Université Laval

Modèles avancés de la théorie du risque

On two dependent individual risk models

- Aboubacar Mahamane Mahamadou Maitourare
- Choukri Houda

Professeure : Hélène Cossette

31 Janvier 2022

Article :

Le contenu de cette présentation vient principalement d'un article qui est :

Hélène Cossette, Patrice Gaillardetz, Etienne Marceau, Jacques Rioux (2002). On two dependent individual risk models. Insurance : Mathematics and Economics, 30(2), 153-166

Table des matières

1 Introduction :

Cet article traite en général le modèle du risque individuel mais avec dépendance. En effet, longtemps avant, dans un portefeuille d'assurance, les risques ont toujours été considérés indépendant. Ceci fait en sorte qu'on sous-estimais le risque. Récemment, les chercheurs se sont rendus comptes que ces risques ne sont pas forcément indépendants et ont commencé à traiter ce sujet, d'où cet article. Par exemple, nous pouvons citer le cas d'une assurance maladie le cas de la covid 19 : en effet, un individu peut contaminer un autre donc ce sont des risques liés.

L'objectif de cet article est précisément de proposer des structures de dépendance applicables dans le cadre du modèle de risque individuel. Ceci permettra de mieux évaluer les risques associés au portefeuille.

Comme annoncé dans l'article, des chercheurs avait déjà travaillé sur ce sujet de dépendance et cet article est un complément. Nous pouvons citer entre autres Dhaene and Goovaerts (1996, 1997), Muller (1997), Dhaene et al. (2001), Bauerle and Muller (1998) and Wang and Dhaene (1998). Leurs articles parlent principalement du traitement, du comportement . . .entre deux portefeuilles avec des risques individuels dépendants. Sans oublié Wang (1998) qui a fournit plusieurs modèles mais qui sont principalement utilisés dans le cas du risque collectif.

2 Modèle simple pour un portefeuille de risques dépendants :

Pour un contrat d'assurance, le contrat est défini de la manière suivante :

$$X = BI$$

avec B le montant à payer en cas de survenance du sinistre et $I \sim B(q)$.

Imaginons maintenant qu'on ait plusieurs contrats dans le portefeuille. Nous savons déjà qu'en assurance selon les risques on divise le portefeuille en plusieurs classes.

Donc on a :

$$S = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} X_{jk}$$

Dans ce cas de dépendance on définira :

$$I_{jk} = min(J_0 + J_j + J_{jk}; 1)$$

L'idée qui se cache derrière cette expression est que :

1. On suppose qu'il existe un facteur externe qui influe sur tous les risques quelque soit sa classe d'où le facteur J_0.
Exemple : Dans le cas de l'assurance maladie, on peut considérer la Covid 19 comme le facteur risque global J_0

2. En plus du facteur risque global, on suppose qu'il y a un facteur risque associé juste à la classe. C'est à dire que la réalisation de ce facteur risque influe seulement sur la classe.
Exemple : Toujours dans le cas de l'assurance maladie, le facteur risque de la classe peut être par exemple le lieu de travail, la profession J_j

3. Et enfin, nous avons le facteur risque individuel qui concerne uniquement la personne. Exemple : Toujours dans le cas de l'assurance maladie, le facteur risque individuel est la santé de l'individu en question.

où J_{jk}, J_j, et J_0 sont des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli avec :

$$J_0 \sim B(\tilde{q}_0), \qquad J_j \sim B(\tilde{q}_j), \qquad J_{jk} \sim B(\tilde{q}_{jk})$$

Ainsi :

$$I_{jk} \sim B(q_{jk})$$

Compte tenu de la définition de I_{jk} le vecteur $\underline{I}$ a des composantes clairement dépendantes. Les variables aléatoires $I_{jk}(j = 1, \ldots, m$ et $k = 1, \ldots, n_j$) restent cependant distribués selon la loi de Bernoulli. Le paramètre q_{jk} peut maintenant être écrit comme une fonction de $\tilde{q}_{jk}, \tilde{q}_j$ et $\tilde{q}_0$. Ceci est confirmé par la fonction de génération de probabilité fgp de I_{jk}

$$P_{I_{jk}}(t) = p_{jk} + q_{jk}t,$$

où $\quad p_{jk} = \tilde{p}_0\tilde{p}_j\tilde{p}_{jk} \qquad$ et $\qquad q_{jk} = 1 - (1-\tilde{q}_0)(1-\tilde{q}_j)(1-\tilde{q}_{jk})\,.$

Preuve.
On a :

$$\begin{aligned}
p_{jk} &= P(I_{jk} = 0) \\
&= P\left(min(J_{jk} + J_j + J_0, 1)\right) \\
&= P(J_{jk} + J_j + J_0 = 0) \\
&= P(J_0 = 0)P(J_j = 0)P(J_{jk} = 0) \\
&= \tilde{p}_0\tilde{p}_j\tilde{p}_{jk}
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
q_{jk} &= P(I_{jk} = 1) \\
&= 1 - P(I_{jk} = 0) \\
&= 1 - \tilde{p}_0\tilde{p}_j\tilde{p}_{jk} \\
&= 1 - (1-\tilde{q}_0)(1-\tilde{q}_j)(1-\tilde{q}_{jk})
\end{aligned}$$

Cas particuliers :

Si $\tilde{q}_j = \tilde{q}_0 = 0(j = 1, \ldots, m)$ nous obtenons le cas particulier du modèle de risque individuel avec risques indépendants avec $q_{jk} = \tilde{q}_{jk}$.

