Allocation du capital basée sur la $TVaR$

Pour distributions multivariées continues à support positif

Présenté par
Achille Rostan Fossouo Tadjuidje,
Olivier Côté et
Benjamin Côté

ACT-7102

8 mars 2022

Table des matières

Contexte

Mesure de risque

On rappelle que

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)du \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\{E[X \cdot 1_{\{X>VaR_\kappa(X)0\}}]+ \\
&\qquad VaR_\kappa(X)[F_X(VaR_\kappa(X))-\kappa]
\end{aligned}
$$

Pour le cas continu*, on a

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}E[X \cdot 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}] \\
&= E[X|X>VaR_\kappa(X)]
\end{aligned}
$$

Loi gamma

On rappelle que, pour $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, on a

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} = h(x, \alpha, \beta)$$

et

$$F_X(x) = \int_0^x h(y, \alpha, \beta) dy = H(x, \alpha, \beta).$$

On note aussi $H(x, \alpha, \beta) = 1 - \overline{H}(x, \alpha, \beta)$

Proposition 1

Proposition 1 (Cossette et collab., 2012)

Pour $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, on a

$$E[X \cdot 1_{\{X>b\}}] = \frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(b, \alpha+1, \beta) = E[X]\overline{H}(b, \alpha+1, \beta)$$

et

$$\text{TVaR}_{\kappa}(X) = \frac{E[X]\overline{H}(b, \alpha+1, \beta)}{1-\kappa}$$

Proposition 1 : preuve I

Preuve pour $E[X \cdot 1_{\{X>b\}}]$

$$
\begin{aligned}
E[X \cdot 1_{\{X>b\}}] &= \int_b^\infty x \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_b^\infty \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1} e^{-\beta x} dx \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \overline{H}(b, \alpha+1, \beta) \\
&= E[X] \overline{H}(b, \alpha+1, \beta)
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposition 1 : preuve II

Preuve pour $\mathrm{TVaR}_\kappa(X)$

Pour le cas continu, on rappelle que

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} E[X \cdot 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]$$

On réutilise le résultat de la diapositive précédente avec $b = VaR_\kappa(X)$. On obtient

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} E[X]\overline{H}(VaR_\kappa(X), \alpha + 1, \beta)$$

□

Lois composées multivariées

Distribution composée

Soit X tel que

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

On aura $M_X(r) = P_M(M_B(r))$ Si on définit $q_k = P(M = k)$, on aura aussi

$$F_X(x) = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k P(B_1 + \cdots + B_k \leq x)$$

Distribution composée : $TVaR$ I

On peut retrouver $E[X \cdot 1_{\{X>b\}}]$ en adaptant les résultats de la proposition 1. (et en supposant B continu)

$$\begin{aligned} E[X \cdot 1_{\{X>b\}}] &= E\left[E[X \cdot 1_{\{X>b\}}|M]\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k E[X \cdot 1_{\{X>b\}}|M = k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k E[(B_1 + \cdots + B_k) \cdot 1_{\{B_1+\cdots+B_k>b\}}] \end{aligned}$$

Distribution composée : $TVaR$ II

Ensuite, on peut obtenir la $TVaR$ comme suit

$$\begin{aligned}\text{TVaR}_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E[X \cdot 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} q_k E[(B_1 + \cdots + B_k) \cdot 1_{\{B_1 + \cdots + B_k > VaR_\kappa(X)\}}]\end{aligned}$$

Proposition 2

Proposition 2 (Cossette et collab., 2012)

Pour X ayant une distribution composée avec sévérité $B \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, on a

$$E[X \cdot 1_{\{X>b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(b, \alpha k + 1, \beta)$$

et

$$\text{TVaR}_{\kappa}(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(VaR_{\kappa}(X), \alpha k + 1, \beta)$$

Proposition 2 : preuve I

Preuve pour $E[X \cdot 1_{\{X>b\}}]$ On reprend les résultats précédents, mais on suppose B Gamma(α, β)

$$E[X \cdot 1_{\{X>b\}}] = E\left[E[X \cdot 1_{\{X>b\}}|M]\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k E[(B_1 + \cdots + B_k) \cdot 1_{\{B_1+\cdots+B_k>b\}}]$$

Sachant que $B_1 + \cdots + B_k \sim$ Gamma$(\alpha k, \beta)$, on peut utiliser la proposition 1

$$E[X \cdot 1_{\{X>b\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(b, \alpha k + 1, \beta)$$

$\square$

Proposition 2 : preuve II

Preuve pour $\mathrm{TVaR}_\kappa(X)$

Nous avons démontré que pour une loi composée

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} q_k E[(B_1+\cdots+B_k)\cdot 1_{\{B_1+\cdots+B_k > VaR_\kappa(X)\}}]$$

On réutilise le résultat de la diapositive précédente avec $b = VaR_\kappa(X)$.
On obtient

$$\mathrm{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{k\alpha}{\beta}\overline{H}(VaR_\kappa(X), \alpha k+1, \beta)$$

$\square$

Mélange d'Erlang

Distribution mélange d'Erlang

On introduit la distribution mélange d'Erlang. Soit $Y \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}, \beta)$.

$\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, \dots)$ On aura

$$f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k h(x, k, \beta)$$

$$F_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k H(x, k, \beta)$$

Représentation composée d'un mélange d'Erlang

On peut représenter un mélange d'Erlang comme suit

$$Y = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} C_k, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases}$$

où $C_k \sim Exp(\beta)$ et K est une v.a. discrète tel que $P(K = k) = \zeta_k$. (Nous autorisons maintenant un poids à 0)

On a donc

$$M_Y(r) = P_K(M_C(r))$$

Proposition 3

Proposition 3 (Cossette et collab., 2012)

Soit X ayant une distribution composée avec sévérité $B \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}, \beta)$. X suit alors encore un mélange d'Erlang tel que

$$F_X(x) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k H(x, \alpha k, \beta)$$

où $\xi_k = P(M^* = k)$ avec

$$M^* = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

En mots : Une loi composée X avec mélange d'Erlang comme sévérité B suit un mélange d'Erlang avec poids modifiés.

