Copules et modèles individuels de risque

Benjamin Côté
Olivier Côté
Achille Rostan Fossouo Tadjuidje

École d'actuariat
Université Laval, Québec, Canada

31 janvier 2022

UNIVERSITÉ LAVAL

Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

1 Retour sur les copules

2 Copules archimédiennes

3 Modèle fréquence-sévérité

4 Exemples numériques

Retour sur les copules

1 Retour sur les copules
- Définitions
- Démonstrations
- Construction

2 Copules archimédiennes

3 Modèle fréquence-sévérité

4 Exemples numériques

Définition copule

Tout d'abord, il faut comprendre à quoi sert une copule. Les copules s'emploient dans un contexte multivarié. Elles permettent d'extraire la relation de dépendance entre plusieurs variables sans égard à leur marginale.

Définition copule

Notation : $C(u_1, u_2)$
Une copule est une fonction de répartition conjointe de variables aléatoires uniformes. Ainsi,

$$C(u_1, u_2) = F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

Les copules appartiennent donc toutes à la même classe de Fréchet. Il y a une infinité de copules possible, comme il y a une infinité de liens de dépendance possible entre deux mêmes variables.

Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar est ce qui permet d'employer les copules comme moyen d'extraire la dépendance entre des variables aléatoires, peu importe leur loi marginale.

Théorème de Sklar

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = C(F_{X_1}(x_1),\dots,F_{X_n}(x_n))$$

Il peut être vu que n'importe quelle fonction de répartition conjointe peut être définie à l'aide d'une copule et de ses lois marginales.

La copule n'a aucune incidence sur les marginales, **elle ne dicte donc que la dépendance entre elles**.

Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar est ce qui permet d'employer les copules comme moyen d'extraire la dépendance entre des variables aléatoires, peu importe leur loi marginale.

Théorème de Sklar

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = C(F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n))$$

Il peut être vu que n'importe quelle fonction de répartition conjointe peut être définie à l'aide d'une copule et de ses lois marginales.
La copule n'a aucune incidence sur les marginales, **elle ne dicte donc que la dépendance entre elles**.

Théorème de Sklar

Preuve du Théorème de Sklar

$$\begin{aligned}
F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \\
&= P(F_{X_1}^{-1}(U_1) \leq x_1, \ldots, F_{X_n}^{-1}(U_n) \leq x_n) \quad \text{(théorème de la fonction quantile)} \\
&= P(F_{X_1}(F_{X_1}^{-1}(U_1)) \leq F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(F_{X_n}^{-1}(U_n)) \leq F_{X_n}(x_n)) \\
&= P(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), \ldots, U_n \leq F_{X_n}(x_n)) \\
&= F_{U_1,\ldots U_n}(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)) \\
&= C(F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n))
\end{aligned}$$

Construction d'une copule

Inversement, on peut construire une copule à partir de n'importe quelle fonction de répartition, en remaniant le théorème de Sklar.

$$F_{X_1,...,X_n}(F_{X_1}^{-1}(u_1), ..., F_{X_1}^{-1}(u_n)) = C(u_1, ..., u_n)$$

Construction d'une copule

Preuve

$$
\begin{aligned}
F_{X_1,\ldots,X_n}(F_{X_1}^{-1}(u_1),\ldots,F_{X_1}^{-1}(u_n)) &= P(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u_1),\ldots,X_n \leq F_{X_n}^{-1}(u_n)) \\
&= P(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)) \leq F_{X_1}^{-1}(u_1),\ldots,F_{X_n}^{-1}(F_{X_n}(X_n)) \leq F_{X_n}^{-1}(u_n)) \\
&= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1,\ldots,F_{X_n}(X_n) \leq u_n) \\
&= P(U_1 \leq u_1,\ldots,U_n \leq u_n) \quad \text{(théorème de la transformation de la probabilité)} \\
&= F_{U_1,\ldots U_n}(u_1,\ldots,u_n) \\
&= C(u_1,\ldots,u_n)
\end{aligned}
$$

Copules archimédiennes

1 Retour sur les copules

2 Copules archimédiennes
- Définition
- Propriétés
- Exemples
- Mélange commun

3 Modèle fréquence-sévérité

4 Exemples numériques

Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes sont une famille de copules. Ce qui les caractérise est le fait qu'elles sont exprimées sous la forme :

$$C(u_1, ..., u_n) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + ... + \psi^{-1}(u_n))$$

ψ est dit le générateur de la copule archimédienne.

Générateur ψ

Le générateur de la copule archimédienne doit respecter quelques critères :

- ψ doit être monotone décroissant.
- $\psi(0) = 1$
- ${}_{t\to\infty} = 0$

Autrement dit, ce sont là les critères d'une fonction de survie S_X.
On ajoute que

- ψ doit être complètement monotone (dérivées impaires négatives ; dérivées paires positives).

Générateur ψ

Il peut être démontré que ψ est un générateur s'il s'agit d'une transformée de Laplace-Stieljes, $\mathcal{L}_{\Theta}(t)$. Choisir la loi de Θ permet donc de construire une certaine catégorie de copule.

