Multivariate distribution defined with Farlie Gumbel Morgenstern copula and mixed Erlang marginals : aggregation and capital allocation

Aboubacar Mahamane Mahamadou M
Choukri Houda

4 Mars 2022

Plan

Cet article, nous parle de l'aggrégation des risques et d'allocation du capital pour un portefeuille de risques dépendants dont la distribution multivariée est définie par une copule FGM et des distributions marginales mélange d'Erlang .
Nous allons présenter ici 2 méthodes pour l'allocation du capital qui sont : l'allocation du capital par la méthode de la TVaR et celle basée sur la covariance.
L'utilisation de la copule FGM et de la loi mélange d'erlang ne sont en aucun cas anodine car la copule FGM est intéressante par sa simplicité et permet donc des résultats explicites. Il en est de même pour la loi mélange d'erlang qui a également beaucoup de point positive notamment le fait que toute distribution continue positive peut être approximée par un membre de la classe mélange d'Erlang.

Cet article est en quelque sorte dans la continuité de certains articles dont Dhaene et al. (2008) qui ont développé une expression pour l'allocation de la TVaR sous des distributions elliptiques multivariées et Barges et al. (2009) donnent une expression sous forme fermée pour l'allocation basée sur la TVaR lorsque les lignes d'affaires d'un portefeuille d'assurance sont liées par une copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) et lorsque les risques marginaux sont distribués sous forme de mélanges d'exponentiels.

Plan

Soit $\underline{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur de 2 variables aléatoires continues avec F_{X_i} les fonction de répartition marginale et avec comme fonction de répartition conjointe $F_{\underline{X}}$.

D'après le théorème de Sklar, nous pouvons écrire que :

$$F_{\underline{X}}(x) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_1))$$

et

$$f_{\underline{X}}(x) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \; c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

Avec :

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 u_2}$$

La copule FGM s'écrit de la manière suivante dans le cas bivarivé :

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)$$

On observe que le premier terme est la fonction de répartition conjointe de (X_1, X_2) quand X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes alors que le deuxième terme est une perturbation de l'indépendance où θ est le paramètre de dépendance. Si $\theta = 0$, alors on retrouve le cas particulier d'indépendance.
De plus :

$$c(u_1, u_2) = (1 + \theta(1 - 2u_1 - 2u_2 + (2u_1)(2u_2)))$$

La copule FGM

Mesures d'associations : Rho de spearman

On sait que :

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)) = \rho_P(U_1, U_2)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U_1, U_2) &= \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 c(u_1, u_2)\, du_1\, du_2 \\
&= u_1 u_2 (1 + \theta(1 - 2u_1 - 2u_2 + (2u_1)(2u_2))) \\
&= (1+\theta) \int_0^1 u_1\, du_1 \int_0^1 u_2\, du_2 \\
&- \theta \int_0^1 2u_1^2\, du_1 \int_0^1 u_2\, du_2 \\
&- \theta \int_0^1 u_1\, du_1 \int_0^1 2u_2^2\, du_2 \\
&+ \theta \int_0^1 2u_1^2\, du_1 \int_0^1 2u_2^2\, du_2 \\
&= \frac{1+\theta}{4} - \frac{2\theta}{6} - \frac{2\theta}{6} + \frac{4\theta}{9} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36}
\end{aligned}$$

La copule FGM

Mesures d'associations : Rho de spearman

$$
\begin{aligned}
\rho_P(U_1, U_2) &= \frac{\mathrm{E}(U_1, U_2) - \mathrm{E}(U_1)\mathrm{E}(U_2)}{\sqrt{V(U_1)V(U_2)}} \\
&= \frac{\frac{1}{4} + \frac{\theta}{36} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}\frac{1}{12}}} \\
&= \frac{\frac{\theta}{36}}{\frac{1}{12}} \\
&= \frac{\theta}{3}
\end{aligned}
$$

De plus on sait que θ est entre -1 et 1 donc cette copule permet de modéliser des variables aléatoires modérement corrélées positivement et négativement.

On sait que :

$$\tau(X_1, X_2) = 4Pr(U_1 < U_1', U_2 < U_2') - 1$$

et que :

$$Pr(U_1 < U_1', U_2 < U_2') = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) c(u_1, u_2) \, du_1 \, du_2$$

Ainsi on trouvera que

$$\tau(X_1, X_2) = \frac{2\theta}{9}$$

Même remarque que précédemment pour la modélisation des variables aléatoires.

Plan

La classe mélange Erlang possède de nombreuses propriétés analytiques utiles pour les applications actuarielles et de gestion des risques.
De plus, Tijms (1994) montre que la classe mélange d'Erlang est dense dans l'ensemble des distributions de probabilité continues positives. C'est un avantage significatif de cette classe puisque toute distribution continue positive peut être approximée par un membre de cette classe.

