Lois mélanges d'Erlang

February 7, 2022

Contents

1 Définition de base

Soit une variable aléatoire Y dont la fonction de densité et la fonction de répartition sont respectivement

$$
\begin{aligned}
f_Y(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k h(x; k, \beta) \\
F_Y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x; k, \beta),
\end{aligned}
$$

où ζ_k est un poids positif attribué à la k-ème distribution Erlang et β est le paramètre d'échelle commun. La variable aléatoire Y est dite obéir à une loi mélange d'Erlang de paramètres $\underline{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, ...)$ et β. On utilise la notation $Y \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta\right)$.

On peut aussi tenir compte du cas où il y a une masse de probabilité non nulle à 0, ce qui conduit à

$$F_Y(x) = \zeta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x; k, \beta),$$

où $\zeta_0 = \Pr(K = 0) \geq 0$.

La distribution mélange d'Erlang présentée correspond également à la distribution de la somme aléatoire

$$Y = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{K} C_k, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases},$$

où K est une variable aléatoire discrète dont la fonction de masse de probabilité est

$$f_K(k) = \Pr(K = k) = \zeta_k, k \in \mathbb{N},$$

et la fonction génératrice des probabilités est

$$P_K(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k s^k.$$

Les variables aléatoires $C_1, C_2, ...$ forment une suite de variables aléatoires **indépendantes** et **identiquement distributées** avec $C_k \sim Exp(\beta)$ et indépendantes de K.

La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y est

$$M_Y(t) = P_K(M_C(t)),$$

où $M_C(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$.

L'interprétation de la distribution mélange d'Erlang sous la forme d'une somme aléatoire permet notamment d'écrire directement l'expression pour la mesure de risque $TVaR_\kappa$

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} E\left[(C_1+...+C_k)\times 1_{\{C_1+...+C_k>VaR_\kappa(Y)\}}\right]\Pr(K=k) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k\frac{k}{\beta}\overline{H}(VaR_\kappa(Y);k+1,\beta). \end{aligned}$$

La classe des distributions mélange d'Erlang est très intéressante étant donné qu'elle est **dense dans la classe des distributions avec support positif**. Il est donc possible d'approximer toute distribution avec support positif par une distribution mélange d'Erlang ayant le **même** paramètre d'échelle. La classe des distributions mélange d'Erlang contient entre autres la distribution exponentielle, la distribution Erlang et les mélanges de lois exponentielles comme cas particulier.

Théorème 1 Théorème de Tijms. *Soit une variable aléatoire positive* X *avec une fonction de répartition* F_X*. On définit la fonction de répartition* F_h *par*

$$F_h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(F_X(jh) - F_X((j-1)h)\right) H\left(x; j, \frac{1}{h}\right), \ x \geq 0.$$

Alors, on a

$$\lim_{h \to 0} F_h(x) = F_X(x),$$

en tout point de continuité x *de* F_X*.*

Il est facile d'identifier les lois exponentielles et Erlang comme élément de la classe des distributions mélanges d'Erlang mais il s'avère plus difficile pour les lois mélanges d'exponentielles. On investigue donc davantage le lien entre ces distributions.

Proposition 2 Mélange d'exponentielles. *Soit une variable aléatoire* Y *obéissant à une loi mélange d'exponentielles avec*

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x},$$

où $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ *et* $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$*. De plus, on suppose que* $\beta_i < \beta_m$ *pour* $i = 1, 2, ..., m-1$ *(sans perte de généralité). Alors,* $Y \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta_m\right)$ *avec* $\zeta_0 = 0$*,* $\zeta_1 = \sum\limits_{i=1}^{m-1} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) + p_m$*, et*

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1},$$

pour $k \in \{2, 3, ...\}$*. On cesse de calculer les valeurs de* ζ_k *à* k_0 *de telle sorte que* $\sum_{k=1}^{k_0} \zeta_k = 1$*.*

Preuve. La fonction génératrice des moments de Y est donnée par

$$M_Y(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t} \right).$$

On débute par réécrire l'expression de la fonction génératrice des moments de la loi exponentielle pour $i = 1, 2, ..., m - 1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_i}{\beta_i - t} &= \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)\left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta_m}}{1-\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)\frac{\beta_m}{\beta_m - t}}\right) \\
&= \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)\left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^k\left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k \\
&= \frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^k\left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^{k+1} \\
&= \frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1}\left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^{k}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m} \right)^{k-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{k} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} p_i \frac{\beta_i}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m} \right)^{k-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{k} \\
&= p_1 \frac{\beta_1}{\beta_m} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_m} \right)^{1-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{1} + \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_m} \right)^{2-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{2} + \ldots \right\} \\
&\quad + p_2 \frac{\beta_2}{\beta_m} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_m} \right)^{1-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{1} + \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_m} \right)^{2-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{2} + \ldots \right\} \\
&\quad + p_3 \frac{\beta_3}{\beta_m} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_m} \right)^{1-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{1} + \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_m} \right)^{2-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t} \right)^{2} + \ldots \right\} \\
&\quad + \vdots
\end{aligned}
$$

