On two dependent individual risk models

Aboubacar Mahamane Mahamadou M
Choukri Houda

31 Janvier 2022

Article

Le contenu de cette présentation vient principalement d'un article qui est :
Hélène Cossette, Patrice Gaillardetz, Etienne Marceau, Jacques Rioux (2002). On two dependent individual risk models. Insurance : Mathematics and Economics, 30(2), 153-166

Plan

Introduction

Objectif général et motivation

Cet article traite en général le modèle du risque individuel mais avec dépendance. En effet, longtemps avant, dans un portefeuille d'assurance, les risques ont toujours été considérés indépendant. Ceci fait en sorte qu'on sous-estimais le risque. Récemment, les chercheurs se sont rendus comptes que ces risques ne sont pas forcément indépendants et ont commencé à traiter ce sujet, d'où cet article. Par exemple, nous pouvons citer le cas d'une assurance maladie le cas de la covid 19 : en effet, un individu peut contaminer un autre donc ce sont des risques liés.

Introduction

Objectif spécifique et revue de litterature

L'objectif de cet article est précisement de proposer des structures de dépendance applicables dans le cadre du modèle de risque individuel. Ceci permettra de mieux évaluer les risques associés au portfeuille.

Comme annoncé dans l'article, des chercheurs avait déjà travaillé sur ce sujet de dépendance et cet article est un complément. Nous pouvons citer entre autres Dhaene and Goovaerts (1996, 1997), Muller (1997), Dhaene et al. (2001), Bauerle and Muller (1998) and Wang and Dhaene (1998). Leurs articles parlent principalement du traitement, du comportement . . .entre 2 portefeuilles avec des risques individuels dépendants.
Sans oublié Wang (1998) qui a fournit plusieurs modèles mais qui sont principalement utilis és dans le cas du risque collectif.

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Définition du modèle

Pour un contrat d'assurance, le contrat est défini de la manière suivante :

$$X = BI$$

avec B le montant à payer en cas de survenance du sinistre et $I \sim B(q)$

Imaginons maintenant qu'on ait plusieurs contrats dans le portefeuille. Nous savons déjà qu'en assurance selon les risques on divise le portefeuille en plusieurs classes.

Donc on a :

$$S = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} X_{jk}$$

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Définition du modèle

Dans ce cas de dépendance on definira :$I_{jk} = min(J_0 + J_j + J_{jk}, 1)$
L'idée qui se cache dérrière cettte expression est que :

1. On suppose qu'il existe un facteur externe qui influe sur tous les risques quelque soit sa classe d'où le facteur J_0.
   Exemple : Dans le cas de l'assurance maladie, on peut considérer la Covid 19 comme le facteur risque global J_0
2. En plus du facteur risque global, on suppose qu'il y a un facteur risque associé juste à la classe. C'est à dire que la réalisation de ce facteur risque influe seulement sur la classe.
   Exemple : Toujours dans le cas de l'assurance maladie, le facteur risque de la classe peut etre par exemple le lieu de travail, la profession. J_j

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Définition du modèle

3. Et enfin, nous avons le facteur risque individuel qui concerne uniquement la personne.
   Exemple : Toujours dans le cas de l'assurance maladie, le facteur risque individuel est la santé de l'individu en question.

Avec $J_0 \sim B(\tilde{q}_0), J_j \sim B(\tilde{q}_j)$ *et* $J_{jk} \sim B(\tilde{q}_{jk})$
Ainsi :

$$I_{jk} \sim B(q_{jk})$$

Avec $q_{jk} = 1 - p_{jk} = 1 - \tilde{p}_0\tilde{p}_j\tilde{p}_{jk} = 1 - (1 - \tilde{q}_0)(1 - \tilde{q}_j)(1 - \tilde{q}_{jk})$

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Cas particulier

1. Si $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_j = 0$
   Ce cas nous renvoie exactement au cas de l'indépance car en effet, $\tilde{q}_0 = \tilde{q}_j = 0$ veut dire que qu'il n'y a pas de facteur de risque global et de facteur de risque associé aux classes précisement.
   Donc on aura que $I_{jk} = J_{jk}$
2. Si $\tilde{q}_j = 0$
   Dans ce cas nous avons un portefeuille avec une seule classe de risque dépendants. En effet, $\tilde{q}_j = 0$ veut dire qu'il n'y a ps de risque associé aux classes

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Calcul des fgm, fgp et fonction de répartition

On sait que : $I_{jk} \sim B(q_{jk})$ donc $P_{I_{jk}}(t) = p_{jk} + q_{jk}t$

On sait aussi que : $M_{Xjk}(t) = P_{I_{jk}}(M_{Bjk}(t)) = p_{jk} + q_{jk}M_{Bjk}(t)$

