Notes – ACT-7017: Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat

Hélène Cossette

Automne 2021

Table des matières

Introduction **ix**

1 Rappels et notions complémentaires en probabilité **1**
1.1 Espérance d'une variable aléatoire et d'une fonction . . . 1
1.2 Espérance tronquée . . . 2
1.3 Espérance limitée . . . 4
1.4 Fonction stop-loss . . . 4
1.5 Fonction d'excès-moyen . . . 5
1.6 Mesures de risque . . . 7
1.6.1 Mesure VaR (Value-at-risk) . . . 8
1.6.2 Mesure TVaR (Tail Value-at-risk) . . . 13

2 Modélisation des risques individuels **21**
2.1 Introduction . . . 21
2.2 Approche indemnitaire . . . 21
2.2.1 Cas spécifique: Assurance vie temporaire 1 an . . . 22
2.2.2 Cas général . . . 23
2.3 Approche forfaitaire . . . 31
2.4 Approche fréquence-sévérité . . . 32
2.5 Distributions de fréquence . . . 36
2.5.1 Loi de Poisson . . . 36
2.5.2 Loi binomiale . . . 36
2.5.3 Loi binomiale négative . . . 37
2.5.4 Lois Poisson-mélange . . . 39
2.6 Distributions du montant d'un sinistre . . . 44
2.6.1 Loi exponentielle . . . 44
2.6.2 Loi gamma . . . 45
2.6.3 Loi lognormale . . . 46
2.6.4 Loi de Pareto . . . 46

3 Montant total des sinistres pour un portefeuille **51**
3.1 Introduction . . . 51
3.2 Caractéristiques du montant total des sinistres S . . . 52
3.3 Exemples . . . 54
3.4 Mesures de risque . . . 68
3.5 Mutualisation des risques et coûts par contrat . . . 71
3.5.1 Risques indépendants . . . 71
3.5.2 Risques dépendants . . . 72
3.6 Mutualisation, loi des grands nombres et nécessité d'une marge positive . . . 73
3.7 Mutualisation et présence d'un facteur aléatoire commun . . . 78

4 Méthodes de simulation stochastique **87**
4.1 Introduction 87
4.2 Méthode inverse 87
4.3 Simulation d'une somme finie de v.a indépendantes 89
4.4 Somme aléatoire de v.a indépendantes 92
4.5 Lois définies par un mélange 93
4.6 Application de la simulation 97
4.7 Approximation des mesures VaR_κ et $TVaR_\kappa$ 98

5 Principes de calcul de la prime majorée **101**
5.1 Propriétés désirables 101
5.2 Principaux principes de calcul de prime 102

6 Méthodes d'agrégation **105**
6.1 Motivation 105
6.2 Somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes 106
6.3 Somme de n variables aléatoires discrètes i.i.d 108
6.4 Somme aléatoire et algorithme de Panjer 112
6.4.1 Notions préliminaires 112
6.4.2 Famille (a,b,0) de lois de fréquence 112
6.4.3 Algorithme de Panjer 114
6.5 Méthodes de discrétisation 120
6.5.1 Somme finie de variables aléatoires 120
6.5.2 Somme aléatoire de variables aléatoires 121
6.5.3 Différentes méthodes 121
6.6 Transformée de Fourier rapide 125
6.6.1 Somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes 126
6.6.2 Somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes 126
6.6.3 Somme aléatoire 127
6.7 Approximation Poisson composée 128
6.7.1 Cas particulier 128
6.7.2 Cas général 132
6.8 Distribution mélange d'Erlang 137
6.8.1 Définition de base 137
6.8.2 Somme aléatoire 138
6.8.3 Théorème de Tijms 138
6.8.4 Mélange d'exponentielles 139
6.8.5 Somme aléatoire de variables aléatoires mélange d'Erlang 141
6.8.6 Somme finie de variables aléatoires mélange d'Erlang 145
6.8.7 La somme aléatoire de variable aléatoire obéissant à un mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang - suite 148

7 Notions sur la dépendance **155**
7.1 Introduction 155
7.2 Classe de Fréchet 155
7.3 Comonotonocité 157
7.4 Antimonotonocité 162
7.5 Approches générales pour l'agrégation de variables aléatoires 171
7.5.1 Variables aléatoires continues 171
7.5.2 Variables aléatoires discrètes 172

8 Lois multivariées continues et discrètes 173
8.1 Lois continues bivariées et multivariées 173
8.1.1 Loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) 173
8.1.2 Loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin 179
8.1.3 Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM) 182
8.2 Lois discrètes bivariées et multivariées 189
8.2.1 Loi de Poisson bivariée Teicher 189
8.3 Lois composées multivariées 194
8.3.1 Lois multivariées construites par mélange commun 197

9 Théorie des copules 205
9.1 Introduction 205
9.2 Définitions et théorème de Sklar 206
9.3 Construction d'une copule ou extraire une copule à partir de $F_{\underline{X}}$ 207
9.4 Comment créer une distribution bivariée avec Sklar 210
9.5 Propriétés 210
9.6 Familles de copules 213
9.7 Copules archimédiennes 214
9.7.1 Définition 214
9.7.2 Construction d'une copule archimédienne 215
9.7.3 Copule de Clayton 217
9.7.4 Copule de Frank 220
9.7.5 Copule de Gumbel 221
9.8 Mesures d'association 222
9.8.1 Rho de Spearman 229
9.8.2 Tau de Kendall 234
9.8.3 Copule normale (Gaussienne) 238
9.8.4 Copule de Student 240
9.9 Mesures d'association 241
9.9.1 Mesure d'association de rang 243
9.10 Construction de copules 244
9.11 Copules Archimédiennes 246
9.11.1 Introduction 246
9.11.2 Générateur et transformée de Laplace 246
9.12 Simulation 247
9.12.1 Méthode inverse 247
9.12.2 Méthode conditionnelle 248
9.12.3 Méthode copules archimédiennes 250
9.13 Agrégation de risques dépendants 250
9.13.1 Méthode basée sur la discrétisation 251
9.13.2 Méthode des rectangles 251

Préface

Ces notes ont été rédigées pour le cours de probabilités. Ce document constitue des notes personnelles. Des erreurs peuvent être encore présentes. Elles ne peuvent être distribuées ou reproduites sans l'autorisation de l'auteur.

Introduction

L'objectif du document est de fournir un aperçu ***T

Chapitre 1

Rappels et notions complémentaires en probabilité

1.1 Espérance d'une variable aléatoire et d'une fonction

Définition 1.1 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité f_X. L'espérance de X est définie par*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Proposition 1.2 *Soit X une variable aléatoire continue* ***positive*** *avec fonction de répartition F_X dont l'espérance existe. Alors,*

$$E[X] = \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x)) \mathrm{d}x.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^{\infty} y f_X(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{y} \mathrm{d}x \right) f_X(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{y} f_X(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f_X(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

■

Définition 1.3 *Soit une fonction g d'une variable aléatoire continue X avec fonction de densité f_X. L'espérance* *de $g(X)$ est définie par*

$$E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Un exemple de fonction g intéressante est le cas où $g(x) = x^n$. On désigne $E\left[X^n\right]$ le nième moment de la variable aléatoire X.