Soit $X \sim MixErl(\underline{p}, \beta)$ alors

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k h(x, k, \beta)$$

Et

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k H(x, k, \beta)$$

Lemme 2.1

Soit $Y \sim MixErl(\underline{p}, \beta)$

Soit $f_Y^{\varepsilon}(x) = \frac{\overline{F_Y}(x)}{E(Y)}$ la distribution d'équilibre associée à la variable aléatoire Y.
Cette distribution est un mélange d'Erlang avec des paramètres $(\underline{\varepsilon}(\underline{p}) = \{\varepsilon(k, \underline{p}), k \in \mathbb{N}^*\}, \beta)$ et une fdp donnée par :

$$f_Y^{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon(k, \underline{p}) h(x; k, \beta),$$

Avec

$$\varepsilon(k, \underline{p}) = \frac{\sum_{j=k}^{\infty} p_j}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j}, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots$$

Loi mélange d'Erlang
Exemple

Prenons par exemple un $Y \sim MixErl(\underline{p} = (p_1, p_2, p_3), \beta)$
Donc la fonction densité d'équilibre associée à cette v.a. Y est tel que

$$
\begin{aligned}
f_Y^{\varepsilon}(x) &= \frac{\overline{F_y}(x)}{E(Y)} \\
&= \varepsilon(1, \underline{p})h(x; 1, \beta) + \varepsilon(2, \underline{p})h(x; 2, \beta) + \varepsilon(3, \underline{p})h(x; 3, \beta) \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} p_j}{\sum_{j=1}^{\infty} jp_j} h(x; 1, \beta) + \frac{\sum_{j=2}^{\infty} p_j}{\sum_{j=1}^{\infty} jp_j} h(x; 2, \beta) + \frac{\sum_{j=3}^{\infty} p_j}{\sum_{j=1}^{\infty} jp_j} h(x; 3, \beta) \\
&= \frac{p_1 + p_2 + \sum_{j=3}^{\infty} p_j}{p_1 + 2p_2 + \sum_{j=3}^{\infty} jp_j} h(x; 1, \beta) + \frac{p_2 + \sum_{j=3}^{\infty} p_j}{p_1 + 2p_2 + \sum_{j=3}^{\infty} jp_j} h(x; 2, \beta) \\
&+ \frac{\sum_{j=3}^{\infty} p_j}{p_1 + 2p_2 + \sum_{j=3}^{\infty} jp_j} h(x; 3, \beta)
\end{aligned}
$$

Avec

$$
h(x; k, \beta) = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\beta x} \quad , \Gamma(k) = (k-1)!
$$

Lemme 2.2

Soit Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes avec $Y_i \sim \text{MixErl}\left(\underline{p}_i, \beta_i\right)$ tel que $\beta_i = \beta, i = 1, 2$.

Sous la condition que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, la variable aléatoire $T_2 = Y_1 + Y_2$ a une distribution de mélange d'Erlang, de paramètres $\left(\underline{\sigma}^{(2)}\left(\underline{p}_1, \underline{p}_2\right) = \left\{\sigma^{(2)}\left(k, \underline{p}_1, \underline{p}_2\right), k \in \mathbb{N}^*\right\}, \beta\right)$, et sa fdp est donnée par

$$f_{T_2}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{(2)}\left(k, \underline{p}_1, \underline{p}_2\right) h(s; k, \beta)$$

Avec

$$\sigma^{(2)}\left(k, \underline{p}_1, \underline{p}_2\right) = \begin{cases} 0, & \text{pour } k = 1, \\ \sum_{j=1}^{k-1} p_{1,j} p_{2,k-j}, & \text{pour } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Loi mélange d'Erlang
Exemple

Prenons par exemple $Y_1 \sim MixErl(\underline{p} = (p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}), \beta)$ et $Y_2 \sim MixErl(\underline{p} = (p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}), \beta)$

On a donc

$$\begin{cases} \sigma^{(2)}\left(2, \underline{p}_1, \underline{p}_2\right) = & p_{1,1}p_{2,1} \\ \sigma^{(2)}\left(3, \underline{p}_1, \underline{p}_2\right) = & p_{1,1}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,1} \\ \sigma^{(2)}\left(4, \underline{p}_1, \underline{p}_2\right) = & p_{1,2}p_{2,3} + p_{1,2}p_{2,2} + p_{1,3}p_{2,1} \end{cases}$$

Sa fdp est tel que

$$\begin{aligned} f_{T_2} &= \sum_{k=1}^{4} \sigma^{(2)}\left(k, \underline{p}_1, \underline{p}_2\right) h(s; k, \beta) \\ &= p_{1,1}p_{2,1}h(s; 2, \beta) + (p_{1,1}p_{2,2} + p_{1,2}p_{2,1})h(s; 3, \beta) \\ &+ (p_{1,2}p_{2,3} + p_{1,2}p_{2,2} + p_{1,3}p_{2,1})h(s; 4, \beta) \end{aligned}$$

Lemme 2.3

Soit $Y \sim MixErl(\underline{p}, \beta)$

Soit $f_Y^{\pi}(x) = 2f_Y(x)\bar{F}_Y(x)$, alors $f_Y^{\pi}(x)$ est la fdp d'un mélange d'Erlang de paramètres $\left(\underline{\pi}(\underline{p}) = \left\{\pi(j, \underline{p}), j \in \mathbb{N}^*\right\}, 2\beta\right)$, Sa fdp est donnée par

$$f_Y^{\pi}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(j, \underline{p}) h(x; j, 2\beta),$$

Avec

$$\pi(j, \underline{p}) = \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{k=1}^{j} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ k-1 \end{array} \right) p_k \sum_{l=j-k+1}^{\infty} p_l, \quad \text{pour } j = 1, 2, \ldots$$

Loi mélange d'Erlang

Exemple

Prenons par exemple $Y \sim MixErl(\underline{p} = (p_1, p_2, p_3), \beta)$ Sa fdp est donnée par

$$f_Y^{\pi}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(j, \underline{p}) h(x; j, 2\beta)$$
$$= \pi(1, \underline{p}) h(x; 1, 2\beta) + \pi(2, \underline{p}) h(x; 2, 2\beta) + \pi(3, \underline{p}) h(x; 3, 2\beta)$$
$$+ \pi(4, \underline{p}) h(x; 4, 2\beta) + \pi(5, \underline{p}) h(x; 5, 2\beta)$$