Exemple de générateurs

Table – Copules archimédiennes et lois de Θ sous-jacentes

Copule	Loi de Θ
Cook-Johnston	Gamma
Frank	Logarithmique
Gumble	Stable positive
AMH	Géométrique translatée

Copules archimédiennes et mélanges communs

Il peut être vu que toute copule archimédienne présente un schéma de dépendance basé sur un mélange commun.

Mélange commun : les X_i sont dépendants, car tous dépendants d'un paramètre commun Θ. Les X_i sont donc conditionnellement indépendants (i.e. $X_i|\Theta$ indépendants).

Développement copules archimédiennes

Il est possible d'exprimer une copule archimédienne :

$$
\begin{aligned}
C_{U_1,...,U_n}(u_1,...,u_n) &= \psi(\psi^{-1}(u_1) + ... + \psi^{-1}(u_n)) \\
&= \mathcal{L}_\Theta(\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_1) + ... + \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_n)) \\
&= E[e^{-\theta(\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_1)+...+\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_n))}] \\
&= \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(u_i)} d\theta
\end{aligned}
$$

Développement mélange commun

Il est possible d'exprimer une copule de mélange commun :

$$\begin{aligned}
C_{U_1,\ldots,U_n}(u_1,\ldots,u_n) &= P(U_1 \leq u_1,\ldots,U_n \leq u_n) \quad \text{car c'est une copule} \\
&= \int_0^{\infty} P(U_1 \leq u_1,\ldots,U_n \leq u_n|\Theta = \theta)d\theta \\
&= \int_0^{\infty} P(U_1 \leq u_1|\Theta = \theta)\ldots P(U_n \leq u_n|\Theta = \theta)d\theta \\
&= \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{n} F_{U_i|\Theta}(u_i|\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Mise en commun

Les deux résultats obtenus sont de même forme. Cela permet donc effectivement de conclure que les copules archimédiennes expriment un lien de mélange commun. En outre, par identification, on peut déterminer que :

$$F_{U_i|\Theta}(u_i|\theta) = e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u_i)}$$

c'est-à-dire la forme conditionnelle d'un seul U_i au mélange commun.

Modèle fréquence-sévérité

1 Retour sur les copules

2 Copules archimédiennes

3 Modèle fréquence-sévérité

4 Exemples numériques

Modèle fréquence-sévérité

Les articles Cossette et collab. (2002a) et Cossette et collab. (2002b) présentent un modèle de risques individuels de type fréquence-sévérité et y incorporent des copules pour le modéliser.

Modèle fréquence-sévérité

On définit :

$$S = X_1 + ... + X_n$$

$$X_i = I_i B_i$$

$$I_i \sim Bernoulli(\text{fréquence})$$

$$B_i \sim \text{Loi de sévérité}$$

On cherche à représenter S, afin de pouvoir y évaluer des mesures de risques.
Attention : **il y a de la dépendance entre les** I_i.
Définissons également :

$$N = I_1 + ... + I_n$$

permettant d'exprimer S comme une somme composée si les B_i sont identiquement distribués.

$$S = B_1 + ... + B_N$$

Algorithme de calcul de F_S

Cossette et collab. (2002b) présente une procédure permettant de calculer F_S. Selon celle-ci, en ayant la copule décrivant le lien de dépendance entre les I_i, il est possible de calculer avec exactitude F_S. Nous avons pu appliquer un raccourci à cet algorithme dans l'optique où les I_i sont identiquement distribués, de même que les B_i.

Algorithme de calcul de F_S

$$C(u_1, ..., u_n) \rightsquigarrow F_{I_1,...,I_n} \rightsquigarrow f_{I_1,...,I_n} \rightsquigarrow f_N \rightsquigarrow P_N(t) \rightsquigarrow F_S$$

Détail de l'algorithme - Cossette et collab. (2002b)

modifié

1. Connaître la copule décrivant la dépendance des I_i.
2. Trouver alors la fonction de répartition conjointe $F_{I_1,...,I_n}(i_1, ..., i_n)$.
3. Calculer alors la fonction de densité conjointe $f_{I_1,...,I_n}(i_1, ..., i_n)$, et par le fait même $f_N(x)$.
4. Déduire ensuite la fonction génératrice des probabilités $P_N(t)$.
5. Calculer la fonction de répartition $F_S(x)$ à l'aide de FFT.

Détails de l'algorithme de calcul de F_S

Étapes 1 et 2

Obtenir $F_{\underline{I}}$ à partir de $(F_{I_1}, \ldots, F_{I_n})$ et de $C(u_1, \ldots, u_n)$

À l'aide du théorème de Sklar,

$$F_{\underline{I}}(i_1, ..., i_n) = C(F_{I_1}(i_1), ..., F_{I_n}(i_n))$$

il est possible d'obtenir la fonction de répartition conjointe si on connaît la copule, puisque les fonctions de répartition marginales des I_i sont connues.