Définition 1.4 *Soit la fonction g définie par $g(y) = \mathrm{e}^{ty}$. Alors, $M_X(t) = E\left[g(X)\right] = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right]$ est dite la fonction génératrice des moments de X.*

À noter qu'il existe un lien biunivoque entre la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire et sa distribution. Ainsi, la fonction génératrice des moments est utilisée pour identifier la distribution d'une variable aléatoire.

Définition 1.5 *Soit la fonction g définie par $g(y) = 1_{\{y \in C\}}$, où $1_{\{y \in C\}}$ désigne une fonction indicatrice définie par*

$$1_{\{y \in C\}} = \begin{cases} 1, & y \in C \\ 0, & y \notin C \end{cases},$$

où C est un sous-ensemble du support de X.

Exemple 1.6 *Soit une variable aléatoire X avec fonction de répartition F_X.(a) Trouver $E\left[g(X)\right]$ pour $g(X) = 1_{\{X \in C\}}$. (b) Si $C = (-\infty, b]$, définir la fonction indicatrice $1_{\{X \in C\}}$ et trouver l'espérance de celle-ci. (c) Trouver $E\left[1_{\{X > b\}}\right]$ où $1_{\{X > b\}} = \begin{cases} 1, & X > b \\ 0, & X \leq b. \end{cases}$.*

Solution. (a)

$$E\left[1_{\{X \in C\}}\right] = 1 \times \Pr(X \in C) + 0 \times \Pr\left(X \notin C\right) = \Pr(X \in C).$$

(b)

$$1_{\{X \in C\}} = 1_{\{X \in (-\infty, b]\}} = 1_{\{X \leq b\}} = \begin{cases} 1, & X \leq b \\ 0, & X > b. \end{cases}$$

$$E\left[1_{\{X \leq b\}}\right] = 1 \Pr(X \leq b) + 0 = F_X(b).$$

(c) $E\left[1_{\{X > b\}}\right] = \Pr(X > b) = 1 - F_X(b) = \overline{F}_X(b)$. ■

1.2 Espérance tronquée

Définition 1.7 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité f_X. L'espérance tronquée à d de X est définie par*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \times 1_{\{x \leq d\}} f_X(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{d} x f_X(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Remarque 1.8 *L'espérance tronquée à d de la variable aléatoire X est un cas particulier de l'espérance d'une fonction g où $g(x) = x \times 1_{\{x \leq d\}}$.*

Remarque 1.9 *L'espérance tronquée à d de X s'interprète comme l'espérance des valeurs que X peut prendre lorsque celles-ci sont inférieures à d.*

Remarque 1.10 *À noter que* $\lim_{d\to\infty} E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = E[X]$.

On peut également s'intéresser au complément de l'espérance tronquée d'une variable aléatoire X, soit

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \times 1_{\{x>d\}} f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{d}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Exemple 1.11 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi exponentielle de paramètre β avec $f_X(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}, x > 0$. Trouver l'espérance tronquée à d de X.*

Solution.

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] &= \int_{0}^{\infty} x \times 1_{\{x\leq d\}} f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{d} x\beta \mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x \\ &= -x\mathrm{e}^{-\beta x}\Big|_0^d + \int_{0}^{d} \mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x \\ &= -d\mathrm{e}^{-\beta d} + 0 + \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta d}}{\beta}\right) \\ &= -d\mathrm{e}^{-\beta d} + \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta d}}{\beta}\right). \end{aligned}$$

On remarque que tel qu'attendu, $\lim_{d\to\infty} E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \lim_{d\to\infty} - d\mathrm{e}^{-\beta d} + \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta d}}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}$. ■

Remarque 1.12 *Voir exemples 1.4 à 1.7 (pages 10-13) de Marceau (2013) pour l'espérance tronquée d'une variable aléatoire gamma, normale, lognormale et Pareto.*

Définition 1.13 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. L'espérance tronquée à d de X est définie par*

$$E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \times 1_{\{x_i\leq d\}} \Pr(X = x_i).$$

Définition 1.14 *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un support arithmétique $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$, où $h \in \mathbb{N}^+$. L'espérance tronquée à d de X est définie par*

$$E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} kh \times 1_{\{kh\leq d\}} \Pr(X = kh).$$

La proposition suivante permet d'établir une relation entre l'espérance d'une variable aléatoire X, son espérance tronquée ainsi que le complément de cette dernière.

Proposition 1.15 *Soit X une variable aléatoire continue ou discrète. Alors,*

$$E[X] = E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] + E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] + E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]. \end{aligned}$$

À noter que $E[X] = E[X \times 1] = E\left[X \times \left(1_{\{X \leq d\}} + 1_{\{X > d\}}\right)\right] = E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] + E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$. ■

1.3 Espérance limitée

Définition 1.16 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité f_X. L'espérance limitée à d de X est définie par*

$$\begin{aligned} E[\min(X,d)] &= \int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{\infty} d f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\mathrm{d}x + d\left[1 - F_X(d)\right]. \end{aligned}$$

Remarque 1.17 *L'espérance limitée à d de la variable aléatoire X est un cas particulier de l'espérance d'une fonction g où $g(x) = \min(x,d)$. On utilise cette fonction notamment pour un contrat d'assurance avec une limite de couverture.*

1.4 Fonction stop-loss

Définition 1.18 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité f_X. La fonction stop-loss de X à d, que l'on désigne par $\pi_X(d)$, est définie par*

$$\begin{aligned} \pi_X(d) &= E[\max(X-d;0)] \\ &= \int_{-\infty}^{d} 0 f_X(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{\infty} (x-d) f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{d}^{\infty} (x-d) f_X(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Remarque 1.19 *La fonction stop-loss est particulièrement importante dans un contexte de réassurance.*

Remarque 1.20 $\pi_X(0) = E[X]$.

La proposition qui suit permet d'établir un lien entre l'espérance d'une variable aléatoire X, son espérance limitée à d et sa fonction stop-loss à d.

