont exprimées sous la forme

$$C(u_1, \dots, u_n) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_n))$$

La fonction  $\psi$  est dite le générateur de la copule, il doit respecter quelques critères :

- $\psi$  doit être monotone décroissante.
- $\psi(0) = 1$
- $t \rightarrow \infty = 0$

Autrement dit, ce sont là les critères d'une fonction de survie  $S_X$ .

On ajoute que

- $\psi$  doit être complètement monotone (dérivées impaires négatives ; dérivées paires positives).

"Feller (1968) a montré qu'une fonction est complètement monotone si et seulement si" Cossette (2019)  $\psi$  peut être exprimée comme la transformée de Laplace-Stieljes d'une variable aléatoire strictement positive. (Donc aucune masse à zéro n'est permise.)

Cossette (2019) ne présente la preuve que dans un sens. (si, pas seulement si)

Pour construire une copule archimédienne, on choisit un générateur. Un générateur déterminé donnera une classe de copule spécifique, par exemple  $psi = \mathcal{L}_\Theta(t)$ ,  $\Theta \sim Gamma$ , donnera une copule de Clayton .

### Méthode de construction d'une copule archimédienne

Il peut être vu qu'une copule archimédienne est construite selon un modèle individuel de mélange commun. (Est-ce que la copule résultante est de mélange commun pour autant ? Oui, car on extrait la copule sur  $Y_i$ .)

On définit un vecteur de variables aléatoire obéissant conditionnellement à une loi exponentielle, et indépendantes conditionnellement, i.e.  $Y_i|\Theta = \theta \sim Exp(\theta)$ . Ainsi, la fonction de survie de  $Y_i$  se définit en conditionnant sur  $\Theta$ .

$$\begin{aligned} S_{Y_i}(x) &= \int_0^\infty S_{Y|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-\theta x} f_\Theta(\theta) d\theta \text{ par définition d}'Y_i \\ &= E[e^{-x\Theta}] \\ &= \mathcal{L}_\Theta(x) \end{aligned}$$

Donc

$$S_{Y_i}^{-1}(u) = \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u)$$

On peut refaire le même exercice avec la fonction de survie conjointe.

$$\begin{aligned}
S_{Y_1, \dots, Y_n}(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^\infty F_{Y|\Theta}(x_1, \dots, x_n|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta x_1} \dots e^{-\theta x_n} f_\Theta(\theta) d\theta \text{ par indépendance conditionnelle des } Y_i \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta(x_1 + \dots + x_n)} f_\Theta(\theta) d\theta \\
&= E[e^{-(x_1 + \dots + x_n)\Theta}] \\
&= \mathcal{L}_\Theta(x_1 + \dots + x_n)
\end{aligned}$$

Le théorème de Sklar peut être exprimé en termes de fonctions de survie :

$$S_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \hat{C}(S_{X_1}(x_1), \dots, S_{X_n}(x_n))$$

où  $\hat{C}$  est la copule de survie, définie par la fonction de survie conjointe d'uniformes (mais peut être vu comme une copule également, vu que  $1 - U \sim U$ . Preuve p.212 Cossette (2019). Donc l'inversion pour la construction donne :

$$\hat{C}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = S_{X_1, \dots, X_n}(S_{X_1}^{-1}(x_1), \dots, S_{X_n}^{-1}(x_n))$$

Ce qui permet d'obtenir

$$\hat{C}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{L}_\Theta(\mathcal{L}_\Theta^{-1}(x_1) + \dots + \mathcal{L}_\Theta^{-1}(x_n))$$

pour la copule archimédienne.

La relation de dépendance est donc exclusivement définie par  $\Theta$ . La copule obtenue variera seulement selon la loi de probabilité de  $\Theta$ . Rappel : la variable aléatoire  $\Theta$  doit être strictement positive.

En ce sens, il est possible de déterminer la loi d'un élément de la copule conditionnel au résultat du mélange.

D'abord, il est possible de réexprimer le résultat obtenu précédemment.

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) &= \mathcal{L}_\Theta(\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_1) + \dots + \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_n)) \\
&= E[e^{-\theta(\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_1) + \dots + \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_n))}] \\
&= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_i)} d\theta
\end{aligned}$$

Or, puisqu'on sait que la relation de dépendance est uniquement définie par le résultat du mélange commun, on sait que les  $U_i$  sont conditionnellement indépendantes entre elles, i.e. les  $U_i|\Theta = \theta$  sont indépendantes. Ainsi, on peut obtenir le développement :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n) &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \quad \text{car c'est une copule} \\
&= \int_0^\infty P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n | \Theta = \theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty P(U_1 \leq u_1 | \Theta = \theta) \dots P(U_n \leq u_n | \Theta = \theta) d\theta \\
&= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n F_{U_i|\Theta}(u_i|\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Cela permet de conclure que

$$F_{U_i|\Theta}(u_i|\theta) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_i)} \tag{1.2}$$

par identification.

## Chapitre 2

# Article de Cossette et collab. (2002a) : Common mixture in the individual risk model

Cet article propose une méthode pour quantifier le risque global d'un portefeuille d'assurance. Pour chaque risque individuel, Cossette et collab. (2002a) supposent que leur occurrence dépend des facteurs externes qui peuvent influencer tout le portefeuille. Il peut s'agir par exemple des conditions météorologiques ou de certaines situations économiques.

Pour la suite, on suppose un portefeuille de  $n$  risques individuels  $X_1, \dots, X_n$ . Chaque risque  $X_i, i = 1, \dots, n$  est défini à l'aide d'une variable indicatrice  $I_i \sim \text{Bernouilli}(q_i)$  et d'une variable positive  $B_i$  dont la fonction de répartition est  $F_B$ . La relation entre elles est la suivante :

$$X_i = \begin{cases} B_i & ; \quad I_i = 1 \\ 0 & ; \quad I_i = 0 \end{cases}$$

Comme précisé au départ, il s'agit donc de déterminer le risque global  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ .

### Structure de dépendance définie dans l'article

La variable  $I_i$  peut dépendre d'un facteur externe représenté par une variable aléatoire positive  $\Theta$  de fonction de répartition  $G_\Theta$ . Ce qui amène à définir les variables indépendantes suivantes :

$$(I_i \mid \Theta = \theta) \sim \text{Bernouilli}(1 - r_i^\theta), \quad i = 1, \dots, n$$

.

La section 5 qui nous intéresse propose une structure de dépendance avec une copule archimé-



dienne à travers le vecteur aléatoire  $(I_1, \dots, I_n)$  de fonction de répartition :

$$\begin{aligned}
F_{(I_1, \dots, I_n)}(i_1, \dots, i_n) &= C(F_{I_1}(i_1), \dots, F_{I_n}(i_n)) \\
&= \mathcal{L}_\Theta \left( \sum_{k=1}^n \mathcal{L}_\Theta^{-1}(i_k) \right) \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta \sum_{k=1}^n \mathcal{L}_\Theta^{-1}(i_k)} dG_\Theta(\theta) \\
&= \int_0^\infty \prod_{k=1}^n e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(i_k)} dG_\Theta(\theta) \\
&= \int_0^\infty \prod_{k=1}^n \left( e^{-\mathcal{L}_\Theta^{-1}(i_k)} \right)^\theta dG_\Theta(\theta)
\end{aligned}$$

Cette égalité n'a pas une forme explicite lorsque la loi  $G_\Theta$  est continue. Dans ce cas, on peut avoir recours à des algorithmes de discrétisation tels que l'algorithme de Panjer.

## Chapitre 3

# Article de Cossette et collab. (2002b) : On two dependent individual risk models

Cet article diffère du précédent dans la mesure où la dépendance n'est pas introduite via une variable aléatoire de mélange mais bien par un mécanisme de choc commun. Le portefeuille ( $S$ ) est construit de la même façon que le précédent, c'est-à-dire que la réclamation annuelle de l'assuré  $i$  ( $X_i$ ) est composée d'une variable de fréquence ( $I_i$ ,  $I_i \in \{0,1\}$ ) et d'une variable de sévérité ( $B_i$ ,  $B_i \in [0,\infty[$ ). La dépendance est de nouveau introduite au niveau de la variable de fréquence. Autrement dit, les  $X_i$  sont dépendants, car les  $I_i$  sont dépendants entre eux (mais les  $B_i$  demeurent indépendants des  $I_i$  et entre eux).