Proposition 3 : preuve

Preuve de la représentation On commence avec

$$\begin{aligned} M_X(r) &= P_M(M_B(r)) \quad \text{(Loi composée)} \\ &= P_M(P_K(M_C(r))) \quad (\text{Car } B \sim MixErl) \\ &= P_M(P_K(M_C(r))) \\ &= P_{M*}(M_C(r)) \end{aligned}$$

On a donc que M^* est une loi composée tel que $M_{M*}(t) = P_M(M_K(t))$.
On aura aussi que $P(M^* = k) = \xi_k = P(\sum_{j=1}^{M} K_j = k)$

On peut calculer $\underline{\xi}$ aisément avec un algorithme d'agrégation comme FFT.

$\square$

Allocation basée sur la $TVaR$

Allocation basée sur la $TVaR$: définitions

Soit un portefeuille S composé de n risques.

$$S = X_1 + \cdots + X_n$$

On utilisera la $TVaR$ pour déterminer le capital nécessaire pour S.

Allocation basée sur la $TVaR$: définitions

Pour déterminer la portion du capital total $TVaR_\kappa(S)$ allouée à X_i, on a

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{E[X_i \cdot 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}] + \beta_S E[X_i \cdot 1_{\{S=VaR_\kappa(S)\}}]}{1-\kappa}$$

avec

$$\beta_S = \begin{cases} \frac{P(S\leq VaR_\kappa(S))-\kappa}{P(S=VaR_\kappa(S))}, & \text{si } P(S = VaR_\kappa(S)) > 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Ainsi, pour le cas continu

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{E[X_i \cdot 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}]}{1-\kappa}$$

et on retrouve (dans tous les cas)

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i;S)$$

Allocation basée sur la $TVaR$: illustration

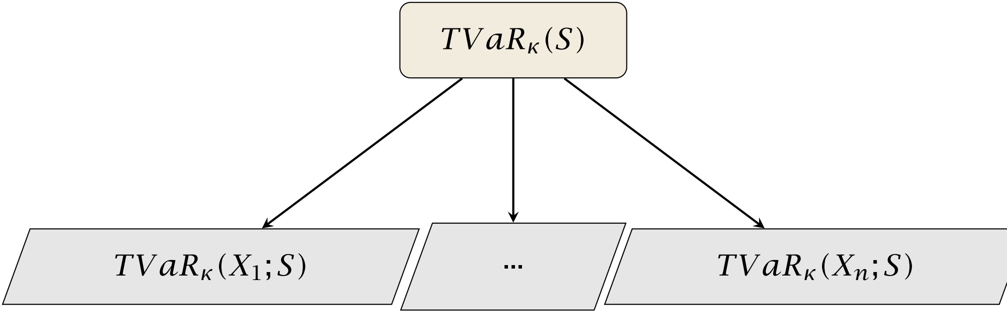


Figure – Allocation par risque

Étude de l'allocation

Allocation pour le risque X_i au sein de S

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{E[X_i \cdot 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}]}{1-\kappa}$$

On doit donc étudier

$$E[X_i \cdot 1_{\{S>s_0\}}] = \int_{s_0}^{\infty} E[X_i \cdot 1_{\{S=s\}}]ds$$

Avec

$$E[X_i \cdot 1_{\{S=s\}}] = \int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)dx$$

Où

$$S_{-i} = S - X_i$$

Proposition 4

Proposition 4 (Cossette et collab., 2012)

Soit des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots X_n$ tel que $X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$.

Nous avons aussi $S = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Gamma}(\alpha_{TOT}, \beta)$.

La contribution de X_i à la $TVaR_\kappa(S)$ est

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{\alpha_i}{\beta} \frac{\overline{H}(VaR_\kappa(S); \alpha_{TOT} + 1, \beta)}{1 - \kappa}$$

Proposition 4 : preuve I

Preuve pour $TVaR_\kappa(X_i;S)$
On commence par s'intéresser à

$$
\begin{aligned}
E[X_i \cdot 1_{\{S=s\}}] &= \int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)dx \\
&= \int_0^s x h(x,\alpha_i,\beta) h(s-x,\alpha_{TOT}-\alpha_i,\beta)dx \\
&= \int_0^s \frac{x\beta^{\alpha_i}\beta^{\alpha_{TOT}-\alpha_i} x^{\alpha_i-1}(s-x)^{\alpha_{TOT}-\alpha_i-1} e^{-\beta x} e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_i)} dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_i)\beta} \frac{\beta^{\alpha_{TOT}+1} e^{\beta s} s^{\alpha_{TOT}+1-1}}{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)} \int_0^s \left(\frac{x}{s}\right)^{\alpha_i+1-1} \left(1-\frac{x}{s}\right)^{\alpha_{TOT}-\alpha_i-1} \frac{dx}{s}
\end{aligned}
$$

On peut se concentrer sur une portion de la dernière équation

Proposition 4 : preuve II

$$\int_0^s \left(\frac{x}{s}\right)^{\alpha_i+1-1} \left(1-\frac{x}{s}\right)^{\alpha_{TOT}-\alpha_i-1} \frac{dx}{s} = \int_0^1 u^{\alpha_i+1-1}(1-u)^{\alpha_{TOT}-\alpha_i-1}\,du$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_i)\Gamma(\alpha_i+1)}{\alpha_{TOT}+1}$$