Détails de l'algorithme de calcul de F_S

Étape 3

Obtenir $f_{\underline{I}}(i_1, ..., i_n)$ à partir de $F_{\underline{I}}$ et $f_N(t)$ à partir de $f_{\underline{I}}(i_1, ..., i_n)$.

Puisque les $I_i \sim Bernoulli$ et qu'elles sont identiquement distribuées, il est aisé de déterminer la fonction de densité sachant la fonction de répartition. On applique la méthode du rectangle, généralisée à plusieurs dimensions :

$$f_{\underline{I}}(c_{j,n}) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} F_{\underline{I}}(c_{j-k,n})$$

. Où $c_{j,n}$ est un vecteur de n valeurs, soit j uns et $n-j$ zéro (l'ordre n'a pas d'importance puisque les I_i sont i.d.) ? **Notez que c'est le nombre de 1 qui importe dans la formule, et non leur position.** Donc on peut obtenir

$$f_N(t) = \binom{n}{j} f_{\underline{I}}(c_{j,n})$$

Détails de l'algorithme de calcul d' F_S

Étape 4

Obtenir $P_N(t)$ à partir de $f_N(t)$

$P_N(t)$ s'obtient directement puisque

$$P_N(t) = \sum_k f_N(k) t^k$$

Détails de l'algorithme de calcul d' F_S

Étape 5

Obtenir $F_S(t)$ à partir de $P_N(t)$

Comme il est possible d'exprimer S comme une somme composée, tel que vu précédemment, et sachant la densité des B_i, lesquels sont Idi, il est possible de calculer $f_S(t)$ avec FFT.

$$FFT_S = P_N(FFT_B)$$

Note : Si B est continu, il faut discrétiser.

Algorithme de calcul de F_S

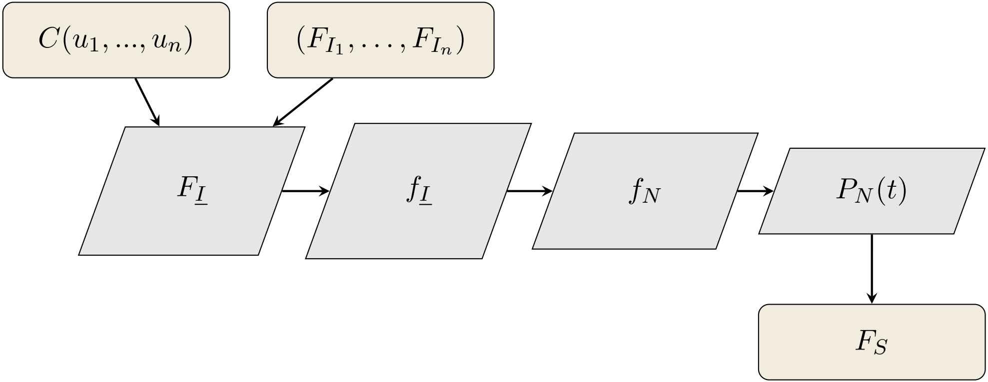


Figure – Résumé de l'algorithme pour F_S

Exemple 3 de Cossette et collab. (2002b)

L'exemple 3 de Cossette et collab. (2002b) permet une application de l'algorithme présenté précédemment.

Hypothèses :

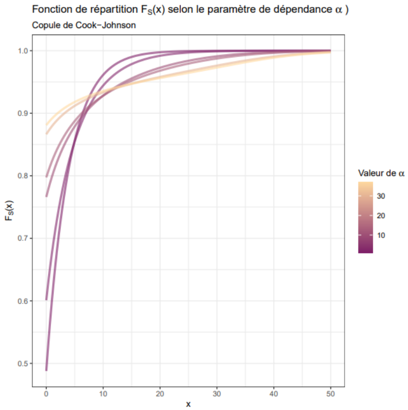
- $n = 20$
- $I_i \sim Bernoulli(q = 0.05)$
- $B_i \sim Gamma(\alpha = 1, \lambda = 0.5)$
- Les I_i sont dépendants selon une copule de Cook-Jonhston.

Copule de Cook-Johnston : $C(u_1, ..., u_n) = \left(u_1^{-\alpha} + ... + u_n^{-\alpha} - (n-1)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$

α est le paramètre de dépendance.

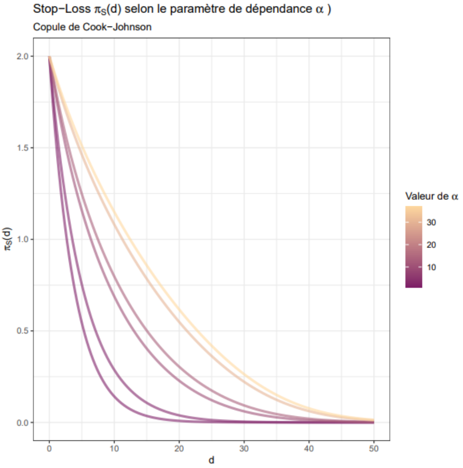
Exemple 3 de Cossette et collab. (2002b)

On a la copule, on peut donc appliquer successivement les étapes de l'algorithme pour obtenir la fonction de répartition de S. Le graphique ci-dessous la présente pour plusieurs valeurs de α.