Pour obtenir la fonction de repartition de la somme, nous allons chercher en premier lieu la fgp de $\underline{I}$ puis tirer la fgm de $\underline{X}$

Ainsi après calcul nous obtenons :

$$P_{\underline{I}}(\underline{t}) = \tilde{p}_0 \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} t_{jk} + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(t_{jk}) \right) \right] + \tilde{q}_0 \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n_j} t_{jk}$$

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Calcul des fgm, fgp et fonction de répartition

La fgm de $S = X_{11} + ... + X_{1_{n_1}} + ... + X_{m1} + ... + X_{m_{n_m}}$ est tel que :

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E(e^{tS}) \\
&= E(e^{t(X_{11}+...+X_{1_{n_1}}+....+X_{m1}+....+X_{m_{n_m}}}) \\
&= E(e^{tX_{11}}....e^{tX_{1_{n_1}}}....e^{tX_{m1}}....e^{tX_{m_{n_m}}}) \\
&= M_{\underline{X}}(t, ..., t) \\
&= P_{\underline{I}}\left(M_{B_{11}}(t), ..., M_{B_{1n_1}}(t), ..., M_{B_{m1}}(t), ..., M_{B_{mn_m}}(t)\right)
\end{aligned}$$

La fgm de S est donc :

$$M_S(t) = \tilde{p}_0 \left[\prod_{j=1}^{m}\left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t) + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(M_{B_{jk}}(t))\right)\right] + \tilde{q}_0 \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t)$$

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Calcul des fgm, fgp et fonction de répartition

On peut exprimer la fgm de S, en fonction d'autres fgm tel que :

$$M_S(t) = \tilde{p}_0 M_U(t) + \tilde{q}_0 M_V(t)$$

Avec, V est une variable aleatoire de fgm :

$$M_V(t) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t)$$

Et U est une variable aleatoire de fgm :

$$\begin{aligned} M_U(t) &= \prod_{j=1}^{m} \left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t) + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} P_{J_{jk}}(M_{B_{jk}}(t)) \right) \\ &= \prod_{j=1}^{m} \left(\tilde{q}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{B_{jk}}(t) + \tilde{p}_j \prod_{k=1}^{n_j} M_{D_{jk}}(t) \right) \\ &= \prod_{j=1}^{m} M_{C_j}(t) \end{aligned}$$

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Calcul des fgm, fgp et fonction de répartition

Par suite on deduit que :

$$F_S(x) = \tilde{p}_0 F_U(x) + \tilde{q}_0 F_V(x)$$

Avec

$$F_V(t) = \left(F_{B_{\mathbf{11}}} * .... * F_{B_{\mathbf{1}n_{\mathbf{1}}}} * .... * F_{B_{m\mathbf{1}}} * .... * F_{B_{mn_m}} \right)(t)$$

et

$$F_U(t) = \left(F_{C_{\mathbf{1}}} * .... * F_{C_m} \right)(t)$$

avec

$$F_{C_j}(t) = \tilde{q}_j \left(F_{B_{j\mathbf{1}}} * ... * F_{B_{jn_j}} \right)(t) + \tilde{p}_j \left(F_{D_{j\mathbf{1}}} * ... * F_{D_{jn_j}} \right)(t)$$

$$F_{D_{jk}} = \tilde{p}_{jk} + \tilde{q}_{jk} F_{B_{jk}}$$

Selon le problème nous utiliserons la méthode approprié pour calculer ou approximer les différents termes de F_S c'est à dire F_U et F_V

Modèle individuel simple avec risque dépendants pour un portefeuille

Calcul difféntes covariances et variance

On a :

$$Cov(I_{jk}, I_{jk'}) = \tilde{q}_0 + \tilde{p}_0\tilde{q}_j + \tilde{p}_0\tilde{p}_j\tilde{q}_{jk}\tilde{q}_{jk'} - \tilde{q}_{jk}\tilde{q}_{jk'}$$

$$Cov(X_{jk}, X_{jk'}) = E(B_{jk})E(B_{jk'})Cov(I_{jk}, I_{jk'})$$

$$Cov(I_{jk}, I_{j'k'}) = \tilde{q}_0 + \tilde{p}_0(\tilde{q}_j + \tilde{p}_j\tilde{q}_{jk})(\tilde{q}_{j'} + \tilde{p}_{j'}\tilde{q}_{j'k'}) - \tilde{q}_{jk}\tilde{q}_{j'k'}$$

$$Cov(X_{jk}, X_{j'k'}) = E(B_{jk})E(B_{j'k'})Cov(I_{jk}, I_{j'k'})$$

Exemple 1

Fonction de répartition de S

Dans cet exemple, on a une seule classe donc le facteur risque de classe est nul $\tilde{q}_j = 0$. De plus on a 20 contrats.
Ainsi :

