Introduction

On a

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,du$$

$$= \frac{E(X\cdot 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}) + VaR_\kappa(X)\left[F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa\right]}{1-\kappa}$$

Lorsque X est continu, on a toujours $F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa = 0$, on aura donc :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E(X\cdot 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}})}{1-\kappa} = E(X \mid X > VaR_\kappa(X))$$

Proposition 1

$$f_X(x) = h(x,\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$ (définition d'une gamma)

$$F_X(x) = H(x,\alpha,\beta) = \int_0^x h(x,\alpha,\beta)\,dx.\quad (x>0)$$ (définition d'une fonction de répartition)

$$E(X\cdot 1_{\{X>b\}}) = \int_b^\infty x\cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int_b^\infty \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1} e^{-\beta x}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(b, \alpha+1, \beta)$$

On a donc, pour $X \sim Gama(\alpha, \beta)$

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E(X) \cdot \bar{H}(VaR_\kappa(X), \alpha+1, \beta)}{1-\kappa}$$

$$E(X \cdot 1_{\{X>b\}}) = E(E(X \cdot 1_{\{X>b\}} | M))$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k E((B_1 + \ldots + B_k) \cdot 1_{\{B_1+\ldots+B_k > b\}})$$

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M>0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k E(B_1 + \ldots + B_k) \cdot \bar{H}(b, \alpha k+1, \beta)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot \frac{\alpha k}{\beta} \cdot \bar{H}(b, \alpha k+1, \beta)$$

Proposition 2

Une loi gama composée tel que

$$F_X(x) = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot H(x, \alpha k, \beta)$$

$$VaR_\kappa(X) \longrightarrow \text{optimize. R.}$$

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{\alpha k}{\beta} \cdot \bar{H}(VaR_\kappa(X), \alpha k+1, \beta)$$ (continuous case)

Soit Y un mélange d'Erlang $Y \sim MixErl(\underline{\zeta}, \beta)$

On a

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k h(x, k, \beta)$$

$$F_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x, k, \beta)$$

On peut réécrire Y comme étant

$$Y = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} C_k, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases}$$

avec $C_k \sim Exp(\beta)$ et K une v.a. t.q.

$$P(K=i) = \zeta_i \quad \text{et} \quad P_K(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i s^i$$

il est possible d'avoir un poid à 0 $\zeta_0 > 0$.

On peut se servir de la proposition 2 pour avoir la $TVaR_\kappa(Y)$.

$$TVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \frac{k}{\beta} \bar{H}(VaR_\kappa(Y), k+1, \beta)$$

Proposition 3

Soit X une loi composée avec $B \sim MixErl(\underline{\zeta}, \beta)$, $\{\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, \dots)\}$, alors $X \sim MixErl(\underline{\xi}, \beta)$ avec $\underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots)$. On peut réécrire X comme étant

Fréquence globale

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M^*} C_j, & M^* > 0 \\ 0 & M^* = 0 \end{cases}$$

(Combien de sinistres)

et M^* est

Fréquence de la fréquence

sévérité de la fréquence

$$M^* = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 0. \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

(Pour combien d'occurence le sinistre « j » va-t-il compter)

On a $P(M^* = k) = \varepsilon_k$

On peut écrire

$$\mathcal{L}_Y(t) = P_M(P_K(\mathcal{L}_C(t))) = P_{M^*}(\mathcal{L}_C(t))$$

$$P_{M^*}(t) = \underbrace{P_M}_{\text{algorithme d'aggrégation}}(P_K(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j s^j$$

Aggrégation du Capital selon la $TVaR_K(X)$

$$TVaR_K(X_i ; S) = \frac{E(X_i \cdot 1_{\{S > VaR_K(S)\}}) + \beta_S E\left[X_i \cdot 1_{\{S = VaR_K(S)\}}\right]}{1-K}$$

0 for continuous.

avec $\beta_S = \begin{cases} \dfrac{P(S \leq VaR_K(S)) - K}{P(S = VaR_K(S))}, & P(S = VaR_K(S)) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