Exemple 3 de Cossette et collab. (2002b)

Ayant la fonction de répartition, il est aussi possible de calculer la stop-loss.



Exemples numériques

1 Retour sur les copules

2 Copules archimédiennes

3 Modèle fréquence-sévérité

4 Exemples numériques
- Exemple 3
- Algorithme 6
- Exemple 7
- Exemple 8
- Exemple 9

Exemple 3

Énoncé de l'exemple 3 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons d variables aléatoires $X_i \sim \text{Bern}(q)$
- Les marginales F_{X_i} sont liées par une copule archimédienne basée sur une TLS.
- Il faut trouver l'expression de $f_S(k)$.

Exemple 3 : développement I

On a

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(0) \overset{arch}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}\left(F_{X_i}(0)\right)}$$
$$\overset{\text{Ex. 3}}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(1-q)} \quad \text{Puisque } X_i \sim \text{Bern}(q)$$

Puisque $(X_i|\Theta = \theta)$ est toujours une variable dichotomique et que

$$P(X_i = 0|\Theta = \theta) = e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(1-q)}$$

on retrouve que $(X_i|\Theta = \theta) \sim \text{Bern}(q^* = 1 - e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(1-q)})$

Exemple 3 : développement II

Tel qu'expliqué précédemment, la dépendance des copules archimédiennes est exclusivement basée sur la variable aléatoire sous-jacente Θ. La somme des variables aléatoires $(X_i|\Theta = \theta)$ est donc une somme de variable aléatoire Bernoulli indépendante. On a :

$$(S|\Theta = \theta) = \sum_{i=1}^{d} (X_i|\Theta = \theta) \sim \mathrm{Bin}(d, q^*)$$

Exemple 3 : développement III

La fonction de densité de la variable aléatoire $(S|\Theta=\theta)$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
f_{S|\Theta=\theta}(k) &= \binom{d}{k}\left(1-e^{-\theta\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)}\right)^{k} e^{-\theta\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(d-k)} \\
&= \binom{d}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1)^{k-j}\left(-e^{-\theta\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)}\right)^{j} e^{-\theta\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(d-k)} \quad \text{(théorème binomial)} \\
&= \binom{d}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j} e^{-\theta\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(1-q)(j+d-k)}
\end{aligned}$$

Exemple 3 : développement IV

Finalement, lorsqu'on tente d'obtenir $f_S(k)$ à partir de $f_{S|\Theta=\theta}(k)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
f_S(k) &= E_\Theta(f_{S|\Theta,}(k)) \\
&= E_\Theta\left(\binom{d}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j e^{-\Theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(1-q)(j+d-k)}\right) \\
&= \binom{d}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j E_\Theta\left(e^{-\Theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(1-q)(j+d-k)}\right) \\
&= \binom{d}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j \mathcal{L}_\Theta\left(\mathcal{L}_\Theta^{-1}\left(1-q\right)\left(j+d-k\right)\right)
\end{aligned}
$$

Cette équation est valide pour tout k dans $\{0,\ldots,d\}$

À retenir de l'exemple 3

- Dans certaines situations, il est possible d'avoir de belles expressions pour la densité.
  - Même si l'algorithme qui sera présenté aux prochaines diapositives est très efficace, il est toujours plus efficace d'avoir une expression simple pour faire nos calculs.
- L'indépendance conditionnelle des copules archimédiennes basées sur les TLS nous permet, dans certaines situations, d'obtenir de belles expressions pour l'ordinateur.

Motivation pour l'algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

L'algorithme de la prochaine diapositive permet de faire usage d'une propriété importante des copules archimédiennes basées sur les TLS.

- La dépendance est exclusivement introduite par une variable sous-jacente Θ
- Les variables aléatoires unies par une copule archimédienne sont indépendantes conditionnellement à $\Theta = \theta$
  - Nous connaissons beaucoup d'outils d'agrégation très efficaces en présence d'indépendance (comme FFT ou Panjer).

Motivation pour l'algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

L'algorithme de la prochaine diapositive permet de faire usage d'une propriété importante des copules archimédiennes basées sur les TLS.

- La dépendance est exclusivement introduite par une variable sous-jacente Θ
- Les variables aléatoires unies par une copule archimédienne sont indépendantes conditionnellement à $\Theta = \theta$
  - Nous connaissons beaucoup d'outils d'agrégation très efficaces en présence d'indépendance (comme FFT ou Panjer).

Motivation pour l'algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

L'algorithme de la prochaine diapositive permet de faire usage d'une propriété importante des copules archimédiennes basées sur les TLS.

- La dépendance est exclusivement introduite par une variable sous-jacente Θ
- Les variables aléatoires unies par une copule archimédienne sont indépendantes conditionnellement à $\Theta = \theta$
  - Nous connaissons beaucoup d'outils d'agrégation très efficaces en présence d'indépendance (comme FFT ou Panjer).

