

Test d'ajustement d'une copule

Lorsque les copules rencontrent les données

Présenté par

Achille Rostan Fossouo Tadjuidje,

Olivier Côté et

Benjamin Côté

ACT-7102

18 avril 2022



Table des matières

- 1 Contexte
- 2 Tests statistiques
- 3 Comparaison des tests
- 4 Coefficients de dépendance
- 5 Portée de l'article

Contexte

- 1 Contexte
- 2 Tests statistiques
- 3 Comparaison des tests
- 4 Coefficients de dépendance
- 5 Portée de l'article

Utilisation des copules

Bien que les copules soient dans la littérature scientifique depuis Sklar (1959), leurs applications pratiques ne sont étendues que depuis le début des années 2000.

Avec l'avènement du *Big Data*, les copules sont de plus en plus utilisées puisqu'il est désormais possible d'avoir assez de données pour modéliser de la dépendance entre des phénomènes. Ces applications se font dans une variété de disciplines scientifiques

{	Économie	Médecine	Recherche climatique	}
	Hydrologie	Géophysique	Ingénierie	
	Biologie	Aéronautique	... et actuariat !	

Tests statistiques sur les copules

Qui dit modélisation, dit tester la validité du modèle. Il faut donc développer des tests statistiques pour tester si les copules employées dans la pratique sont adéquates.

Tests statistiques sur les copules

On définit l'hypothèse :

$$H_0 : C \in C_0 \quad C_0 = C_\theta : \theta \in \mathcal{O}$$

Il y a donc deux types de tests statistiques pouvant être effectués sur la copule.

- Estimer θ et valider si c'est adéquat.
 - Très étudié dans la littérature!
- Remettre en question H_0 et tester l'adéquation du choix de copule.
 - Moins étudié dans la littérature.

Ajustement

Les tests d'ajustements dans la littérature sont divisés en trois catégories par Genest et collab. (2009)

- Tests pouvant n'être appliqués que pour une famille de copules spécifique.
- Tests nécessitant une manipulation abusive des données.
- Tests universels (« blanket tests »).

Tests statistiques

1 Contexte

2 Tests statistiques

- Méthodologie
- Tests basés sur la copule empirique

3 Comparaison des tests

4 Coefficients de dépendance

5 Portée de l'article

Méthodologie

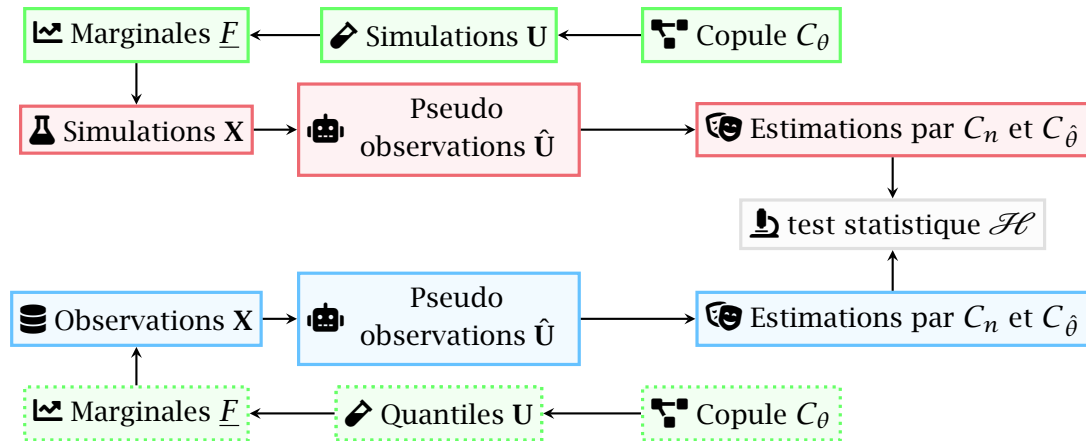


Figure – Procédure d'estimation d'une copule à partir de données

Introduction aux hypothèses I

Pour les tests, on suppose que les données X ont été générées par

- une copule C
- et des marginales $\underline{F} = (F_1, \dots, F_d)$.