On a aussi

$$TVaR_K(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_K(X_i, S)$$

Pour le cas continue cette formule se simplifie

$$TVaR_K(X_i ; S) = \frac{1}{1-K} \cdot E(X_i \cdot 1_{\{S > VaR_K(S)\}}) = E(X_i \mid S > VaR_K(S))$$

Travaillons sur $E(X \cdot 1_{\{S>a\}})$

$$S_{-i} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} X_l \implies S_{-1} = X_2 + \dots + X_n .$$

On a

$$E(X \cdot 1_{\{S>a\}}) = \int_a^{\infty} E(X \cdot 1_{\{S=s\}}) \, ds$$

avec

$$E(X \cdot 1_{\{S=s\}}) = \underbrace{\int_0^s x \cdot f_{X_1}(x) \, f_{S_{-1}}(s-x) \, dx}_{\text{Convolution}}$$

Proposition 4

Soit $S = X_1 + \dots + X_n$ où $X_i \sim Gama(\alpha_i, \beta)$

on a

$S \sim Gama(\alpha_{tot}, \beta)$. avec $\alpha_{Tot} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$TVaR_k(X_i ; S) = \frac{1}{1-k} \cdot E(X_i \cdot 1_{\{S > VaR_k(S)\}})$$

$$E(X_i \cdot 1_{\{S > VaR_k(S)\}}) = \int_{VaR_k(S)}^{\infty} \int_0^s x \cdot f_{X_i}(x) \, f_{S_{-i}}(s-x) \, dx \, ds$$

$$E(X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{S=s\}}) = \int_0^s x \cdot f_X(x_1)\, f_{S_{-1}}(s-x)\, dx$$

$$= \int_0^s x \cdot \frac{\beta^{\alpha_1}\, \beta^{\alpha_{TOT}-\alpha_1}\, x^{\alpha_1-1}\, (s-x)^{\alpha_{TOT}-\alpha_1-1}\, e^{-\beta x}\, e^{-\beta(s-x)}}{\Gamma(\alpha_1)\, \Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_1)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_1)} \int_0^s \beta^{\alpha_{TOT}}\, x^{\alpha_1+1-1}\, (s-x)^{\alpha_{TOT}-\alpha_1-1} \cdot e^{-\beta s}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_{TOT})}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_1)} \cdot \frac{\beta^{\alpha_{TOT}} \cdot e^{-\beta s}}{\Gamma(\alpha_{TOT})} \cdot \int_0^s s^{\alpha_1+1-1} \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^{\alpha_1+1-1} s^{\alpha_{TOT}-\alpha_1-1} \left(1-\frac{x}{s}\right)^{\alpha_{TOT}-\alpha_1-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_{TOT})}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_1)} \cdot \frac{\beta^{\alpha_{TOT}} \cdot e^{-\beta s}}{\Gamma(\alpha_{TOT})} \cdot \int_0^s s^{\alpha_{TOT}-1} \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^{\alpha_1+1-1} \left(1-\frac{x}{s}\right)^{\alpha_{TOT}-\alpha_1-1} dx$$

$$u = \frac{x}{s} \qquad s\,du = dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_{TOT})}{\Gamma(\alpha_1)\cancel{\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_1)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_1)}\,\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)} \cdot \frac{\beta^{\alpha_{TOT}}\, s^{\alpha_{TOT}-1+1} \cdot e^{-\beta s}}{\Gamma(\alpha_{TOT})} \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)\, u^{\alpha_1+1-1} (1-u)^{\alpha_{TOT}-\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_{TOT}-\alpha_1)} \cdot du}_{\text{Densité Beta}}$$