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, ..., \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, ..., \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, ..., \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer
   $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, ..., \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, ..., \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer
   $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

UNIVERSITÉ LAVAL

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, ..., \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, \ldots, \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

UNIVERSITÉ LAVAL

Algorithme d'agrégation pour copule archimédienne

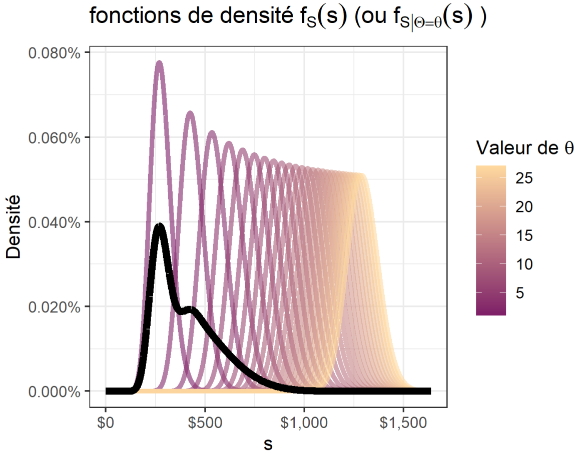
Algorithme 6 de Cossette et collab. (2018) (revisité)

1. Choisir θ^* tel que $F_\Theta(\theta^*) \geq 1 - \varepsilon$, où ε est une très petite constante tel que 10^{-10}
2. Pour chaque valeur de θ dans $1, ..., \theta^*$
   a) Pour chaque variable X_i, calculer
   $F_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h) = e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(k_i h))} \quad \forall k_i \in \mathbb{N}_0$
   b) Pour chaque variable X_i, calculer $f_{X_i|\Theta=\theta}(k_i h)$
   c) Aggréger les risques $(X_i|\Theta = \theta)$ à l'aide d'un algorithme d'agrégation de risques indépendants (comme FFT) pour obtenir $f_{S|\Theta=\theta}(kh) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$
   d) Retourner $f_{S|\Theta=\theta}(kh)$
3. Calculer $f_\Theta(\theta) \quad \forall \theta \in \{1, \ldots, \theta^*\}$
4. Calculer $f_S(kh) = \sum_{\theta=1}^{\theta^*} f_{S|\Theta=\theta}(kh) f_\Theta(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Aggrégation des courbes $f_{S|\Theta=\theta}$ (Étape 4 revisitée)

Éléments importants

- Chaque θ engendre un $f_{S|\Theta=\theta}(s)$.
- α influence :
  - $f_{S|\Theta=\theta}$
  - $f_{\Theta}(\theta)$

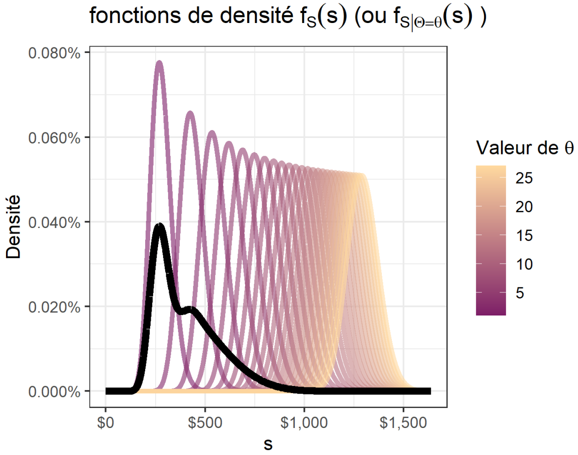


UNIVERSITÉ LAVAL

Aggrégation des courbes $f_{S|\Theta=\theta}$ (Étape 4 revisitée)

Éléments importants

- Chaque θ engendre un $f_{S|\Theta=\theta}(s)$.
- α influence :
  - $f_{S|\Theta=\theta}$
  - $f_{\Theta}(\theta)$



Exemple 7

Énoncé de l'exemple 7 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 4 variables aléatoires $X_i \sim \text{Bin}(10, 0.1i)$
- Les marginales F_{X_i} sont liées par une copule Frank.
  - Nous avons donc que Θ suit une distribution logarithmique
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

Exemple 7

Énoncé de l'exemple 7 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 4 variables aléatoires $X_i \sim \text{Bin}(10, 0.1i)$
- Les marginales F_{X_i} sont liées par une copule Frank.
  - Nous avons donc que Θ suit une distribution logarithmique
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer E$[S]$, Var(S), VaR$_\kappa(S)$ et TVaR$_\kappa(S)$ (pour divers κ).