Avec $\pi(1, \underline{p}) = \frac{1}{2^0} \binom{0}{0} p_1(p_1 + p_2 + p_3)$

$$\pi(2, \underline{p}) = \frac{1}{2} \binom{1}{0} p_1(p_2 + p_3) + \frac{1}{2} \binom{1}{1} p_2(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$\pi(3, \underline{p}) = \frac{1}{2^2} \binom{2}{0} p_1 p_3 + \frac{1}{2^2} \binom{2}{1} p_2(p_2 + p_3) + \frac{1}{2^2} \binom{2}{2} p_3(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$\pi(4, \underline{p}) = \frac{1}{2^3} \binom{3}{1} p_2 p_3 + \frac{1}{2^3} \binom{3}{2} p_3(p_2 + p_3)$$

Lemme 2.4

Soit $Y \sim \text{MixErl}\left(\underline{p}, \beta_1\right)$, avec $\beta_1 \leq \beta_2$.

Alors, la fdp de Y peut être exprimée comme la fdp d'une distribution de mélange d'Erlang avec des paramètres $\left(\underline{\omega}\left(\underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) = \left\{\omega\left(k, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right), k \in \mathbb{N}^*\right\}, \beta_2\right)$.

Sa fdp est donnée par

$$f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(k, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) h\left(x; k, \beta_2\right)$$

Avec

$$\omega\left(k, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) = \sum_{j=1}^{k} p_j \begin{pmatrix} k-1 \\ k-j \end{pmatrix} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^j \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{k-j}$$

pour $k = 1, 2, \ldots$

Prenons par exemple $Y \sim \text{MixErl}\left(\underline{p} = (p_1, p_2, p_3), \beta_1\right)$, avec $\beta_1 \leq \beta_2$.
Sa fdp est donnée par

$$
\begin{aligned}
f_Y(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(k, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) h(x; k, \beta_2) \\
&= \omega\left(1, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) h(x; 1, \beta_2) + \omega\left(2, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) h(x; 2, \beta_2) \\
&+ \omega\left(3, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) h(x; 3, \beta_2) + \omega\left(4, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) h(x; 4, \beta_2) \\
&+ \omega\left(5, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) h(x; 5, \beta_2) + \ldots.
\end{aligned}
$$

Avec

$$
\begin{aligned}
\omega\left(1, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) &= p_1 \binom{0}{0} \tfrac{\beta_1}{\beta_2}\left(1 - \tfrac{\beta_1}{\beta_2}\right) \\
\omega\left(2, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) &= p_1 \binom{1}{1} \tfrac{\beta_1}{\beta_2}\left(1 - \tfrac{\beta_1}{\beta_2}\right) + p_2 \binom{1}{0} \left(\tfrac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \\
\omega\left(3, \underline{p}, \beta_1, \beta_2\right) &= p_1 \binom{2}{2} \frac{\beta_1}{\beta_2}\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 + p_2 \binom{2}{1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \\
&+ p_3 \binom{2}{0} \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^3
\end{aligned}
$$

Loi mélange d'Erlang

Lemme 2.5

Lemme 2.5

Soit $Y \sim MixErl(\underline{p}, \beta)$

Soit $f_Y^{\alpha}(x) = \frac{x f_Y(x)}{E[Y]}$, alors $f_Y^{\alpha}(x)$ peut être exprimée comme la fdp d'une distribution de mélange d'Erlang avec des paramètres $\left(\underline{\alpha}(\underline{p}) = \left\{\alpha(k, \underline{p}), k \in \mathbb{N}^*\right\}, \beta\right)$.

Sa fdp est donnée par

$$f_Y^{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k, \underline{p}) h(x; k, \beta)$$

Avec

$$\alpha(k, \underline{p}) = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 1 \\ \frac{(k-1)p_{k-1}}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j}, & \text{si } k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Prenons par exemple $Y \sim \text{MixErl}\left(\underline{p} = (p_1, p_2, p_3), \beta\right)$
Sa fdp est donnée par

$$
\begin{aligned}
f_Y^{\alpha}(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k, \underline{p}) h(x; k, \beta) \\
&= \alpha(2, \underline{p}) h(x; 2, \beta) + \alpha(3, \underline{p}) h(x; 3, \beta) + \alpha(4, \underline{p}) h(x; 4, \beta)
\end{aligned}
$$

Avec $\alpha(2, \underline{p}) = \frac{p_1}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j}$
$\alpha(3, \underline{p}) = \frac{2p_2}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j}$
$\alpha(4, \underline{p}) = \frac{3p_3}{\sum_{j=1}^{\infty} j p_j}$

Plan

Proposition 1

Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et $X_i \sim MixErl(\underline{p}_i, \beta_i)$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$:
On a :

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{\theta}{\beta_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ij(\frac{\pi(i, \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, \beta_2))}{2} - w(i, \underline{p}_1, \beta_1, \beta_2))(\frac{\pi(j, \underline{p}_2)}{2} - p_{2,j})$$