Densité Beta

$\alpha^* = \alpha_1 + 1$

$\beta^* = \alpha_{TOT} - \alpha_1$

$$= \frac{\alpha_1}{\alpha_{TOT}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_{TOT}+1)}{\Gamma(\alpha_{TOT})} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta^{\alpha_{TOT}+1} \cdot s^{\alpha_{TOT}+1-1}\, e^{-\beta s}}{\Gamma(\alpha_{TOT})}$$

$$= \frac{\alpha_1}{\beta} \cdot h(s, \alpha_{TOT}+1, \beta)$$

On a donc

$$E(X_i \cdot \mathbb{1}_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}) = \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} E(X_i \cdot \mathbb{1}_{\{S=s\}})\, ds$$

$$= \frac{\alpha_1}{\beta}\, \bar{H}(VaR_\kappa(S), \alpha_{TOT}+1, \beta)$$

On a donc

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{1}{1-\kappa}\cdot E\left(X_i \cdot 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\kappa}\cdot\frac{\alpha_i}{\beta}\bar{H}\left(VaR_\kappa(S), \alpha_{TOT}+1, \beta\right).$$

Proposition 5

Soit n risques $X_1, \dots, X_n$ où $X_i \sim MixErl(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta_i)$

avec $\underline{\zeta}^{(i)} = (\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, \dots)$ $\zeta_k^{(i)} = P(K_i = k)$

et $\beta_i = \beta$

Alors $S = \sum_{\ell=1}^{n} X_\ell \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$ où

$(\nu_0, \nu_1, \dots)$ avec $\nu_k = P\left(\sum_{\ell=1}^{n} K_\ell = k\right)$ pour

$k \in \mathbb{N}$.

$$M_S(r) = E(e^{rS}) = E\left(e^{r(X_1+\dots+X_n)}\right)$$

$$\overset{ind.}{=} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(r) = \prod_{i=1}^{n} P_{K_i}(M_C(r)) = \prod_{i=1}^{n} E\left((M_C(r))^{K_i}\right)$$

Proposition 3

$$\overset{ind.}{=} E\left(\prod_{i=1}^{n}(M_C(r))^{K_i}\right) = E\left(M_C(r)^{\sum_{i=1}^{n} K_i}\right) = P_{\sum_{i=1}^{n} K_i}(M_C(r))$$

où $P\left(\sum_{i=1}^{n} K_i = a\right) = \nu_a$.

Ainsi, $S \sim MixErl(\underline{v}, \beta)$

En reprenant la <u>proposition 2</u>, on a donc que

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{1}{1-\kappa} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cdot \frac{k}{\beta} \cdot \bar{H}\left(VaR_\kappa(S); k+1, \beta\right)$$

$\rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} K_i = k\right)$

Obtenu par une convolution des K_i (fft)

$\rightarrow$ Obtenu numériquement

Maintenant,

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{1}{1-\kappa} E\left[X_i \cdot 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\kappa} \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} E\left(X_i \cdot 1_{\{S=s\}}\right) ds$$

$$E\left(X_i \cdot 1_{\{S=s\}}\right) = \int_0^s x \cdot f_{X_i}(x) \cdot f_{S_{-i}}(s-x)\, dx$$

$\rightarrow$ Sachant que $S \sim MixErl(\underline{v}, \beta)$, on peut facilement montrer que

$$S_{-i} = S - X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_i \sim MixErl\left(\underline{v}^{(-i)}, \beta\right)$$

où $P\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K_i = a\right) = v_a^{(-i)}$

$$E(X_i \cdot 1_{\{S=s\}}) = \int_0^s x \cdot \left(\varsigma_0 1_{\{x=0\}} + \sum_{i=1}^{\infty} \varsigma_i \cdot \frac{\beta^i x^{i-1} e^{-\beta i}}{\Gamma(i)}\right)\left(\nu_0^{(-i)} \cdot 1_{\{s=x\}} + \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{(-i)} \frac{\beta^j (s-x)^{j-1} e^{-\beta j}}{\Gamma(j)}\right) dx$$

always 0.