Exemple 7

Énoncé de l'exemple 7 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 4 variables aléatoires $X_i \sim \text{Bin}(10, 0.1i)$
- Les marginales F_{X_i} sont liées par une copule Frank.
  - Nous avons donc que Θ suit une distribution logarithmique
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

Relations importantes

Pour la copule Frank, nous avons que

$$\mathcal{L}_{\Theta}(t) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - (1 - e^{-\alpha})e^{-t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1 - e^{-\alpha u}}{1 - e^{-\alpha}}\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 7}}{=} e^{-\theta\ln\left(\frac{1-e^{-\alpha F_{X_i}(x)}}{1-e^{-\alpha}}\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{(1 - e^{-\alpha})^{\theta}}{\theta\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule Frank, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-(1-e^{-\alpha})e^{-t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha}}\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \stackrel{\text{arch.}}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \stackrel{\text{Ex. 7}}{=} e^{-\theta\ln\left(\frac{1-e^{-\alpha F_{X_i}(x)}}{1-e^{-\alpha}}\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(1-e^{-\alpha})^\theta}{\theta\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule Frank, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-(1-e^{-\alpha})e^{-t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha}}\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 7}}{=} e^{-\theta\ln\left(\frac{1-e^{-\alpha F_{X_i}(x)}}{1-e^{-\alpha}}\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(1-e^{-\alpha})^\theta}{\theta\alpha}, \quad k\in\mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule Frank, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-(1-e^{-\alpha})e^{-t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-e^{-\alpha u}}{1-e^{-\alpha}}\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 7}}{=} e^{-\theta\ln\left(\frac{1-e^{-\alpha F_{X_i}(x)}}{1-e^{-\alpha}}\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(1-e^{-\alpha})^\theta}{\theta\alpha}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

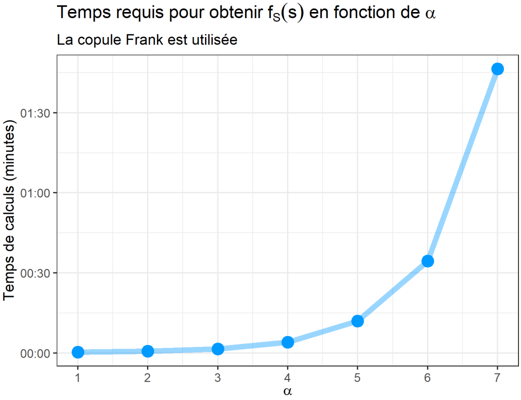
Résultats

	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$	$\alpha = 6$
E[S]	10	10	10
Var(S)	9.99256	15.15425	19.90096
$\text{VaR}_{0.9}(S)$	14	15	16
$\text{VaR}_{0.999}(S)$	20	21	23
$\text{TVaR}_{0.9}(S)$	15.82535	17.11038	18.04888
$\text{VaR}_{0.999}(S)$	20.88054	22.39552	23.41422

Table – Reproduction des résultats de la **Table 1** de Cossette et collab. (2018)

À retenir de l'exemple 7

- Il n'était pas nécessaire d'avoir une expression élégante pour $F_{X_i|\Theta=\theta}$ avoir accès à l'efficacité computationnelle prodiguée par l'**algorithme 6**.
- Le temps de calcul augmente dramatiquement avec le paramètre de dépendance α de la copule Frank augmente.



Exemple 8

Énoncé de l'exemple 8 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 100 variables aléatoires identiquement distribuées $X_i \sim \text{Bin}(10, 0.1)$
- Les marginales F_{X_i} sont liés par une copule AMH.
  - Nous avons donc $\Theta \sim \text{Géo}(1-\alpha)$ (translatée)
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

Exemple 8

Énoncé de l'exemple 8 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 100 variables aléatoires identiquement distribuées $X_i \sim \text{Bin}(10, 0.1)$
- Les marginales F_{X_i} sont liés par une copule AMH.
  - Nous avons donc $\Theta \sim \text{Géo}(1 - \alpha)$ (translatée)
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

UNIVERSITÉ LAVAL

Exemple 8

Énoncé de l'exemple 8 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 100 variables aléatoires identiquement distribuées $X_i \sim \text{Bin}(10, 0.1)$
- Les marginales F_{X_i} sont liés par une copule AMH.
  - Nous avons donc $\Theta \sim \text{Géo}(1-\alpha)$ (translatée)
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

UNIVERSITÉ LAVAL

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = \frac{1-\alpha}{e^t - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u} + \alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 8}}{=} e^{-\theta \ln\left(\frac{1-\alpha}{F_{X_i}(x)} + \alpha\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_{\Theta}(t) = \frac{1-\alpha}{e^t - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u} + \alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta \mathcal{L}_{\Theta}^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 8}}{=} e^{-\theta \ln\left(\frac{1-\alpha}{F_{X_i}(x)} + \alpha\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_{\Theta}(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = \frac{1-\alpha}{e^t - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u} + \alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 8}}{=} e^{-\theta \ln\left(\frac{1-\alpha}{F_{X_i}(x)} + \alpha\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = \frac{1-\alpha}{e^t - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u} + \alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 8}}{=} e^{-\theta \ln\left(\frac{1-\alpha}{F_{X_i}(x)} + \alpha\right)}$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