On peut réécrire $M_Y(t)$ par

$$\left\{p_1\frac{\beta_1}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{1-1}+p_2\frac{\beta_2}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{1-1}+...+p_m\frac{\beta_m}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_m}{\beta_m}\right)^{1-1}\right\}\left(\frac{\beta_m}{\beta_m-t}\right)^1$$

$$+\left\{p_1\frac{\beta_1}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{2-1}+p_2\frac{\beta_2}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{2-1}+...+p_m\frac{\beta_m}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_m}{\beta_m}\right)^{2-1}\right\}\left(\frac{\beta_m}{\beta_m-t}\right)^2$$

$$+\left\{p_1\frac{\beta_1}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{3-1}+p_2\frac{\beta_2}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{3-1}+...+p_m\frac{\beta_m}{\beta_m}\left(1-\frac{\beta_m}{\beta_m}\right)^{3-1}\right\}\left(\frac{\beta_m}{\beta_m-t}\right)^3$$

$$+...$$

L'expresion obtenue pour $M_Y(t)$ correspond à la fonction génératrice des moments d'une loi mélange d'Erlang dont le paramètre d'échelle est β_m, soit

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= P_K(M_C(t)) \\
&= M_C(t) \Pr(K=1) + (M_C(t))^2 \Pr(K=2) + \ldots \\
&= \zeta_1 \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right) + \zeta_2 \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

où $\zeta_1 = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) + p_m$ et $\zeta_j = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \frac{\beta_i}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{j-1}$.

■

Exemple 3 *Soit la variable aléatoire Y obéissant à une loi mélange d'exponentielles dont la fonction de densité est*

$$f_Y(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-\frac{1}{24}x}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}\right), \quad x \geq 0.$$

Alors, $Y \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta_2 = \frac{1}{6}\right)$ *et*

$$\zeta_1 = p_1\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + p_2 = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{24}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} + \frac{2}{3} = 0.75$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= p_1\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{24}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{24}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 0.0625
\end{aligned}$$

$\vdots$

La fonction de densité de la variable aléatoire Y peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= 0.75h\left(x;1,\frac{1}{6}\right)+0.0625h\left(x;2,\frac{1}{6}\right)+... \\ &\quad +\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^9 h\left(x;10,\frac{1}{6}\right)+...+\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{99} h\left(x;100,\frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Pour cet exemple, on observe que $\sum_{k=1}^{100}\zeta_k = 1$.

2 Somme finie de variables aléatoires mélange d'Erlang

Proposition 4 *On considère un portefeuille de* n *risques indépendants* X_1, ..., X_n *où* $X_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta\right)$ *avec* $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, ...\right)$ *et* $\zeta_k^{(i)} = \Pr(K_i = k)$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *On définit* $S = X_1 + ... + X_n$. *Alors,*

$$S \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$$

avec $\underline{\nu} = (\nu_0, \nu_1, ...)$ *tel que*

$$\nu_k = \Pr(K_1 + ... + K_n = k), \; k \in \mathbb{N}.$$

Preuve. La fonction génératrice de S est

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} P_{K_i}(M_C(t)) \\
&= E\left[(M_C(t))^{K_1}\right] \times \ldots \times E\left[(M_C(t))^{K_n}\right] \\
&= E\left[(M_C(t))^{K_1+\ldots+K_n}\right] \\
&= P_{K_1+\ldots+K_n}(M_C(t)),
\end{aligned}$$

où $P_{K_1+\ldots+K_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k s^k$ est la fonction génératrice des probabilités de la somme des variables aléatoires $K_1 + \ldots + K_n$. Les valeurs de ν_k sont obtenues avec le produit de convolution ou avec FFT. On peut donc écrire la variable aléatoire S par

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} C_j, & L > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}$$

où $M = K_1 + ... + K_n$ est une variable aléatoire discrète avec fonction de masse de probabilités $\underline{\nu} = (\nu_0, \nu_1, ...)$ et $C_j \sim C \sim Exp(\beta)$. ■

3 Somme aléatoire de variables aléatoires mélange d'Erlang

On considère maintenant le cas où le montant d'un sinistre possède une distribution composée dont le montant de sinistre individuel obéit à une loi mélange d'Erlang.