Si on revient à l'équation de la diapositive précédente

$$E[X_i \cdot 1_{\{S=s\}}] = \frac{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_i)\beta} \frac{\beta^{\alpha_{TOT}+1}e^{\beta s}s^{\alpha_{TOT}+1-1}}{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)} \frac{\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_i)\Gamma(\alpha_i+1)}{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)}$$
$$= \frac{\alpha_i}{\beta} h(s, \alpha_{TOT}+1, \beta)$$

Proposition 4 : preuve III

$$
\begin{aligned}
E[X_i \cdot 1_{\{S>s_0\}}] &= \int_{s_0}^{\infty} E[X \cdot 1_{\{S=s\}}]ds \\
&= \int_{s_0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\beta} h(s, \alpha_{TOT}+1, \beta)ds \\
&= \frac{\alpha_i}{\beta}\overline{H}(s_0, \alpha_{TOT}+1, \beta)
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X_i;S) &= \frac{1}{1-\kappa} E[X_i \cdot 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}] \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\frac{\alpha_i}{\beta}\overline{H}(s, \alpha_{TOT}+1, \beta)
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposition 5

Proposition 5 (Cossette et collab., 2012)

Soit des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots X_n$ tel que $X_i \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta)$.

Nous avons $S = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{MixErl}(\underline{\nu}, \beta)$.

La contribution de X_i à la $TVaR_\kappa(S)$ est

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \zeta_j^{(i)} \nu_{k-j}^{(-i)} \frac{j}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(S); j+1, \beta)$$

où $\nu_k^{(-i)} = P(\sum_{l=1}^{n} K_l - K_i = k)$

Proposition 5 : preuve I

Preuve pour $S \sim \text{MixErl}(\underline{\nu}, \beta)$ On a

$$
\begin{aligned}
M_S(r) = E[e^{rS}] &= E[e^{r(X_1+\cdots+X_n)}] \\
&\overset{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(r) \\
&\overset{Prop.3}{=} \prod_{i=1}^{n} P_{K_i}(M_C(r)) = \prod_{i=1}^{n} E[(M_C(r))^{K_i}] \\
&\overset{ind.}{=} E\left[\prod_{i=1}^{n} (M_C(r))^{K_i}\right] = E\left[(M_C(r))^{\sum_{i=1}^{n} K_i}\right] \\
&= P_{\sum_{i=1}^{n} K_i}(M_C(r))
\end{aligned}
$$

□

Distribution conjointe des risques composés

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur suivant une distribution composée multivariée tel que

$$X_i = \begin{cases} \sum_{j_i=0}^{M_i} B_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}$$

On a aussi

$$f_{\underline{M}}(m_1, \ldots, m_2) = q_{m_1 \ldots m_n}$$

- Les sévérités B_{i,j_i} sont indépendantes pour des sinistres distincts.
- Les sévérités B_{i,j_i} sont continues et strictement positives.

Distribution du portefeuille

Nous avons

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Avec comme fonction de répartition

$$F_S(x) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} P\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} \leq x\right)$$

Avec la convention $\Sigma_{i=1}^{0} A_i = 0$

Allocation du capital basé sur la $TVaR$

Premièrement, on a

$$E\left[S\cdot 1_{\{S>b\}}\right]=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}q_{m_1,\dots,m_n}\cdot E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1}B_{1,i_1}+\cdots+\sum_{i_1=1}^{m_n}B_{1,i_n}\right)\cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1}B_{1,i_1}+\cdots+\sum_{i_1=1}^{m_n}B_{1,i_n}>b\right\}}\right]$$

Allocation du capital basé sur la $TVaR$ I

Ensuite, on a

$$
\begin{aligned}
TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[S \cdot 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot \\
&\quad E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]
\end{aligned}
$$

Allocation du capital basé sur la $TVaR$ II

et

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(X_i; S) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X_i \cdot 1_{\{S > VaR_{\kappa}(S)\}}\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot \\
& E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} > VaR_{\kappa}(S)\right\}}\right]
\end{aligned}$$

Allocation du capital basé sur la $TVaR$ III

Globalement, on a

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} \right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} > VaR_\kappa(S)\right\}} \right]$$

et

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot E\left[\left(\sum_{j_i=1}^{m_i} B_{i,j_i} \right) \cdot 1_{\left\{\sum_{j_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} > VaR_\kappa(S)\right\}} \right]$$

Proposition 6

Proposition 6 (Cossette et collab., 2012)

Soit $X_1, \ldots X_n$ des distributions composées comme celles que nous venons de discuter tel que $B_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$.

Nous avons

$$F_S(x) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} H(x, \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i, \beta)$$

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot \frac{m_i \alpha_i}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(S), \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i + 1, \beta)$$

Proposition 6 : preuve I

Preuve
Si $B_{i,j_i} \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$, et que toutes les variables B_{i,j_i} sont indépendantes, alors on peut aisément montrer que

$$\sum_{j_i=1}^{m_i} B_{i,j_i} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_i = m_i\alpha_i, \beta\right)$$

et que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{m_i} B_{i,j_i} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i, \beta\right)$$

Note : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{m_i} B_{i,j_i} = \sum_{j_1=1}^{m_1} B_{1,j_1} + \cdots + \sum_{j_n=1}^{m_n} B_{n,j_n}$

Proposition 6 : preuve II

On a donc (Proposition 1 et Proposition 4)

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{m_i} B_{i,j_i}\right)\cdot 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{m_i} B_{i,j_i} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i}{\beta}\overline{H}\left(VaR_\kappa(S), \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i + 1, \beta\right)$$

Proposition 6 : preuve III

On a déjà démontré que

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]$$

et

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot E\left[\left(\sum_{j_i=1}^{m_i} B_{1,j_i}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \cdots + \sum_{i_1=1}^{m_n} B_{1,i_n} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]$$

Proposition 6 : preuve IV

On combine avec les diapositives précédentes

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n}\cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i}{\beta}\overline{H}\left(VaR_\kappa(S), \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i + 1, \beta\right)$$

et

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n}\cdot \frac{m_i\alpha_i}{\beta}\overline{H}\left(VaR_\kappa(S), \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i + 1, \beta\right)$$