$$= \int_0^s x \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \varsigma_i \cdot \frac{\beta^i \cdot x^{i-1} e^{-\beta i}}{\Gamma(i)} \cdot \nu_0^{(-i)} \cdot 1_{\{s=x\}} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{(-i)} \varsigma_i \cdot \frac{\beta^i \cdot x^{i-1} e^{-\beta i}}{\Gamma(i)} \cdot \frac{\beta^j (s-x)^{j-1} e^{-\beta j}}{\Gamma(j)} \right\} dx$$

$$= \int_0^s x \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \varsigma_j \cdot \nu_{k-j}^{(-i)} \cdot \frac{\beta^j x^{j-1} e^{-\beta j}}{\Gamma(j)} \cdot \frac{\beta^{k-j} \cdot (s-x)^{k-j-1} \cdot e^{-\beta(k-j)}}{\Gamma(k-j)} \right\} dx$$

total sinistre

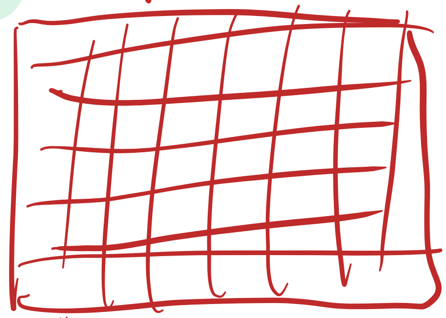
sinistres provenant de X

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \varsigma_j \cdot \nu_{k-j}^{(-i)} \cdot \int_0^s x \cdot \frac{\beta^j x^{j-1} e^{-\beta j}}{\Gamma(j)} \cdot \frac{\beta^{k-j} (s-x)^{k-j-1} e^{-\beta(k-j)}}{\Gamma(k-j)} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \varsigma_j \cdot \nu_{k-j}^{(-i)} \frac{j}{\beta} \cdot h(s, k+1, \beta)$$

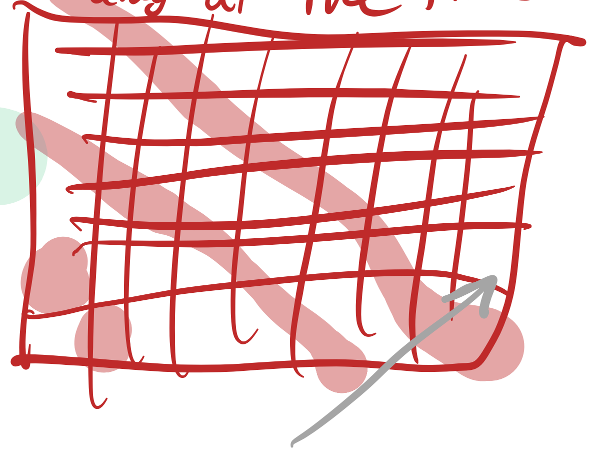
Proposition 4

1 tile at the time



vs

1 diag at the time



Si on retourne à la $TVaR_\kappa(X_i; S)$

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \varsigma_j \nu_{k-j}^{(-i)} \frac{j}{\beta} \cdot \int_{VaR_\kappa(S)}^{\infty} h(s, k+1, \beta) ds$$

$$= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \varsigma_j \nu_{k-j}^{(-i)} \frac{j}{\beta} \cdot \bar{H}(VaR_\kappa(S), k+1, \beta)$$

Soit des variables $X_i = \begin{cases} \sum_{j_i=0}^{M_i} B_{i,j} & M_i > 0 \\ 0 & M_i = 0. \end{cases}$

où $q_{m_1, \ldots m_n} = P(M_1 = m_1, \ldots, M_n = m_n)$

Soit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

alors

$$F_S(x) = q_{0,\ldots,0} + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus \{m_1=m_2=\ldots=m_n=0\}}}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \cdot P\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} B_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{m_n} B_{n,i_n} \leq x\right)$$

Probabilité que la somme des $m_1 + \ldots + m_n$ sinistres soient $\leq x$.