Notre objectif est de tester s'il est plausible que nos données aient été générée par une famille de copule \mathcal{C}_0 prédéfinie.

Introduction aux hypothèses II

Pour tester s'il est plausible qu'une famille de copule \mathcal{C}_0 ait généré X , on procède de manière formelle avec un test d'hypothèse.

Premièrement, on définit \mathcal{C}_0 (Genest et collab., 2009) :

$$\mathcal{C}_0 = \{C_\theta : \theta \in \mathcal{O}\}$$

où \mathcal{O} est un ouvert sur \mathbb{R}^p , p étant le nombre de paramètres à estimer.

L'hypothèse nulle de nos tests s'énonce comme suit :

$$H_0 : C \in \mathcal{C}_0$$

Introduction aux hypothèses III

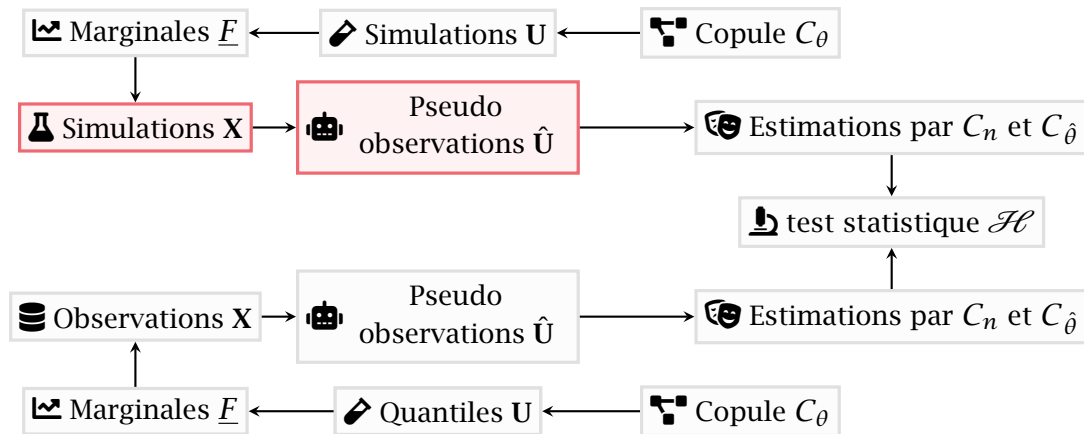


Figure – Procédure d'estimation d'une copule à partir de données

Introduction aux hypothèses IV



Puisque nous n'avons pas directement de réalisations u de la copule génératrice C , comment estimer nos u à partir des observations X **sachant que les marges sont inconnues** ?

Il y a deux approches possibles :

- 1 Faire des hypothèses paramétriques **additionnelles** sur les distributions des marges.
- 2 Estimer les marges de manière non paramétrique.

Approche paramétrique pour les marges

Comme mentionné, aborder une approche paramétrique pour les marges signifie faire des hypothèses additionnelles :

$$H'_0 : F_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, F_d \in \mathcal{F}_d$$

Par contre, si on fait l'hypothèse H'_0 en plus de l'hypothèse H_0 , nous tenterons maintenant de rejeter $H_0 \cap H'_0$, qui est plus précis que seulement H_0 . Les marges sont alors des « paramètres de nuisance infinis ». (Genest et collab., 2009)



Si je rejette l'hypothèse $H_0 \cap H'_0$, est-ce que c'est vraiment parce que la copule est inadaptee pour les données ?

Nous n'opteront pas pour cette approche aujourd'hui.

Approche non paramétriques pour les marges I

Si on ne veut pas assumer H'_0 , on peut estimer les marges de manière **non paramétrique** :

$$\hat{F}_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_{ij} \leq x\}}$$

et maximiser la **pseudo** log vraisemblance :

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln \left[c_{\theta}(\hat{F}_1(X_{i1}), \dots, \hat{F}_d(X_{id})) \right]$$

Approche non paramétriques pour les marges II

Ça nous mène naturellement vers le concept de **pseudo observations** (Genest et collab., 2009) :

$$\hat{u}_{ij} = \frac{R_{ij}}{n + 1}$$

où R_{ij} est le rang de X_{ij} parmi \underline{X}_j .