$\square$

Exemple 7 Cossette et collab. (2012)

Pour illustrer les résultats obtenus précédemment, il convient de présenter l'exemple 7 de Cossette et collab. (2012).
Les sinistres sont distribués selon un modèle fréquence sévérité.
$X_i = B_{i,1} + ... + B_{i,M_1}$

$$M_1 \sim Poisson(\lambda = 4)$$

$$M_2 \sim NegBinom(r = 4, q = \frac{1}{2})$$

Il y a de la dépendance entre M_1 et M_2. Celle-ci est exprimée à l'aide d'une copule de Frank (param. de dépendance α).

$$B_1 \sim Gamma(\alpha = 0.50, \beta = 0.1)$$

$$B_2 \sim Gamma(\alpha = 0.25, \beta = 0.1)$$

Code R - Exemple 7

Voir le code R en annexe.

Exemple 7 : Résultats I

Tableau 1 :
Valeurs de covariances et de corrélation selon la dépendance α

α	$Cov(M_1, M_2)$	$\rho(M_1, M_2)$	$Cov(X_1, X_2)$	$Var(S)$
-20.00	-4.83	-0.85	-60.41	329.18
0.00	0.00	0.00	0.00	450.00
20.00	5.06	0.89	63.28	576.57

Exemple 7 : Résultats II

Tableau 2 :
Valeurs de VaR et de TVaR à divers seuils κ

κ	$VaR_\kappa(X_1)$	$VaR_\kappa(X_2)$	$TVaR_\kappa(X_1)$	$VaR_\kappa(X_2)$	sumVaR	sumTVaR
0.25	6.92	1.09	25.66	13.25	8.01	38.91
0.50	15.76	5.65	32.90	18.32	21.41	51.22
0.95	53.94	34.89	68.17	47.27	88.84	115.44
0.99	76.93	54.85	90.42	67.00	131.78	157.42
0.99	86.42	63.32	99.68	75.39	149.75	175.07

Exemple 7 : Résultats III

Tableau 3 :
Valeurs de VaR(S), de TVaR(S) et allocations à divers seuils κ selon la dépendance α

α	κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(X_1;S)$	$TVaR_\kappa(X_2;S)$
-20.00	0.25	16.65	36.35	24.46	11.90
-20.00	0.50	26.49	43.78	29.84	13.94
-20.00	0.95	64.62	78.46	56.45	22.01
-20.00	0.99	86.98	100.07	73.97	26.10
-20.00	0.99	96.19	109.06	81.43	27.64
0.00	0.25	14.13	37.39	24.95	12.43
0.00	0.50	25.75	46.16	30.82	15.34
0.00	0.95	70.69	86.64	57.51	29.14
0.00	0.99	96.50	111.39	73.50	37.89
0.00	0.99	107.02	121.60	80.03	41.57
20.00	0.25	11.67	38.20	25.34	12.86

Proposition 8

Proposition 8 (Cossette et collab., 2012)

Soit $X_1, \ldots X_n$ des distributions composées comme celles que nous venons de discuter tel que $B_i \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}_i, \beta)$. Nous avons

$$F_S(x) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,\ldots,j_n} H(x, \sum_{i=1}^{n} j_i, \beta)$$

où

$$\xi_{j_1,\ldots,j_n} = f_{\underline{M}^*}(j_1, \ldots, j_n)$$

et (Proposition 3)

$$M_i^* = \begin{cases} \sum_{j_i=1}^{M} {}_iK_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}$$

Proposition 8 : preuve I

Preuve
On débute avec

$$\begin{aligned} M_S(t) &= P_{\underline{M}}(M_{B_1}(t), \ldots, M_{B_n}(t)) \\ &= P_{\underline{M}}(P_{K_1}(M_C(t)), \ldots, P_{K_1}(M_C(t))) \quad \text{Prop. 3} \\ &= P_{\underline{M}^*}(M_C(t), \ldots, M_C(t)) \end{aligned}$$

avec

$$P_{\underline{M}^*}(t_1, \ldots, t_n) = P_{\underline{M}}(P_{K_1}(t_1), \ldots, P_{K_n}(t))$$

Proposition 8 : preuve II

On a donc

$$\begin{aligned}
P(M_1^* = j_1, \ldots, M_n^* = j_n) &= P\left(\sum_{s_1=1}^{M_1} K_{1,s_1} = j_1, \ldots, \sum_{s_n=1}^{M_n} K_{n,s_n} = j_n\right) \\
&= E_{\underline{M}}\left[P\left(\sum_{s_1=1}^{M_1} K_{1,s_1} = j_1, \ldots, \sum_{s_n=1}^{M_n} K_{n,s_n} = j_n | \underline{M}\right)\right] \\
&\overset{ind}{=} E_{\underline{M}}\left[\prod_{i=1}^{n} P\left(\sum_{s_i=1}^{M_i} K_{i,s_i} = j_i | M_i\right)\right] \\
&= E_{\underline{M}}\left[\prod_{i=1}^{n} \zeta_{j_i}^{(i)*M_i}\right] = \xi_{j_1,\ldots,j_n}
\end{aligned}$$

Proposition 8 : preuve III

Avec ces poids $\xi_{j_1,\ldots,j_n}$, on a bel et bien la forme désirée. (En utilisant aussi la proposition 6)

$$F_S(x) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,\ldots,j_n} H(x, \sum_{i=1}^{n} j_i, \beta)$$

avec $\alpha_i = 1 \, \forall i \in \{1, \ldots 10\}$ $\square$

Poisson composée multivariée

Loi Poisson composée multivariée avec choc commun

On étudie ensuite l'allocation de capital pour une somme de lois poissons composées, avec de la dépendance dans leur paramètre de fréquence.

