Proposition 9

les B sont iid dans un même X.

$S = X_1 + \dots + X_n$

où chaque X suit une Poisson composée avec choc communs. $X_1 = B_{1,1} + B_{2,1} + \dots + B_{M_1,1}$

les M_i sont avec choc commun (dépendance sur la fréquence)
→ donc les X_i sont dépendants.

$$M_S(t) = M_{X_1,\dots X_n}(t,\dots,t)$$

somme finie

chacun des X est une somme composée.

$$= E[e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}]$$

$$= E_{\underrightarrow{M}}\left[E\left[e^{t(B_1+\dots+B_{M_1})} e^{t(B_1+\dots+B_{M_2})} \dots \mid M_1, M_2, \dots\right]\right]$$

iid des B

$$= E_{\underrightarrow{M}}\left[E\left[(e^{tB_1})^{M_1}(e^{tB_2})^{M_2}\dots(e^{tB_n})^{M_n} \mid M_1,\dots M_n\right]\right]$$

indép. conditionnelle

$$= E_{\underrightarrow{M}}\left[(E[e^{tB_1}])^{M_1}(E[e^{tB_2}])^{M_2}\dots(E[e^{tB_n}])^{M_n}\right]$$

$$= P_{M_1,\dots,M_n}(M_{B_1}(t), \dots, M_{B_n}(t))$$

La fgp conjointe d'une Poisson choc.

$P(t) = e^{(\lambda_1-\alpha_0)(t_1-1)} e^{(\lambda_2-\alpha_0)(t_2-1)} e^{\alpha_0(t_1t_2-1)}$ (Teicher)

$$= e^{\alpha_0(\prod_i M_{B_i}(t)-1)} \prod_i \left(e^{(\lambda_i-\alpha_0)(M_{B_i}(t)-1)}\right)$$

$$= e^{\alpha_0(\prod_i M_{B_i}(t)-1) + \sum_i (\lambda_i-\alpha_0)(M_{B_i}(t)-1)}$$

$$= e^{\alpha_0(\prod_i M_{B_i}(t)) + \sum_i(\lambda_i-\alpha_0)(M_{B_i}(t)) - \alpha_0 - \sum_i \lambda_i + n\alpha_0}$$

$$= e^{\lambda_S\left(\frac{\alpha_0}{\lambda_S}(\prod_i M_{B_i}(t)) + \sum_i \frac{(\lambda_i-\alpha_0)}{\lambda_S} M_{B_i}(t)\right) - \lambda_S}$$

$$= e^{\lambda_S\left(\frac{\alpha_0}{\lambda_S}(\prod_i M_{B_i}(t)) + \sum_i \frac{(\lambda_i-\alpha_0)}{\lambda_S} M_{B_i}(t) - 1\right)}$$

donc $S \sim \text{Poisson Comp.}(\lambda_S; D)$

avec $M_D(t) = \frac{\alpha_0}{\lambda_S}(\prod_i M_{B_i}(t)) + \sum_i \frac{(\lambda_i-\alpha_0)}{\lambda_S} M_{B_i}(t)$

↓ indép.

$$= \frac{\alpha_0}{\lambda_S} M_{B_1+\dots+B_n}(t) + \sum_i \frac{(\lambda_i-\alpha_0)}{\lambda_S} M_{B_i}(t)$$

Laplace inverse possède la propri. de linéarité

$$F_D(t) = \frac{\alpha_0}{\lambda_S} F_{B_1+\dots+B_n}(t) + \sum_i \frac{(\lambda_i-\alpha_0)}{\lambda_S} F_{B_i}(t)$$

Puisque $S \sim$ Poiss Composée, $N \sim$ Poisson(λ_S)
D tel que défini p préc

(on conditionne sur N)

$$F_S(x) = P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k) P(D_1 + \dots + D_k \le x).$$

$$TVaR_u(S) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k)\, TVaR_u(D_1 + \dots + D_n).$$