La dépendance est introduite par choc commun de la façon suivante :

$$I_i = \min(J_i + J_{class} + J_{global}, 0)$$

. Dans le modèle, on ne suppose qu'une seule classe d'assurée, donc on peut réduire à :

$$I_i = \min(J_i + J_{global}, 0)$$

. Il est important de noter que les  $J_i$  sont indépendants du  $J_{global}$ .

L'analyse qualitative qui peut être faite est de dire que si le risque global se réalise, tous les assurés auront une réclamation, mais s'il ne se réalise pas, seulement certains en auront, individuellement.

Ce modèle est décrit d'une approche probabiliste classique dans la section 2. À la section 3, on le compare à des modèles classiques de copules.

**p.160** Résumé général sur les copules et présentation d'exemples de copules. On résume aussi l'approche : "We find the expression of the mgf of  $S$  and then we obtain a numerical

approximation of the cumulative distribution function of S with the FFT method."Cossette et collab. (2002b)

On trouve  $M_S(t)$  pour ensuite calculer une approximation numérique de  $F_S(x)$  à l'aide de FFT. La copule permettra d'obtenir  $F_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n)$ , car on connaît la distribution marginale de chaque  $I_i$ .

"In this case, however, the copula C is not uniquely determined outside of  $\{0, 1\}^n$  (see Nelsen (1999)) since the marginals  $F_{I_k}$  are discrete. " Cossette et collab. (2002b)

**p.161** Description plus détaillée de la méthode. Le nerf de la guerre est de trouver la fonction de masse de probabilités conjointe des  $I_i$ , soit  $f_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n)$ . La copule donnera  $F_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n)$  alors il faudra obtenir  $f_{I_1, \dots, I_n}(i_1, \dots, i_n)$  grâce à la formule :

$$f_{I_1, \dots, I_n}(c_{j,n}) = \sum_k = 0^j (-1)^k \binom{j}{k} F_{I_1, \dots, I_n}(c_{j-k,n})$$

. Où  $c_{j,n}$  est un vecteur de  $n$  valeurs, soit  $j$  uns et  $n - j$  zéros (l'ordre n'a pas d'importance puisque les  $I_i$  sont i.i.d.). À partir de cela, il sera possible de déterminer la fonction génératrice des probabilités (unicité de la fgp) correspondante  $P_{I_1, \dots, I_n}(t_1, \dots, t_n)$ . C'est l'ingrédient manquant pour calculer la fonction génératrice des moments des  $X_i$ . En effet, puisqu'ils peuvent être vus comme une loi composée, on a

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = P_{I_1, \dots, I_n}(M_B(t_1), \dots, M_B(t_n))$$

. Ainsi, pour avoir la fgm de la somme des  $X_i$ , i.e.  $S$ , on peut évaluer à tous le même  $t$ .

$$M_S(t) = M_{X_1, \dots, X_n}(t, \dots, t) = P_{I_1, \dots, I_n}(M_B(t), \dots, M_B(t))$$

**Exemple 3** On a

$$n = 20$$

$$I_i \sim \text{Bernoulli}(q = 0.05)$$

La dépendance entre les  $I_i$  distribuée selon la copule de Cook-Johnson.

$$B_i \sim \text{Gamma}, E[B_i] = 2, \text{Var}(B_i) = 4$$

D'abord, on devine facilement les paramètres de la loi gamma avec la méthode des moments :

$$4 = \text{Var}(B_i) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{E[B_i]}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$$

D'où l'on déduit  $\lambda = 0.5$  donc  $\alpha = 1$

La copule de Cook-Johnson est définie par

$$C_\alpha^{CJ}(u_1, \dots, u_n) = (u_1^{-\alpha} + \dots + u_n^{-\alpha} - (n-1))^{-1/\alpha}$$

, donc

$$C_{\alpha}^{CJ}(u_1, \dots, u_{20}) = (u_1^{-\alpha} + \dots + u_{20}^{-\alpha} - 19)^{-1/\alpha}$$

.

L'espérance des coûts du portefeuille n'est pas impactée par la dépendance entre les  $I_i$ . Elle est de 2 peu importe le paramètre  $\alpha$  employé dans la copule.

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1 + \dots + X_{20}] = E[X_1] + \dots + E[X_{20}] \\ &= E[I_1 B_1] + \dots + E[I_{20} B_{20}] \\ &= E[I_1] E[B_1] + \dots + E[I_{20}] E[B_{20}] \\ &= 0.05 * 2 + \dots + 0.05 * 2 \\ &= 20 * 0.05 * 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

La variance est toutefois impactée par la dépendance.

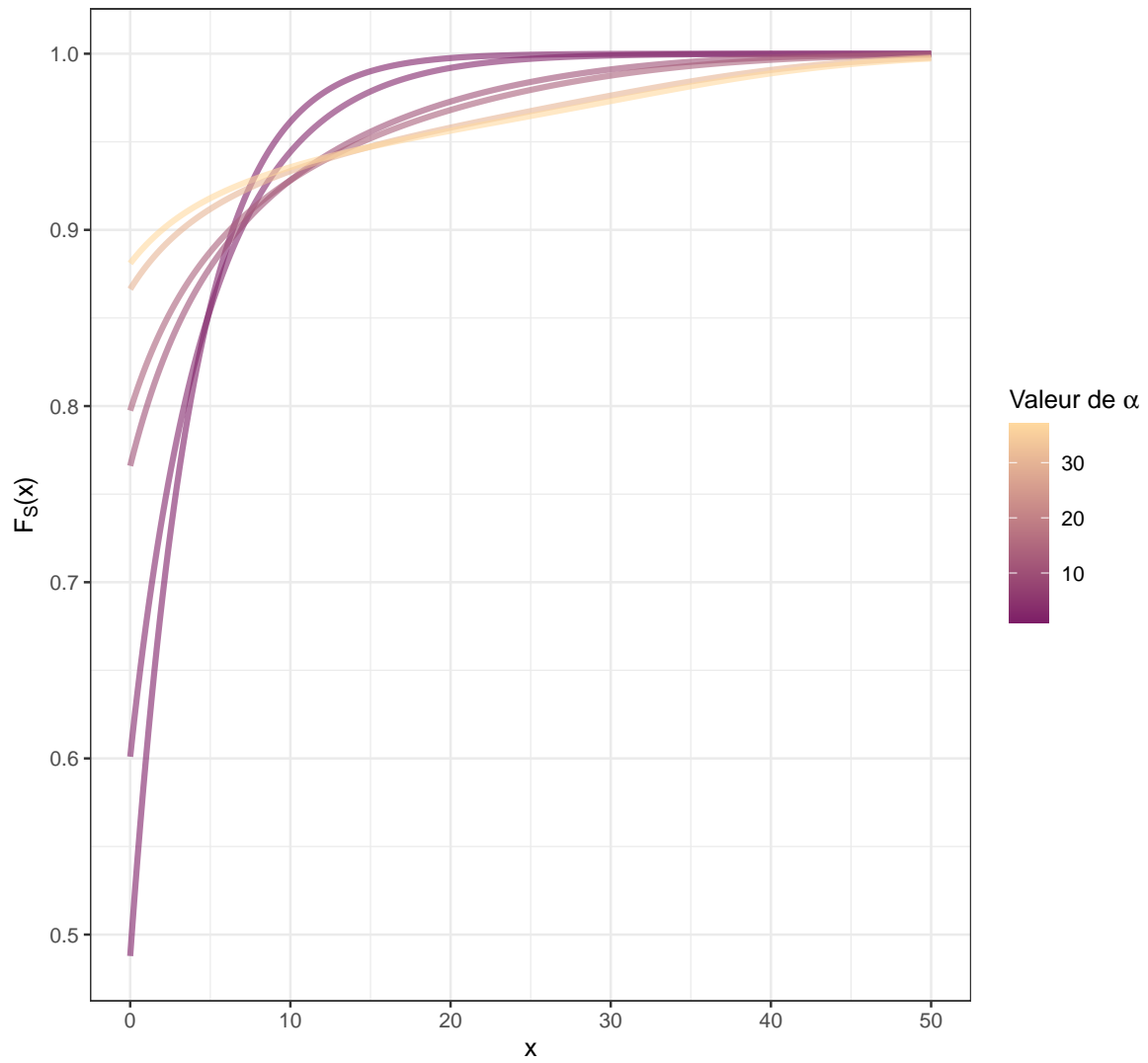
**p.163** Preuve de covariance.