<u>Preuve</u> : On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1 X_2) &= \int_0^1 \int_0^1 F_1^{-1}(u_1) F_2^{-1}(u_2) c(u_1, u_2)\, du_1\, du_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 F_1^{-1}(u_1) F_2^{-1}(u_2)(1 + \theta(1 - 2\overline{u}_1)(1 - 2\overline{u}_2))\, du_1\, du_2 \\
&= \int_0^1 F_1^{-1}(u_1)\, du_1 \int_0^1 F_2^{-1}(u_2)\, du_2 + \theta \left[\int_0^1 F_1^{-1}(u_1)(1 - 2\overline{u}_1)\, du_1 \int_0^1 F_2^{-1}(u_2)(1 - 2\overline{u}_2)\, du_2 \right] \\
&= \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2) + \theta \gamma_1 \gamma_2
\end{aligned}$$

Or on sait que $\mathrm{Cov}(U_1, U_2) = \mathrm{E}(U_1, U_2) - \mathrm{E}(U_1)\mathrm{E}(U_2)$
Donc : $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \theta \gamma_1 \gamma_2 = \theta(-\gamma_1)(-\gamma_2)$

Proposition 1 (suite preuve)

$$
\begin{aligned}
-\gamma_1 &= \int_0^1 F_1^{-1}(u_1)(1 - 2\overline{u}_1)\, du_1 \\
&= \mathbf{E}\left[F_1^{-1}(u_1)(-1 + 2\overline{u}_1)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[X_1(2\overline{F}_{X_1} - 1)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[2X_1\overline{F}_{X_1} - X_1\right] \\
&= 2\mathbf{E}\left[X_1\overline{F}_{X_1}\right] - \mathbf{E}\left[X_1\right]
\end{aligned}
$$

D'autre part on a :

$$
\begin{aligned}
2\mathbf{E}\left[X_1\overline{F}_{X_1}\right] &= \int 2t\overline{F}_{X_1}(t) f_{X_1}(t)\, dt \\
&= \int t f^{\pi}_{X_1}(t)\, dt \\
&= \mathbf{E}\left[Z\right] \qquad\qquad Z \sim MixErl(\pi(j, \underline{p}_1), 2\beta_1) \text{ (Lemme 2.3)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2\beta_1} \pi(j, \underline{p}_1)
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\gamma_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2\beta_1} \pi(j, \underline{p}_1) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\beta_1} p_{1,j}
$$

On fait la même chose pour γ_2 et on trouve l'expression de la covariance de X_1 et X_2 qui est :

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2\beta_1}\pi(i,\underline{p}_1) - \frac{i}{\beta_1}p_{1,i}\right)\left(\frac{j}{2\beta_2}\pi(j,\underline{p}_2) - \frac{j}{\beta_2}p_{2,j}\right) & (1)\\ &= \frac{\theta}{\beta_2^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} ij\left(\frac{\pi(i,\underline{w}(\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2))}{2} - w(i,\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2)\right)\left(\frac{\pi(j,\underline{p}_2)}{2} - p_{2,j}\right) & (2)\end{aligned}$$

Le passage de l'equation (1) à l'equation (2) est dû à une application de la lemme 2.4

Proposition 2

Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et $X_i \sim MixErl(\underline{p}_i, \beta_i)$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$ et $S_2 = X_1 + X_2$
On a :

$$S_2 \sim MixErl(\underline{p}^{(2)}, 2\beta_2)$$

Avec

$$\begin{aligned}\underline{p}^{(2)} &= (1+\theta)\sigma^{(2)}(j, \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{w}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) - \theta\sigma^{(2)}(j, \underline{w}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{w}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\ &- \theta\sigma^{(2)}(j, \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) + \theta\sigma^{(2)}(j, \underline{w}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2))\end{aligned}$$

<u>Preuve</u> : On sait que : $f_{\underline{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) c(F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2))$
avec $c(u_1, u_2) = (1+\theta) - 2\theta\overline{u}_1 - 2\theta\overline{u}_2 + 4\theta\overline{u}_1\overline{u}_2$

$$\begin{aligned}f_{S_2}(s) &= \int_0^s f_{\underline{X}}(x, s-x)\,dx \\ &= \int_0^s (1+\theta) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(s-x_2)\,dx + \int_0^s (-2\theta\overline{F}_{X_1}(x)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(s-x_2)\,dx \\ &+ \int_0^s (-2\theta\overline{F}_{X_2}(s-x)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(s-x_2)\,dx + \int_0^s (4\theta\overline{F}_{X_1}(x)\overline{F}_{X_2}(s-x)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(s-x_2)\,dx \\ &= I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) + I_4(s)\end{aligned}$$

Distribution bivariée définie avec la copule FGM et avec des lois marginales mélange d'Erlang

Proposition 2 (Preuve)

On a : On peut exprimer I_1 comme le produit de convolution de 2 distributions de mélange d'Erlang de paramètre $2\beta_2$.
On a déja $X_i \sim MixErl(\underline{p}_1, \beta_1)$ donc en utilisant le lemme 2.4, on a :
$f_{X_1}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w(j, \underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2) h(x, j, 2\beta_2)$
de même pour $f_{X_2}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w(j, \underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2) h(x, j, 2\beta_2)$
Puisque le paramètre $2\beta_2$ est le même dans les 2 cas alors on peut utiliser le lemme 2.2 et on trouve le pdf de $X_1 + X_2$
Ainsi : $I_1(s) = (1+\theta)\sigma^{(2)}(j, \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2), \underline{w}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) h(s, j, 2\beta_2)$