Proposition 1.21 *Étant donné que $X = \min(X;d) + \max(X-d;0)$, on a*

$$E[X] = E[\min(X,d)] + \pi_X(d).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
E[\min(X,d)] + \pi_X(d) &= \int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\mathrm{d}x + d(1-F_X(d)) + \int_{d}^{\infty}(x-d)f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\mathrm{d}x + \int_{d}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x + d(1-F_X(d)) - d\int_{d}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \\
&= E[X].
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.22 *Étant donné que l'on a* $\max(x-d;0) = x \times 1_{\{x>d\}} - d \times 1_{\{x>d\}}$, *la fonction stop-loss à d de la variable aléatoire X peut aussi s'exprimer en fonction du complément de l'espérance tronquée à d comme suit*

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= E[\max(X-d;0)] \\
&= E\left[X \times 1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}\right] \\
&= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - dE\left[1_{\{X>d\}}\right] \\
&= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d).
\end{aligned}$$

On obtient également cette relation à l'aide de la Proposition 1.21 de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\pi_X(d) &= E[X] - E[\min(X,d)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{d} x f_X(x)\mathrm{d}x + d(1-F_X(d))\right) \\
&= \int_{d}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x - d\overline{F}_X(d) \\
&= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d).
\end{aligned}$$

1.5 Fonction d'excès-moyen

Définition 1.23 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité f_X. La fonction d'excès-moyen (mean excess-loss ou mean residual life) de X à d, que l'on désigne par $\mathrm{e}_X(d)$, est définie par*

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_X(d) &= E[X-d\,|X>d] \\
&= \frac{\int_{d}^{\infty}(x-d)f_X(x)\mathrm{d}x}{1-F_X(d)}.
\end{aligned}$$

*Le mean excess loss est le montant de sinistre espéré **excédent** un certain montant fixé d sachant que le sinistre est supérieur à ce montant, c'est-à-dire de combien en moyenne les sinistres qui dépassent ce montant d sont supérieurs à ce montant d.*

Proposition 1.24 *Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité f_X et fonction de répartition F_X. Si $\lim_{d\to\infty}(x-d)(1-F_X(d))=0$, alors*

$$\mathrm{e}_X(d)=\frac{\int_d^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x}{\overline{F}_X(d)}.$$

Preuve.

$$\mathrm{e}_X(d)=\frac{1}{\overline{F}_X(d)}\int_d^\infty (x-d)f_X(x)\mathrm{d}x.$$

Pour intégrer par parties, posons

$$\begin{array}{ll} u=-(x-d) & dv=-f_X(x)\mathrm{d}x \\ du=-\mathrm{d}x & v=1-F_X(x)=\overline{F}_X(x). \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_X(d) &= \frac{1}{\overline{F}_X(d)}\left\{-(x-d)\overline{F}_X(x)\,|_d^\infty+\int_d^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{\int_d^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x}{\overline{F}_X(d)}. \end{aligned}$$

La condition $\lim_{d\to\infty}(x-d)(1-F_X(d))=0$ est équivalente à...si F_X tend vers 1 plus rapidement que d tend vers ∞. ■

Exemple 1.25 *Trouver le la fonction d'excès-moyen à d pour une variable aléatoire X obéissant à une loi de Pareto de paramètres α et λ, où $F_X(x)=1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$, $\alpha,\lambda>0$.*

Solution.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_X(d) &= \frac{\int_d^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha \mathrm{d}x}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha} \\ &= \frac{\lambda^\alpha \int_d^\infty (\lambda+x)^{-\alpha}\mathrm{d}x}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha} \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^\alpha}\frac{(\lambda+x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,|_d^\infty \\ &= \frac{(\lambda+d)^\alpha}{-\alpha+1}\frac{1}{(\lambda+x)^{\alpha-1}}\,|_d^\infty \\ &= \frac{\lambda+d}{\alpha-1}=\frac{\lambda}{\alpha-1}+\frac{d}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

■

La fonction d'excès moyen pour une variable aléatoire obéissant à une loi de Pareto est donc une fonction linéaire croissante. À noter que $\mathrm{e}_X(0) = E[X] = \frac{\lambda}{\alpha-1}$ et tel qu'exigé dans la Proposition 1.24, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{d\to\infty} (x-d)(1-F_X(d)) &= \lim_{b\to\infty} (x-d)\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha} \\
&= \lim_{d\to\infty} \frac{\lambda^{\alpha}(x-d)}{(\lambda+d)^{\alpha}} \\
&= \lim_{d\to\infty} \frac{-\lambda^{\alpha}}{\alpha(\lambda+d)^{\alpha-1}} \text{ (règle de l'Hôpital)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exemple 1.26 *Trouver le la fonction d'excès-moyen à d pour une variable aléatoire X obéissant à une loi exponentielle de paramètre λ.*

Solution.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_X(d) &= \frac{\int_d^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{-\lambda d}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{-\lambda d}} \frac{-1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda x} \Big|_d^{\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

■

La fonction d'excès moyen pour une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle est donc une fonction constante. À noter que $\mathrm{e}_X(0) = E[X] = \frac{1}{\lambda}$.

Remarque 1.27 *On peut montrer qu'il existe, comme pour la fonction génératrice des moments, une relation biunivoque entre la distribution de X et la fonction d'excès moyen $\mathrm{e}_X(d)$.*

1.6 Mesures de risque

Les organismes de surveillance des institutions financières (compagnies d'assurance et banques) requièrent que ces institutions établissent des "coussins" pour se protéger contre des déviations adverses (mauvaises surprises). Ce coussin est appelé le **capital économique** et est déterminé à l'aide de mesures de risque.

Soit un risque représenté par une variable aléatoire X où X peut être le coût pour un contrat, pour une ligne d'affaires, pour un ensemble de risques d'un portefeuille d'assurance.

Définition 1.28 *Une mesure de risque X est une fonction, notée ρ, qui attribue une valeur positive au risque X. Un risque X est dit moins dangereux qu'un risque Y si $\rho(X) < \rho(Y)$. On considère $\rho(X)$ comme le montant de capital dont la compagnie doit disposer pour faire face à une perte financière de montant X.*

Définition 1.29 *Soit le risque X et $\rho(X)$ une mesure de risque appliquée à ce risque. Le capital économique pour ce risque $CE(X)$, établi à partir de la mesure de risque ρ, est donné par*

$$CE(X) = \rho(X) - E[X],$$

où $E[X]$ est le montant espéré de pertes en sinistres pour le risque.

Les mesures de risque étudiées dans ce cours sont la *Value-at-Risk* et la *Tail Value-at-Risk*. Il est généralement admis qu'une mesure de risque devrait vérifier certaines conditions pour être utilisée comme outil de quantification du risque.

Proposition 1.30 *Une mesure de risque est dite cohérente lorsqu'elle possède les propriétés suivantes:*

(1) Sous-additivité: $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
(2) Monotonicité: $\Pr(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$.
(3) Homogénéité: $\rho(cX) = c\rho(X)$.
(4) Invariance par rapport à la translation: $\rho(X+c) = \rho(X) + c$.

La propriété de **sous-additivité** traduit la réduction du risque par diversification, c'est-à-dire le capital nécessaire pour supporter 2 risques ne doit pas dépasser celui nécessaire pour supporter les 2 risques séparément. La propriété de **monotonicité** exprime le fait qu'un plus grand capital est nécessaire lorsque la perte financière engendrée par un risque est plus élevée. La propriété d'**homogénéité** traduit l'invariance par rapport aux unités de mesure. De plus, la propriété d'**homogénéité** traduit le cas limite de la **sous-additivité**, c'est-à-dire le cas où l'on a égalité $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$ pour la sous-additivité. Dans ce cas, **aucune** diversification n'est possible, soit

$$\begin{aligned} \rho(cX) &= \rho(X + \underbrace{X + ... + X}_{c\ fois}) \\ &= \rho(X) + \rho(X) + ... + \rho(X) \\ &= c\rho(X). \end{aligned}$$

Multiplier l'exposition par une constante c requiert c fois le capital pour un risque X car la multiplication par la constante c du même niveau de risque ne procure aucune diversification. La propriété d'**invariance par rapport à la translation** traduit le fait qu'aucun capital supplémentaire n'est requis pour faire face à un risque pour lequel il n'y a aucune incertitude supplémentaire.