On peut obtenir ces informations directement en insérant nos X_{ij} dans la fonction `pobs()` du paquetage `VineCopula`.



Comment est-ce que les rangs estimés \hat{u} se compare avec les vrais rangs u pour un exemple de simulation donné ?

Exemple des rangs

Exemple 1 : Copule normale

Soit X_1 et X_2 tel que :

- $X_1 \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}, \beta = 0.1)$
 - ▶ $P(N = k) = \zeta_{k+1}$, où $N \sim \text{BinNeg}(r = 4, \mu = 5)$
- $X_2 \sim \text{ParetoGen}(\alpha = 3, \tau = 5, \theta = 50)^a$
- $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$
 - ▶ $C(u_1, u_2)$ est la copule normale avec $\rho = 0.7$.

Comparez les rangs u aux pseudos observations \hat{u} baties à partir des réalisations des X_i .

a. Paramétrisation de la documentation du paquetage actuar

Exemple 1 : code R

```
## Simulations d'une copule Normale
library(Copula)
cop1 <- normalCopula(param = 0.7, dim = 2)
u_simulated <- rCopula(100, cop1)

## sim x1
VaR_MixErl <- function(kap){optimize(function(x){
log(abs(kap - p_dist_oli(x)))},
      interval = c(0, 350))$minimum}
sim_x1 <- sapply(u_simulated[, 1], function(u) VaR_MixErl(u))
sim_x2 <- qgenpareto(u_simulated[, 2], shape1 = 3, shape2 = 5,
      scale = 50)
sims <- data.frame(u_simulated, u1_hat = pobs(sim_x1),
      u2_hat = pobs(sim_x2))
```

Exemple 1 : Graphique

À remarquer :

- $u \neq \hat{u}$
- $\hat{u}_i \leq u_i$ lorsque $u_i > 0.5 \ \forall i \in \{1, 2\}$

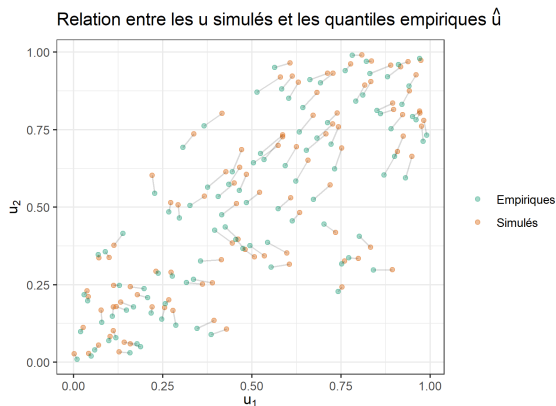


Figure – Comparaison entre les rangs

Considérations

Les pseudos observations \hat{u} peuvent être interprétés comme des échantillons de la copule sous-jacente C_θ . Par contre, les pseudos observations \hat{u} ne sont pas indépendantes et leurs composantes sont seulement *approximativement* uniforme $[0, 1]$.



Les tests qui ne prendront pas ces spécificités en compte manqueront de puissance. (Genest et collab., 2009)

Idée I



L'idée sera de trouver la meilleure copule sous H_0 et de la comparer à nos données.

On denotera maintenant nos pseudos observations U_1, \dots, U_n puisque nous n'aurons jamais accès aux vrais rangs.

On a

$$H_0 : C \in \mathcal{C}_0$$

et $C_n(\underline{u})$ la copule empirique.

Idée II

Comme discuté dans Genest et collab. (2009), plusieurs auteurs énoncent diverses conditions pour montrer que C_n est un bon estimateur de la vraie copule C , que H_0 soit vrai ou pas.

Ensuite, C_{θ_n} est la copule de la famille \mathcal{C}_0 qui représente le mieux nos données, où θ_n est l'estimateur du paramètre de notre copule C_{θ_n} qui permet de le mieux se moduler aux données.

Puisque C_n est le meilleur représentant des données et C_{θ_n} est le meilleur représentant des données sous H_0 , on test naturel serait d'évaluer la distance entre C_n et C_{θ_n} .