On fait exactement la même chose pour les autres termes en utilisant le lemme approprié et on trouvera à la fin la somme (un terme * $h(s, j, 2\beta_2)$) et ce terme est le poids .
Ainsi

$$S_2 \sim MixErl(\underline{p}^{(2)}, 2\beta_2)$$

Comme on a montré que $S_2 \sim MixErl(\underline{p}^{(2)}, 2\beta_2)$ alors on peut trouver l'expression de la TVaR et la prime stop loss également d'un mélange d'Erlang (Annexe cours ACT 7017).
Ainsi :

$$TVaR_\kappa(S_2) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \frac{j}{2\beta_2} \overline{H}(VaR_\kappa(S_2), j+1, 2\beta_2)$$

et

$$\pi_{S_2}(d) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} e^{-2\beta_2 d} \frac{(\beta_2 d)^j}{j!}$$

Plan

Soit $S = X + Y$ alors la part allouée pour chacun des contrats est sous la forme :

$$TVaR_{\kappa}(X, S) = \frac{\mathrm{E}\left[X \times 1_{S > VaR_{\kappa}(S)}\right]}{1 - \kappa}$$

Avec :

$$TVaR_{\kappa}(X, S) + TVaR_{\kappa}(Y, S) = TVaR_{\kappa}(S)$$

<u>Preuve</u> : Vu en classe

Proposition 3

Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et $X_i \sim MixErl(\underline{p}_i, \beta_i)$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$ alors on a :

$$TVaR_\kappa(X_i, S_2) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} q_{i,k}^{(2)} \overline{H}(VaR_\kappa(S_2), k, 2\beta_2)$$

Avec

$$\begin{aligned} q_{1,k}^{(2)} = {} & (1+\theta)E[X_1]\sigma^{(2)}((k, \underline{w}(\underline{\alpha}(\underline{p}_1), \beta_1, 2\beta_2), \underline{w}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) - \theta\Pi_1 \sigma^{(2)}((k, \underline{w}(\underline{\alpha}((\underline{\pi}(\underline{p}_1)), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{w}(\underline{p}_2, \beta_2, 2\beta_2)) \\ & - \theta E[X_1]\sigma^{(2)}((k, \underline{w}(\underline{\alpha}(\underline{p}_1), \beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2)) + \theta\Pi_1 \sigma^{(2)}((k, \underline{w}(\underline{\alpha}((\underline{\pi}(\underline{p}_1)), 2\beta_1, 2\beta_2), \underline{\pi}(\underline{p}_2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{2,k}^{(2)} = {} & (1+\theta)E[X_2]\sigma^{(2)}((k, \underline{w}(\underline{\alpha}(\underline{p}_2), \beta_2, 2\beta_2), \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2)) - \theta\Pi_2 \sigma^{(2)}((k, \underline{\alpha}(\underline{\pi}(\underline{p}_2)), \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, 2\beta_2)) \\ & - \theta E[X_2]\sigma^{(2)}((k, \underline{w}(\underline{\alpha}(\underline{p}_2), \beta_2, 2\beta_2), \underline{w}(\underline{\pi}(\underline{p}_1), 2\beta_1, 2\beta_2) + \theta\Pi_2 \sigma^{(2)}((k, \underline{\alpha}((\underline{\pi}(\underline{p}_2)), \underline{w}(\underline{\pi}(\underline{p}_2), 2\beta_1, 2\beta_2)))) \end{aligned}$$

avec $q_{i,k}^{(2)} = 0$ pour k=1,2

Et $\Pi_i = E[X_i \overline{F}_{X_i}(X_i)] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2\beta_i} \pi(j, \underline{p}_i)$

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X_1, S) &= \frac{E\left[X_1 \times 1_{S>VaR_\kappa(S)}\right]}{1-\kappa}\\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} E\left[X_1 \times 1_{S=s}\right]\, ds
\end{aligned}
$$

D'une part on a :

$$
\begin{aligned}
E\left[X_1 \times 1_{S=s}\right] &= \int_0^s x f_{\underline{X}}(x, s-x)\, dx\\
&= \int_0^s (1+\theta) x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\, dx + \int_0^s (-2\theta \overline{F}_{X_1}(x)) x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\, dx\\
&+ \int_0^s (-2\theta \overline{F}_{X_2}(s)) x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\, dx\\
&+ \int_0^s (4\theta \overline{F}_{X_1}(x)\overline{F}_{X_2}(s-x)) x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\, dx\\
&= J_1(s) + J_2(s) + J_3(s) + J_4(s)
\end{aligned}
$$

Traitons cas par cas les termes

$$
\begin{aligned}
J_1(s) &= \int_0^s (1+\theta) x f_{X_1}(x) f_{X_2}(s-x)\, dx\\
&= (1+\theta) E[X_1] \int_0^s \frac{x f_{X_1}(x)}{E[X_1]} f_{X_2}(s-x)\, dx
\end{aligned}
$$

or grâce au lemme 2.5 on sait que :

$$\begin{aligned}\frac{xf_{X_{\mathbf{1}}}(x)}{E[X_{\mathbf{1}}]} &= \sum_{j=\mathbf{2}}^{\infty} \alpha(j, \underline{p}_{\mathbf{1}}) h(x, j, \beta_{\mathbf{1}}) \\ &= \sum_{j=\mathbf{2}}^{\infty} w(j, \underline{\alpha}(\underline{p}_{\mathbf{1}}), \beta_{\mathbf{1}}, 2\beta_{\mathbf{2}}) h(x, j, 2\beta_{\mathbf{2}}) \qquad \text{(lemme 2.4)}\end{aligned}$$

On utilise aussi le lemme 2.4 pour transformer $f_{X_{\mathbf{2}}}$

$$f_{X_{\mathbf{2}}}(x) = \sum_{j=\mathbf{1}}^{\infty} w(j, \underline{p}_{\mathbf{2}}, \beta_{\mathbf{2}}, 2\beta_{\mathbf{2}}) h(x, j, 2\beta_{\mathbf{2}})$$