1.6.1 Mesure VaR (Value-at-risk)

Avant de présenter la mesure de risque *Value-at-Risk*, on rappelle la définition de la fonction inverse d'une fonction de répartition, également désignée par fonction quantile.

Définition 1.31 *Soit une variable aléatoire X avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par*

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < u\},$$

pour $u \in (0,1)$.

Exemple 1.32 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi exponentielle de paramètre β. Trouver $F_X^{-1}(u)$.*

Solution. On cherche le x^* tel que $F_X(x^*) = u$

$$\begin{aligned} F_X(x^*) &= 1 - \mathrm{e}^{-\beta x^*} = u \\ \mathrm{e}^{-\beta x^*} &= 1 - u \\ -\beta x^* &= \ln(1-u) \\ x^* &= \frac{-1}{\beta}\ln(1-u) = F_X^{-1}(u). \end{aligned}$$

■

Pour certaines lois continues, la fonction inverse F_X^{-1} est analytique, comme par exemple pour la loi exponentielle et la loi de Pareto. Pour d'autres lois continues, on doit avoir recours à un outil d'optimisation.

Exemple 1.33 *Soit une variable aléatoire discrète avec fonction de masse de probabilité suivante:*

i	x_i	$\Pr(X = x_i)$	$F_X(x_i)$
1	0	0.30	0.30
2	100000	0.40	0.70
3	500000	0.20	0.90
4	1000000	0.07	0.97
5	2000000	0.03	1

.

Trouver la fonction inverse $F_X^{-1}(u)$ *pour* $u = 0.21, 0.30, 0.45$ *et* 0.99.

Solution.

u	$F_X^{-1}(u)$
0.21	0
0.30	0
0.45	100000
0.99	2000000.

■

Définition 1.34 *Soit une variable aléatoire* X *avec fonction de répartition* F_X. *On définit la mesure de risque Value-at-Risk de niveau* κ, *notée* VaR_κ, *par*

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa),$$

où $\kappa \in (0,1)$ *est un niveau de confiance fixé et* F_X^{-1} *est la fonction inverse de la fonction de répartition de* X.

La mesure $VaR_\kappa(X)$ correspond donc au montant à mettre de côté tel que $\Pr(X \leq VaR_\kappa(X)) = \kappa$, c'est-à-dire le montant permettant à l'institution financière de rencontrer ses engagements avec probabilité κ (par exemple $\kappa = 0.95, 0.99, 0,995$). Cette mesure de risque est très utilisée en actuariat et en gestion quantitative des risques.

Proposition 1.35 *La mesure de risque Value-at-Risk possède les propriétés suivantes:*

- $VaR_\kappa(X + a) = VaR_\kappa(X) + a$, $a \in \mathbb{R}$. (invariance à la translation)
- $VaR_\kappa(aX) = aVaR_\kappa(X)$, $a \in \mathbb{R}^+$. (invariance à la multiplication par un scalaire positif ou homogénéité)
- $VaR_\kappa(\phi(X)) = \phi(VaR_\kappa(X))$, où ϕ est une fonction croissante.
- $VaR_\kappa(-X) = -VaR_{1-\kappa}(X)$, où X est une variable aléatoire continue.

Preuve. Soit une variable aléatoire Y avec fonction de répartition F_Y et fonction quantile F_Y^{-1}. Pour $Y = X + a$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(X + a \leq y) \\ &= \Pr(X \leq y - a) \\ &= u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(u) &= VaR_u(X) = y - a \\ &\Rightarrow y = VaR_u(Y) = VaR_u(X + a) = VaR_u(X) + a. \end{aligned}$$

Pour $Y = aX$ où $a \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(aX \leq y) \\ &= \Pr\left(X \leq \frac{y}{a}\right) \\ &= u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(u) &= VaR_u(X) = \frac{y}{a} \\ &\Rightarrow y = VaR_u(Y) = VaR_u(aX) = aVaR_u(X). \end{aligned}$$

Pour $Y = \phi(X)$ où ϕ est une fonction croissante, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(\phi(X) \leq y) \\ &= \Pr\left(X \leq \phi^{-1}(y)\right) \\ &= u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(u) &= VaR_u(X) = \phi^{-1}(y) \\ &\Rightarrow y = VaR_u(Y) = \phi(VaR_u(X)). \end{aligned}$$

Soit une variable aléatoire continue Y avec fonction de répartition F_Y et fonction quantile F_Y^{-1}. Pour $Y = -X$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(-X \leq y) \\ &= \Pr(X > -y) \\ &= u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(X &\leq -y) = 1 - u \\ &\Rightarrow VaR_{1-u}(X) = -y \\ &\Rightarrow y = VaR_u(Y) = -VaR_{1-u}(X). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.36 *On peut démontrer que la VaR est monotone, homogène, invariante par translation mais on ne peut montrer qu'elle est sous-additive. L'effet de diversification n'est pas toujours positif avec la VaR. La VaR n'est donc pas une mesure de risque cohérente.*

Remarque 1.37 *Si la distribution de X est limitée à la loi normale, alors la mesure VaR est cohérente. Toutefois, la loi normale n'est généralement pas utilisée pour modéliser les sinistres d'assurance qui sont typiquement asymétriques.*

Exemple 1.38 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi normale de paramètres μ et σ^2. Trouver $VaR_\kappa(X)$.*

Solution. On cherche à identifier $F_X^{-1}(\kappa)$ pour $\kappa \in (0,1)$, c'est-à-dire on cherche le x^* tel que $F_X(x^*) = \kappa$

$$\begin{aligned} F_X(x^*) &= \Pr(X \leq x^*) \\ &= \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x^*-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr(Z \leq z) \text{ où } Z \sim N(0,1) \text{ et } z = \frac{x^*-\mu}{\sigma} \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

■

Alors,

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = x^* = \mu + \sigma z,$$

où z est tel que $\Phi(z) = \kappa$. On peut ainsi écrire $VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma VaR_\kappa(Z)$ où Z obéit à une loi normale standard.