Proposition 5 *Soit une variable aléatoire X qui obéit à une loi composée telle que*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où $B \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta\right)$ avec $\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots)$. Alors, on a

$$X \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right) \text{ avec } \underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots).$$

Preuve. On a $B \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta\right)$ alors on peut écrire la variable aléatoire B comme la somme aléatoire

$$B = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} C_k, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases},$$

où $C_k \sim C \sim Exp\left(\beta\right)$ et K est une variable aléatoire discrète avec fonction de masse de probabilité $\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, ...)$. Étant donné la définition de la variable aléatoire X, on a $M_X\left(t\right) = P_M\left(M_B\left(t\right)\right)$ où $M_B\left(t\right) = P_K\left(M_C\left(t\right)\right)$. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} M_X\left(t\right) &= P_M\left(M_B\left(t\right)\right) \\ &= P_M\left(P_K\left(M_C\left(t\right)\right)\right) \\ &= P_L\left(M_C\left(t\right)\right) \end{aligned}$$

où $P_L(t) = P_M(P_K(t))$ est la fonction génératrice des probabilités d'une variable aléatoire discrète L définie par

$$L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

où K_1, K_2, ... forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées comme la variable aléatoire K. La fonction de masse de probabilité de L est désignée par $\Pr(L = k) = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. On peut donc conclure que $X \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$ avec

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{L} C_j, & L > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}.$$

Les valeurs de ξ_k ($k \in \mathbb{N}$) sont calculées avec l'algorithme de Panjer si la distribution de M appartient à la classe (a,b,0)) ou avec FFT. ■

4 Exemples

Exemple 6 (Exemple détaillé somme de deux v.a mélange d'Erlang) *Soit les variables aléatoires indépendantes* Y_1 *et* Y_2 *où*

$$Y_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta\right)$$

où $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, ...\right)$ *pour* $i = 1, 2$*. On définit* $S = Y_1 + Y_2$*. Montrer que* $S \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta\right)$ *et donc que l'on peut définir la variable aléatoire* S *comme suit*

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} C_j, \ N > 0 \\ 0, \ N = 0 \end{cases}$$

où $\Pr\left(N = k\right) = \nu_k$*. Montrer le lien entre les poids* $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, ...\right)$ *et les poids* $\underline{\nu} = \left(\nu_0, \nu_1, ...\right)$*.*

Solution 7 *On a*

$$Y_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{K_i} C_j, & K_i > 0 \\ 0, & K_i = 0 \end{cases}$$

où $\Pr(K_i = k) = \zeta_k^{(i)}$ *et donc*

$$\begin{aligned} M_{Y_i}(t) &= P_{K_i}(M_C(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(i)} (M_C(t))^k . \end{aligned}$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left[\mathsf{e}^{t(Y_1+Y_2)}\right] \\
&= M_{Y_1}(t) \times M_{Y_2}(t) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(1)} (M_C(t))^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(2)} (M_C(t))^k\right) \\
&= \left(\zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)}\right) (M_C(t))^0 \\
&\quad + \left(\zeta_0^{(1)} \zeta_1^{(2)} + \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(2)}\right) (M_C(t))^1 \\
&\quad + \left(\zeta_0^{(1)} \zeta_2^{(2)} + \zeta_1^{(1)} \zeta_1^{(1)} + \zeta_2^{(1)} \zeta_0^{(2)}\right) (M_C(t))^2 \\
&\quad + \ldots \\
&= \nu_0 (M_C(t))^0 + \nu_1 (M_C(t))^1 + \nu_2 (M_C(t))^2 + \ldots \\
&= P_N(M_C(t)).
\end{aligned}
$$

On a donc que $S \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta\right)$ *où*

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \Pr\left(N=0\right) \\
&= \Pr\left(K_1+K_2=0\right) \\
&= \Pr\left(K_1=0\right)\Pr\left(K_2=0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \Pr\left(N=1\right) \\
&= \Pr\left(K_1+K_2=1\right) \\
&= \Pr\left(K_1=0\right)\Pr\left(K_2=1\right)+\Pr\left(K_1=1\right)\Pr\left(K_2=0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= \Pr\left(N=2\right) \\
&= \Pr\left(K_1+K_2=2\right) \\
&= \Pr\left(K_1=0\right)\Pr\left(K_2=2\right)+\Pr\left(K_1=1\right)\Pr\left(K_2=1\right)+\Pr\left(K_1=2\right)\Pr\left(K_2=0\right) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

et de façon générale

$$\begin{aligned}\nu_n &= \Pr(N=n) \\ &= \Pr(K_1+K_2=n) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \Pr(K_1=j) \times \Pr(K_2=n-j)\end{aligned}$$