On a donc,

$$E[S \cdot 1_{\{S>b\}}] = \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus \{m_1=m_2=m_n=0\}}}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} B_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{m_n} B_{n,i_n}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} B_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{m_n} B_{n,i_n} > b\right\}}\right]$$

On retrouve

$$TVaR_k(S) = \frac{1}{1-k} E[S \cdot 1_{\{S > VaR_k(S)\}}] = \frac{1}{1-k} \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus \{m_1=m_2=m_n=0\}}}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} B_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{m_n} B_{n,i_n}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} B_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{m_n} B_{n,i_n} > VaR_k(S)\right\}}\right]$$

Finalement, comme le veut la légende

$$TVaR_k(X_i ; S) = \frac{1}{1-k} E[X_i \cdot 1_{\{S > VaR_k(S)\}}] = \frac{1}{1-k} \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus \{m_1=m_2=m_n=0\}}}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} E\left[\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=1}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=1}^{m_2} B_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_n=1}^{m_n} B_{n,i_n} > VaR_k(S)\right\}}\right]$$

<u>Proposition 6</u>

Si les sévérités s'écrivent $B_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta)$ — β commun, impo

on peut facilement démontrer que

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} B_{1,i_1} \sim \text{Gamma}(m_1 \cdot \alpha_1, \beta)$$

tous les sinistres associés à X_1 ont un alpha commun

les β sont tous identiques.

De la même manière,

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=0}^{m_2} B_{2,i_2} + \ldots + \sum_{i_n=0}^{m_n} B_{n,i_n} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \alpha_i, \beta\right)$$

Ainsi,

$$P\left(\sum_{i_1=0}^{m_1} B_{1,i_1} \leq x\right) = H(x, m_1\alpha_1, \beta)$$

$$P\left(\sum_{i_1=0}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=0}^{m_2} B_{2,i_2} + \dots + \sum_{i_n=0}^{m_n} B_{n,i_n} \leq x\right) = H\left(x, \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \alpha_i, \beta\right)$$

$$E\left[\left(\sum_{i_1=0}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=0}^{m_2} B_{2,i_2} + \dots + \sum_{i_n=0}^{m_n} B_{n,i_n}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=0}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=0}^{m_2} B_{2,i_2} + \dots + \sum_{i_n=0}^{m_n} B_{n,i_n} > VaR_k(S)\right\}}\right]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \alpha_i}{\beta} \cdot \bar{H}\left(VaR_k(S), \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \alpha_i + 1, \beta\right)$$

$\boxed{\text{Proposition 1}}$

$$E\left[\left(\sum_{i_j=0}^{m_j} B_{j,i_j}\right) \cdot 1_{\left\{\sum_{i_1=0}^{m_1} B_{1,i_1} + \sum_{i_2=0}^{m_2} B_{2,i_2} + \dots + \sum_{i_n=0}^{m_n} B_{n,i_n} > VaR_k(S)\right\}}\right]$$

$$= \frac{m_j \alpha_j}{\beta} \cdot \bar{H}\left(VaR_k(S), \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i + 1, \beta\right)$$

$\boxed{\text{Proposition 4}}$

En réutilisant les résultats précédents (20) (21) (22) (23), on retrouve facilement

$$F_S(x) = q_{0\dots0} + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1\dots m_n} \cdot H\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i, \beta\right)$$

$$TVaR_k(S) = \frac{1}{1-k} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1\dots m_n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i}{\beta} \cdot \bar{H}\left(VaR_k(S), \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i + 1, \beta\right)$$

et

$$TVaR_k(X_i, S) = \frac{1}{1-k} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1\dots m_n} \cdot \frac{m_i \alpha_i}{\beta} \cdot \bar{H}\left(VaR_k(S), \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i + 1, \beta\right)$$

Proposition 8

On a $B_i \sim \text{MixErl}(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta)$ avec

$\underline{\zeta}^{(i)} = (\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, \dots)$ et $\zeta_k^{(i)} = P(K_i = k)$

avec

$$M_{B_i}(t) = P_{K_i}(M_C(r)) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(i)} (M_C(r))^k$$

alors on a

$$M_S(t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\dots,m_n} \cdot (M_{B_1}(t))^{m_1} \cdots (M_{B_n}(t))^{m_n}$$