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + \dots X_n) \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i+1}^n Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i+1}^n E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j] \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i+1}^n E[I_i B_i I_j B_j] - E[I_i B_i] E[I_j B_j] \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i+1}^n E[B_i] E[B_j] E[I_i I_j] - E[I_i] E[B_i] E[I_j] E[B_j] \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i+1}^n E[B_i] E[B_j] (E[I_i I_j] - E[I_i] E[I_j]) \\ &= \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i+1}^n E[B_i] E[B_j] Cov(I_i, I_j) \end{aligned}$$

Graphiques des exemples numériques (voir code R pour les données) :

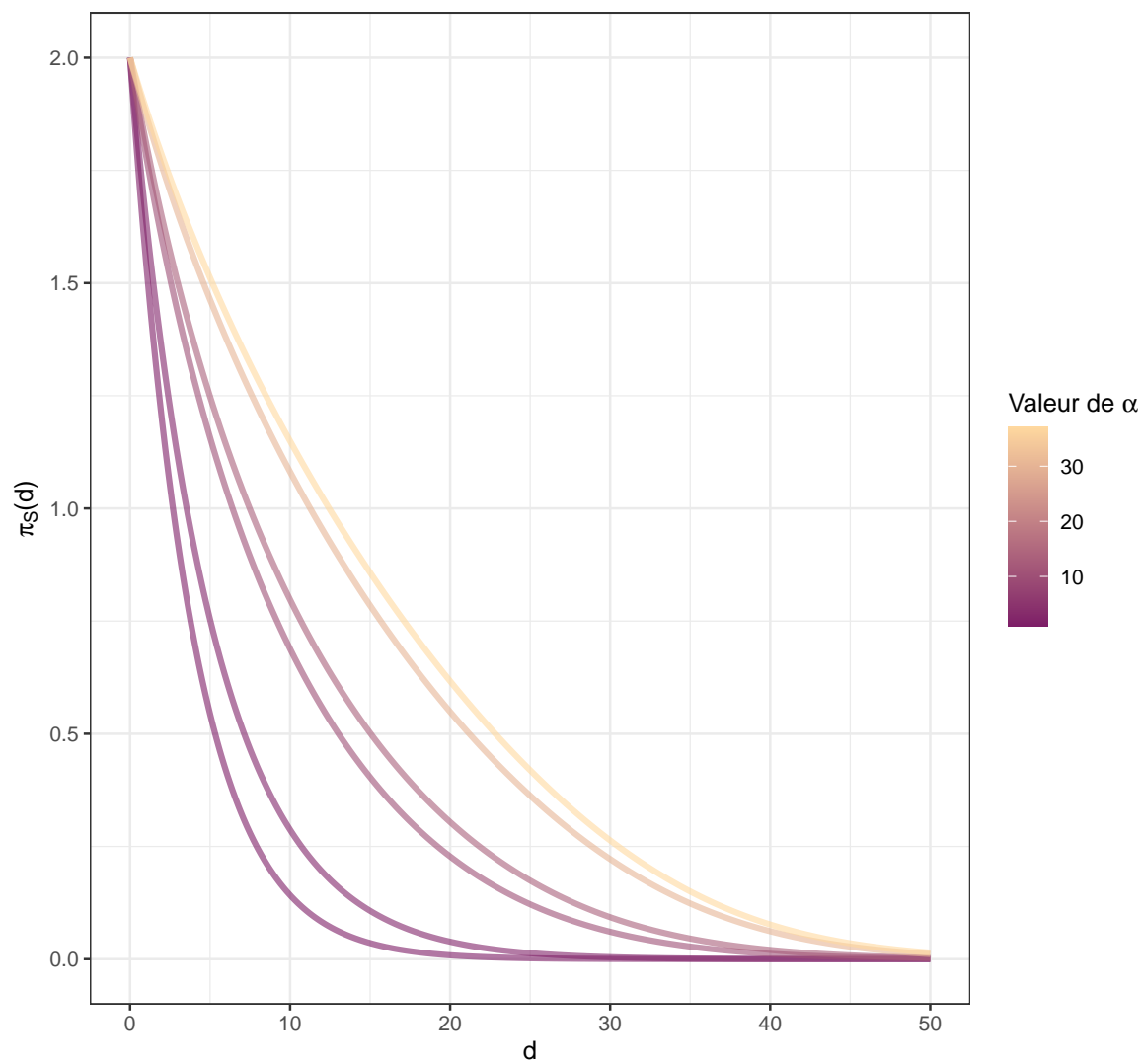
Fonction de répartition  $F_S(x)$  selon le paramètre de dépendance  $\alpha$  )

Copule de Cook–Johnson



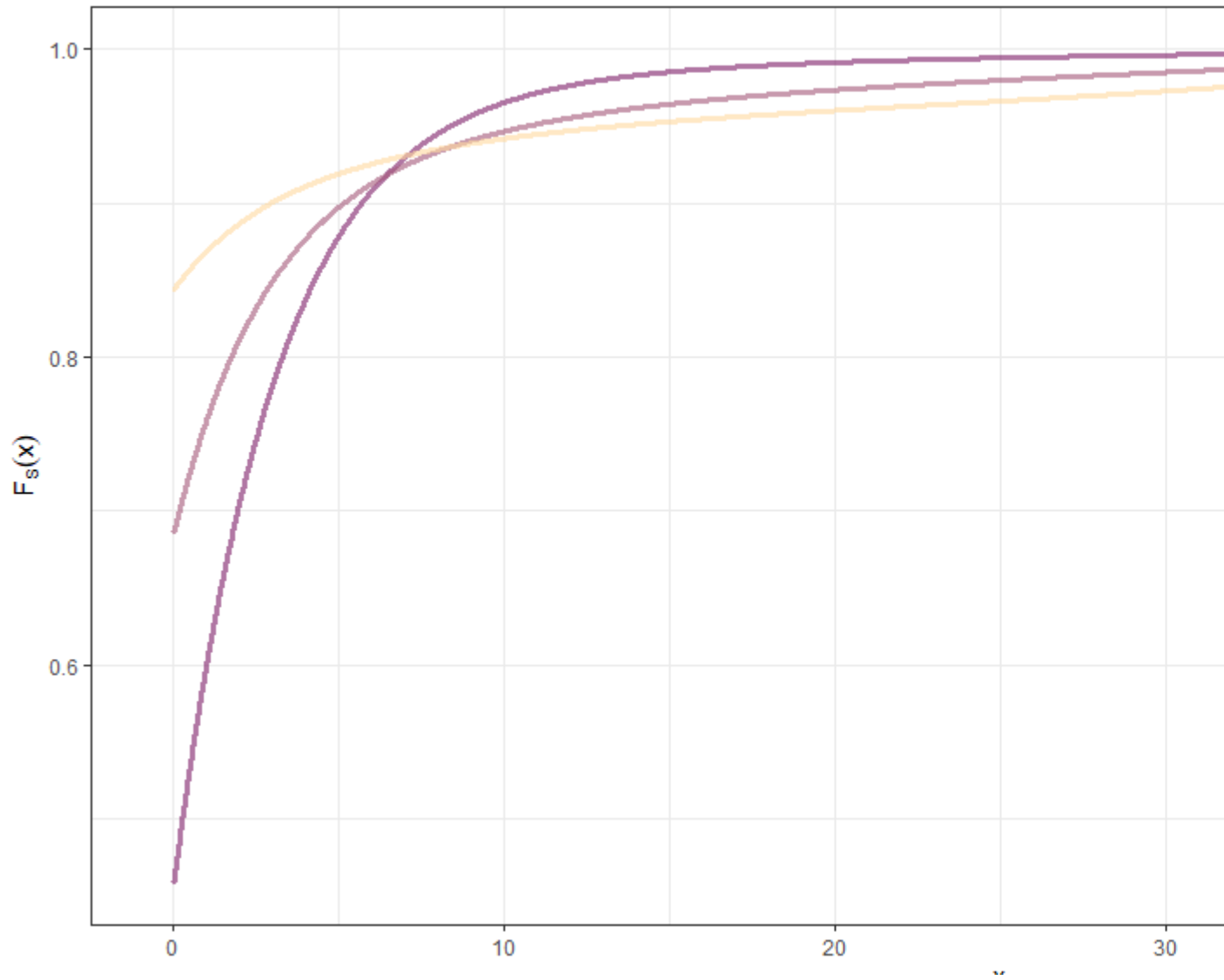
Stop-Loss  $\pi_S(d)$  selon le paramètre de dépendance  $\alpha$  )