Exemple 8 *Soit les variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 et X_3 où $X_i \sim PoissonComp\left(\lambda_i, F_{B_i}\right)$ et $B_i \sim Erlang(i, \beta)$. On suppose $\beta = \frac{1}{1000}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 1$. On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$. Alors, $S \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$ où $\underline{\xi} = \left(\xi_0 = \mathrm{e}^{-6}, \xi_1 = 3\mathrm{e}^{-6}, \xi_2 = \frac{13}{2}\mathrm{e}^{-6}, ...\right)$*

Solution 9 *On a $S \sim PoissonComp(\lambda_S; F_C)$ où $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$*

et

$$\begin{aligned} F_C(x) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{\lambda_S} F_{B_i}(x) \\ &= \frac{3}{6} H(x;1,\beta) + \frac{2}{6} H(x;2,\beta) + \frac{1}{6} H(x;3,\beta). \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} C_j, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

où $N \sim Poisson(\lambda_S = 6)$ *et* $C_j \sim C \sim MixErl\left(\underline{\varphi}, \beta\right)$ *où*

$$\underline{\varphi} = \left(\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \frac{3}{6}, \varphi_2 = \frac{2}{6}, \varphi_3 = \frac{1}{6}\right)$$

et $\beta = \frac{1}{1000}$. *Ainsi, ayant une Poisson composée, on peut écrire la fonction de* *répartition de S comme suit:*

$$F_S(x) \;=\; \Pr(N=0) + \Pr(N=1)\,F_C(x) + \Pr(N=2)\,F_{C_1+C_2}(x) + \ldots$$

On doit trouver la distribution de la somme des variables aléatoires C_j. On a démontré qu'une somme finie de variables aléatoires mélange d'Erlang est également un mélange d'Erlang. On pourrait donc faire comme dans le cas où les variables aléatoires sont des Erlang. Toutefois, ceci serait long. Sachant qu'une somme aléatoire de variables aléatoires mélange d'Erlang est aussi mélange d'Erlang, on peut réécrire S par

$$S \;=\; \begin{cases} \sum_{j=1}^{L} C_j, & L>0 \\ 0, & L=0 \end{cases}$$

où L *est une variable aléatoire discrète et* $C_j \sim C \sim Exp\left(\beta\right)$*. Ainsi,*

$$F_S\left(x\right) = \Pr\left(L=0\right) + \Pr\left(L=1\right) H\left(x;1,\beta\right) + \Pr\left(L=2\right) H\left(x;2,\beta\right) + \ldots$$

où $\Pr\left(L=k\right) = \xi_k$*. La variable aléatoire discrète* L *est définie par*

$$L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}$$

où $M \sim Poisson\left(\lambda_S\right)$ *et* K *est une variable aléatoire discrète avec fonction de masse de probabilitié*

$$\Pr\left(K=k\right) = \varphi_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{3}{6}, & k=1 \\ \frac{2}{6}, & k=2 \\ \frac{1}{6}, & k=3 \end{cases}$$

Étant donné que la variable aléatoire M appartient à la famille $(a, b, 0)$, on peut utiliser l'algorithme de Panjer comme suit:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \Pr(L=0)\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda_S}\\ &= \mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \Pr(L=1)\\ &= \frac{\lambda_s}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_K(j)\, f_L(k-j)\\ &= (6)(1)\, f_K(1)\, f_L(0)\\ &= (6)(1)\left(\frac{3}{6}\right)\mathrm{e}^{-6}\\ &= 3\mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \Pr(L = 2) \\
&= \frac{\lambda_s}{2} \sum_{j=1}^{2} j f_K(j) f_L(k-j) \\
&= \left(\frac{6}{2}\right) ((1) f_K(1) f_L(1) + (2) f_K(2) f_L(0)) \\
&= (3) \left(\left(\frac{3}{6}\right)(3)\,\mathrm{e}^{-6} + (2)\left(\frac{2}{6}\right)\mathrm{e}^{-6}\right) \\
&= \frac{13}{2}\mathrm{e}^{-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_3 &= \Pr(L = 3) \\
&\vdots
\end{aligned}$$