Si $\bar{q}_j = 0$ alors nous avons le cas d'un portefeuille avec une seule classe de risques dépendants. Le vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{mn_m})$ a maintenant des composantes I_{jk} qui sont dépendantes en raison de la définition, avec toutefois des B_{jk} inchangés.

2.1 Calcul des fgm, fgp et fonction de répartition.

Pour obtenir la fgm du montant total de réclamations S, on doit tout d'abord trouver la fgm du vecteur aléatoire $\underline{X}$, qui lui même est en fonction de la fgp du vecteur aléatoire $\underline{I}$. Exprimé comme suit :

$$P_{\underline{I}}(\underline{t}) = \tilde{p}_0 \left[\prod_{j=1}^{m}\left(\tilde{q}_j\prod_{k=1}^{n_j} t_{jk} + \tilde{p}_j\prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(t_{jk})\right)\right] + \tilde{q}_0\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n_j} t_{jk}$$

Preuve.

Pour $(j=1,...,m$ et $k=1,...,n_j)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
P_{\underline{I}}(\underline{t}) &= E(t_{11}^{I_{11}}....t_{1n_1}^{I_{1n_1}}....t_{m1}^{I_{m1}}....t_{mn_m}^{I_{nnm}}) \\
&= E(E(t_{11}^{I_{11}}....t_{1n_1}^{I_{1n_1}}....t_{m1}^{I_{m1}}....t_{mn_m}^{I_{nnm}}/J_0)) \\
&= \tilde{q}_0 E(t_{11}....t_{1n_1}....t_{m1}....t_{mn_m}) + \tilde{p}_0 E(t_{11}^{min(J_{11}+J_1,1)}....t_{1n_1}^{min(J_{1n_1}+J_1,1)}....t_{m1}^{min(J_{m1}+J_m,1)}....t_{mn_m}^{min(J_{mn_m}+J_m,1)}) \\
&= \tilde{q}_0 \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n_j} t_{jk} + \tilde{p}_0 E(t_{11}^{min(J_{11}+J_1,1)}....t_{mn_m}^{min(J_{mn_m}+J_m,1)})
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
E(t_{11}^{min(J_{11}+J_1,1)}....t_{mn_m}^{min(J_{mn_m}+J_m,1)}) &= E(E(t_{11}^{min(J_{11}+J_1,1)}....t_{mn_m}^{min(J_{mn_m}+J_m,1)}/J_1,....,J_m)) \\
&= \prod_{j=1}^{m} E(E(t_{j1}^{min(J_{j1}+J_j,1)}....t_{jn_m}^{min(J_{jn_m}+J_j,1)}/J_j)) \\
&= \prod_{j=1}^{m}\left(\tilde{q}_j E(t_{j1}....t_{jn_m}) + \tilde{p}_j E(t_{j1}^{J_{j1}}....t_{jn_m}^{J_{jn_m}})\right) \\
&= \prod_{j=1}^{m}\left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} t_{jk} + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(t_{jk})\right)
\end{aligned}$$

La fgp du vecteur $\underline{I}$ est donc :

$$P_{\underline{I}}(\underline{t}) = \tilde{q}_0 \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n_j} t_{jk} + \tilde{p}_0 \left[\prod_{j=1}^{m}\left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} t_{jk} + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(t_{jk})\right)\right]$$

La fgm de S.

On exprime la fgm de S tel que :

$$M_S(t) = \tilde{p}_0 \left[\prod_{j=1}^{m}\left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t) + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(M_{B_{jk}}(t))\right)\right] + \tilde{q}_0 \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t)$$

Preuve.

La fgm de la variable aléatoire X_{jk} pour pour $(j=1,...,m$ et $k=1,...,n_j)$, est :

$$\begin{aligned}
M_{X_{jk}}(t) &= P_{I_{jk}}\left(M_{B_{jk}}(t)\right) \\
&= p_{jk} + q_{jk} M_{B_{jk}}(t)
\end{aligned}$$

La fgm du vecteur aléatoire $\underline{X}$ est donc :

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = P_{\underline{I}}\left(M_{B_{11}}(t_{11}),...,M_{B_{1n_1}}(t_{1n_1}),...,M_{B_{m1}}(t_{m1}),...,M_{B_{mn_m}}(t_{mn_m})\right)$$

Pour la variable $S = X_{11} + ... + X_{1_{n_1}} + ... + X_{m1} + ... + X_{m_{n_m}}$ on a donc :

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E(e^{tS}) \\
&= E(e^{t(X_{11}+...+X_{1n_1}+....+X_{m1}+....+X_{mn_m}}) \\
&= E(e^{tX_{11}}....e^{tX_{1n_1}}....e^{tX_{m1}}....e^{tX_{mn_m}}) \\
&= M_{\underline{X}}(t,...,t) \\
&= P_{\underline{I}}\left(M_{B_{11}}(t),...,M_{B_{1n_1}}(t),...,M_{B_{m1}}(t),...,M_{B_{mn_m}}(t)\right)
\end{aligned}$$

La fgm de S est donc :

$$M_S(t) = \tilde{p}_0 \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t) + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(M_{B_{jk}}(t)) \right) \right] + \tilde{q}_0 \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t)$$

2.2 La fonction de répartition de S.

A partir de la fgm de S, M_S trouvé précédemment, on peut exprimer F_S de la manière suivante :
Pour tout $x \geq 0$:

$$F_S(x) = \tilde{p}_0 F_U(x) + \tilde{q}_0 F_V(x)$$

Avec U et V sont deux variables aléatoires tel que :

$$F_U(t) = (F_{C1} * .... * F_{Cm})(t)$$

Et :

$$F_V(t) = \left(F_{B_{11}} * .... * F_{B_{mn_m}}\right)(t)$$

Preuve.