Copule de Cook-Johnson



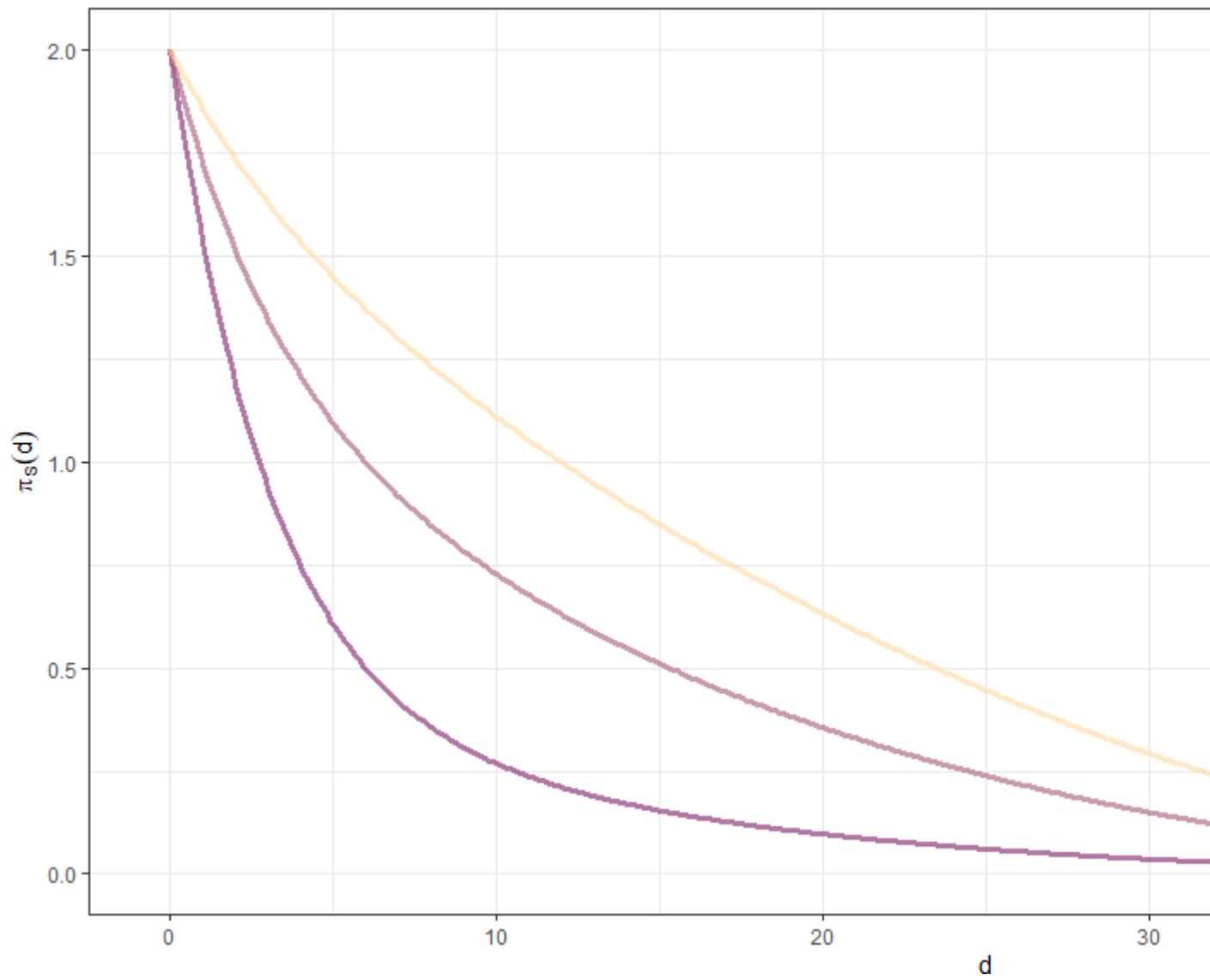
# Fonction de répartition $F_S(x)$ selon le paramètre de dépendance $\alpha$ )

Copule de Gumbel



## Stop-Loss $\pi_S(d)$ selon le paramètre de dépendance $\alpha$ )

Copule de Gumbel





## Chapitre 4

# Article de Cossette et collab. (2018)

L'objectif de l'article (ou du moins de la section que l'on doit résumer) est de montrer des applications des copules archimédiennes basées sur les transformées Laplace-Stieltjes (TLS) à l'aide d'exemple. Cossette et collab. (2018) montrent que dans plusieurs situations, il est possible de résoudre des problèmes très complexe à l'aide d'algorithmes récursif ou de manière analytique. Il s'agit d'un avantage considérable pour cette famille de copule puisque ça permet de ne pas avoir à faire de simulation de Monte Carlo.

La section 4.1 présentera brièvement la théorie associée aux copules archimédiennes. Cette section rappellera plusieurs notions du chapitre 1. Ensuite, la section 4.2 présentera plusieurs exemples avec des copules archimédiennes. Certaines considérations computationnelles seront présentes.

### 4.1 Théorie

On rappelle qu'une copule nous permet de représenter une fonction de répartition conjointe comme suit (grâce à l'équation 1.1) :

$$F_{\mathbf{X}}(k_1, \dots, k_d) = C(F_{X_1}(k_1), \dots, F_{X_d}(k_d)) \quad \text{avec} \quad k_i \in \{0, 1\} \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, d\} \quad (4.1)$$

De la même manière qu'à l'équation 4.1, une copule de survie s'énonce comme suit :

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(k_1, \dots, k_d) = C(\bar{F}_{X_1}(k_1), \dots, \bar{F}_{X_d}(k_d)) \quad \text{avec} \quad k_i \in \{0, 1\} \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, d\} \quad (4.2)$$

Pour les copules archimédiennes basées sur les fonctions de répartition (comme à l'équation 4.1), nous avons que (expression issue de l'équation 1.2) :

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) = e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(F_{X_i}(x_i))} \quad (4.3)$$

De la même manière qu'à l'équation 4.3, nous aurions l'expression suivante pour une copule basée sur les fonctions de survie (équation 4.2) :

$$\bar{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) = e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(\bar{F}_{X_i}(x_i))} \quad (4.4)$$

Ces relations seront très importantes pour l'efficacité des calculs dans les exemples de la section 4.2

## 4.2 Exemples numériques

**Exemple 4.1.** Soit  $\mathbf{X} \sim (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur de variables aléatoires tel que  $X_i \sim \text{Bern}(q) \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, d\}$ . Avec cette équation, on peut tenter de calculer  $F_{X_i|\Theta=\theta}(0) = P(X_i = 0|\Theta = \theta)$ . Grâce à l'équation 4.3, on a

$$\begin{aligned} F_{X_i|\Theta=\theta}(0) &= e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(F_{X_i}(0))} \\ &= e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)} \quad \text{Puisque } X_i \sim \text{Bern}(q) \end{aligned}$$

Puisque  $(X_i|\Theta = \theta)$  est toujours une variable dichotomique et que

$$P(X_i = 0|\Theta = \theta) = e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)}$$

on retrouve que  $(X_i|\Theta = \theta) \sim \text{Bern}(q^* = 1 - e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)})$ . La section 1.4 explique en détail en quoi la relation de dépendance dans une copule archimédienne est exclusivement due à la variable aléatoire  $\Theta$ . Avec ce constat, on peut donc en déduire que la somme des variables aléatoires  $(X_i|\Theta = \theta)$  est une somme de variable aléatoire bernoulli indépendante. On retrouve donc :

$$(S|\Theta = \theta) = \sum_{i=1}^d (X_i|\Theta = \theta) \sim \text{Bin}(d, q^*)$$

La fonction de densité de la variable aléatoire  $(S|\Theta = \theta)$  s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned} f_{S|\Theta=\theta}(k) &= \binom{d}{k} \left(1 - e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)}\right)^k e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(d-k)} \\ &= \binom{d}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (1)^{k-j} \left(-e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)}\right)^j e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(d-k)} \quad (\text{grâce au théorème binomial}) \\ &= \binom{d}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(j+d-k)} \end{aligned}$$

Finalement, lorsqu'on tente d'obtenir  $f_S(k)$  à partir de  $f_{S|\Theta=\theta}(k)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
f_S(k) &= \int_{\theta \in \text{support}\{\Theta\}} f_{S|\Theta=\theta}(k) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\
&= E_{\Theta}(f_{S|\Theta}(k)) \\
&= E_{\Theta} \left( \binom{d}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j e^{-\Theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(j+d-k)} \right) \\
&= \binom{d}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j E_{\Theta} \left( e^{-\Theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(j+d-k)} \right) \\
&= \binom{d}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \mathcal{L}_{\Theta} \left( \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(j+d-k) \right)
\end{aligned}$$

Cette équation est valide pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, d\}$

**Exemple 4.2.** Soit  $\mathbf{X} \sim (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur de variables aléatoires tel que  $X_i \sim \text{Bern}(q) \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, d\}$ . Nous avons aussi que la dépendance est introduite par une copule de survie archimédienne.