Exemple 1.39 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi lognormale de paramètres μ et σ^2. Trouver $VaR_\kappa(X)$.*

Solution. On a $X = \mathrm{e}^Y$ où $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. On cherche à identifier $F_X^{-1}(\kappa)$ pour $\kappa \in (0,1)$, c'est-à-dire on cherche le x^* tel que $F_X(x^*) = \kappa$

$$\begin{aligned} F_X(x^*) &= \Pr(X \leq x^*) \\ &= \Pr(\ln X \leq \ln x^*) \\ &= \Pr(Y \leq \ln x^*), \text{ où } Y \sim N(\mu, \sigma^2) \\ &= \Pr\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln x^* - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr(Z \leq z) \text{ où } Z \sim N(0,1) \text{ et } z = \frac{\ln x^* - \mu}{\sigma} \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

Alors,

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = x^* = \mathrm{e}^{\mu+\sigma z},$$

où z est tel que $\Phi(z) = \kappa$. On peut ainsi écrire $VaR_\kappa(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma VaR_\kappa(Z)}$ où Z obéit à une loi normale standard. ■

Exemple 1.40 *Une somme $V(0)$ est investie dans un fonds pendant une période. La valeur de l'investissement à la fin de la période est $V(1) = V(0)Y$ où Y est une variable aléatoire continue. La perte financière liée à cet investissement est définie par la variable aléatoire L où $L = V(0) - V(1)$. Une perte financière positive L survient si la valeur de l'investissement après une période, soit $V(1)$, est inférieure à la mise de fonds initiale $V(0)$. Trouver $VaR_{0.99}(L)$.*

Solution.

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(L) &= VaR_{0.99}(V(0) - V(0)Y) \\ &= V(0) + VaR_{0.99}(-V(0)Y) \end{aligned}$$

par la propriété d'invariance par rapport à la translation de la VaR. À l'aide de la quatrième propriété de la VaR énoncée à la proposition 1.35, on obtient

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(L) &= V(0) + V(0)(VaR_{0.99}(-Y)) \\ &= V(0) + V(0)(-VaR_{1-0.99}(Y)) \\ &= V(0) - V(0)VaR_{1-0.99}(Y). \end{aligned}$$

■

Exemple 1.41 *Un individu investit un montant $V(0) = 1000$. Le rendement instantané de cet investissement est représenté par une variable aléatoire R qui obéit à une loi normale de paramètres $\mu = 0.06$ et $\sigma = 0.2$. La valeur de l'investissement à la fin de la période est $V(1) = V(0)\mathrm{e}^R$. On définit la perte par $L = V(0) - V(1)$. (a) Calculer $E[V(1)]$ et $Var(V(1))$. (b) Calculer $VaR_k(V(1))$ pour $\kappa = 0.01$ et $\kappa = 0.99$. (c) Calculer $E[L]$ et $Var(L)$. (d) Calculer $VaR_\kappa(L)$ pour $\kappa = 0.01$ et $\kappa = 0.99$.*

Solution. (a)

$$\begin{aligned} E[V(1)] &= E\left[V(0)\mathrm{e}^R\right] \\ &= V(0)E\left[\mathrm{e}^R\right], \end{aligned}$$

où $Y = \mathrm{e}^R$ obéit à une loi lognormale de paramètres $\mu = 0.06$ et $\sigma = 0.2$. On sait que $E[Y] = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ et $Var(Y) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} E[V(1)] &= V(0)\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= (1000)\,\mathrm{e}^{0.06+\frac{(0.2)^2}{2}} \\ &= 1083.29. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var\left(V(1)\right) &= Var\left(V(0)\mathrm{e}^{R}\right) \\
&= \left(V(0)\right)^2 Var\left(\mathrm{e}^{R}\right) \\
&= (1000)^2\,\mathrm{e}^{2(0.06)+(0.2)^2}\left(\mathrm{e}^{(0.2)^2}-1\right) \\
&= 47891.89.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
VaR_\kappa\left(V(1)\right) &= VaR_\kappa\left(V(0)\mathrm{e}^{R}\right) \\
&= V(0)VaR_\kappa\left(\mathrm{e}^{R}\right)
\end{aligned}
$$

par la propriété d'invariance à la multiplication par un scalaire positif de la VaR_κ. Étant donné que la fonction exponentielle est croissante, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
VaR_\kappa\left(V(1)\right) &= V(0)\mathrm{e}^{VaR_\kappa(R)} \\
&= V(0)\mathrm{e}^{\mu+\sigma VaR_\kappa(Z)},
\end{aligned}
$$

où Z obéit à une loi normale standard. Pour $\kappa = 0.01$, on a $VaR_\kappa\left(Z\right) = -2.3263$ d'où

$$
VaR_{0.01}\left(R\right) = \mu + \sigma VaR_\kappa\left(Z\right) = 0.06 + (0.2)\left(-2.3263\right) = -0.405.
$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
VaR_\kappa\left(V(1)\right) &= (1000)\,\mathrm{e}^{-0.405} \\
&= 666.98.
\end{aligned}
$$

Pour $\kappa = 0.99$, on a $VaR_\kappa\left(Z\right) = 2.3263$ et donc

$$
\begin{aligned}
VaR_{0.01}\left(R\right) &= \mu + \sigma VaR_\kappa\left(Z\right) \\
&= 0.06 + (0.2)\left(2.3263\right) \\
&= 0.525,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
VaR_\kappa\left(V(1)\right) &= (1000)\,\mathrm{e}^{0.525} \\
&= 1690.5.
\end{aligned}
$$

(c) Étant donné (a), on a

$$
\begin{aligned}
E\left[L\right] &= E\left[V(0)-V(1)\right] \\
&= E\left[V(0)\right] - E\left[V(1)\right] \\
&= 1000 - 1083.29 \\
&= -83.29
\end{aligned}
$$

ce qui indique une perte négative en moyenne, c'est-à-dire un gain.

$$
\begin{aligned}
Var\left(L\right) &= Var\left(V(0)-V(1)\right) \\
&= Var\left(V(1)\right) \\
&= Var\left(V(0)\mathrm{e}^{R}\right) \\
&= \left(V(0)\right)^2 Var\left(\mathrm{e}^{R}\right) \\
&= (1000)^2\,\mathrm{e}^{2(0.06)+(0.2)^2}\left(\mathrm{e}^{(0.2)^2}-1\right) \\
&= 47892.
\end{aligned}
$$

On remarque que la variance de la perte dépend uniquement de la variance du rendement étant donné que la mise de fonds initiale est fixe. (d)

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(L) &= VaR_\kappa(V(0)-V(1)) \\ &= VaR_\kappa\left(V(0)-V(0)\mathrm{e}^R\right) \\ &= V(0)+VaR_\kappa\left(-V(0)\mathrm{e}^R\right) \end{aligned}$$

par la propriété d'invariance à la translation de la VaR. Étant donné la propriété d'invariance à la multiplication par un scalaire positif de la VaR_κ, on peut écrire

$$VaR_\kappa(L)) = V(0)+V(0)VaR_\kappa\left(-\mathrm{e}^R\right).$$

À l'aide de la quatrième propriété de la VaR énoncée à la proposition 1.35,on obtient

$$VaR_\kappa(L) = V(0)-V(0)VaR_{1-\kappa}\left(\mathrm{e}^R\right).$$

Étant donné que la fonction exponentielle est croissante, on a

$$VaR_\kappa(L) = V(0)-V(0)\mathrm{e}^{VaR_{1-\kappa}(R)}.$$

Pour $\kappa = 0.01$, on a $(1-\kappa) = 0.99$ et donc $VaR_\kappa(Z) = 2.3263$. Ainsi

$$\begin{aligned} VaR_{1-0.01}(R) &= \mu+\sigma VaR_\kappa(Z) \\ &= 0.06+(0.2)(2.3263) \\ &= 0.525. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} VaR_{0.01}(L) &= V(0)-V(0)\mathrm{e}^{VaR_{1-0.01}(R)} \\ &= 1000-1000\mathrm{e}^{0.525} \\ &= -690.46. \end{aligned}$$