A partir de l'expression de la fgm de S, on peut l'exprimer en fonction d'autres fgm tel que :

$$M_S(t) = \tilde{p}_0 M_U(t) + \tilde{q}_0 M_V(t)$$

Avec, V est une variable aléatoire de fgm :

$$M_V(t) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t)$$

En utilisant la définition du produit de convolution, on trouve donc que la fonction de répartition de V est tel que :

$$F_V(t) = \left(F_{B_{11}} * .... * F_{B_{1n_1}} * .... * F_{B_{m1}} * .... * F_{B_{mn_m}}\right)(t)$$

Et U est une variable aléatoire de fgm :

$$\begin{aligned} M_U(t) &= \prod_{j=1}^{m} \left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t) + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(M_{B_{jk}}(t) \right) \\ &= \prod_{j=1}^{m} \left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t) + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{D_{jk}}(t) \right) \\ &= \prod_{j=1}^{m} M_{Cj}(t) \end{aligned}$$

En utilisant la définition du produit de convolution, on trouve donc que la fonction de répartition de U est tel que :

$$F_U(t) = (F_{C1} * .... * F_{Cm})(t)$$

Avec, C_j est une variable aléatoire tel que :

$$F_{C_j} = \tilde{q}_j \left(F_{B_{j1}} * ... * F_{B_{jn_j}}\right) + \tilde{p}_j \left(F_{D_{j1}} * ... * F_{D_{jn_j}}\right)$$

Avec, la variable aléatoire $D_{jk} \sim BinComp(1, \tilde{q}_{jk}, F_{B_{jk}})$, tel que :

$$F_{D_{jk}} = \tilde{p}_{jk} + \tilde{q}_{jk} F_{B_{jk}}$$

Et :

$$\begin{aligned} M_{D_{jk}}(t) &= \tilde{p}_{jk} + \tilde{q}_{jk} M_{B_{jk}}(t) \\ &= P_{J_{jk}}(M_{B_{jk}}(t) \end{aligned}$$

A partir de l'expression de la fgm M_S, on trouve donc que la fonction de répartition de S est une combinaison convexe des deux fonctions de répartition de U et V, tel que pour tout $x \geq 0$:

$$F_S(x) = \tilde{p}_0 F_U(x) + \tilde{q}_0 F_V(x)$$

2.3 Espérance et variance de S.

La dépendance entre les variables aléatoires X_{jk} n'a aucune influence sur l'espérance de S qui s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} E(X_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} q_{jk} E(B_{jk}) \end{aligned}$$

Contrairement à la variance qui est influencée par la dépendance entre les X_{jk}, qui requiert l'expression de la $Cov(X_{jk}, X_{j'k'})$, pour les deux cas ($j = j'$ et $k \neq k'$) et ($j \neq j'$ et $k \neq k'$).

Pour le cas, où les deux risques sont de la même classe $j = j$, mais avec deux polices différentes $k \neq k'$, on trouve :

$$\begin{aligned} E(I_{jk}, I_{jk'}) &= E\left(min(J_{jk} + J_j + J_0, 1) min(J_{jk'} + J_j + J_0, 1)\right) \\ &= 1 \times P(J_{jk} + J_j + J_0 \geq 1, J_{jk'} + J_j + J_0 \geq 1) + 0 \times ... + 0 \times .... \\ &= P(J_{jk} + J_j + J_0 \geq 1, J_{jk'} + J_j + J_0 \geq 1) \\ &= P(J_0 = 1) + P(J_0 = 0)P(J_j = 1) + (J_0 = 0)P(J_j = 0)P(J_{jk} = 1, J_{jk'} = 1) \\ &= P(J_0 = 1) + P(J_0 = 0)P(J_j = 1) + (J_0 = 0)P(J_j = 0)P(J_{jk} = 1)P(J_{jk'} = 1) \\ &= \tilde{q}_0 + \tilde{p}_0 \tilde{q}_j + \tilde{p}_0 \tilde{p}_j \tilde{q_{jk}} \tilde{q_{jk'}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Cov(I_{jk}, I_{jk'}) &= E(I_{jk}, I_{jk'}) - E(I_{jk})E(I_{jk'}) \\ &= \tilde{q}_0 + \tilde{p}_0 \tilde{q}_j + \tilde{p}_0 \tilde{p}_j \tilde{q_{jk}} \tilde{q_{jk'}} - q_{jk} q_{jk'} \end{aligned}$$