Statistiques

On définit une distance entre nos distributions

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n})$$

On a maintenant les statistiques suivantes :

$$S_n = \int_{[0,1]^d} \mathbb{C}_n(\underline{u})^2 dC_n(\underline{u})$$

et

$$T_n = \sup_{\underline{u} \in [0,1]^d} |\mathbb{C}_n(\underline{u})|$$

Pour obtenir un seuil à partir de ces statistiques, il faut procéder par simulations.
L'implémentation informatique sera abordée plus tard.

Idée



Ici, l'idée est de simplifier le test pour que l'implémentation informatique se fasse mieux.

Ce test est basé que la transformation de Kendall.

Définitions importantes I

On introduit les quantités (V_1, \dots, V_n)

$$V_i = C_n(U_i)$$

On a ainsi la fonction de répartition empirique des V

$$K_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{V_i \leq v\}}, \quad v \in [0, 1]$$



V_i correspond à la probabilité qu'une observation soit plus petite ou égale (pour chacune de ses d dimensions) à la pseudo observation U_i . On vient donc de ramener la dimension de la distance à calculer de d vers 1.

Définitions importantes II

Pour le test d'hypothèse, on a la nouvelle hypothèse nulle H_0'' .

$$H_0'' : K \in \mathcal{K}_0 = \{K_\theta : \theta \in \mathcal{O}\}$$



On remarque qu'en diminuant la dimension du problème à un problème à 1 dimension au lieu de d dimension, on est moins spécifique. On aura alors que $H_0 \subset H_0''$. Ainsi, lors des tests d'hypothèses, le rejet H_0'' implique le rejet de H_0 , mais le non-rejet de H_0'' n'implique pas nécessairement le non-rejet de H_0 .

Statistiques

On définit une distance entre nos distributions

$$\mathbb{K}_n = \sqrt{n}(K_n - K_{\theta_n})$$

On a maintenant les statistiques suivantes :

$$S_n^{(K)} = \int_{[0,1]^1} \mathbb{K}_n(v)^2 dK_{\theta_n}(v)$$

et

$$T_n^{(K)} = \sup_{v \in [0,1]^1} |\mathbb{K}_n(v)|$$

Pour obtenir un seuil à partir de ces statistiques, il faut procéder par simulations.
L'implémentation informatique sera abordée plus tard.

Tests basés sur la transformation de Rosenblatt



L'idée est de retrouver une distribution du khi-carré pour pouvoir appliquer des tests statistiques usuels.

Ce test est basé que la transformation de Rosenblatt.

Transformation de Rosenblatt

Transformation de Rosenblatt

On note \mathfrak{R} la transformation de Rosenblatt, effectuée pour chaque observation.

$$\mathfrak{R}_{\theta_n}(u_i) = C_n(u_i | u_1 \dots u_{i-1})$$

On remarque la propriété intéressante de Rosenblatt :

$$\text{si } U \sim C \text{ alors } \mathfrak{R}_{\theta_n}(U) \sim C_{\perp}$$

Transformation de Rosenblatt

Puisqu'on a

$$C_{\perp}(u_1, \dots, u_n) = \mathfrak{R}_{\theta_n}(u_1) \times \dots \times \mathfrak{R}_{\theta_n}(u_n)$$

il est possible de conclure que $\mathfrak{R}_{\theta_n}(U)$ suit également une loi uniforme, par définition de la copule d'indépendance.

Ainsi, on peut prendre la transformation

$$\chi_i = \sum_{j=1}^m \left(\Phi^{-1}(\mathfrak{R}_{\theta_n}(u_{n,j})) \right)^2$$

Test d'Anderson-Darling

Il est donc possible de construire un test d'ajustement d'Anderson-Darling comme on le fait usuellement pour une loi du khi-carré.

$$A_n = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) (\ln(G(\chi_{[i]})) - \ln(G(\chi_{[n+1-i]})))$$

Toutefois, Genest et collab. (2009) critique cette approche à cause des présomptions qui sont faites sur la distribution empirique de la transformation de Rosenblatt.