Grace au lemme 2.2, on peut écrire :

$J_{\mathbf{1}}(s) = \sum_{j=\mathbf{3}}^{\infty}(1+\theta)\mathrm{E}[X_{\mathbf{1}}]\sigma^{(\mathbf{2})}((k, \underline{w}(\underline{\alpha}(\underline{p}_{\mathbf{1}}), \beta_{\mathbf{1}}, 2\beta_{\mathbf{2}}), \underline{w}(\underline{p}_{\mathbf{2}}, \beta_{\mathbf{2}}, 2\beta_{\mathbf{2}}))h(s, j, 2\beta_{\mathbf{2}})$

On fait exactement les mêmes transformations pour les autres J en utilisant les lemmes appropriées et enfin on trouve nos résultats

Examples

Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM avec $\theta = 0.5$ et les pdfs sont :
$f_{X_1}(x) = 0.6h(x, 1, 0.1) + 0.4h(x, 2, 0.1)$ et
$f_{X_2}(x) = 0.3h(x, 1, 0.15) + 0.5h(x, 2, 0.15) + 0.2h(x, 3, 0.15)$
1. Calculer les esperances, les variances X_1 *et* X_2.
2. Calculer la $TVaR_{0.95}$ et l'allocation pour chaque contrat

<u>Solution</u> :
Tout d'abord nous allons utiliser le lemme 2.4 pour écrire f_{X_1} comme un mélange d'erlang (avec β_2) .

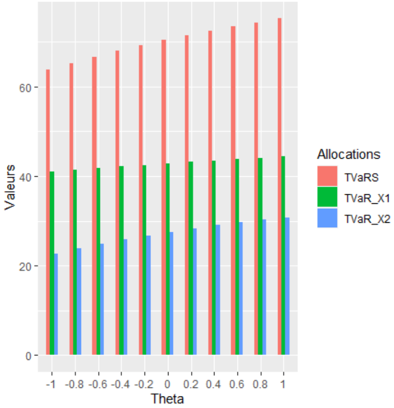
1. On sait que : $E[X_i] = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lp_{i,l}}{\beta_i}$
et $Var[X_i] = \frac{1}{\beta_i^2} \left[\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_{i,l} - (\sum_{l=1}^{\infty} lp_{i,l})^2\right]$

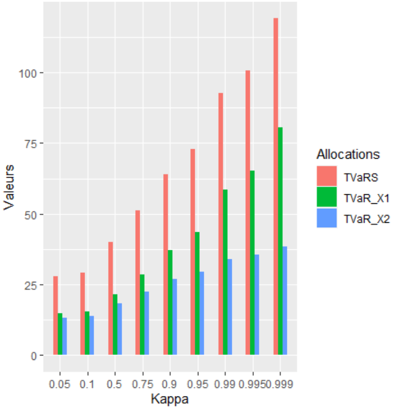
2. On a eu précedemment que :
$TVaR_\kappa(S_2) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \frac{j}{2\beta 2} \overline{H}(VaR_\kappa(S_2), j+1, 2\beta_2)$
et $TVaR_\kappa(X_i, S_2) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} q_{i,k}^{(2)} \overline{H}(VaR_\kappa(S_2), k, 2\beta_2$

Allocation du capital : Méthode basée sur la TVaR

Exemple numérique

$E[X_1]$	$E[X_2]$	$V[X_1]$	$V[X_2]$
14	12.67	164	106.22





Plan

Proposition

Soit $S = X_1 + X_2$ alors l'allocation basée sur la méthode de covariance est donnée par :

$$C_\kappa(X_i, S_2) = E[X_i] + \frac{Cov(X_i, S_2)}{V(S_2)}(TVaR_\kappa(S_2) - E[S_2])$$

Preuve

Remarque

Selon la règle de l'allocation proportionnel on a :

$$K_i = v_i K = \frac{K}{E[Sh(S)]} E[X_i h(S)]$$

Avec avec h étant une fonction non négative et non décroissante, K_i correspond à l'allocation et K la mesure choisie (VaR, TVaR)

On a : $S - TVaR_k(S) = \sum_{i=1}^{2}(X_i - C_i)$
On cherchera à minimiser le second terme de l'égalité sous le critère de l'optimisation quadratique.
Ce qui revient à
$\min_{C_1, C_2} \mathrm{E}[\zeta_i \frac{(X_i - C_i)^2}{v_i}]$ $\qquad$ *avec* $\sum_{i=1}^{2} C_i = TVaR(S)$
avec v_i qui est un nombre réel non négatif qui est une mesure de l'exposition ou du volume d'affaires de la ième unité et ζ_i est une fonction qui mesure les écarts de les pertes X_i de leurs niveaux respectifs de capital alloué.

Allocation du capital : Méthode basée sur la covariance

Preuve formule générale Cas bivariée

La solution de l'équation précédente lorsque $E[\zeta_i] = 1$ est donnée par un théorème dans Dhaene, J. ; Tsanakas, A. ; Valdez, E.A. ; Vanduffel, S. Optimal Capital Allocation Principles. J. Risk Insur. 2012, 79, 1–28. :

$$C_i = E[\zeta_i X_i] + v_i(TVaR(S_2) - \sum_{i=1}^{2} E[\zeta_i X_i])$$

Dans notre cas nous allons prendre $\zeta_i = 1$ donc on trouve :

$$C_i = E[X_i] + v_i(TVaR(S_2) - E[S_2])$$

Pour trouver le v_i nous allons considérer la remarque précédente.