Avec l'équation 4.4, on peut obtenir  $\bar{F}_{X_i|\Theta=\theta}(0) = P(X_i = 1|\Theta = \theta)$ . On a

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{X_i|\Theta=\theta}(0) &= e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(\bar{F}_{X_i}(0))} \\
&= e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)} \quad \text{Puisque } X_i \sim \text{Bern}(q)
\end{aligned}$$

Puisque  $(X_i|\Theta = \theta)$  est toujours une variable dichotomique et que

$$P(X_i = 1|\Theta = \theta) = e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)}$$

on retrouve que  $(X_i|\Theta = \theta) \sim \text{Bern}(q^* = e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)})$  Ensuite, toujours grâce à l'indépendance conditionnelle, on obtient que

$$(S|\Theta = \theta) = \sum_{i=1}^d (X_i|\Theta = \theta) \sim \text{Bin}(d, q^*)$$

La fonction de densité de la variable aléatoire  $(S|\Theta = \theta)$  s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned}
f_{S|\Theta=\theta}(k) &= \binom{d}{k} e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)k} \left( 1 - e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)} \right)^{d-k} \\
&= \binom{d}{k} e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)k} \sum_{j=0}^{d-k} \binom{d-k}{j} (1)^{d-k-j} \left( -e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)} \right)^j \quad (\text{grâce au théorème binomial}) \\
&= \binom{d}{k} \sum_{j=0}^{d-k} \binom{d-k}{j} (-1)^j e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)(j+k)}
\end{aligned}$$

Finalement, lorsqu'on tente d'obtenir  $f_S(k)$  à partir de  $f_{S|\Theta=\theta}(k)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
f_S(k) &= \int_{\theta \in \text{support}\{\Theta\}} f_{S|\Theta=\theta}(k) f_{\Theta}(\theta) d\theta \\
&= E_{\Theta}(f_{S|\Theta}(k)) \\
&= E_{\Theta} \left( \binom{d}{k} \sum_{j=0}^{d-k} \binom{d-k}{j} (-1)^j e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)(j+k)} \right) \\
&= \binom{d}{k} \sum_{j=0}^{d-k} \binom{d-k}{j} (-1)^j E_{\Theta} \left( e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)(j+k)} \right) \\
&= \binom{d}{k} \sum_{j=0}^{d-k} \binom{d-k}{j} (-1)^j \mathcal{L}_{\Theta} \left( \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(q)(j+k) \right)
\end{aligned}$$

Cette équation est valide pour tout  $k$  dans  $\{0, \dots, d\}$ . Cette équation nous permet d'avoir une plus grande efficacité computationnelle.

**Exemple 4.3.** Soit  $\Theta$  une variable aléatoire strictement positive avec une TLS  $\mathcal{L}_{\Theta}$ . Sachant  $\Theta = \theta$ , nous avons que  $(X_1|\Theta = \theta), \dots, (X_d|\Theta = \theta)$  sont des variables aléatoires conditionnellement indépendantes qui suivent une loi géométrique avec comme fonction de masse de densité :

$$f_{X_i|\Theta=\theta}(k) = P(X_i = k|\Theta = \theta) = e^{-\theta rk} (1 - e^{-\theta rk})$$

On a aussi la fonction de survie suivante :

$$\bar{F}_{X_i|\Theta=\theta}(k) = P(X_i > k_i|\Theta = \theta) = e^{-\theta r(k_i+1)} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Grâce à la section 1.4, on déduit qu'il s'agit d'une copule archimédienne. Grâce à l'équation 4.4, on déduit que

$$\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(\bar{F}_{X_i}(k_i)) = r(k_i + 1)$$

Ça nous permet de déduire que, à partir de la forme de base des copules archimédiennes basées sur les TLS :

$$\bar{F}_{\underline{X}}^{-1}(\bar{F}_{X_i}(k_i)) = r(k_i + 1)$$

**Exemple 4.4.** Ne pas faire

**Exemple 4.5.** Ne pas faire

L'algorithme suivant permet de faire des calculs de manière efficace pour une copule archimédienne basée sur une TLS et une variable  $\Theta$  discrète.

1. Choisir  $\theta^*$  tel que  $F_{\Theta}(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est une très petite constante tel que  $10^{-10}$
2. Pour chaque valeur de  $\theta$  dans  $1, \dots, \theta^*$ 
  - a) Pour chaque variable  $X_i$ , calculer  $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in N_0$
  - b) Pour chaque variable  $X_i$ , calculer  $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
  - c) Aggréger les risques  $(X_i|\Theta = \theta)$  à l'aide d'un algorithme d'aggrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir  $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in N_0$ .
  - d) Retourner  $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer  $f_{\Theta}(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \dots, \theta^*\}$
4. Calculer  $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_{\Theta}(\theta) \quad \forall k \in N_0$

**Exemple 4.6.** Soit 40 variables  $X_i \sim \text{Exp}(0.1)$  liés par une copule AMH avec paramètre  $\alpha = 0.5$ . Pour la copule AMH, nous avons  $\Theta \sim \text{Géo}(1 - \alpha)$ . Ce constat est très important pour pouvoir nous servir de l'algorithme 4.2.

Le code suivant permet d'obtenir la distribution de  $\tilde{S}^{(l,0.1)} f_S(0.1k) \quad \forall k \in N_0$  en suivant l'algorithme 4.2.

```
## Paramètres initiaux
alpha <- 0.5          # Pour la copule AMH
h <- 0.1              # Pas de discrétisation
xmax <- 5e3           # Valeur max pour F_Xi/Theta=theta(xmax) \approx 1

## Étape 1
theta_star <- qnbinom(1 - 1e-8, 1, 1 - alpha) + 1

## Étape 2
f_s_theta <- sapply(1:theta_star, function(thet){
  ## Étape 2a) et 2b) (L'étape 2a est complétée dans la fonction)
  f_xi_theta <- f_xtheta(xmax, h, thet, alpha, method = "lower")

  ## Étape 2c) avec FFT
  ftx <- fft(c(f_xi_theta, rep(0, 2^14 - length(f_xi_theta))))
  f_x_cum <- Re(fft(ftx^40, TRUE))/aa          # Inversion

  ## Étape 2d)
  return(f_x_cum)
})
```