Pour $\kappa = 0.99$, on a $(1-\kappa) = 0.01$ et donc $VaR_\kappa(Z) = -2.3263$. Ainsi,

$$\begin{aligned} VaR_{1-0.99}(R) &= \mu+\sigma VaR_\kappa(Z) \\ &= 0.06+(0.2)(-2.3263) \\ &= -0.405. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(L) &= V(0)-V(0)\mathrm{e}^{VaR_{1-0.99}(R)} \\ &= 1000-1000\mathrm{e}^{-0.405} \\ &= 333.02. \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on a donc 99% de chance que la perte soit inférieure à 333.02 et 1% de chance que la perte soir inférieure à -690.46 ce qui veut dire que l'on a 1% de chance que le gain dépasse 690.46. ■

1.6.2 Mesure TVaR (Tail Value-at-risk)

Définition 1.42 *Soit une variable aléatoire X avec fonction de répartition F_X. On définit la mesure de risque Tail Value-at-Risk de niveau κ, notée $TVaR_\kappa$, par*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)du,$$

où $\kappa \in (0,1)$ est un niveau de confiance fixé.

Cette mesure de risque correspond à la moyenne des VaR au niveau supérieur à κ. À noter que la Définition 1.42 est valide pour une variable aléatoire continue, discrète ou mixte.

Exemple 1.43 *Soit X une variable aléatoire discrète qui prend valeur dans $\{0, 100, 200, 500, 1000\}$ et définie comme suit*

x	$\Pr(X = x)$	$\Pr(X \leq x)$
0	*0.3*	*0.3*
100	*0.4*	*0.7*
200	*0.15*	*0.85*
500	*0.10*	*0.95*
1000	*0.05*	*1*

(a) Trouver $F_X^{-1}(u)$. (b) Trouver $TVaR_0(X)$. (c) Trouver $TVaR_{0.75}(X)$.

Solution. (a) On a $F_X^{-1}(\kappa) = \inf\{x \in \{0, 100, 200, 500, 1000\} : \Pr(X \leq x) \geq \kappa\}$ où $\kappa \in (0, 1)$

κ	$F_X^{-1}(\kappa)$	κ	$F_X^{-1}(\kappa)$
0.22	0	0.8499	200
0.3	0	0.8501	500
0.31	100	0.9498	500
0.39	100	0.9507	1000
0.73	200	0.999	1000

Alors,

$$F_X^{-1}(\kappa) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq \kappa \leq 0.3 \\ 100, \ 0.3 < \kappa \leq 0.7 \\ 200, \ 0.7 < \kappa \leq 0.85 \\ 500, \ 0.85 < \kappa \leq 0.95 \\ 1000, \ 0.95 < \kappa \leq 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} TVaR_0(X) &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-0}\left(\int_0^{0.3} 0\mathrm{d}u + \int_{0.3}^{0.7} 100\mathrm{d}u + \int_{0.7}^{0.85} 200\mathrm{d}u + \int_{0.85}^{0.95} 500\mathrm{d}u + \int_{0.95}^{1} 1000\mathrm{d}u\right) \\ &= 0(0.3-0) + 100(0.7-0.3) + 200(0.85-0.7) + 500(0.95-0.85) + 1000(1-0.95) \\ &= \sum_{x \in \{0,100,200,500,1000\}} x\Pr(X = x) \\ &= E[X]. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.75}(X) &= \frac{1}{1-0.75}\int_{0.75}^{1} VaR_u(X)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-0.75}\left(\int_{0.75}^{0.85} 200\mathrm{d}u + \int_{0.85}^{0.95} 500\mathrm{d}u + \int_{0.95}^{1} 1000\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{1-0.75}\left(200\,(0.85-0.75) + 500\,(0.95-0.85) + 1000(1-0.95)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.75}\left(VaR_{0.75}(X)\,(F_X\,(VaR_{0.75}(X)) - 0.75) + 500\,(0.95-0.85) + 1000(1-0.95)\right) \\
&= \frac{1}{1-0.75}\left(VaR_{0.75}(X)\,(F_X\,(VaR_{0.75}(X)) - 0.75) + E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.75}(X)\}}\right]\right).
\end{aligned}$$

■

On déduit une définition plus pratique sur la plan calculatoire pour la $TVaR_\kappa(X)$.

Proposition 1.44 *Soit une variable aléatoire X avec fonction de répartition F_X. Alors, la Définition 1.42 est équivalente à*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\,(F_X\,(VaR_\kappa(X)) - \kappa)\,.$$

Remarque 1.45 *La deuxième définition de la $TVaR_\kappa$ est valide peu importe la définition de la variable aléatoire X.*

Remarque 1.46 *On peut calculer directement $E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]$ ou utiliser la relation*

$$E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] = E\,[X] - E\left[X \times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}\right].$$

Remarque 1.47 *Si X est une variable aléatoire continue, alors $F_X(VaR_\kappa(X)) = \kappa$ et par conséquent*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right].$$

Remarque 1.48 *La mesure de risque $TVaR$ est une mesure cohérente.*

Exemple 1.49 *Soit X une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle de paramètre β avec $f_X(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$. Trouver $TVaR_\kappa(X)$.*

Solution. À l'aide de la Définition 1.42

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa\,(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_u(X)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} \frac{-1}{\beta}\ln(1-u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{(1-\kappa)\beta}\int_{\kappa}^{1} -\ln(1-u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on a $y = \ln(1-u), \mathrm{d}y = \frac{-1}{1-u}\mathrm{d}u, \mathrm{d}v = -\mathrm{d}u, v = 1-u$ et donc

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{\beta(1-\kappa)}\left((1-u)\ln(1-u)\big|_\kappa^1 + \int_\kappa^1 \frac{1-u}{1-u}\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{1}{\beta(1-\kappa)}\left(0-(1-\kappa)\ln(1-\kappa)+(1-\kappa)\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\{1-\ln(1-\kappa)\} \\
&= \frac{1}{\beta} - \frac{\ln(1-\kappa)}{\beta} \\
&= E[X] + VaR_\kappa(X).
\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la Proposition 1.44. Étant donné que la variable aléatoire X est continue, on a