On peut définir

$$M_i^* = \begin{cases} \sum_{j_i=1}^{M_i} K_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0 & M_i = 0 \end{cases}$$ où $K_{i,j_i} \sim K_i$ pour $i = 1, \dots, n.$

On peut donc réécrire :

$$X_i = \begin{cases} \sum_{j_i=1}^{M_i^*} C_{i,j_i}, & M_i^* > 0 \\ 0, & M_i^* = 0 \end{cases}$$ où $f_{M_1^*, \dots, M_n^*}(j_1, \dots, j_n) = \xi_{j_1, \dots, j_n}$

et $C_{i,j_i} \sim \text{Exp}(\beta)$

On a

$$\mathcal{L}_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} P_{M_i}(P_{K_{i,j_i}}(\mathcal{L}_C(t)))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P_{M_i^*}(\mathcal{L}_C(t))$$

$\hookrightarrow$ Convolution.

$= P_{\sum_{i=1}^{n} M_i^*}(\mathcal{L}_c(t))$

On peut s'intéresser à (on garde en tête que)

$P(M_1^* = j_1, M_2^* = j_2, \ldots, M_n^* = j_n) =$

$= E\left[P(M_1^* = j_1, M_2^* = j_2, \ldots, M_n^* = j_n \mid M_1, M_2, \ldots, M_n)\right]$

$= E\left[P\left(\sum_{i=1}^{M_1} K_{1,i} = j_1, \sum_{i=1}^{M_2} K_{2,i} = j_2, \ldots, \sum_{i=1}^{M_n} K_{n,i} = j_n \mid M_1, M_2, \ldots, M_n\right)\right]$

$= E_{M_1 \ldots M_n}\left[\prod_{i=1}^{n} P\left(\sum_{s=1}^{M_i} K_{i,s} = j_i \mid M_i\right)\right]$

$= E_{M_1 \ldots M_n}\left[\prod_{i=1}^{n} \varsigma_{j_i}^{(i)*M_i}\right]$

$\overset{\text{def esp}}{=} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} g_{m_1, \ldots, m_n} \cdot \prod_{i=1}^{n} \varsigma_{j_i}^{(i) \cdot m_i} = P(M_1^* = j_1, \ldots, M_n^* = j_n)$

$= \xi_{j_1, \ldots, j_n}$

Avec la fonction de masse de probabilité de $\underline{M^*}$, on peut réécrire la fonction de répartition de S comme étant :

$$F_S(x) = \xi_{0,\ldots,0} + \sum_{\substack{j_1=0 \\ \setminus\{j_1 = \ldots = j_n = 0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,\ldots,j_n} H\left(x, \sum_{i=1}^{n} j_i, \beta\right)$$

Démarche Ex 13

Soit $X \sim PoisComp(\overset{M}{\lambda}, F_B)$ avec $B \sim MixErl(\underline{q}, \beta)$

$$E(X) = E(E(X|M)) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^{M} B \,\middle|\, M\right)\right)$$
$$= E(M)E(B)$$

$$Var(X) = E(Var(X|M)) + Var(E(X|M))$$
$$= E(M)\,Var(B) + E(B)^2\,Var(M)$$
$$= \lambda\left(Var(B) + E(B)^2\right)$$
$$= \lambda \cdot E(B^2)$$

Proposition 9

$$q_{m_1 \dots m_n} = \sum_{j=0}^{\min(m_1,\dots,m_n)} e^{-\alpha_0} \frac{\alpha_0^j}{j!} \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-(\lambda_i-\alpha_0)} \cdot (\lambda_i-\alpha_0)^{m_i-j}}{(m_i-j)!}$$

On itère sur les valeurs possibles du choc commun.