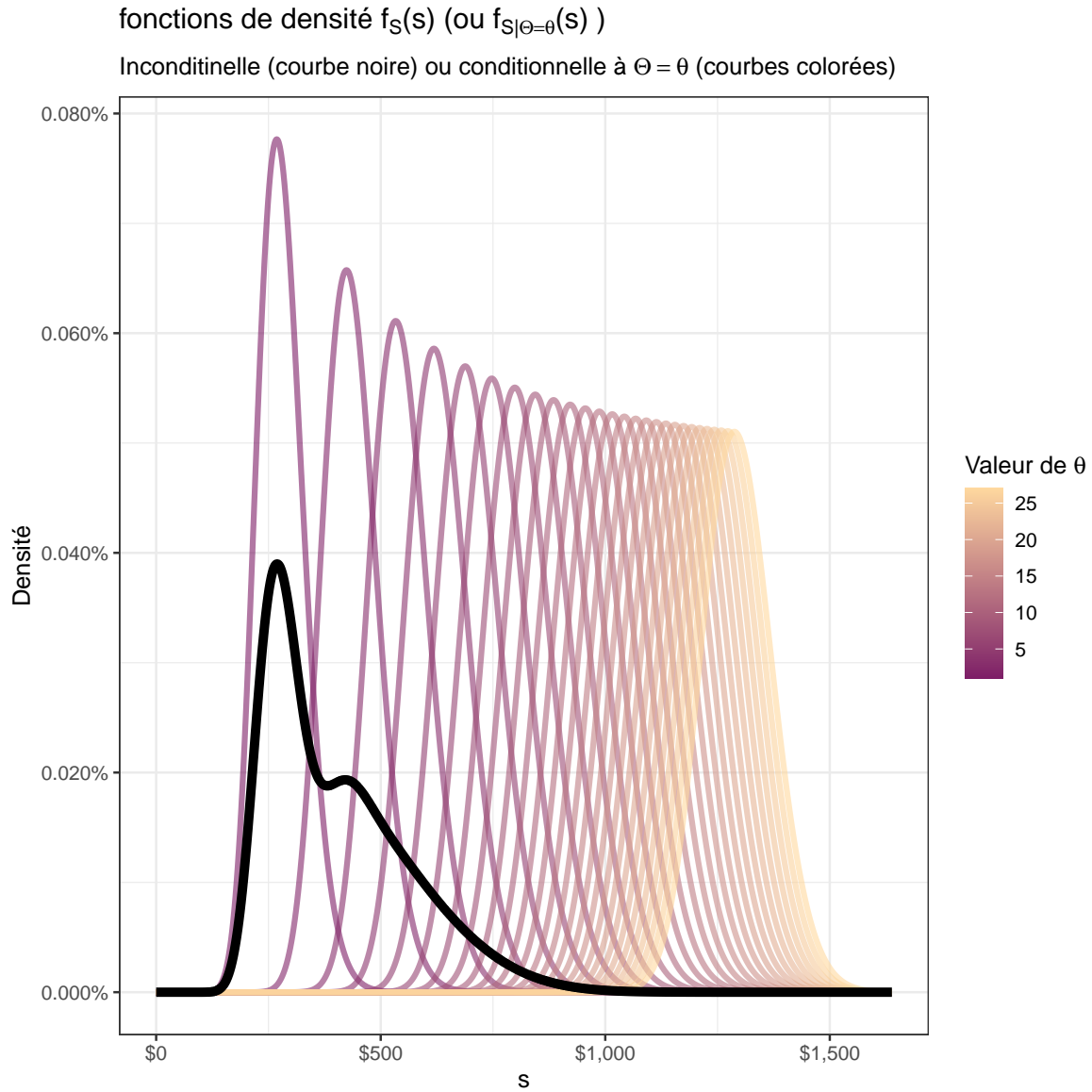


FIGURE 4.1 – Aggrégation des distributions conditionnelles

```
## Étape 3
f_theta <- dnbinom(values_theta - 1, 1, 1 - alpha)

## Étape 4
f_s <- apply(f_s_theta, 1, function(a) sum(a * f_theta))
```

Pour mieux comprendre l'étape 4 de l'algorithme 4.2, on peut regarder la figure 4.1

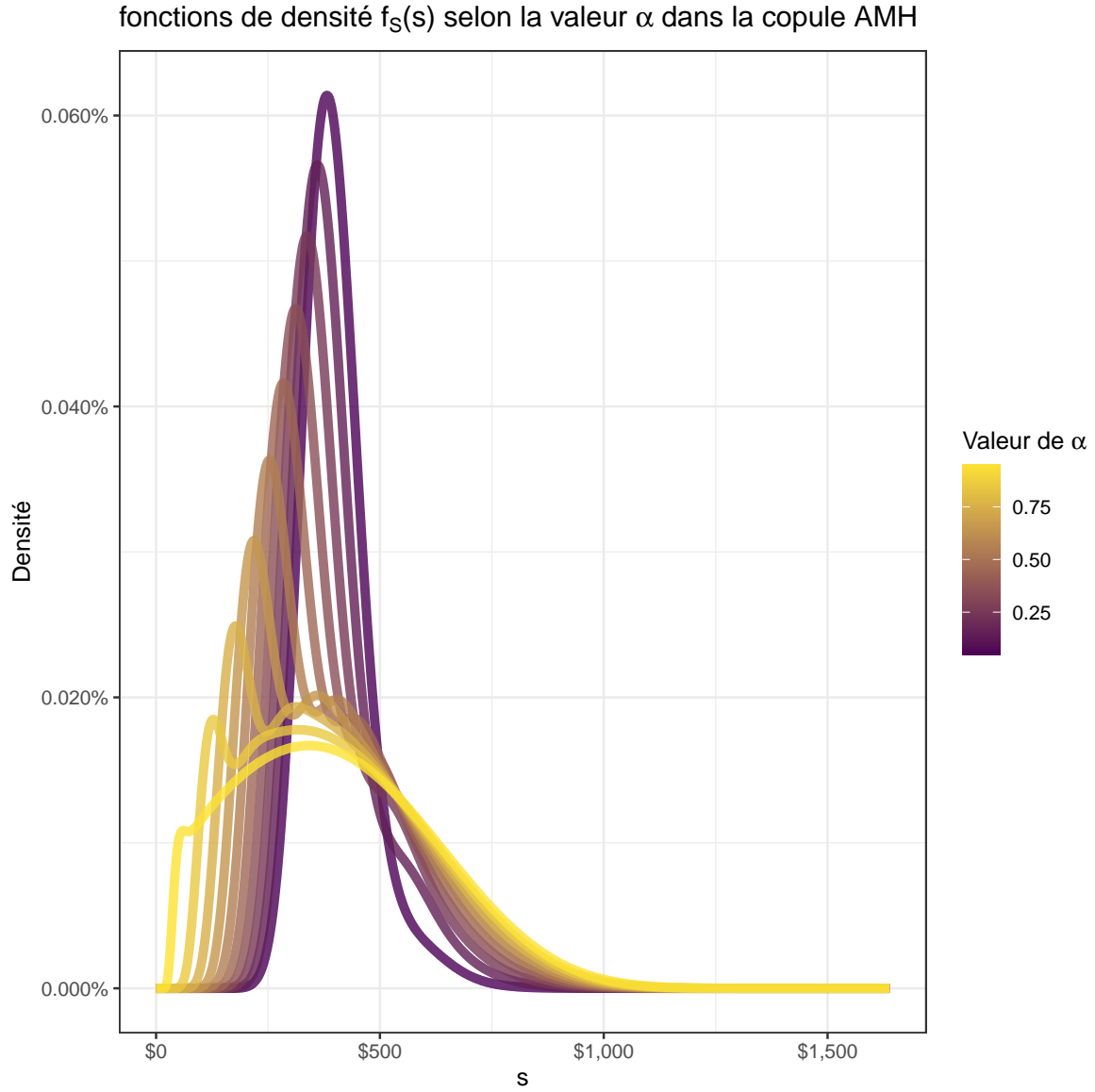


FIGURE 4.2 – Densité selon la valeur du paramètre de dépendance de la copule AMH

On peut voir les résultats obtenus dans la table 4.1.

	Expectation	Variance	VaR <sub>0.9</sub>	VaR <sub>0.999</sub>	TVaR <sub>0.9</sub>	TVaR <sub>0.999</sub>
$\tilde{S}^{(l,0.1)}$	402.0033	24749.65	628.4	997.2	727.5913	1049.249