$$F_S(x) = \tilde{p}_0 F_U(x) + \tilde{q}_0 F_V(x)$$

Avec

$$F_V(t) = \left(F_{B_{1,1}} * .... * F_{B_{1,20}}\right)(t)$$

et

$$F_U(t) = F_{C_1}(t) = \left(F_{D_{1,1}} * ... * F_{D_{1,20}}\right)(t)$$

Avec

$$F_{D_{jk}}(t) = \tilde{p}_{jk} + \tilde{q}_{jk} F_{B_{jk}}(t)$$

Exemple 1

Fonction de répartition de S

Ainsi

$$V \sim \text{Gamma}(20, 0.5)$$

Et

$$U \sim \text{Bcomp}(20, \tilde{q}_{jk}, F_B)$$

Avec

$q_{jk} = q_i = 1 - (1 - \tilde{q}_0)(1 - \tilde{q}_j)(1 - \tilde{q}_{jk}) = 1 - (1 - \tilde{q}_0)(1 - \tilde{q}_{jk})$

Puis on tire $\tilde{q}_{jk}$

Exemple 1

Courbe de F_S

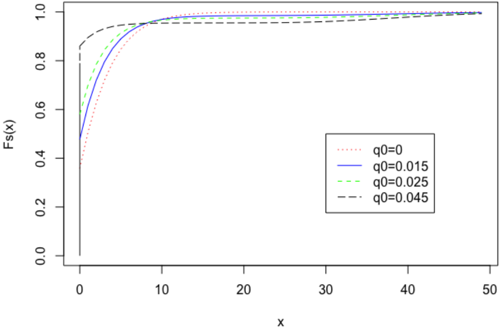

Figure – Fonction de répartition avec différents $\tilde{q}_0$

Exemple 1

Courbe de F_S

Intérpretation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la fonction met plus de temps avant de d'atteindre 1, donc le risque augmente.

Exemple 1

Prime stop loss

Pour calculer la prime stop loss, on sait que :

$$\pi_u(S) = \int_u^{\infty} \bar{F}_S(x)\, dx$$

Vu que qu'on avait déjà calculé précedemment F_S donc il suffit juste de faire la somme à partir de u de $(1 - F_S(x))$ pour trouver la prime stop loss.

Exemple 1

Courbe de $\pi_u(S)$

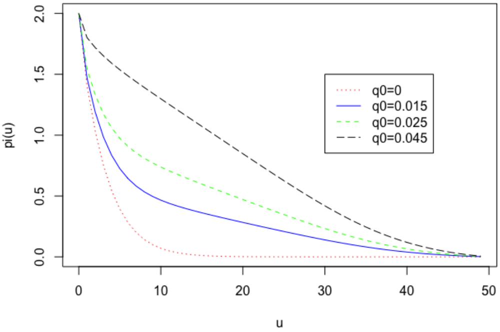

Figure – La prime stop loss avec différents $\tilde{q}_0$

Exemple 1

Courbe de $\pi_u(S)$

Intérpretation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la prime stop loss augmente aussi. Logique, puisque le risque aussi augmente avec la dépendance

Exemple 1

La $TVaR_k(S)$

On sait que :

$$TVaR_k(S) = \frac{1}{1-k}\left(\mathrm{E}\left[S \times 1_{S>VaR_k(S)}\right] + VaR_k(S)\left(F_S(VaR_k(S)) - k\right)\right)$$

Exemple 1

Courbe de $TVaR_k(S)$

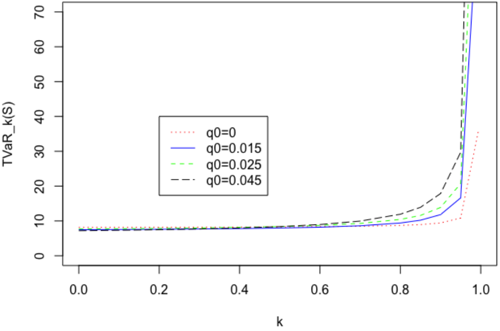

Figure – La $TVaR_k(S)$ avec différents $\tilde{q}_0$

Exemple 1

Courbe de $TVaR_k(S)$

Intérpretation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la $TVaR_k(S)$ augmente, ainsi on doit mettre beaucoup plus de argents de coté.