On définit $J_0 \sim Poisson(\alpha_0)$ et $J_i \sim Poisson(\lambda_i - \alpha_0)$.

$$M_i = J_0 + J_i$$

$$X_i = B_{i,1} + B_{i,2} + ... + B_{i,M_i}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Proposition 9

Proposition 9 Cossette et collab. (2012)

S suit également une loi Poisson composée.

Son paramètre de fréquence est :

$$\lambda_S = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n - (n-1)\alpha_0$$

Sa sévérité est la loi D définie :

$$F_D(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_1 - \alpha_0}{\lambda_S} F_{B_i}(x) \right) + \frac{\alpha_0}{\lambda_S} F_{B_1+\ldots+B_n}(x)$$

Proposition 9 : preuve I

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= \mathcal{M}_{X_1,\dots,X_n}(t,\dots,t) \\
&= E\left[e^{tX_1}\dots e^{tX_n}\right] \\
&= E_{\mathbf{M}}\left[E\left[e^{t(B_{1,1}+\dots+B_{1,M_1})}\dots e^{t(B_{n,1}+\dots+B_{n,M_2})}\middle| M_1, M_2, \dots\right]\right] \\
&= E_{\mathbf{M}}\left[E\left[\left(e^{tB_1}\right)^{M_1}\dots\left(e^{tB_1}\right)^{M_n}\middle| M_1, M_2, \dots\right]\right] \\
&= E_{\mathbf{M}}\left[\left(E\left[e^{tB_1}\right]\right)^{M_1}\dots\left(E\left[e^{tB_1}\right]\right)^{M_n}\right] \\
&= \mathcal{P}_{M_1,\dots,M_n}\left(\mathcal{M}_{B_1}(t),\dots,\mathcal{M}_{B_n}(t)\right)
\end{aligned}
$$

Proposition 9 : preuve II

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_S(t) &= e^{\alpha_0\left(\prod_i \mathcal{M}_{B_i}(t)-1\right)} \prod_i e^{(\lambda_i-\alpha_0)(\mathcal{M}_{B_i}(t)-1)} \\
&= e^{\alpha_0\left(\prod_i \mathcal{M}_{B_i}(t)-1\right)+\sum_i(\lambda_i-\alpha_0)(\mathcal{M}_{B_i}(t)-1)} \\
&= e^{\alpha_0\left(\prod_i \mathcal{M}_{B_i}(t)\right)+\sum_i(\lambda_i-\alpha_0)(\mathcal{M}_{B_i}(t))-(\Sigma\lambda_i-(n-1)\alpha_0)} \\
&= e^{\lambda_S\left(\frac{\alpha_0}{\lambda_S}\left(\prod_i \mathcal{M}_{B_i}(t)\right)+\sum_i \frac{(\lambda_i-\alpha_0)}{\lambda_S}(\mathcal{M}_{B_i}(t))-1\right)}
\end{aligned}
$$

On peut donc conclure que $S \sim PoissonComp(\lambda_S;D)$

Proposition 9 : preuve III

D est défini comme suit.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_D(t) &= \frac{\alpha_0}{\lambda_S}\left(\prod_i \mathcal{M}_{B_i}(t)\right) + \sum_i \frac{(\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_i}(t) \\ &= \frac{\alpha_0}{\lambda_S}\left(\mathcal{M}_{B_1+\ldots B_n}(t)\right) + \sum_i \frac{(\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_S}\mathcal{M}_{B_i}(t)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_D(t) = \frac{\alpha_0}{\lambda_S}\left(F_{B_1+\ldots B_n}(t)\right) + \sum_i \frac{(\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_S}F_{B_i}(t)$$

$\square$

Maintenant qu'on sait que $S \sim PoissonComposee$, il est possible d'employer les propositions précédentes concernant les lois composées pour trouver $TVaR_S(X)$. Par contre, il faut trouver la densité conjointe d'un X_i avec le reste, noté S_{-i}, pour pouvoir calculer l'allocation TVaR.

$$S = X_i + S_{-i}$$

On va pouvoir conditionner sur :

$$M_i = J_i + J_0$$
$$N_i = J_{-i} + J_0$$

où $J_{-i} \sim Poisson(\lambda_{-i})$ et $\lambda_{-i} = \sum_{j \neq i}(\lambda_j - \alpha_0)$

Loi de S_{-i}

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{S_{-i}} &= \mathcal{P}_{M_1,\dots M_n,(\neq i)}\left(\mathcal{M}_{B_1}(t)\dots\mathcal{M}_{B_n}(t)\right)\\
&= e^{\alpha_0\left(\prod_{j\neq i}\mathcal{M}_{B_j}(t)-1\right)+\sum_{j\neq i}(\lambda_j-\alpha_0)(\mathcal{M}_{B_j}(t)-1)}\\
&= e^{\alpha_0(C_{-i}(t)-1)}e^{\lambda_{-i}(M_{D_{-i}}(t)-1)}\\
&= \mathcal{M}_{\mathcal{C}_{-i}}(t)\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{-i}}(t)
\end{aligned}$$

Donc $S_{-i} = \mathcal{C}_{-i} + \mathcal{D}_{-i}$
et $\mathcal{C}_{-i} = C_{-i,1} + \dots + C_{-i,J_0}$,
$\mathcal{D}_{-i} = D_{-i,1} + \dots + D_{-i,J_0}$.