On obtient la $Cov(X_{jk}, X_{jk'})$, tel que :

$$\begin{aligned} Cov(X_{jk}, X_{jk'}) &= Cov(B_{jk} I_{jk}, B_{jk'} I_{jk'}) \\ &= E(B_{jk} I_{jk} B_{jk'} I_{jk'}) - E(B_{jk} I_{jk}) E(B_{jk'} I_{jk'}) \\ &= E(B_{jk}) E(B_{jk'}) (E(I_{jk} I_{jk'}) - E(I_{jk}) E(I_{jk'})) \\ &= E(B_{jk}) E(B_{jk'}) Cov(I_{jk}, I_{jk'}) \end{aligned}$$

Pour le cas, où les deux risques sont de classes différentes $j \neq j'$ et $k \neq k'$, on trouve :

$$\begin{aligned}
E(I_{jk}, I_{j'k'}) &= E\left(min(J_{jk} + J_j + J_0, 1) min(J_{j'k'} + J_{j'} + J_0, 1)\right) \\
&= 1 \times P(J_{jk} + J_j + J_0 = 1, J_{j'k'} + J_{j'} + J_0 = 1) + 0 \times ... + 0 \times .... \\
&= P(J_{jk} + J_j + J_0 = 1, J_{j'k'} + J_{j'} + J_0 = 1) \\
&= P(J_0 = 1) + P(J_0 = 0) P(J_{jk} + J_j = 1, J_{j'k'} + J_{j'} = 1) \\
&= P(J_0 = 1) + P(J_0 = 0) P(J_{jk} + J_j = 1) P(J_{j'k'} + J_{j'} = 1) \\
&= P(J_0 = 1) + P(J_0 = 0) \left(P(J_j = 1) + P(J_j = 0) P(J_{jk} = 1)\right) \left(P(J_{j'} = 1) + P(J_{j'} = 0) P(J_{j'k'} = 1)\right) \\
&= \tilde{q}_0 + \tilde{p}_0 (\tilde{q}_j + \tilde{p}_j \tilde{q}_{jk})(\tilde{q}_{j'} + \tilde{p}_{j'} \tilde{q}_{j'k'})
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
Cov(I_{jk}, I_{j'k'}) &= E(I_{jk}, I_{j'k'}) - E(I_{jk}) E(I_{j'k'}) \\
&= \tilde{q}_0 + \tilde{p}_0 (\tilde{q}_j + \tilde{p}_j \tilde{q}_{jk})(\tilde{q}_{j'} + \tilde{p}_{j'} \tilde{q}_{j'k'}) - q_{jk} q_{j'k'}
\end{aligned}$$

On obtient la $Cov(X_{jk}, X_{jk'})$, tel que :

$$\begin{aligned}
Cov(X_{jk}, X_{j'k'}) &= Cov(B_{jk} I_{jk}, B_{j'k'} I_{j'k'}) \\
&= E(B_{jk} I_{jk} B_{j'k'} I_{j'k'}) - E(B_{jk} I_{jk}) E(B_{j'k'} I_{j'k'}) \\
&= E(B_{jk}) E(B_{j'k'}) (E(I_{jk} I_{j'k'}) - E(I_{jk}) E(I_{j'k'})) \\
&= E(B_{jk}) E(B_{j'k'}) Cov(I_{jk}, I_{j'k'})
\end{aligned}$$

D'autre part, on a pour $(j = 1, ..., m$ et $k = 1, ..., n_j)$:

$$\begin{aligned}
Var(X_{jk}) &= E^2(B_{jk}) Var(I_{jk}) + Var(B_{jk}) E(I_{jk}) \\
&= \tilde{p}_{jk} \tilde{q}_{jk} E^2(B_{jk}) + \tilde{q}_{jk} Var(B_{jk})
\end{aligned}$$

3 Exemple 1 :

Fonction de répartition de S.

Dans cet exemple, on a une seule classe donc le facteur risque de classe est nul $\tilde{q}_j = 0$.
De plus on a 20 contrats.
Ainsi :

$$F_S(x) = \tilde{p}_0 F_U(x) + \tilde{q}_0 F_V(x)$$

Avec :

$$F_V(t) = \left(F_{B_{1,1}} * .... * F_{B_{1,20}}\right)(t)$$

Et :

$$F_U(t) = F_{C1}(t) = \left(F_{D_{1,1}} * .... * F_{D_{1,20}}\right)(t)$$

Avec :

$$F_{D_{jk}}(t) = \tilde{p}_{jk} + \tilde{q}_{jk} F_{B_{jk}}(t)$$

Ainsi :

$$V \sim Gamma(20; \frac{1}{2})$$

Et :