Tests additionnels

Genest et collab. (2009) utilise cette incertitude à leur avantage et propose donc plutôt d'effectuer des tests statistiques de Cramér-von Mises pour tester à quel point Rosenblatt donne une transformation près de la copule d'indépendance.

tests $S_n^{(B)}$ et $S_n^{(C)}$

Comparaison des tests

- 1 Contexte
- 2 Tests statistiques
- 3 Comparaison des tests**
- 4 Coefficients de dépendance
- 5 Portée de l'article

Cas Pratique - Slide I

Nous nous attarderons uniquement sur les tests basés sur :

- la copule empirique : S_n et T_n ,
- la transformation de kendall : $S_n^{(K)}$ et $T_n^{(K)}$

Mise en situation

Considérons X_1 et X_2 tel que :

- $X_1 \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}, \beta = 0.1)$
 - ▶ $P(N = k) = \zeta_{k+1}$, où $N \sim \text{BinNeg}(r = 4, \mu = 5)$
- $X_2 \sim \text{ParetoGen}(\alpha = 3, \tau = 5, \theta = 50)$
- $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$
 - ▶ $C(u_1, u_2)$ peut être une copule normale, une copule de Frank, une copule de Gumbel ou une copule AMH avec $\alpha \in \{0.2, 0.5, 0.75\}$.

Cas Pratique - Slide II

La procédure suivante permet d'approximer la p-value pour les différents tests à l'aide d'un bootstrap

■ **Bootstrap paramétrique pour S_n et T_n :**

- 1 Calculer C_n avec la formule (fonction `C.n` dans R avec le package *copula*) :

$$C_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(U_{i1} \leq u_1, U_{i2} \leq u_2)} \quad \text{avec } u = (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$$

- 2 Trouver $\hat{\alpha}$ en maximisant la pseudo log-vraisemblance suivante (*fitCopula*) :

$$\ell(\alpha) = \sum_{i=1}^n \ln \left[c_{\alpha}(\hat{F}_1(X_{i1}), \hat{F}_2(X_{i2})) \right]$$

Cas Pratique - Slide III

3 Si l'expression analytique de C_α existe, alors on calcule S_n et T_n . Sinon (simulation de Monte Carlo) :

a On génère un échantillon U_1^*, \dots, U_m^* de taille $m \geq n$ issu de la distribution de $C_{\hat{\alpha}}$ (*rCopula*)

b Et on approxime $C_{\hat{\alpha}}$ par :

$$C_{\hat{\alpha}}^*(u) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{(U_{i1}^* \leq u_1, U_{i2}^* \leq u_2)} \quad \text{avec } u = (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$$

c Approximer S_n et T_n par :

$$S_n = \sum_{i=1}^n (C_n(U_i^*) - C_{\hat{\alpha}}^*(U_i^*))^2 \quad \text{et} \quad T_n = \sup_{u \in \{U_1^*, \dots, U_m^*\}} |C_n(u) - C_{\hat{\alpha}}^*(u)|$$

Cas Pratique - Slide IV

- 4 Ensuite on répète les étapes précédentes N fois afin d'obtenir les valeurs $(S_n^{(1)}, T_n^{(1)}), \dots, (S_n^{(N)}, T_n^{(N)})$ et on calcule les p-values par les formules :

$$p - value_{S_n} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1_{S_n^{(k)} > S_n} \quad \text{et} \quad p - value_{T_n} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1_{T_n^{(k)} > T_n}$$

- **Bootstrap paramétrique pour $S_n^{(K)}$ et $T_n^{(K)}$:**

- 1 Calculer K_n avec la formule :

$$K_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(V_i \leq v)} \quad \text{avec } v \in [0, 1]$$

- 2 Si l'expression analytique de K_α est connue, calculer directement $S_n^{(K)}$ et $T_n^{(K)}$.
Sinon, à l'aide de l'échantillon U_1^*, \dots, U_m^* ,

Cas Pratique - Slide V

- a** calculer les quantités (V_1^*, \dots, V_m^*) par la formule :

$$V_i^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m 1_{U_j^* \leq U_i^*}$$

