Allocation de capital

Thème 2

February 9, 2022

Contents

1 Articles

Cossette, Côté, Marceau et Moutanabbir (2013) *Multivariate distribution defined with Farlie-Gumbel-Morgenstern copula and mixed Erlang maginals: aggregation and capital allocation:*

$\Rightarrow$ contribution d'un risque dans un contexte où le portefeuille est le regroupement de risques dépendants. Plus spécifiquement, le comportement aléatoire individuel des risques est décrit à l'aide d'une loi **mélange d'Erlangs** et la structure de dépendance entre les risques est basée sur une **copule Farlie-Gumbel-Morgenstern** (FGM).

Hashorva et Ratovomirija (2015) *On Sarmanov mixed Erlang risks in insurance applications* est une généralisation de Cossette et al. (2013)

$\Rightarrow$ contribution d'un risque dans le cas où comportement aléatoire individuel des risques est décrit à l'aide d'une loi **mélange d'Erlangs** et la structure de dépendance entre les risques est basée sur une **loi Sarmanov** permettant ainsi une dépendance plus forte, moins restrictive, entre les risques.

Cossette, Mailhot et Marceau (2012) *TVaR-based capital allocation for multivariate compound distributions with positive continuous claim amounts*

$\Rightarrow$ détermine le niveau de capital nécessaire pour l'ensemble d'un portefeuille de **risques dépendants** ainsi que la contribution de chaque risque. Ici, la structure de dépendance entre les risques est construite à l'aide d'une **loi de comptage multivariée** résultant en une loi composée multivariée pour les risques du portefeuille. Sévérité individuelle est supposée gamma et **mélange d'Erlangs**.

2 Allocation de capital

On considère un portefeuille de n risques dont les coûts ou pertes pour le risque i sont représentés par la variable aléatoire X_i.

Après avoir déterminé la structure de dépendance entre les risques X_1,...,X_n, on établit le capital à mettre de côté pour les pertes éventuelles associées à l'**ensemble du portefeuille** $S = X_1 + ... + X_n$. Ce capital est fixé à l'aide d'une mesure de risque, comme la mesure VaR ou la mesure $TVaR$.

Il devient important d'établir ensuite la **contribution de chaque risque** X_i au montant de capital établi pour le portefeuille en tenant compte du comportement aléatoire **marginal** de X_i et du comportement aléatoire **conjoint** des risques $(X_1, ..., X_n)$. Il est souhaitable que la mutualisation des risques ait un effet bénéfique alors la contribution de chaque risque doit être **inférieure** au capital qui serait établi de **façon individuelle** pour chaque risque.

On introduit la procédure suivante pour l'allocation du capital:

- Établir la loi multivariée pour les coûts $(X_1, ..., X_n)$.

- Choisir une mesure de risque pour fixer le capital total.

- Appliquer la mesure de risque sur le montant total des coûts S.

- Choisir un principe d'allocation pour établir la part de capital par risque.

3 Propriétés désirables

On connait les propriétés désirables des mesures de risque. Il en existe aussi pour les méthodes d'allocation de capital. On désigne par $\rho_\kappa(S)$ le capital total associé au portefeuille à l'aide d'une mesure de risque ρ de niveau de confiance κ et $C_\kappa^\rho(X_i; S)$ la contribution du risque i au capital total.

- **Propritété 1: Allocation complète.** Le montant total de capital est alloué aux n risques

$$\rho_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} C_\kappa^\rho(X_i; S).$$

- **Propritété 2: Diversification.** Pour $i = 1, ..., n$, on a

$$C_\kappa^\rho(X_i; S) \leq \rho_\kappa(X_i),$$

c'est-à-dire que la contribution allouée au risque i au sein du portefeuille doit être inférieure au capital nécessaire pour le risque sans faire partie du portefeuille.