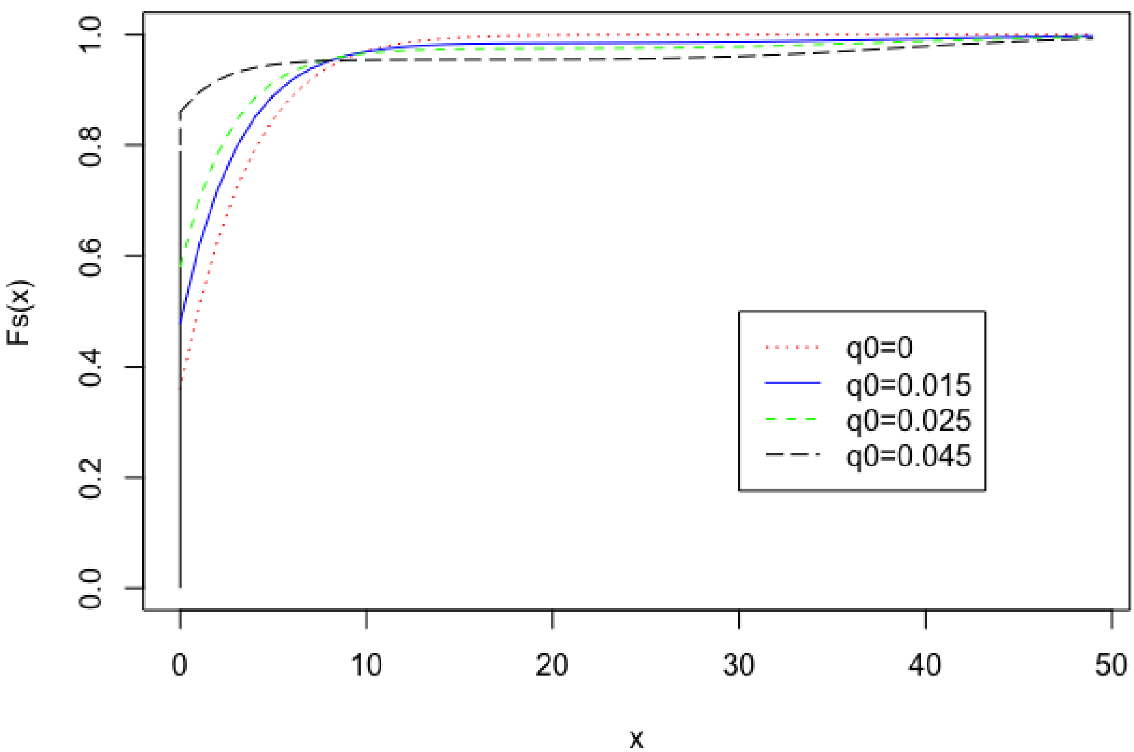
$$U \sim BinComp(20, \tilde{q}_{jk}, F_B)$$

Avec :

$$\begin{aligned} q_{jk} &= 1 - (1 - \tilde{q}_0)\,(1 - \tilde{q}_j)\,(1 - \tilde{q}_{jk}) \\ &= 1 - (1 - \tilde{q}_0)\,(1 - \tilde{q}_{jk}) \end{aligned}$$

Puis on tire $\tilde{q}_{jk}$, tel que :

$$\tilde{q}_{jk} = 1 - \frac{(1 - q_{jk})}{(1 - \tilde{q}_0)}$$



La fonction de répartition de S

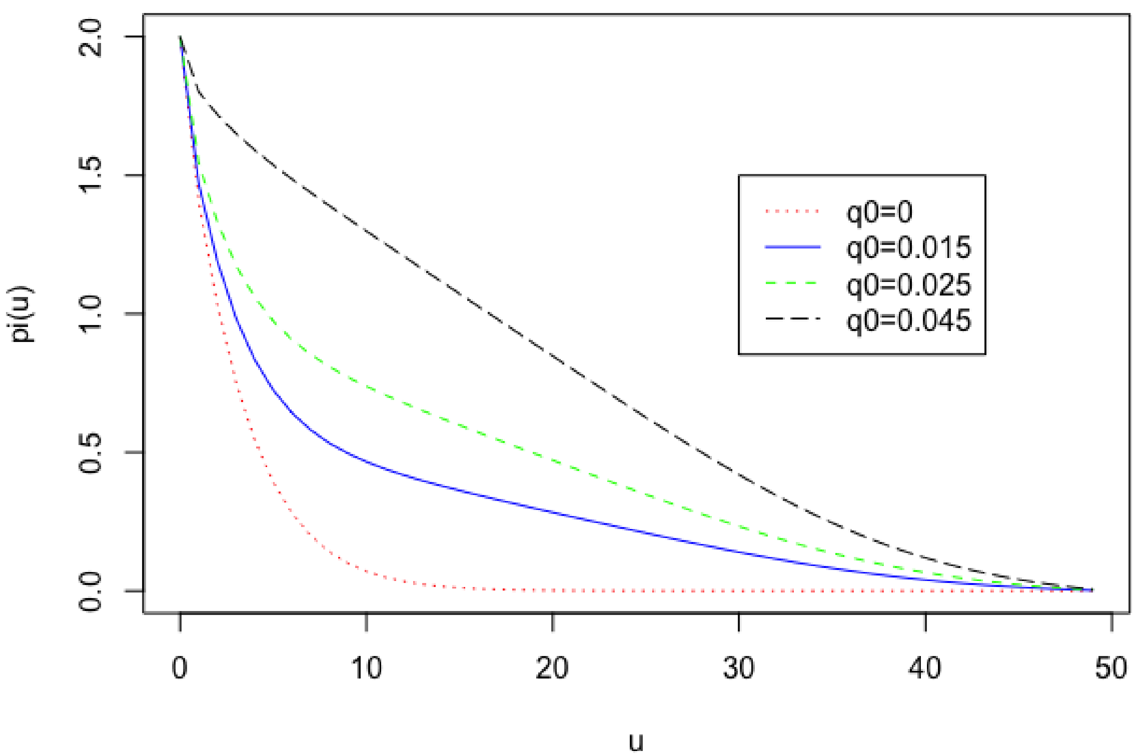
Interprétation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la fonction met plus de temps avant de d'atteindre 1, donc le risque augmente.

Prime Stop loss.