TABLE 4.1 – Tableau des résultats pour l'exemple 9

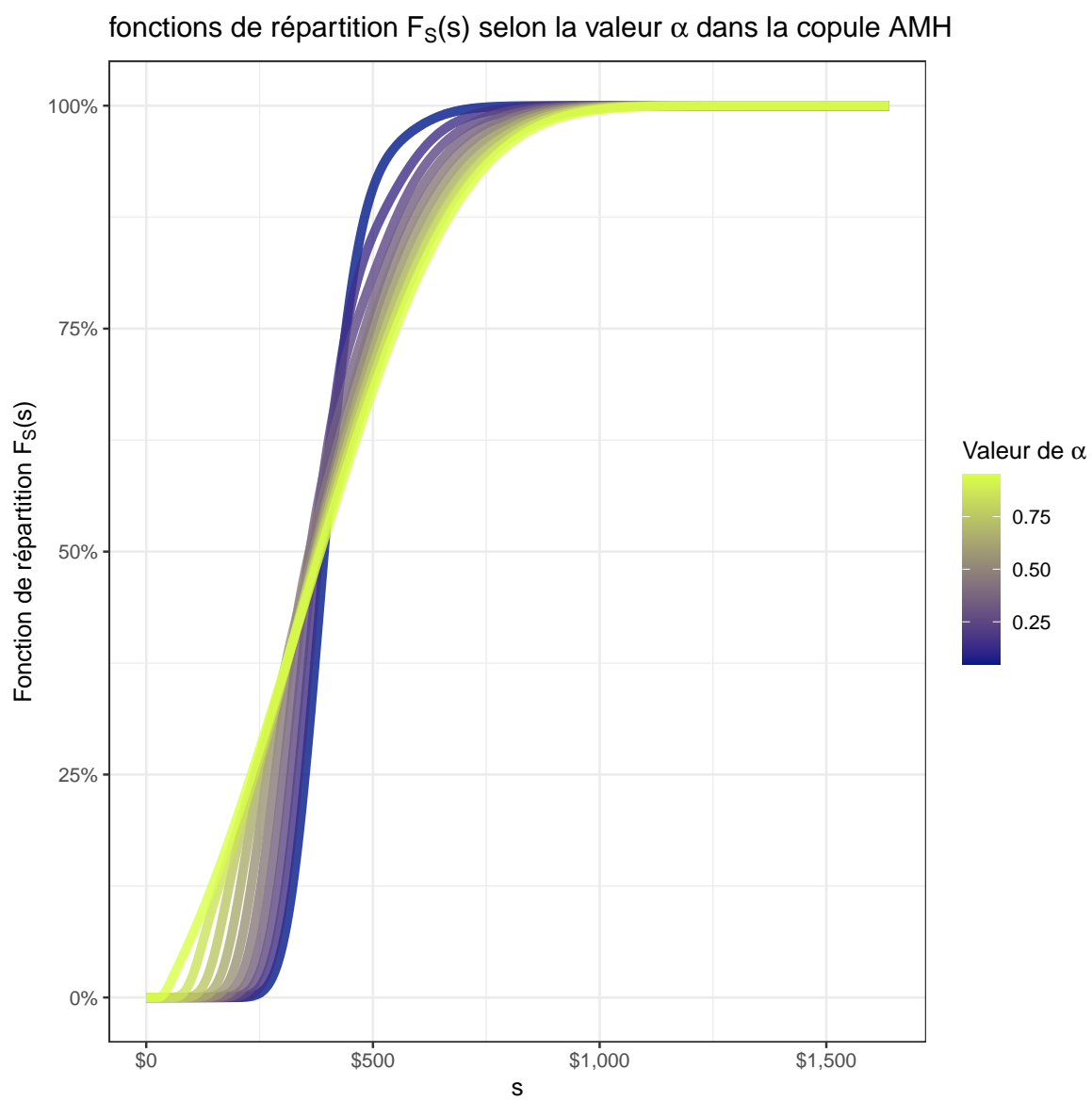


FIGURE 4.3 – Répartition selon la valeur du paramètre de dépendance de la copule AMH



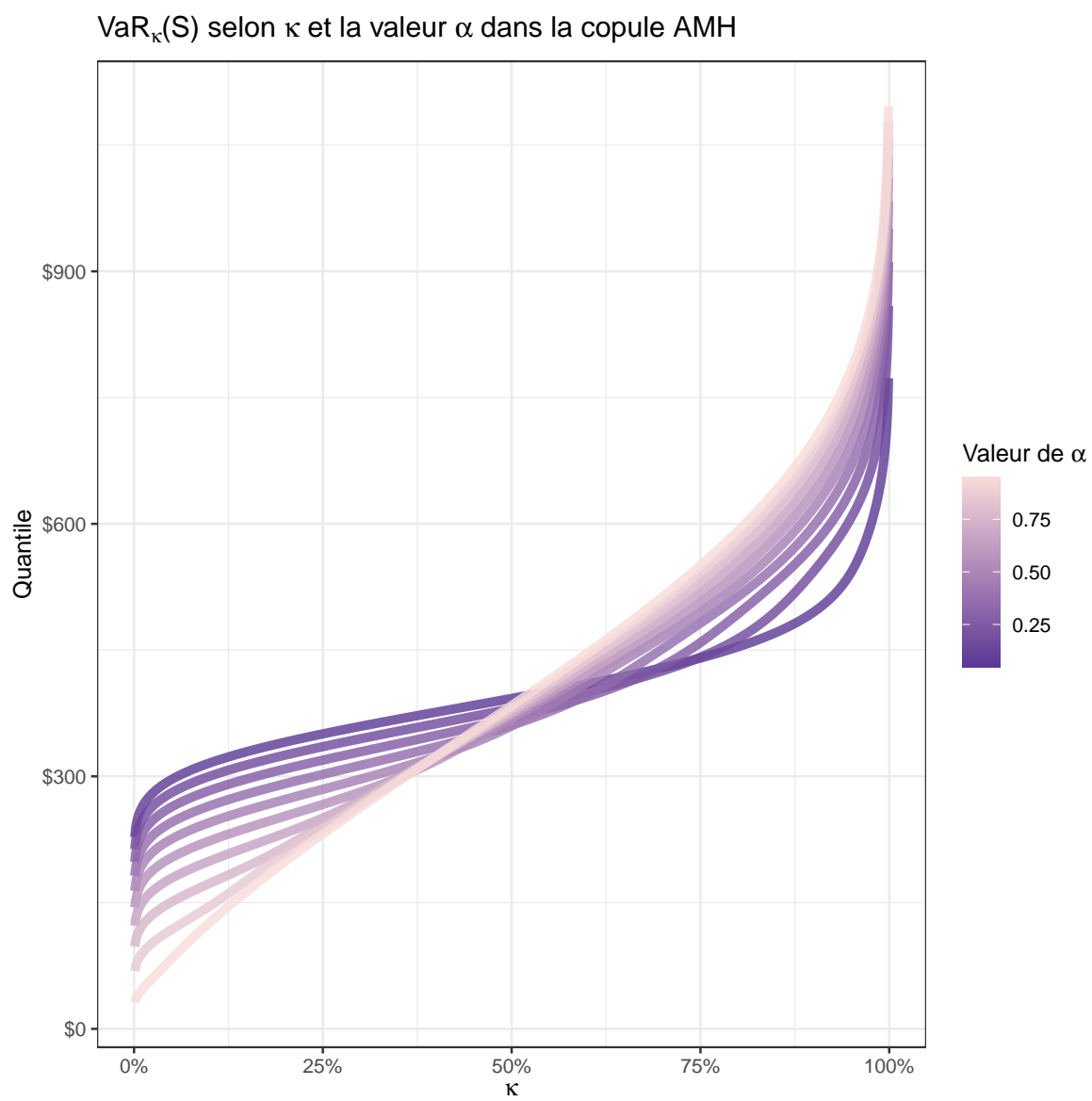


FIGURE 4.4 –  $VaR_{\kappa}(S)$  selon la valeur du paramètre de dépendance de la copule AMH