On remarque que $S_i = X_i + \mathcal{C}_{-i} + \mathcal{D}_{-i}$

Densité conjointe de M_i et N_{-i}

Avant de s'attaquer à l'allocation, il ne reste plus qu'à trouver la loi conjointe de M_i et de N_{-i}.

$$\begin{aligned}
f_{M_i,N_{-i}}(m,n) &= P(M_i = m, N_{-i} = n) \\
&= \sum_{j=0}^{\min(m,n)} P(M_i = m, N_{-i} = n \,|\, J_0 = j) P(J_0 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\min(m,n)} P(J_i = m - j, J_{-i} = n - j) P(J_0 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\min(m,n)} P(J_i = m - j) P(J_{-i} = n - j) P(J_0 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\min(m,n)} f_{J_i}(m - j) f_{J_{-i}}(n - j) f_{J_0}(j)
\end{aligned}$$

Allocation basée sur la TVaR

On a tous les ingrédients pour se lancer.

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X_i;S) &= \frac{1}{1-\kappa} E[X_i 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E\left[E[X_i 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}]\Big| M, N\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa} \sum_m \sum_n f_{M,N}(m,n) E[X_i 1_{\{X_i+\mathscr{C}_{-i}+\mathscr{D}_{-i}>VaR_\kappa(S)\}}]
\end{aligned}$$

Box I

$$= \frac{1}{1-\kappa} \sum_m \sum_n \sum_{j=0}^{\min(m,n)} f_{J_i}(m-j) f_{J_{-i}}(n-j) f_{J_0}(j) E\left[\left(\sum_{l=1}^{m} B_l\right) 1_{\{\sum_{l=1}^{m} B_l + \sum_{l=1}^{n-j} D_{-i,l} + \sum_{l=1}^{j} C_{-i,l} > VaR_\kappa(S)\}}\right]$$

En choisissant la sévérité...

On choisit la loi de sévérité : un mélange d'Erlang.

$$B_i \sim MelangeErlang(\zeta^{(i)}, \beta)$$

Comme C_{-i} est une somme de B_i, alors on sait que C_{-i} suit également un mélange d'Erlang.

$$C_{-i} \sim MelangeErlang(\nu^{(-i)}, \beta)$$

De plus, il peut être prouvé que D_{-i} suit également une loi mélange d'Erlang.

$$D_{-i} \sim MelangeErlang(\tau^{(-i)}, \beta)$$

Preuve

Preuve que $D_{-i} \sim MelangeErlang$.

On sait :

$$\mathcal{M}_{D_{-i}}(t) = \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_{-i}} \mathcal{M}_{B_j}(t)$$

Donc,

$$\begin{aligned} F_{D_{-i}}(t) &= \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_{-i}} F_{B_j}(t) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_{-i}} \left(\zeta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \zeta_l H(x, l, \beta) \right) \\ &= \left(\sum_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_{-i}} \zeta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \alpha_0}{\lambda_{-i}} \zeta_l H(x, l, \beta) \right) \end{aligned}$$

Espérance tronquée avec mélange d'Erlang

Grâce à la proposition 8, on peut obtenir que :

$$E\left[\left(\sum_{l=1}^{m} B_l\right) 1_{\{\sum_{l=1}^{m} B_l + \sum_{l=1}^{n-j} D_{-i,l} + \sum_{l=1}^{j} C_{-i,l} > VaR_\kappa(S)\}}\right] =$$

$$= \sum_k \left(\sum_{l=0}^{k} (\zeta_l^{(i)})^{*m} \sum_{u=0}^{k-l} (\tau_{k-l-u}^{(-i)})^{*n-j} (\nu_u^{(-i)})^{*j} \frac{l}{\beta} \bar{H}(VaR_\kappa(S); k+1; \beta)\right)$$

On peut remplacer cette expression dans la formule d'allocation TVaR (*Box I*) obtenue précédemment :

Box II

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_m \sum_n \sum_{j=0}^{\min(m,n)} f_{J_i}(m-j) f_{J_{-i}}(n-j) f_{J_0}(j) \sum_k \left(\sum_{l=0}^{k} (\zeta_l^{(i)})^{*m} \sum_{u=0}^{k-l} (\tau_{k-l-u}^{(-i)})^{*n-j} (\nu_u^{(-i)})^{*j} \frac{l}{\beta} \bar{H}(VaR_\kappa(S); k$$

Illustrations

Exemple 12 - Énoncé et développements - I

Enoncé de l'exemple 12 de Cossette et collab. (2012)

- Nous avons un portefeuille de $n_1 + n_2$ risques $X_1, \dots, X_{n_1+n_2}$
- $X_i \sim ComPois(\lambda_i,\ F_{B_i})$
- $B_i \sim Gamma\left(\gamma_i,\ \frac{1}{1000}\right)$
  - Pour $i = 1, \dots, n_1$, $\lambda_i = 0.003,\ \gamma_i = 2$
  - Pour $i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, $\lambda_i = 0.004,\ \gamma_i = 1$

L'Objectif est de calculer :

- $E[X_i], Var(X_i), VaR_{0.995}(X_i), TVaR_{0.995}(X_i)$
- et $E[S], Var(S), VaR_{0.995}(S), TVaR_{0.995}(S), TVaR_{0.995}(X_i;\ S)$

Exemple 12 - Énoncé et développements - II

Rappel :

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

avec $M_i \sim Pois(\lambda_i)$ et $B_{i,k} \sim B_i$
On a donc :

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \lambda_i E(B_i) = 10^3 \lambda_i \gamma_i \\ Var(X_i) &= E(M_i) Var(B_i) + Var(M_i) \left(E(B_i)\right)^2 \\ &= \lambda_i (10^6 \gamma_i) + \lambda_i (10^6 \gamma_i^2) \\ &= 10^6 \lambda_i \gamma_i (1 + \gamma_i) \end{aligned}$$

Calcul de $VaR(X_i)$ et $TVaR(X_i)$- I

- Fonction de répartition de X_i

$$F_{X_i}(x) = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \Pr(B_{i,1} + \cdots + B_{i,k} \leq x)$$