Posons h(S) = S - E[S]

On a : $E[X_i h(S)] = E[X_i(S - E[S])] = E[X_i S] - E[X_i]E[S] = Cov(X_i, S)$

On a aussi : $E[Sh(S)] = E[S(S - E[S])] = E[S^2] - E[S]E[S] = Var(S)$

Par suite : $v_i = \frac{E[X_i h(S)]}{E[Sh(S)]} = \frac{Cov(X_i,S)}{Var(S}$

Allocation du capital : Méthode basée sur la covariance

Cas de la bivariée avec FGM et avec des marginales MixErl

Proposition

Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM et $X_i \sim MixErl(\underline{p}_i, \beta_i)$ avec $\beta_1 \leq \beta_2$ et $S_2 = X_1 + X_2$
, l'allocation par la covariance est donnée par :

$$C_\kappa(X_i, S_2) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} \frac{k}{\beta_2}$$

Avec $c_{i,k} = w(k, \underline{p}_i, \beta_i, \beta_2) + 2\rho_{i,k} p_k^{(2)} [\frac{\overline{H}(VaR_\kappa, k+1, 2\beta_2)}{1-\kappa} - 1]$

et

$$\rho_{i,k} = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)w(l, \underline{p}_i, \beta_i, \beta_2) - (\sum_{l=1}^{\infty} lw(l, \underline{p}_i, \beta_i, \beta_2))^2}{\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_l^{(2)} - (\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)})^2} + \frac{\theta \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} lm \left(\frac{\pi(l, \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, \beta_2))}{2} - w(l, \underline{p}_1, \beta_1, \beta_2) \right) \left(\frac{\pi(m, \underline{p}_2)}{2} - p_{2,m} \right)}{\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_l^{(2)} - (\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)})^2}$$

Allocation du capital : Méthode basée sur la covariance

Preuve

$$C_\kappa(X_i, S_2) = E[X_i] + \frac{Cov(X_i, S_2)}{V(S_2)}(TVaR_\kappa(S_2) - E[S_2])$$

$$E[X_i] = \sum_{k=1}^{\infty} w(k, \underline{p}_i, \beta_i, \beta_2)\frac{k}{\beta_2}$$

$$E[S_2] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(2)} \frac{k}{2\beta_2}$$

$$TVaR_\kappa(S_2) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(2)} \frac{j}{2\beta_2}\overline{H}(VaR_\kappa(S_2), j+1, 2\beta_2)$$

Donc en remplaçant (2), (3) et (4) dans (1) on trouve :
$C_\kappa(X_i, S_2) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} \frac{k}{\beta_2}$
Donc $c_{i,k} = w(k, \underline{p}_i, \beta_i, \beta_2) + \frac{Cov(X_i, S_2)}{2V(S_2)} p_k^{(2)} [\frac{\overline{H}(VaR_\kappa, k+1, 2\beta_2)}{1-\kappa} - 1]$
Ainsi :
$2\rho_{i,k} = \frac{Cov(X_i, S_2)}{2V(S_2)}$

Allocation du capital : Méthode basée sur la covariance

Preuve

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1, S_2) &= Cov(X_1, X_1 + X_2) \\
&= Var(X_1) + Cov(X_1, X_2) \\
Cov(X_1, X_2) &= \frac{\theta}{\beta_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ij\left(\frac{\pi(i, \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, \beta_2))}{2} - w(i, \underline{p}_1, \beta_1, \beta_2)\right)\left(\frac{\pi(j, \underline{p}_2)}{2} - p_{2,j}\right) \\
V(X_1) &= E[X_1^2] - (E[X_1])^2 \\
&= \frac{1}{\beta_2^2}\left[\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) w(k, \underline{p}_1, \beta_1, \beta_2) - \left(\sum_{l=1}^{\infty} l w(k, \underline{p}_1, \beta_1, \beta_2)\right)^2\right] \\
V(S_2) &= \frac{1}{4\beta_2^2}\left[\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) p_l^{(2)} - \left(\sum_{l=1}^{\infty} l p_l^{(2)}\right)^2\right] \\
\rho_{i,k} &= \frac{Cov(X_i, S_2)}{4V(S_2)} \\
&= \frac{V(X_1)}{4V(S_2)} + \frac{Cov(X_1, X_2)}{4V(S_2)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\frac{1}{\beta_2^2}\left[\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)w(k,\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2) - (\sum_{l=1}^{\infty} lw(k,\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2))^2\right]}{4\frac{1}{4\beta_2^2}\left[\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_l^{(2)} - (\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)})^2\right]}$$

$$+ \frac{\frac{\theta}{\beta_2^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} lm(\frac{\pi(l,\underline{w}(\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2))}{2} - w(l,\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2))(\frac{\pi(m,\underline{p}_2)}{2} - p_{2,m})}{4\frac{1}{4\beta_2^2}\left[\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_l^{(2)} - (\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)})^2\right]}$$

$$\rho_{i,k} = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)w(l,\underline{p}_i,\beta_i,\beta_2) - (\sum_{l=1}^{\infty} lw(l,\underline{p}_i,\beta_i,\beta_2))^2}{\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_l^{(2)} - (\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)})^2}$$

$$+ \frac{\theta\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} lm\left(\frac{\pi(l,\underline{w}(\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2))}{2} - w(l,\underline{p}_1,\beta_1,\beta_2)\right)\left(\frac{\pi(m,\underline{p}_2)}{2} - p_{2,m}\right)}{\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_l^{(2)} - (\sum_{l=1}^{\infty} lp_l^{(2)})^2}$$