Pour exprimer $TVaR_k(X;S) = \frac{E[X \cdot 1_{\{S \geq VaR_k(S)\}}]}{(1-k)}$, il faut trouver la loi conjointe d'un X_i avec tout le reste $\left(S_{-i} = \sum_{j \neq i} X_j\right)$

fgm de S_{-i}

$$M_{S_{-i}}(t) = P_{\underset{\neq i}{M_1, \dots M_n}}(\underbrace{M_{B_1}(t) \dots M_{B_n}(t)}_{\neq i})$$

Poisson chocs.

$$= e^{\alpha_0 (\prod_{j \neq i} M_{B_j}(t) - 1) + \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \alpha_0)(M_{B_j}(t) - 1)}.$$

$$= \underbrace{e^{\alpha_0 (M_{C_{-i}}(t) - 1)}}_{\substack{M_{G}(t) \\ \text{fgm Poiss Comp.}}} \underbrace{e^{\lambda_{-i} (M_{D_{-i}}(t) - 1)}}_{\substack{M_{H}(t) \\ \text{fgm Poisson composée.}}}$$

on définit $\prod_{j \neq i} M_{B_j}(t) = M_{C_{-i}}(t)$

donc $C_{-i} = \sum_{j \neq i} B_j$

$\lambda_{-i} = \sum_{j \neq i} (\lambda_j - \alpha_0)$

on définit $M_{D_{-i}}(t) = \sum_{j \neq i} \frac{(\lambda_j - \alpha_0)}{\lambda_{-i}} M_{B_j}(t)$

on a donc la somme de deux Poisson composées de paramètres distincts.

$$S_{-i} = G_{-i} + H_{-i}$$

où $G_{-i} = C_{-i} + \dots + C_{-i; J_0}$

$H_{-i} = D_{-i} + \dots + D_{-i; J_{-i}}$

on définit $M_i = J_i + J_0$ → nombre de sinistres pour X_i

$N_{-i} = J_{-i} + J_0$

$J_i \sim$ Poisson(λ_i).

on définit $J_{-i} \sim$ Poisson(λ_{-i}) (somme des chocs individuels sauf celui de i).

$J_0 \sim$ Poisson(α_0). (choc collectif).

$$f_{M_i; N_{-i}}(k_i; n_{-i}) = P(M_i = m; N_{-i} = n).$$

$$= \sum_{j=0}^{\min(m;n)} P(M_i = m; N_{-i} = n \mid J_0 = j) P(J_0 = j)$$

valeur maximale que peut prendre J_0 car les chocs indiv. ne peuvent être négatifs.

on conditionne sur J_0

je fais en discret pour bien visualiser

$$= \sum_{j=0}^{\min(m;n)} P(J_i = m-j; J_{-i} = n-j) P(J_0 = j)$$

indépendance J_i et J_{-i}

$$= \sum_{j=0}^{\min(m;n)} P(J_i = m-j) P(J_{-i} = n-j) P(J_0 = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\min(m;n)} f_{J_i}(m-j) f_{J_{-i}}(n-j) f_{J_0}(j)$$

ce sont toutes des Poisson.

$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E[X_i \cdot 1\{S > VaR(S)\}]}{(1-\kappa)}$ on conditionne sur M et N

on développe l'espérance extérieure $= E_{M,N}[E[X_i \cdot 1_{\{S > VaR(S)\}}] | M, N] \left(\frac{1}{1-\kappa}\right)$

$= \frac{\sum_m \sum_n f_{M,N}(m,n)}{(1-\kappa)} E\left[\sum_{l=1}^{m} B_l \cdot 1_{\{\sum_1^m B_l + \sum_1^{n-j} D_{-i,l} + \sum_1^j C_{-i,l} > VaR_\kappa(S)\}}\right]$ on a décomposé S

sin indiv. autres indiv

$= \frac{\sum_m \sum_n \sum_j^{\min(m,n)} f_{J_i}(m-j) f_{J_{-i}}(n-j) f_{J_0}(j)}{(1-\kappa)} E\left[\sum_{l=1}^{m} B_l \cdot 1_{\{\sum_1^m B_l + \sum_1^{n-j} D_{-i,l} + \sum_1^j C_{-i,l} > VaR_\kappa(S)\}}\right]$

ce qui correspond à la box I.