Pour calculer la prime stop loss, on sait que :

$$\pi_u(S) = \int_u^{\infty} \overline{F}_S(x)\,dx$$

Vu que qu'on avait déjà calculé précédemment F_S donc il suffit juste de faire la somme à partir de u de $(1 - F_S(x))$ pour trouver la prime stop loss.

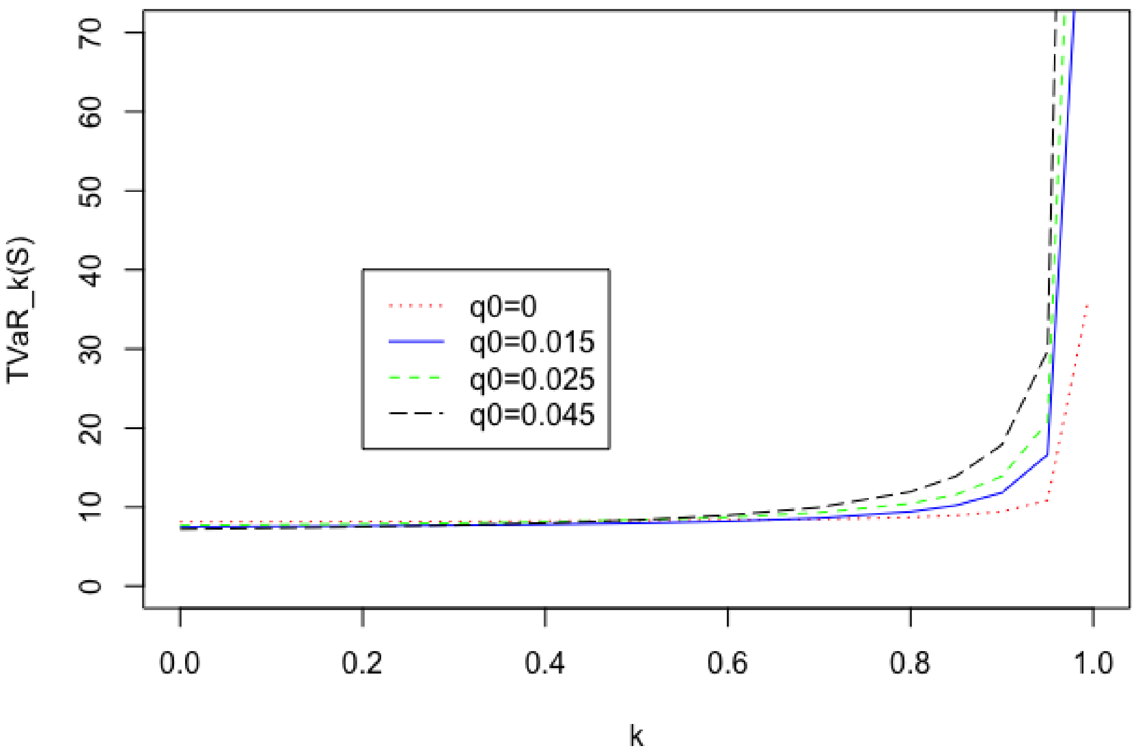


La Prime Stop loss de S

Interprétation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la prime stop loss augmente aussi. Logique, puisque le risque aussi augmente avec la dépendance.

La $TVaR_k(S)$.

$$TVaR_k(S) = \frac{1}{1-k}\left[E\left(S \times 1_{S>VaR_k(S)}\right) + VaR_k(S)\left(F_S(VaR_k(S)) - k\right)\right]$$



La $TVaR_k(S)$

Interprétation : Intérpretation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la $TVaR_k(S)$ augmente, ainsi on doit mettre beaucoup plus d'argents de coté pour pouvoir en cas de sinistres satisfaire ses engagements envers les clients.

4 Exemple 2 :

Fonction de répartition de S.

Dans cet exemple, on a 4 classes et 5 contrats.
Ainsi :

$$F_S(x) = \tilde{p}_0 F_U(x) + \tilde{q}_0 F_V(x)$$

Avec :

$$F_V(t) = \left(F_{B_{1,1}} * .... * F_{B_{4,5}}\right)(t)$$

Puisque les $B_{jk} \sim Gamma(1, \frac{1}{2})$ pour $(j = 1, .., 4)$ et $(k = 1, .., 5)$
Alors :

$$V \sim Gamma(20, \frac{1}{2})$$

Et :

$$F_U(t) = (F_{C_1} * .... * F_{C_4})\,(t)$$

Avec :

$$F_{C_j}(t) = \tilde{q}_j \left(F_{B_{j1}} * ... * F_{B_{jn_j}}\right)(t) + \tilde{p}_j \left(F_{D_{j1}} * ... * F_{D_{jn_j}}\right)(t)$$