- b** Et approximer $K_{\hat{\alpha}}$ par :

$$K_{\hat{\alpha}}^*(v) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{(V_i^* \leq v)} \quad \text{avec } v \in [0, 1]$$

- c** Approximer ensuite $S_n^{(K)}$ et $T_n^{(K)}$ par les formules :

$$S_n^{(K)} = \frac{n}{m} \sum_{i=1}^m (K_n(V_i^*) - K_{\hat{\alpha}}^*(V_i^*))^2 \quad \text{et} \quad T_n^{(K)} = \sup_{v \in \{V_1^*, \dots, V_m^*\}} \sqrt{\frac{n}{m}} |K_n(v) - K_{\hat{\alpha}}^*(v)|$$

Cas Pratique - Slide VI

- 3 Ensuite on répète les étapes précédentes N fois afin d'obtenir les valeurs $(S_n^{(K),1}, T_n^{(K),1}), \dots, (S_n^{(K),N}, T_n^{(K),N})$ et on calcule les p-values par les formules :

$$p - value_{S_n^{(K)}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{S_n^{(K),j} > S_n^{(K)}} \quad \text{et} \quad p - value_{T_n^{(K)}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N 1_{T_n^{(K),j} > T_n^{(K)}}$$

Résultats 1

Table - p-values ($N = 150$ et $\alpha = 0.2$)

Copule sous H_0	Copule test	S_n	T_n	$S_n^{(K)}$	$T_n^{(K)}$
Frank	Frank	0.89	0.61	0.68	0.07
	Gumbel	0.96	0.97	0.69	0.58
	AMH	0.11	0.26	0.15	0.22
	Normal	0.03	0.14	0.31	0.63
Normal	Normal	0.79	0.54	0.98	0.69
	Frank	0.95	0.91	0.72	0.65
	Gumbel	0.77	0.25	0.11	0.12

Résultats 2

Table - p-values ($N = 150$ et $\alpha = 0.5$)

Copule sous H_0	Copule test	S_n	T_n	$S_n^{(K)}$	$T_n^{(K)}$
Frank	Frank	0.37	0.38	0.29	0.43
	Gumbel	0.61	0.49	0.98	0.00
	AMH	0.70	0.65	0.83	0.03
	Normal	0.54	0.53	0.74	0.49
Normal	Normal	0.36	0.69	0.79	0.25
	Frank	0.79	0.42	0.45	0.87
	Gumbel	0.37	0.60	0.61	0.67

Résultats 3

Table - p-values ($N = 150$ et $\alpha = 0.75$)

Copule sous H_0	Copule test	S_n	T_n	$S_n^{(K)}$	$T_n^{(K)}$
Frank	Frank	0.32	0.49	0.14	0.25
	Gumbel	0.33	0.19	0.85	0.01
	AMH	0.90	0.80	0.74	0.53
	Normal	0.70	0.77	0.67	0.55
Normal	Normal	0.57	0.38	0.29	0.32
	Frank	0.93	0.63	0.53	0.57
	Gumbel	0.07	0.09	0.60	0.66

Coefficients de dépendance

- 1 Contexte
- 2 Tests statistiques
- 3 Comparaison des tests
- 4 Coefficients de dépendance**
- 5 Portée de l'article

Coefficient de dépendance des queues I

On fait une parenthèse ici pour discuter des queues des distributions.

Dans tous nos tests d'hypothèses, nous n'avons pas spécifiquement pris le temps de nous attarder aux queues des distributions, qui peuvent parfois être l'élément le plus important de la structure de dépendance.

On s'intéressera à une paire de variables aléatoires (X, Y) .

Coefficient de dépendance des queues II

On définit les coefficients de dépendance des queues *inférieure* et *supérieure* :

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{t \rightarrow 1^-} P(F_X(x) > t | F_Y(Y) > t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t} \\ \lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} P(F_X(x) \leq t | F_Y(Y) \leq t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}\end{aligned}$$

Frahm et collab. (2005) présente diverses manières d'estimer ces quantités, de sorte qu'on peut s'assurer que la copule sélectionnée a des coefficients de dépendances qui sont similaires à ceux estimés à partir de nos données.