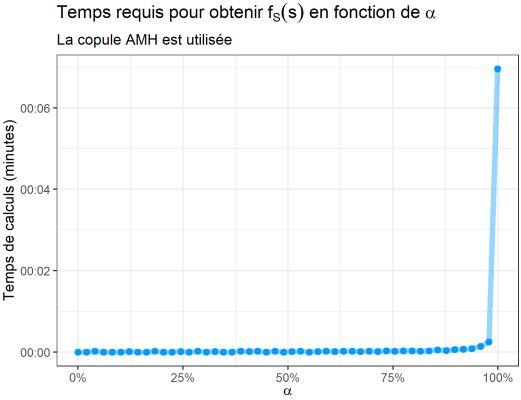
Résultats

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
E[S]	100	100	100
Var(S)	90	1454.027	2792.839
$\text{VaR}_{0.9}(S)$	112	156	172
$\text{VaR}_{0.999}(S)$	130	225	242
$\text{TVaR}_{0.9}(S)$	116.934	176.206	192.113
$\text{VaR}_{0.999}(S)$	133.277	233.651	250.154

Table – Reproduction des résultats de la **Table 3** de Cossette et collab. (2018)

À retenir de l'exemple 8

- L'**algorithme 6** permet d'agréger 100 variables aléatoires de manières très rapides.
- Le temps de calcul augmente significativement seulement lorsque le paramètre de dépendance α de la copule AMH est très près de 1.



Exemple 9

Énoncé de l'exemple 9 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 40 variables aléatoires identiquement distribuées $X_i \sim \text{Exp}(\lambda = 0.1)$ tel que $\text{E}[X] = 10$
- Les marginales F_{X_i} sont liéees par une copule AMH.
  - Nous avons donc $\Theta \sim \text{Géo}(1 - \alpha)$ (translatée)
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

Exemple 9

Énoncé de l'exemple 9 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 40 variables aléatoires identiquement distribuées $X_i \sim \text{Exp}(\lambda = 0.1)$ tel que $\text{E}[X] = 10$
- Les marginales F_{X_i} sont liéees par une copule AMH.
  - Nous avons donc $\Theta \sim \text{Géo}(1 - \alpha)$ (translatée)
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

Exemple 9

Énoncé de l'exemple 9 de Cossette et collab. (2018)

- Nous avons 40 variables aléatoires identiquement distribuées $X_i \sim \text{Exp}(\lambda = 0.1)$ tel que $\text{E}[X] = 10$
- Les marginales F_{X_i} sont liéees par une copule AMH.
  - Nous avons donc $\Theta \sim \text{Géo}(1 - \alpha)$ (translatée)
  - Ce constat est très important pour utiliser l'algorithme 6.
- Il faut calculer $\text{E}[S]$, $\text{Var}(S)$, $\text{VaR}_\kappa(S)$ et $\text{TVaR}_\kappa(S)$ (pour divers κ).

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = \frac{1-\alpha}{e^t-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u}+\alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 9}}{=} e^{-\theta\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-e^{-0.1x}}+\alpha\right)} = \left(\frac{1-e^{-0.1x}}{1-\alpha e^{-0.1x}}\right)^\theta$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = \frac{1-\alpha}{e^t - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u} + \alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 9}}{=} e^{-\theta \ln\left(\frac{1-\alpha}{1-e^{-0.1x}} + \alpha\right)} = \left(\frac{1-e^{-0.1x}}{1-\alpha e^{-0.1x}}\right)^\theta$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = \frac{1-\alpha}{e^t - \alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u} + \alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta \mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 9}}{=} e^{-\theta \ln\left(\frac{1-\alpha}{1-e^{-0.1x}} + \alpha\right)} = \left(\frac{1-e^{-0.1x}}{1-\alpha e^{-0.1x}}\right)^\theta$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Relations importantes

Pour la copule AMH, nous avons que

$$\mathcal{L}_\Theta(t) = \frac{1-\alpha}{e^t-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\Theta^{-1}(u) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{u}+\alpha\right)$$

Avec ces fonctions, on peut déduire

$$F_{X_i|\Theta=\theta}(x) \overset{\text{arch.}}{=} e^{-\theta\mathcal{L}_\Theta^{-1}(F_{X_i}(x))} \overset{\text{Ex. 9}}{=} e^{-\theta\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-e^{-0.1x}}+\alpha\right)} = \left(\frac{1-e^{-0.1x}}{1-\alpha e^{-0.1x}}\right)^\theta$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de ceci

$$f_\Theta(\theta) = \alpha^{k-1}(1-\alpha), \quad k \in \mathbb{N}$$

Nous sommes prêts à utiliser l'algorithme 6 pour terminer l'exemple.