Allocation du capital : Méthode basée sur la covariance

Exemple numérique

Examples

Soit (X_1, X_2) une distribution bivariée définie avec la copule FGM avec $\theta = 0.5$ et les pdfs sont :
$f_{X_1}(x) = 0.6h(x, 1, 0.1) + 0.4h(x, 2, 0.1)$ et
$f_{X_2}(x) = 0.3h(x, 1, 0.15) + 0.5h(x, 2, 0.15) + 0.2h(x, 3, 0.15)$
1. Calculer les esperances, les variances et la covariance entre X_1 *et* X_2.
2. Calculer la $TVaR_{0.95}$ et l'allocation pour chaque contrat avec la méthode basée sur la covariance

<u>Solution</u> :
Tout d'abord nous allons utiliser le lemme 2.4 pour écrire f_{X_1} comme un mélange d'erlang (avec β_2) .
1. On sait que : $E[X_i] = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l p_{i,l}}{\beta_i}$
et $Var[X_i] = \frac{1}{\beta_i^2} \left[\sum_{l=1}^{\infty} l(l+1)p_{i,l} - (\sum_{l=1}^{\infty} l p_{i,l})^2\right]$

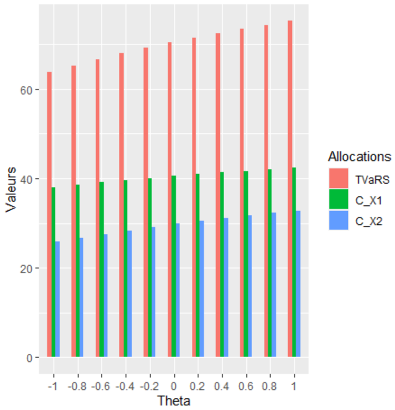
$$Cov(X_1, X_2) = \frac{\theta}{\beta_2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ij\left(\frac{\pi(i, \underline{w}(\underline{p}_1, \beta_1, \beta_2))}{2} - w(i, \underline{p}_1, \beta_1, \beta_2)\right)\left(\frac{\pi(j, \underline{p}_2)}{2} - p_{2,j}\right)$$

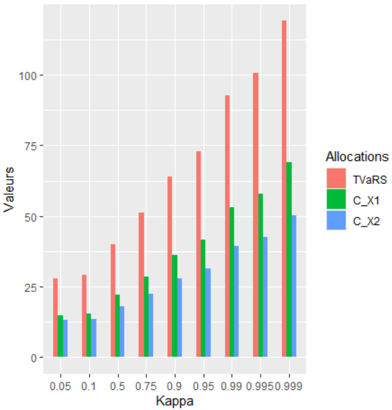
2. On utilisera les formules vu précédemment pour calculer la TVaR et les allocations par la méthode basée sur la covariance

Allocation du capital : Méthode basée sur la covariance

Exemple numérique

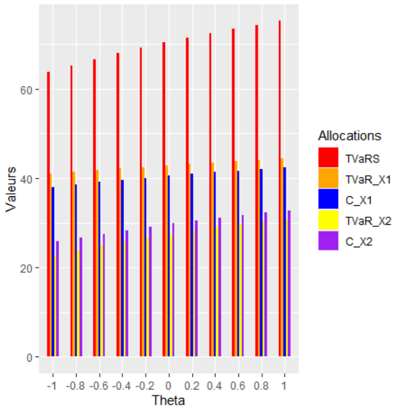
$E[X_1]$	$E[X_2]$	$V[X_1]$	$V[X_2]$	$Cov(X_1, X_2)$
14	12.67	164	106.22	17.98

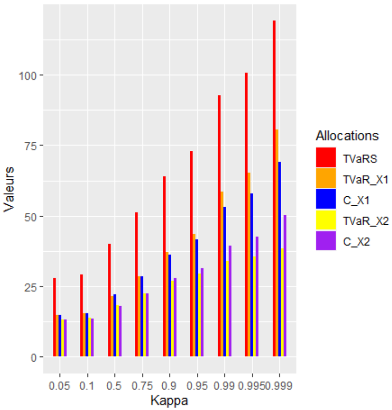




Allocation du capital

Comparaison entre les 2 méthodes





Plan

Conclusion

A la lumière de tout ce qui précède, nous avons mentionnés quelques avantages qu'à la loi mélange d'Erlang et quelques propriétés de cette loi. Cette loi n'est pas complexe dans son utilisation néanmoins il requiert une bonne concentration dans les démonstrations et applications numériques (sur R ou à la main) à cause des nombreuses notations auxquelles il faut faire très attention.

De plus, nous avons pu démontrer et appliquer sur un exemple numérique 2 méthodes différentes d'allocation de capital qui sont la méthode basée sur la TVaR et celle basée sur la covariance avec une distribution bivariée erlang avec la copule FGM qui est aussi simple à utiliser.

Critique de l'article et ouverture : Un travail remarquable a été fait dans cet article néanmoins il nous a paru une insuffisance. En effet, ce modèle ne permet pas de modéliser n'importe quelle distribution bivariée de variables aléatoires corrélées puisque la copule FGM accepte seulement les variables qui ne sont pas fortement corrélées.

Ainsi on propose d'utiliser un autre copule qui peut modéliser les fortes corrélation entre 2 variables aléatoires malgré que cela risque de donner de calculs difficiles.