- Code R : Fonction de répartition

```
## Fonction de répartition de Xi
cdf.X.gam <- function(x, lam, gam, kmax = 100) {
  ## lam = paramètre lambda de la loi Poisson
  ## gam = paramètre gamma de la loi Gamma
  dpois(0, lam) + sum(dpois(1:kmax, lam) *
                          pgamma(x, (1:kmax) * gam, 1e-3))
}
```

Calcul de $VaR(X_i)$ et $TVaR(X_i)$- II

- Code R : Calcul de la VaR

```
VaR.X.Gam <- function(kappa, lam, gam) {

  optimise(function(x) abs(cdf.X.gam(x, lam, gam) - kappa),
           c(0, 5000))$minimum
}
```

- Expression : Calcul de la TVaR (Proposition 2)

$$TVaR_\kappa(X_i) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} 10^3 q_k(k\gamma_i)\overline{H}\left(VaR_\kappa(X_i),\ \gamma_i k+1,\ 10^{-3}\right)$$

Calcul de $VaR(X_i)$ et $TVaR(X_i)$- III

- Code R : Calcul de la TVaR

```
TVaR.X.Gam <- function(kappa, lam, gam, kmax = 100) {
  varf <- VaR.X.Gam(kappa, lam, gam)

  ss1 <- sapply(1:kmax, function(k) {
    dpois(k, lam) * (k * gam * 1e3) *
    (1 - pgamma(varf, gam * k + 1, 1e-3))
  })

  sum(ss1) / (1 - kappa)
}
```

Résultats et calcul de $Cov(X_i, X_j)$ - I

- Résultats :

i	$E(X_i)$	$Var(X_i)$	$VaR_{\kappa_1}(X_i)$	$VaR_{\kappa_2}(X_i)$	$TVaR_{\kappa_1}(X_i)$	$TVaR_{\kappa_2}(X_i)$
$1, \ldots, n_1$	6	18000	0	3238.27	1200	4478.15
$\geq n_1 + 1$	4	8000	0	2081.60	800	3083.60

$$\kappa_1 = 0.995, \ \kappa_2 = 0.9995$$

- Calcul de $Cov(X_i, X_j)$

Résultats et calcul de $Cov(X_i, X_j)$ - II

On a : $Cov(X_i, X_j) = \alpha_0 E[B_i]E[B_j]$

Preuve :

$$
\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) &= Cov(E[X_i \mid J_0], E[X_j \mid J_0]) + E[Cov(X_i, X_j \mid J_0)] \\
&= Cov\left(E\left[\sum_{l=1}^{J_i+J_0} B_{i,l} \mid J_0\right], E\left[\sum_{k=1}^{J_j+J_0} B_{j,k} \mid J_0\right]\right) + 0
\end{aligned}
$$

Résultats et calcul de $Cov(X_i, X_j)$ - III

$$
\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) &= Cov\left(E\left[\sum_{l=1}^{J_i} B_{i,l} + \sum_{l=1}^{J_0} B_{i,l} \mid J_0\right], E\left[\sum_{k=1}^{J_j} B_{j,k} + \sum_{k=1}^{J_0} B_{j,k} \mid J_0\right]\right. \\
&= Cov\left(E\left[\sum_{l=1}^{J_0} B_{i,l} \mid J_0\right], E\left[\sum_{k=1}^{J_0} B_{j,k} \mid J_0\right]\right) \\
&= Cov\left(J_0\, E[B_i],\ J_0\, E[B_j]\right) \\
&= Var(J_0) E[B_i] E[B_j] \\
&= \alpha_0 E[B_i] E[B_j] \ \text{ pour } \ i \neq j
\end{aligned}
$$

Remarque I

$$\left(B_i \sim Gamma\left(\gamma_i,\ \frac{1}{1000}\right)\right) \Longleftrightarrow \left(B_i \sim Erlang\left(\gamma_i,\ \frac{1}{1000}\right)\right)$$

Donc :

- Pour $i = 1, \ldots, n_1$,

$$F_{B_i}(x) = H\left(x, 2, \frac{1}{1000}\right) = 0 \times H\left(x, 1, \frac{1}{1000}\right) + 1 \times H\left(x, 2, \frac{1}{1000}\right)$$

- Pour $i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2$,

$$F_{B_i}(x) = H\left(x, 1, \frac{1}{1000}\right) = 1 \times H\left(x, 1, \frac{1}{1000}\right) + 0 \times H\left(x, 2, \frac{1}{1000}\right)$$

Remarque II

Moments de S :

$$E[S] = E[X_1 + \cdots + X_{n_1+n_2}] = n_1 E[X_1] + n_2 E[X_{n_1+1}] = 6n_1 + 4n_2$$

$$\begin{aligned} Var(S) &= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} Var(X_i) + 2\sum_{i>j} Cov(X_i, X_j) \\ &= n_1 Var(X_1) + n_2 Var(X_{n_1+1}) + 2\alpha_0 \sum_{i=2}^{n_1+n_2} \sum_{j=1}^{i-1} E[B_i]E[B_j] \\ &= 18000 n_1 + 8000 n_2 + 2 \times 10^6 \alpha_0 \sum_{i=2}^{n_1+n_2} \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_i \gamma_j \end{aligned}$$

Remarque III

Or :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j &= \sum_{i=2}^{n_1}\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j \\
&= \sum_{i=2}^{n_1}\sum_{j=1}^{i-1} 2^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{n_1} y_i y_j + \sum_{i=n_1+2}^{n_1+n_2}\sum_{j=n_1+1}^{i-1} y_i y_j \\
&= \sum_{i=2}^{n_1}(i-1)2^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{n_1} 2 + \sum_{i=n_1+2}^{n_1+n_2}\sum_{j=n_1+1}^{i-1} 1 \\
&= \frac{n_1(n_1-1)}{2}2^2 + 2n_1n_2 + \sum_{i=n_1+2}^{n_1+n_2}(i-n_1-1)
\end{aligned}
$$