Exemple 2

Fonction de répartition de S

Dans cet exemple, on a 4 classes et 5 contrats.
Ainsi :

$$F_S(x) = \tilde{p}_0 F_U(x) + \tilde{q}_0 F_V(x)$$

Avec

$$F_V(t) = \left(F_{B_{1,1}} * .... * F_{B_{4,5}}\right)(t)$$

et

$$F_U(t) = \left(F_{C_1} * .... * F_{C_4}\right)(t)$$

Avec

$$F_{C_j}(t) = \tilde{q}_j \left(F_{B_{j1}} * ... * F_{B_{jn_j}}\right)(t) + \tilde{p}_j \left(F_{D_{j1}} * ... * F_{D_{jn_j}}\right)(t)$$

$$F_{D_{jk}}(t) = \tilde{p}_{jk} + \tilde{q}_{jk} F_{B_{jk}}(t)$$

Exemple 2

Courbe de F_S

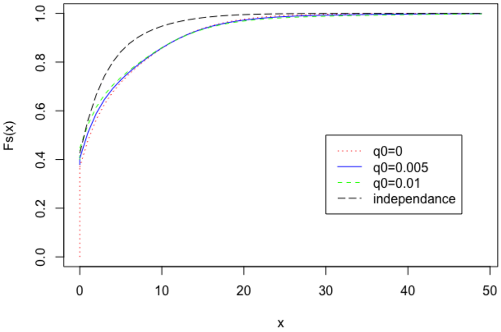

Figure – Fonction de répartition avec différents $\tilde{q}_0$

Exemple 2

Courbe de F_S

Intérpretation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la fonction met plus de temps avant de d'atteindre 1, donc le risque augmente.

Exemple 2

Prime stop loss

Pour calculer la prime stop loss, on sait que :

$$\pi_u(S) = \int_u^\infty \bar{F}_S(x)\, dx$$

Vu que qu'on avait déjà calculé précedemment F_S donc il suffit juste de faire la somme à partir de u de $(1 - F_S(x))$ pour trouver la prime stop loss.

Exemple 2

Courbe de $\pi_u(S)$

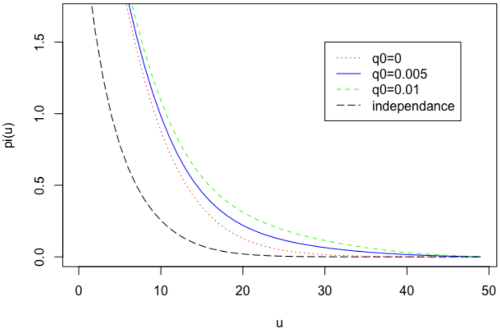

Figure – La prime stop loss avec différents $\tilde{q}_0$

Exemple 2

Courbe de $\pi_u(S)$

Intérpretation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la prime stop loss augmente aussi. Logique, puisque le risque aussi augmente avec la dépendance

Exemple 2

La $TVaR_k(S)$

On sait que :

$$TVaR_k(S) = \frac{1}{1-k}\left(\mathrm{E}\left[S \times 1_{S>VaR_k(S)}\right] + VaR_k(S)\left(F_S(VaR_k(S)) - k\right)\right)$$

Exemple 2

Courbe de $TVaR_k(S)$

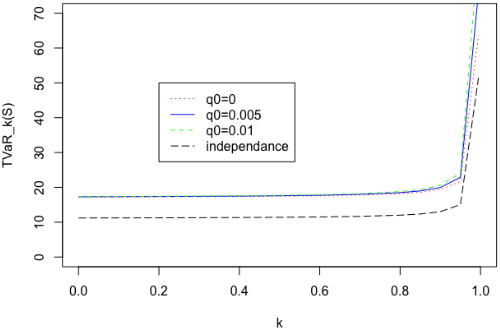

Figure – La $TVaR_k(S)$ avec différents $\tilde{q}_0$

Exemple 2

Courbe de $TVaR_k(S)$

Intérpretation : En effet, on remarque que plus la dépendance augmente plus la $TVaR_k(S)$ augmente, ainsi on doit mettre beaucoup plus de argents de coté.

Conclusion

Retour et ouverture

A la lumière de tout ce qui a été vu, on remarque que ne pas tenir compte de la dépendances entre individus peut constituer une grande erreur au niveau de l'évaluation du risque car en effet, le calcul des primes et la TVaR en dépendent.

Ouvertures :

1. Selon moi, cette modélisation sur-évalue le risque. En effet, je propose qu'on ajoute une autre variable aléatoire J_{lk} qui va soit minimiser le risque soit prendre la valeur 0. Par exemple, si on reste toujours dans notre cas de l'assurance maladie avec le cas de la covid, j'aurai aimé voir une variable aléatoire qui par exemple tient compte de si la personne est immunisé ou pas. En effet, avec la definition de I_{jk} tant que la covid 19 survient $J_0 = 1$ donc automatiquement $I_{jk} = 1$ or ceci est injuste, on pourrai trouver dans le futur un vaccin qui immunisera.

2. Nous nous démandons également si on ne peut pas supposer une dépendances entre les sévérites pour modéliser la dépendances entres les contrats du portefeuille.