On a

$$E(s_1^{M_1} \dots s_n^{M_n}) = e^{\alpha_0(s_1 \dots s_n - 1)} \prod_{i=1}^{n} e^{(\lambda_i-\alpha_0)(s_i-1)}$$

Soit $M_1, \dots, M_n$ des lois de fréquences Poisson chocs commun et $X_1, \dots, X_n$ les distributions composées correspondante. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$M_S(r) = E\left(e^{r \sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = P_{M_1,\dots,M_n}\left(M_{B_1}(r), \dots, M_{B_n}(r)\right)$$

$$= e^{\alpha_0\left(\prod_{i=1}^{n} M_{B_i}(r) - 1\right)} \cdot \prod_{i=1}^{n} e^{(\lambda_i-\alpha_0)(M_{B_i}(r)-1)}$$

$$= e^{\lambda_S(M_D(r)-1)} \quad \text{où} \quad \lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i - (n-1)\alpha_0.$$

$$M_D(r) = \frac{\alpha_0}{\lambda_S} \prod_{i=1}^{n} M_{B_i}(r) + \sum_{l=1}^{n} \frac{(\lambda_l-\alpha_0)}{\lambda_S} M_{B_l}(r)$$

Poids d'un « sinistre total » (catastrophe)

Poids pour chaque sinistre individuellement.

On a donc $N \sim Pois(\lambda_S)$ et

$$F_S(x) = P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k) \cdot P\left(\sum_{i=1}^{k} D_i \leq x\right)$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(N=k) \cdot E\left[(D_1 + \dots + D_k) \cdot 1_{\{D_1 + \dots + D_k > VaR_\kappa(S)\}}\right]}{1-\kappa}$$

Soit $S_{-i} = S - X_i$

$$M_{S_{-i}}(r) = e^{\alpha_0\left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} M_{B_l}(r) - 1\right)} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} e^{(\lambda_l - \alpha_0)\left(M_{B_l}(r) - 1\right)}$$

$$= e^{\alpha_0\left(M_{C_{-i}}(r) - 1\right)} \cdot e^{\lambda_{-i}\left(M_{D_{-i}}(r) - 1\right)}$$

Pas de portion commune

Paire M_i N_{-i} → $J_{-i} + J_0$

$M_i \rightarrow J_i + J_0$

$$f_{M_i N_{-i}}(k_i, n_{-i}) = \sum_{j=0}^{\min(k_i, n_{-i})} f_{J_i}(k_i - j) f_{J_{-i}}(n_i - j) f_{J_0}(j)$$

$M_i = k_i$ $\quad$ $N_{-i} = n_i$

On regarde toutes les manières d'avoir $M_i = k_i$ et $N_{-i} = n_i$ en itérant sur les valeurs possibles pour le choc commun.

Proposition 10

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{1}{1-\kappa} \cdot E\left(X_i \cdot 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\kappa} \cdot E\left[E\left(\sum_{j=1}^{M_i} B_{i,j} \cdot 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}} \middle| M_i, N_{-i} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k_i=1}^{\infty} \sum_{n_{-i}=1}^{\infty} P(M_i = k_i, N_{-i} = n_{-i})\, E\left(\sum_{j=1}^{k_i} B_{i,j} \cdot 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}} \right)$$

$$= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k_i=1}^{\infty} \sum_{n_{-i}=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(k_i, n_{-i})} f_{J_i}(k_i - j) f_{J_{-i}}(n_i - j) f_{J_0}(j) \cdot E\left(\sum_{l=1}^{k_i} B_{i,l} \cdot 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}} \right)$$

$$= \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k_i=1}^{\infty} \sum_{n_{-i}=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(k_i, n_{-i})} f_{J_i}(k_i - j) f_{J_{-i}}(n_i - j) f_{J_0}(j) \cdot E\left(\sum_{l=1}^{k_i} B_{i,l} \cdot 1_{\{\sum_{l=1}^{k_i} B_{i,l} + \sum_{m=1}^{n_i - j} D_{-i,m} + \sum_{r=1}^{j} C_{-i,r} > VaR_\kappa(S)\}} \right)$$