4 Fonction homogène

Définition 1 *Soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ avec valeur dans $\mathbb{R}$. La fonction φ est dite homogène de degré m si*

$$\varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^m \varphi(x_1, ..., x_n)$$

pour tout $\lambda > 0$.

Exemple 2 *La fonction $\varphi(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n$, où $a_i \in \mathbb{R}$ est dite homogène de degré 1 car*

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) &= a_1(\lambda x_1) + ... + a_n(\lambda x_n) \\ &= \lambda(a_1 x_1 + ... + a_n x_n). \end{aligned}$$

Exemple 3 *La fonction* $\varphi(x_1, ..., x_n) = b \times x_1 ... \times x_n$*, où* $b \in \mathbb{R}$*, est dite homogène de degré* n *car*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) &= b \times (\lambda x_1) \times ... \times (\lambda x_n) \\ &= \lambda^n (b \times x_1 \times ... \times x_n).\end{aligned}$$

Exemple 4 *La fonction* $\varphi(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1^m + ... + a_n x_n^m$*, où* $a_i \in \mathbb{R}$*, est dite homogène de degré* m *car*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) &= a_1 (\lambda x_1)^m + ... + a_n (\lambda x_n)^m \\ &= \lambda^m (a_1 x_1^m + ... + a_n x_n^m).\end{aligned}$$

5 Théorème d'Euler

Théorème 5 *Soit $\varphi(x_1, ..., x_n)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ avec valeur dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose dérivable en tout point. Si la fonction φ est (positivement) homogène de degré m, alors on a*

$$m\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, ..., x_n),$$

pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. Si φ est (positivement) homogène de degré m, on a

$$\varphi(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^m \varphi(x_1, ..., x_n)$$

pour tout $\lambda > 0$. On dérive chaque côté de l'égalité par rapport à λ et l'on pose ensuite λ égal à 1. Pour le côté droit de l'égalité, on obtient

$$m\lambda^{m-1}\varphi\left(x_1,...,x_n\right)|_{\lambda=1} \;=\; m\varphi\left(x_1,...,x_n\right).$$

À l'aide de la règle de la dérivée en chaîne, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\left(\lambda x_i\right)}\varphi\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right)\times\frac{\partial\left(\lambda x_i\right)}{\partial\lambda}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\left(\lambda x_i\right)}\varphi\left(\lambda x_1,...,\lambda x_n\right)\times x_i,\end{aligned}$$

et évalué à $\lambda = 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\left(x_1,...,x_n\right)\times x_i,$$

conduisant ainsi à

$$m\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, ..., x_n).$$

■

Le théorème d'Euler dans le cadre d'une fonction homogène de degré 1 correspond à

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, ..., x_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, ..., x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x_1, ..., x_n), \end{aligned}$$

où $C_i(x_1, ..., x_n) = x_i \times \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, ..., x_n)$ est la contribution de chaque variable x_i à la fonction $\varphi(x_1, ..., x_n)$.

On peut obtenir une forme différente pour la contribution comme suit:

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(x_1,...,x_n\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \times \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\left(x_1,...,x_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(\lambda_i x_i\right)}{\partial \lambda_i} \times \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\left(x_1,...,x_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(\lambda_i x_i\right)}{\partial x_i} \times \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi\left(\lambda_1 x_1,...,\lambda_n x_n\right)\Big|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\varphi\left(\lambda_1 x_1,...,\lambda_n x_n\right)\Big|_{\lambda_1=...=\lambda_n=1}
\end{aligned}
$$

Le théorème d'Euler permet de déterminer la contribution d'un risque X_i au risque global du portefeuille global $S = X_1 + ... + X_n$. On sait que le capital nécessaire pour l'ensemble du portefeuille sera déterminé à l'aide d'une mesure de risque. On choisira une mesure de risque ρ telle que lorsqu'appliquée au portefeuille global, et donc à la somme $X_1 + ... + X_n$, on aura $\rho\left(X_1 + ... + X_n\right)$ qui est une fonction homogène de degré 1. La contribution de chaque risque au capital nécessaire pour le portefeuille global sera donc celle obtenue à l'aide du théorème d'Euler. On vérifie ci-dessous que les fonctions

$$\varphi\left(X_1, ..., X_n\right) = VaR_\kappa\left(X_1 + ... + X_n\right)$$

et

$$\varphi\left(X_1, ..., X_n\right) = TVaR_\kappa\left(X_1 + ... + X_n\right)$$

sont des fonctions homogènes d'ordre 1.