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right].$$

Pour une variable aléatoire exponentielle, on a (voir annexe Marceau (2013))

$$E\left[X \times 1_{\{X\leq b\}}\right] = -b\mathrm{e}^{-\beta b} + \frac{1}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta b}\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left(E[X] - E\left[X\times 1_{\{X\leq b\}}\right]\right) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{\beta} - \left(-VaR_\kappa(X)\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)} + \frac{1}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

où $VaR_\kappa(X) = \frac{-1}{\beta}\ln(1-\kappa)$. On obtient donc l'expression suivante

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{\beta} + VaR_\kappa(X)\mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{-1}{\beta}\ln(1-\kappa)\right)} - \frac{1}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{-1}{\beta}\ln(1-\kappa)\right)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{\beta} + VaR_\kappa(X)(1-\kappa) - \frac{1}{\beta}\left(1-(1-\kappa)\right)\right) \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{\beta} + VaR_\kappa(X)(1-\kappa) - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}(1-\kappa)\right) \\
&= \frac{1}{\beta} + VaR_\kappa(X).
\end{aligned}$$

À noter que $TVaR_\kappa(X) > VaR_\kappa(X)$. ■

Exemple 1.50 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi gamma de paramètres α et β avec fonction de densité $f_X(x;\alpha,\beta) = h(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$ et fonction de répartition $F_X(x) = H(x;\alpha,\beta)$. Trouver $TVaR_\kappa(X)$.*

Solution. Étant donné que la variable aléatoire X est continue, on a

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right].$$

Pour une variable aléatoire gamma, on a (voir annexe Marceau (2013))

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq b\}}\right] &= \frac{\alpha}{\beta} H(b; \alpha+1, \beta) \\ &= E[X]\, H(b; \alpha+1, \beta). \end{aligned}$$

On déduit donc

$$E\left[X \times 1_{\{X > b\}}\right] = E[X]\,(1 - H(b; \alpha+1, \beta))$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} E[X]\,(1 - H(VaR_\kappa(X); \alpha+1, \beta)). \end{aligned}$$

■

Exemple 1.51 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi normale paramètres μ et σ. Trouver $TVaR_\kappa(X)$.*

Solution. Étant donné que la variable aléatoire X est continue, on a

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right].$$

Pour une variable aléatoire normale, on a (voir annexe)

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq b\}}\right] = \mu\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

On déduit donc

$$E\left[X \times 1_{\{X > b\}}\right] = \mu - \mu\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\mu - \mu\Phi\left(\frac{VaR_\kappa(X)-\mu}{\sigma}\right) + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(VaR_\kappa(X)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right), \end{aligned}$$

où $VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa) = \mu + \sigma VaR_\kappa(Z)$. La mesure de risque $TVaR_\kappa$ pour une variable aléatoire normale est donc donnée par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\mu - \mu\Phi\left(\frac{\mu + \sigma VaR_\kappa(Z) - \mu}{\sigma}\right) + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(\mu + \sigma VaR_\kappa(Z) - \mu)^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\mu - \mu\Phi(VaR_\kappa(Z)) + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(VaR_\kappa(Z))^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\mu - \mu\kappa + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(VaR_\kappa(Z))^2}{2}}\right) \\ &= \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} \\ &= \mu + \sigma TVaR_\kappa(Z) \end{aligned}$$

car pour une v.a Z obéissant à une loi normale standard, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Z) &= \frac{1}{1-\kappa} E\left[X \times 1_{\{Z > VaR_\kappa(Z)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \int\limits_{VaR_\kappa(Z)}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

On doit intégrer par parties en posant $u = y^2$ et $\mathrm{d}u = 2ydy$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Z) &= \frac{1}{1-\kappa} \int\limits_{VaR_\kappa(Z)}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{1-\kappa} \int\limits_{(VaR_\kappa(Z))^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{2} \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(VaR_\kappa(Z))^2}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{2}} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}}{\frac{-1}{2}} \Big|_{(VaR_\kappa(Z))^2}^{\infty} \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(VaR_\kappa(Z))^2} \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.52 *La mesure de risque Tail Value-at-Risk possède les propriétés suivantes:*

- $TVaR_\kappa(a + X) = a + TVaR_\kappa(X)$, $a \in \mathbb{R}$. (invariance à la translation)
- $TVaR_\kappa(aX) = aTVaR_\kappa(X)$, $a \in \mathbb{R}^+$. (invariance à la multiplication par un scalaire positif ou homogénéité)
- Soit une variable aléatoire continue $Y = -X$. Alors,

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= -\frac{1}{1-\kappa} \int\limits_0^{1-\kappa} VaR_u(X)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right]}{1-\kappa} \\ &= -\frac{1}{1-\kappa} \left(E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)\right). \end{aligned}$$

Preuve. Soit une variable aléatoire Y avec fonction de répartition F_Y et $a \in \mathbb{R}$. Pour $Y = a + X$, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa} \int\limits_\kappa^1 VaR_u(Y)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \int\limits_\kappa^1 (a + VaR_u(X))\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left(a(1-\kappa) + \int\limits_\kappa^1 VaR_u(X)\mathrm{d}u\right) \\ &= a + TVaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

Soit une variable aléatoire Y avec fonction de répartition F_Y et $a \in \mathbb{R}^+$. Pour $Y = aX$, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(Y)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 aVaR_u(X)du \\
&= aTVaR_\kappa(X).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(Y)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 -VaR_{1-u}(X)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Posons $s = 1-u$ et $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}u$. Alors,

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^0 \left(-VaR_s(X)\right)(-\mathrm{d}s) \\
&= \frac{-1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(X)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\int_\kappa^1 VaR_\kappa(u)\mathrm{d}u = E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X\left(VaR_\kappa(X)\right) - \kappa\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\kappa} VaR_s(X)\mathrm{d}s &= \int_0^1 VaR_s(X)\mathrm{d}s - \int_{1-\kappa}^1 VaR_s(X)\mathrm{d}s \\
&= E[X] - \left(E\left[X \times 1_{\{X > VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] + VaR_{1-\kappa}(X)\left(F_X\left(VaR_{1-\kappa}(X)\right) - (1-\kappa)\right)\right) \\
&= E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] - VaR_{1-\kappa}(X)\left(F_X\left(VaR_{1-\kappa}(X)\right) - (1-\kappa)\right) \\
&= E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] + VaR_{1-\kappa}(X)((1-\kappa) - F_X\left(VaR_{1-\kappa}(X)\right)).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(Y) &= \frac{-1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(X)\mathrm{d}s \\
&= \frac{-1}{1-\kappa} \times \left(E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] + VaR_{1-\kappa}(X)(1-\kappa - F_X\left(VaR_{1-\kappa}(X)\right)\right) \\
&= -\frac{E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right]}{1-\kappa},
\end{aligned}$$

car la variable aléatoire X est supposée continue. On obtient la dernière expression ainsi:

$$\begin{aligned}
TVaR_\kappa(Y) &= \frac{-1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(X)\mathrm{d}s \\
&= \frac{-1}{1-\kappa}\left(\int_0^1 VaR_s(X)\mathrm{d}s - \int_{1-\kappa}^1 VaR_s(X)\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{-1}{1-\kappa}\left(E\left[X\right] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)\right).
\end{aligned}$$