Code R I

```
## Paramètres initiaux
alpha <- 0.5          # Pour la copule AMH
h <- 0.1              # Pas de discrétisation
xmax <- 5e3           # Valmax tq F_Xi|The=the(xmax) \approx 1

## Étape 1
theta_star <- qnbinom(1 - 1e-8, 1, 1 - alpha) + 1
```

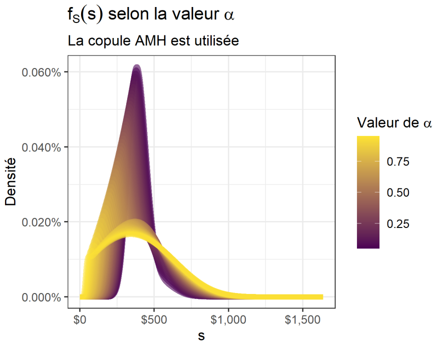
Code R II

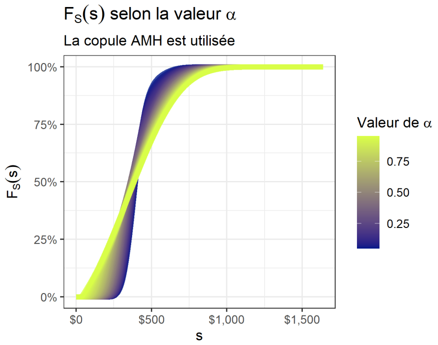
```
## Étape 2
f_s_theta <- sapply(1:theta_star, function(thet){
  ## Étape 2a) et 2b) (L'étape 2a est complétée dans la fonction)
  f_xi_theta <- f_xtheta(xmax, h, thet, alpha, method = "lower")

  ## Étape 2c) avec FFT
  ftx <- fft(c(f_xi_theta, rep(0, 2^14 - length(f_xi_theta))))
  f_s_theta <- Re(fft(ftx^40, TRUE))/aa            # Inversion

  ## Étape 2d)
  return(f_s_theta)
})
```

Code R III

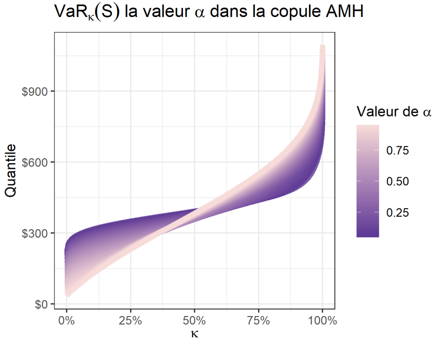
```
## Étape 3
f_theta <- dnbinom(values_theta - 1, 1, 1 - alpha)

## Étape 4
f_s <- apply(f_s_theta, 1, function(a) sum(a * f_theta))
```

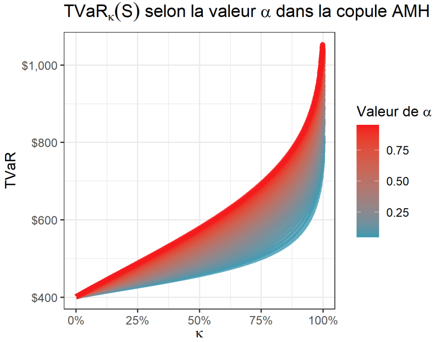
Étude de $f_S(s)$ et $F_S(s)$ selon le degré de dépendance



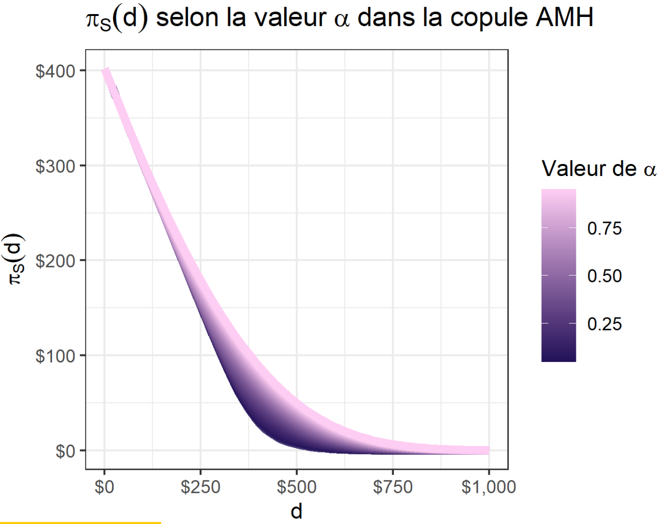


Étude de $\mathrm{VaR}_{\kappa}(S)$ et $\mathrm{TVaR}_{\kappa}(S)$ selon le degré de dépendance





Étude de la prime stop-loss $\pi_S(d)$ selon le degré de dépendance



Bibliographie I

Cossette, H., P. Gaillardetz et E. Marceau. 2002a, « Common mixture in the individual risk model », *Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung*, vol. 2, p. 131–157.

Cossette, H., P. Gaillardetz, É. Marceau et J. Rioux. 2002b, « On two dependent individual risk models », *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 30, n° 2, p. 153–166.

Cossette, H., E. Marceau, I. Mtalai et D. Veilleux. 2018, « Dependent risk models with archimedean copulas : A computational strategy based on common mixtures and applications », *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 78, p. 53–71.