On suppose que $B_i \sim$ Erlang Gén$(\zeta^{(i)}, \beta)$

on repart de (32).

$F_D(x) = \frac{\lambda_1 - \alpha_0}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \dots + \frac{\lambda_n - \alpha_0}{\lambda_S} F_{B_n}(x) + \frac{\alpha_0}{\lambda_S} F_{B_1 + \dots + B_n}(x)$ puisqu'une somme de mélang d'Erlang est encore un mélange d'Erlang.

$= \underbrace{\frac{\lambda_1 - \alpha_0}{\lambda_S}\left(\zeta_0^{(1)} + \sum_l \zeta_l^{(1)} H(x; l, \beta)\right)}_{\text{répartition d'une erlang}} + \dots + \frac{\lambda_n - \alpha_0}{\lambda_S}\left(\zeta_0^{(n)} + \sum_l \zeta_l^{(n)} H(x; l, \beta)\right) + \frac{\alpha_0}{\lambda_S}\left(V_0 + \sum_l V_l H(x; l, \beta)\right)$ ici ces poids sont V_0.

$= \frac{\alpha_0}{\lambda_S} V_0 + \sum_k \left(\frac{\lambda_k - \alpha_0}{\lambda_S} \zeta_0^{(k)}\right) + \sum_l \left(\underbrace{\frac{\alpha_0}{\lambda_S} V_l + \sum_k \frac{\lambda_k - \alpha_0}{\lambda_S} \zeta_l^{(k)}}\right) H(x; l, \beta)$ on combine ces deux sommes.

donc $D \sim$ Mélange d'Erlang avec ces poids

On rappelle $S_{-i} = G_{-i} + H_{-i}$ $\quad G_{-i} = C_{-i} + \dots + C_{-i, j_0}$, $\quad H_{-i} = D_{-i} + \dots + D_{-i, j_{-i}}$ $\quad C_{-i} = \sum_{j \neq i} B_j$ → donc suit un mélange d'Erlang aussi. On a les poids $V_k^{(-i)}$

$M_{D_{-i}}(t) = \sum_{j \neq i} \left(\frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_i}\right) M_{B_j}(t)$ Laplace inverse possède la propriété de linéarité $\quad M_{D_{-i}}(t) = \sum_{j \neq i}\left(\frac{\lambda_{-i} - \alpha_0}{\lambda_{-i}}\right) M_{B_j}(t)$

$F_{D_{-i}}(t) = \sum_{j \neq i}\left(\frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_{-i}}\right) F_{B_j}(t) = \sum_{j \neq i}\left(\frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_i}\right)\left(\zeta_0^{(j)} + \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_l^{(j)} H(x; l, \beta)\right)$. aussi un mélange d'Erlang poids: $\sum_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_{-i}} \varepsilon_{(l)}^{(j)} = \tau^{-i}$

Box 2:

$E\left[\left(\sum_{l=1}^m B_j\right) 1_{\{\sum_1^m B_l + \sum_1^{n-j} D_{-j,l} + \sum_1^j C_{-i,l} > VaR_\kappa(S)\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k} (\zeta^{(i)})^{*m} \sum_{l} \sum_{r=0}^{k-l} \left((\tau^{(-i)})^{*n-j}\right)_{(k-l-r)} (V^{(-i)})^{*j}_{r} \frac{l}{\beta} \bar{H}(VaR(S); k+1, \beta)\right)$

on prend tous les k possibles (somme des j). on distribue ce j. on distribue ce reste entre les deux.

somme de mélange d'Erlang. ce qu'on a j'ai m, B; $n-j, D$ et j, C. le reste

Prob conj: $(\zeta^{(i)})^{*m}$ et $(\tau^{(-i)})^{*n-j}$ et $(V^{(-i)})^{*j}$

espérance tronquée d'une Erlang: on veut toutes les poss.

d'allocation

$\sum\sum\sum \varepsilon_{j \dots j} \cdot \frac{j_1}{\beta} \bar{H}(VaR_\kappa(S); \Sigma j + 1; \beta)$.

pour toutes les poss de j.

(proposition 8)

donc on obtient la TVaR de la box II si on remplace cette expression dans la box I