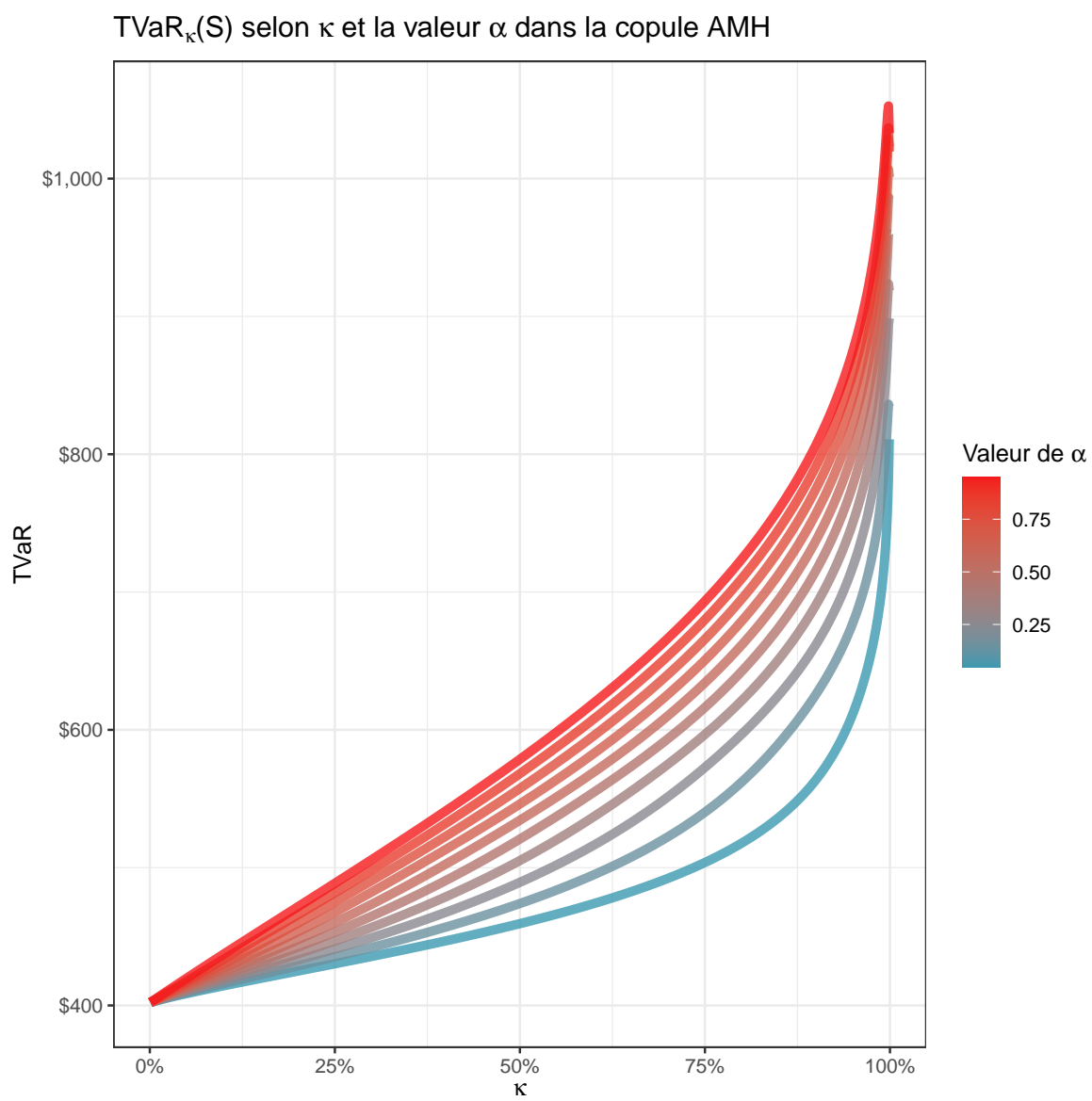


FIGURE 4.5 –  $TVaR_{\kappa}(S)$  selon la valeur du paramètre de dépendance de la copule AMH

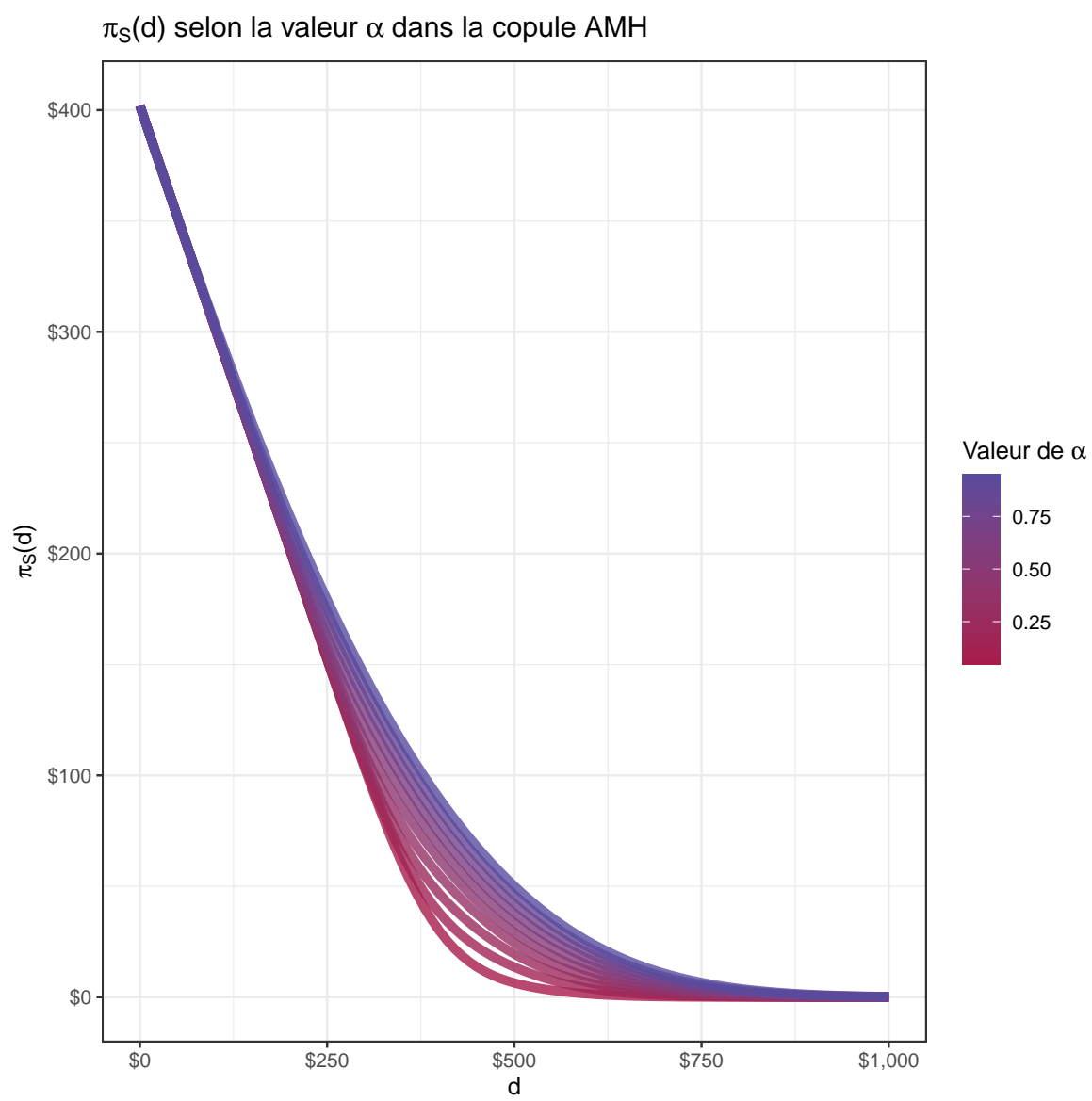


FIGURE 4.6 –  $\pi_S(d)$  selon la valeur du paramètre de dépendance de la copule AMH

## Annexe A

# Répartition Travail 1

### A.1 Cossette (2019)

Benjamin : rédaction du résumé sur les copules et conception de cette section dans les diapositives. Rédaction sur les copules archimédiennes. Rédaction des preuves. Rostan : Présentation des copules archimédiennes.

### A.2 Cossette et collab. (2002a)

Rostan : Lecture approfondie et vulgarisation de la compréhension aux autres membres de l'équipes. Rédaction du résumé.

### A.3 Cossette et collab. (2002b)

Benjamin : Lecture approfondie et vulgarisation de la compréhension aux autres membres de l'équipes. Rédaction du résumé. Conceptions des diapositives. Résolution des preuves mathématiques. Codage des exemples numériques 3 et 4 en R.

### A.4 Cossette et collab. (2018)

Olivier : Lecture approfondie et vulgarisation aux autres membres de l'équipe. Rédaction du résumé. Conception des diapositives de cette section.

#### A.4.1 Exemple 1

Olivier : Rédaction des développements.

#### A.4.2 Exemple 2

Olivier : Rédaction des développements.

### **A.4.3 Exemple 3**

Olivier : Rédaction des développements.

### **A.4.4 Algorithme 6**

Olivier : Compréhension et reformulation de l'algorithme.

### **A.4.5 Exemple 7**

Rostan : Compréhension et présentation de l'exemple. Codage de l'exemple numérique en R.

### **A.4.6 Exemple 8**

Olivier : Compréhension et présentation de l'exemple. Codage de l'exemple numérique en R.  
Conception des graphiques.

### **A.4.7 Exemple 9**

Olivier : Compréhension et présentation de l'exemple. Codage de l'exemple numérique en R.  
Conception des graphiques.

# Bibliographie

- Cossette, H. 2019, «Théorie des copules», ACT-7017, École d'actuariat de l'Université Laval.
- Cossette, H., P. Gaillardetz et E. Marceau. 2002a, «Common mixture in the individual risk model», *Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung*, vol. 2, p. 131–157.
- Cossette, H., P. Gaillardetz, É. Marceau et J. Rioux. 2002b, «On two dependent individual risk models», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 30, n° 2, p. 153–166.
- Cossette, H., E. Marceau, I. Mtalai et D. Veilleux. 2018, «Dependent risk models with archimedean copulas : A computational strategy based on common mixtures and applications», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 78, p. 53–71.