Tel que :

$$\left(F_{B_{j1}} * ... * F_{B_{jn_j}}\right)(t) = H(t; 5, \frac{1}{2})$$

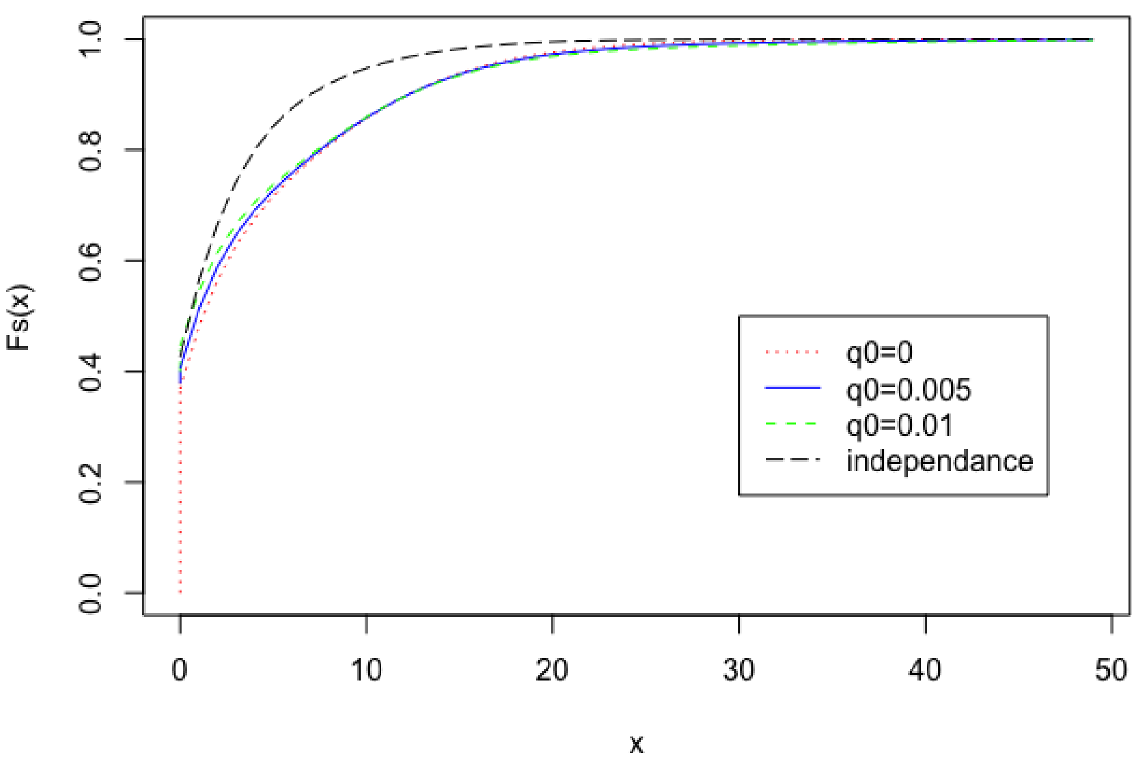
Et, pour tout $(j = 1, .., 4)$:

$$D_{j1} + ... + D_{j,5} \sim BComp(5, \tilde{q}_{jk}, F_B)$$

Avec :

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{jk} &= 1 - \frac{1 - q_{jk}}{(1 - \tilde{q}_0)(1 - \tilde{q}_j)} \\ &= 1 - \frac{0,995 - 0,015j)}{(1 - \tilde{q}_0)(1 - \tilde{q}_j)}\end{aligned}$$

Ainsi, on calcule les F_{Cj}.
Ensuite, on applique la FFT pour trouver F_S



La fonction de répartition de S

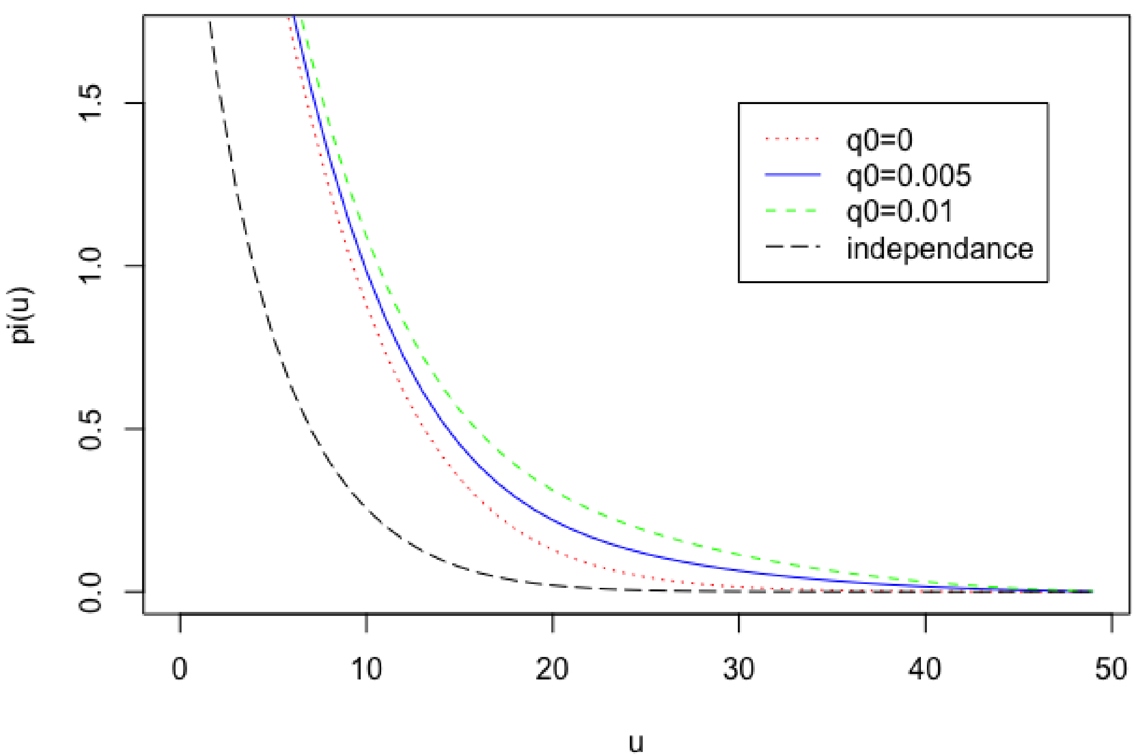
Interprétation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la fonction met plus de temps avant de d'atteindre 1, donc le risque augmente.