Portée de l'article

- 1 Contexte
- 2 Tests statistiques
- 3 Comparaison des tests
- 4 Coefficients de dépendance
- 5 Portée de l'article**

Portée de Genest et collab. (2009)

En se fiant sur Größer et Okhrin (2021), il n'y a eu que quelques avancées pour les tests d'ajustement après la publication de Genest et collab. (2009).

Portée de Genest et collab. (2009)

Pourtant, Genest et collab. (2009) est cité 1489 fois !

Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study

[C Genest](#), [B Rémillard](#), [D Beaudoin](#) - Insurance: Mathematics and ..., 2009 - Elsevier

Many proposals have been made recently for goodness-of-fit testing of copula models. After reviewing them briefly, the authors concentrate on “blanket tests”, ie, those whose implementation requires neither an arbitrary categorization of the data nor any strategic choice of smoothing parameter, weight function, kernel, window, etc. The authors present a critical review of these procedures and suggest new ones. They describe and interpret the results of a large Monte Carlo experiment designed to assess the effect of the sample size ...

☆ Enregistrer [Citer](#) Cité 1489 fois [Autres articles](#) [Les 10 versions](#)

Figure – Genest et collab. (2009) sur Google Scholar

Portée de Genest et collab. (2009)

Quelles sont les citations ?

- Applications en modélisation

Ex : *Is gold a safe haven or a hedge for the US dollar? Implications for risk management* Reboredo (2013)

- Applications sur une classe spécifique de copules

Ex : *Maximum likelihood estimation of mixed C-vines with application to exchange rates* Czado et collab. (2012)

- Articles de vue d'ensemble

Quelques avancées récentes intéressantes...

Größer et Okhrin (2021) présente quelques avancées et avenues de recherches récentes dans les tests statistiques en lien avec les copules.

- Beare et Seo (2020)

- Est-ce que la copule est symétrique ($C(u_1, u_2) = \bar{C}(u_1, u_2)$)?

- Est-ce que la copule est échangeable ($C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$)?

- Bianchi et collab. (2020)

- Les copules peuvent être employées pour tester l'indépendance conditionnelle.

Quelques avancées récentes intéressantes...

■ [...]

Les copules peuvent être employées pour tester plusieurs hypothèses statistiques en même temps

- ▶ Est-ce que $H_{0,a}$ est plausible ?
- ▶ Est-ce que $H_{0,b}$ est plausible ?
- ▶ Est-ce que $H_{0,a}$ et $H_{0,b}$ sont plausibles en même temps ?

Bibliographie I

- Beare, B. K. et J. Seo. 2020, «Randomization tests of copula symmetry», *Econometric Theory*, vol. 36, n° 6, p. 1025-1063.
- Bianchi, P., K. Elgui et F. Portier. 2020, «Conditional independence testing via weighted partial copulas and nearest neighbors», *arXiv preprint arXiv:2006.12839*.
- Czado, C., U. Schepsmeier et A. Min. 2012, «Maximum likelihood estimation of mixed c-vines with application to exchange rates», *Statistical Modelling*, vol. 12, n° 3, p. 229-255.
- Frahm, G., M. Junker et R. Schmidt. 2005, «Estimating the tail-dependence coefficient : properties and pitfalls», *Insurance : mathematics and Economics*, vol. 37, n° 1, p. 80-100.
- Genest, C., B. Rémillard et D. Beaudoin. 2009, «Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study», *Insurance : Mathematics and economics*, vol. 44, n° 2, p. 199-213.

Bibliographie II

- Größer, J. et O. Okhrin. 2021, «Copulae : An overview and recent developments», *Wiley Interdisciplinary Reviews : Computational Statistics*, p. e1557.
- Reboredo, J. C. 2013, «Is gold a safe haven or a hedge for the us dollar ? implications for risk management», *Journal of Banking & Finance*, vol. 37, n° 8, p. 2665-2676.
- Sklar, M. 1959, «Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges», *Publ. inst. statist. univ. Paris*, vol. 8, p. 229-231.