Exemple 6 *La mesure de risque VaR_κ est définie par*

$$VaR_\kappa(S) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_S(x) \geq \kappa\}.$$

Pour $Y = \lambda S$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(\lambda S \leq y) \\ &= \Pr\left(S \leq \frac{y}{\lambda}\right) \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_S^{-1}(\kappa) &= VaR_\kappa(S) = \frac{y}{\lambda} \\ &\Rightarrow y = VaR_\kappa(Y) = \lambda VaR_\kappa(S) \\ &\Rightarrow VaR_\kappa(\lambda S) = \lambda VaR_\kappa(S). \end{aligned}$$

Pour $S = X_1 + ... + X_n$, on a donc

$$VaR_\kappa(\lambda (X_1 + ... + X_n)) = \lambda VaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$$

et par conséquent la fonction

$$\varphi (X_1, ..., X_n) = VaR_\kappa (X_1 + ... + X_n)$$

est homogène de degré 1.

Exemple 7 *La mesure de risque $TVaR_\kappa$ est définie par*

$$TVaR_\kappa (S) = \frac{1}{1-\kappa} \left\{ E \left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}} \right] + VaR_\kappa (S) \left[F_S (VaR_\kappa (S)) - \kappa \right] \right\}.$$

Soit $S = X_1 + ... + X_n$ où les variables aléatoires X_1,...,X_n sont supposées continues, d'où

$$TVaR_\kappa (X_1 + ... + X_n) = \frac{1}{1-\kappa} \left\{ E \left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}} \right] \right\}.$$

On sait que la mesure VaR_κ est homogène, c'est-à-dire $VaR_\kappa(aX) = aVaR_\kappa(X)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$. Alors,

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(\lambda X_1 + ... + \lambda X_n) &= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[(\lambda X_1 + ... + \lambda X_n) \times 1_{\{(\lambda X_1+...+\lambda X_n) > VaR_\kappa(\lambda X_1+...+\lambda X_n)\}}\right]\right. \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[\lambda(X_1 + ... + X_n) \times 1_{\{(\lambda(X_1+...+X_n)) > \lambda VaR_\kappa(X_1+...+X_n)\}}\right]\right\} \\
&= \frac{\lambda}{1-\kappa}\left\{E\left[(X_1 + ... + X_n) \times 1_{\{(X_1+...+X_n) > VaR_\kappa(X_1+...+X_n)\}}\right]\right\} \\
&= \lambda TVaR_\kappa(X_1 + ... + X_n).
\end{aligned}$$

Dans les articles à l'étude, le principe d'allocation choisi est celui basé sur la mesure de risque $TVaR_\kappa$. On détermine ainsi ci-dessous la contribution C_i au capital global alloué au portefeuille basé sur cette mesure de risque.

Soit $\varphi(X_1, ..., X_n) = TVaR_\kappa(X_1 + ... + X_n)$. Alors,

$$
\begin{aligned}
C_i^{TVaR}(X_1, ..., X_n) &= \frac{\partial TVaR_\kappa(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n)}{\partial \lambda_i} |_{\lambda_1 = ... = \lambda_n = 1} \\
&= \left(\frac{1}{1-\kappa}\right) \frac{\partial E\left[(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n) \times 1_{\{\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n > VaR_\kappa(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n)\}}\right]}{\partial \lambda_i} \\
&= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right].
\end{aligned}
$$