Remarque IV

$$\sum_{i=2}^{n_1+n_2} \sum_{j=1}^{i-1} y_i y_j = 2n_1(n_1-1) + 2n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2-1)}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Var(S) &= 18000n_1 + 8000n_2 \\ &\quad + 2 \times 10^6 \alpha_0 \left\{ 2n_1(n_1-1) + 2n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \right\} \end{aligned}$$

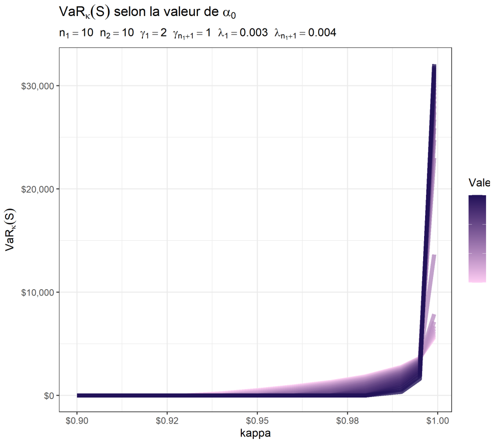
Mesures de risques et contributions - I

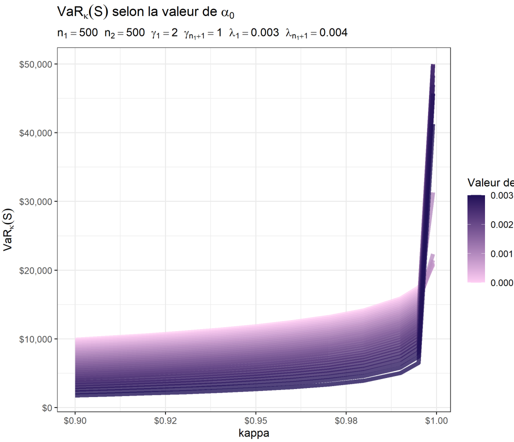
(Voir code R sur NotePad)

α_0	n_1	n_2	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(X_1, S)$	$TVaR_\kappa(X_{n_1+1}, S)$
0	10	10	3652.76	4878.43	376.61	111.23
0	100	100	8139.83	9683.90	73.48	23.36
0	500	500	17492.66	19695.99	27.90	11.49
0.001	10	10	3435.55	9730.09	677.80	294.24
0.001	100	100	7386.39	**16004.62**	453.40	217.98
0.001	500	500	14831.62	**58129.07**	419.16	208.52

$\kappa = 0.995$

Mesures de risques et contributions - II





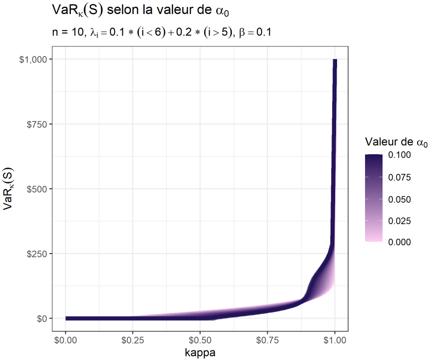
Exemple 13

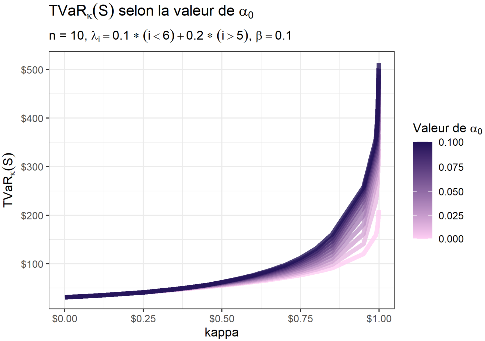
Enoncé de l'exemple 13 de Cossette et collab. (2012)

- Nous avons un portefeuille de 10 risques $X_1, \ldots, X_{10}$
- $X_i \sim ComPois(\lambda_i,\ F_{B_i})$
- $B_i \sim MixErl\left(\underline{\nu}^{(i)},\ 0.1\right)$
  - Pour $i = 1, \ldots, 5$, $\lambda_i = 0.1$, $\underline{\nu}^{(i)} = (0.7, 0.2, 0.1)$
  - Pour $i = 6, \ldots, 10$, $\lambda_i = 0.2$, $\underline{\nu}^{(i)} = (0.1, 0.4, 0.5)$

L'Objectif est le même qu'à l'exemple précédent

Mesures de risques et contributions





Conclusion

Conclusion

Éléments à retenir

- Tirer avantage des propriétés sur la composition des mélanges d'Erlang
- Calculer des contributions basées sur la $TVaR$
- Calculer les contributions en utilisant les propriétés du mélange d'Erlang
- Programmer les contributions pour des distributions composées multivariées de mélange d'Erlang

Bibliographie I

Cossette, H., M. Mailhot et É. Marceau. 2012, «Tvar-based capital allocation for multivariate compound distributions with positive continuous claim amounts», *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 50, nº 2, p. 247–256.

Allocation du travail

1. $TVaR_\kappa(\text{Oli}; \text{Équipe})$
   - Démonstration : Proposition 1, Proposition 2, Proposition 3, Proposition 4, Proposition 5, Proposition 6 et Proposition 8.
   - Programmation : Soutien pour Exemple 13
2. $TVaR_\kappa(\text{Ben}; \text{Équipe})$
   - Démonstration : Proposition 9, Proposition 10 et Proposition 11.
   - Programmation et présentation : Exemple 7.
3. $TVaR_\kappa(\text{Rostan}; \text{Équipe})$
   - Programmation et présentation : Exemple 12 et Exemple 13 .

On a

$$TVaR_\kappa(\text{Oli}; \text{Équipe}) + TVaR_\kappa(\text{Ben}; \text{Équipe}) + TVaR_\kappa(\text{Rostan}; \text{Équipe}) = TVaR_\kappa(\text{Équipe})$$