Prime Stop loss.

Pour calculer la prime stop loss, on sait que :

$$\pi_u(S) = \int_u^{\infty} \overline{F}_S(x)\,dx$$

Vu que qu'on avait déjà calculé précédemment F_S donc il suffit juste de faire la somme à partir de u de $(1 - F_S(x))$ pour trouver la prime stop loss.

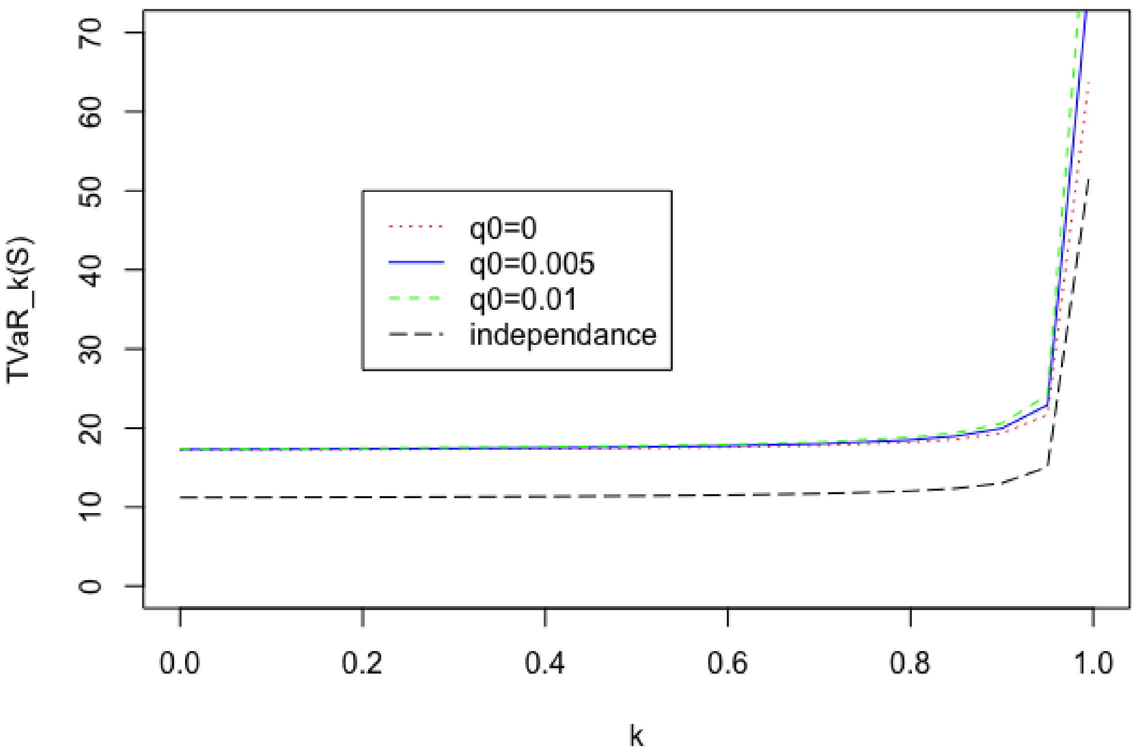


La Prime Stop loss de S

Interprétation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la prime stop loss augmente aussi. Logique, puisque le risque aussi augmente avec la dépendance.

La $TVaR_k(S)$**.**

$$TVaR_k(S) = \frac{1}{1-k}\left[E\left(S \times 1_{S>VaR_k(S)}\right) + VaR_k(S)\left(F_S(VaR_k(S)) - k\right)\right]$$



La $TVaR_k(S)$

Interprétation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la $TVaR_k(S)$ augmente, ainsi on doit mettre beaucoup plus d'argents de coté pour pouvoir en cas de sinistres satisfaire ses engagements envers les clients.

5 Conclusion :

A la lumière de tout ce qui a été vu, on remarque que ne pas tenir compte de la dépendances entre individus peut constituer une grande erreur au niveau de l'évaluation du risque car en effet, le calcul des primes et la TVaR en dépendent.

Ouvertures :

1. Cette modélisation sur-évalue le risque. En effet, on propose d'ajouter une autre variable aléatoire J_{jk} qui va soit minimiser le risque soit prendre la valeur 0. Par exemple, si on reste toujours dans notre cas de l'assurance maladie avec le cas de la Covid, On aurai aimé voir une variable aléatoire qui par exemple tient compte de si la personne est immunisé ou pas. En effet, avec la définition de I_{jk} tant que la covid 19 survient $J_0 = 1$ donc automatiquement $I_{jk} = 1$ or ceci est injuste, on pourrai trouver dans le futur un vaccin qui immunisera.

2. Nous nous demandons également si on ne peut pas supposer une dépendances entre les sévérités pour modéliser la dépendances entres les contrats du portefeuille.