■

Exemple 1.53 *Une somme $V(0)$ est investie dans un fonds pendant une période. La valeur de l'investissement à la fin de la période est $V(1) = V(0)Y$ où Y est une v.a continue. La perte financière liée à cet investissement est définie par la v.a L où $L = V(0) - V(1)$. Une perte financière positive L survient si la valeur de l'investissement après une période, soit $V(1)$, est inférieure à la mise de fonds initiale $V(0)$. Trouver $TVaR_{0.99}(L)$.*

Solution.

$$\begin{aligned}
TVaR_{0.99}(L) &= TVaR_{0.99}(V(0) - V(1)) \\
&= V(0) + TVaR_{0.99}(-V(1)) \\
&= V(0) + TVaR_{0.99}(-V(0)Y) \\
&= V(0) + V(0)TVaR_{0.99}(-Y) \\
&= V(0) + V(0)\left(\frac{-1}{1-0.99}\right)\int_0^{1-0.99} VaR_u(Y)\mathrm{d}u \\
&= V(0) + V(0)\left(-\frac{E\left[Y \times 1_{\{Y \leq VaR_{1-0.99}(Y)\}}\right]}{1-0.99}\right)
\end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Modélisation des risques individuels

2.1 Introduction

Le présent chapitre vise à étudier différents modèles permettant de décrire le comportement d'un risque individuel. Par risque individuel, on entend:

- Les coûts pour un contrat d'assurance IARD (auto-habitation).
- Les coûts pour un contrat d'assurance vie.
- Les coûts pour un régime d'assurance collective.
- Les coûts pour un contrat d'assurance maladie.
- Les coûts pour un régime d'assurance pour accident de travail.
- Les pertes reliées à un titre avec risque de défaut (prêt hypothécaire, obligation).

Soit X une variable aléatoire représentant les coûts reliés à un risque individuel. Ces coûts ou pertes sont modélisés sur une courte période, par exemple 1 an. La modélisation de X dépend du type de risque, de la nature de la perte et des informations détenues sur le risque. Il est important de considérer dans le choix de modèle qu'en actuariat, X représente les pertes éventuelles pouvant être engendrées par un contrat d'assurance. La variable aléatoire X peut donc prendre une valeur 0 avec une **forte** probabilité. On doit avoir des modèles appropriés pour tenir compte de ce phénomène.

Remarque 2.1 *Le risque de crédit est le risque que l'emprunteur (un particulier ou une entreprise) fasse défaut. Par défaut, on entend un des événements suivants: banqueroute de l'emprunteur; modification de la cote de l'emprunteur (ex: passage de AAA à AA), modification de la structure de la dette d'un emprunteur.*

Dans ce chapitre, on examine 3 approches pour modéliser la variable aléatoire X:

- Approche indemnitaire
- Approche forfaitaire
- Approche fréquence-sévérité.

2.2 Approche indemnitaire

Selon cette approche, on suppose qu'au plus un sinistre peut se produire par période, c'est-à-dire aucun sinistre ou un sinistre peut se produire par période.

2.2.1 Cas spécifique: Assurance vie temporaire 1 an

On considère un contrat d'assurance vie temporaire 1 an. Le contrat prévoit le versement d'une prestation b (montant fixé) à la fin de l'année du contrat si le décès survient durant la prochaine année.

On désigne par q la probabilité de décès. Celle-ci dépend de facteurs tels que l'âge, le sexe, le type de profession, la condition de santé, etc (voir table de mortalité). On ne tient pas compte des conditions économiques (c'est-à-dire du facteur d'actualisation v). Cette approche peut être utilisée notamment en assurance vie collective (courte durée, généralement 1 an).

Définition 2.2 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche indemnitaire dans le cadre d'une assurance vie temporaire 1 an. Alors,*

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} b, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases} \\ &= bI, \end{aligned}$$

où I est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre q définie comme suit

$$I = \begin{cases} 1, & \textit{si décès durant l'année} \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases},$$

avec $\Pr(I = 1) = q$ *et* $\Pr(I = 0) = 1 - q$. *Selon cette définition du risque X, on a que $X = 0$ avec une forte probabilité.*

Proposition 2.3 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche indemnitaire dans le cadre d'une assurance vie temporaire 1 an. Alors,*

$$\begin{aligned} \Pr(X &= x) = \begin{cases} q, & x = b \\ 1 - q, & x = 0 \end{cases}; \\ E[X] &= bq; \\ Var(X) &= b^2 q(1 - q); \\ M_X(t) &= (1 - q) + q\mathrm{e}^{tb}. \end{aligned}$$

Preuve. La fonction de masse de probabilité de X est donnée par

$$\begin{aligned} \Pr(X &= b) = \Pr(I = 1) = q; \\ \Pr(X &= 0) = \Pr(I = 0) = 1 - q. \end{aligned}$$

Pour l'espérance et la variance de X, on a

$$E[X] = E[bI] = bE[I] = bq;$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(bI) \\ &= b^2 Var(I) \\ &= b^2 q(1 - q). \end{aligned}$$

Quant à la fonction génératrice des moments (fgm) de X, on l'obtient ainsi:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] \\ &= \mathrm{e}^0 \Pr(X = 0) + \mathrm{e}^{tb} \Pr(X = b) \\ &= (1 - q) + q\mathrm{e}^{tb}. \end{aligned}$$

On peut également obtenir la fgm de X comme suit:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\ &= E\left[e^{tbI}\right] \\ &= E\left[e^{(tb)I}\right] \\ &= M_I(tb) \\ &= (1-q) + qe^{tb}, \end{aligned}$$

car pour une variable aléatoire de Bernoulli I de paramètre q, on a $M_I(t) = 1 - q + qe^t$. ■

Exemple 2.4 *Un contrat d'assurance vie temporaire 1 an est émis à un individu âgé de 50 ans. La probabilité de décès à 50 ans est $q = 0.0073$. La prestation de décès est de 100 000\$. (a) Définir X. (b) Trouver $E[X]$. (c) Trouver $Var(X)$. (d) Trouver la fonction de masse de probabilité de X.*

Solution. (a) $X = 100000I$ où $I \sim Bern(q = 0.0073)$. (b) $E[X] = bq = (100000)(0.0073) = 730$. (c)

$$\begin{aligned} Var(X) &= b^2 q(1-q) \\ &= (100000)^2 (0.0073)(0.9927) \\ &= 7.2467 \times 10^7. \end{aligned}$$

(d)

$$\Pr(X = x) = \begin{cases} 0.9927, & \text{si } x = 0 \\ 0.0073, & \text{si } x = 100000. \end{cases}$$

■

Remarque 2.5 *$E[X]$ est appelée la **prime pure.***

Remarque 2.6 *On observe une grande différence entre l'espérance des coûts (ex: 730\$) et les coûts éventuels (ex: 100 000\$) étant donné la forte masse de probabilité à zéro.*

2.2.2 Cas général

On rappelle que selon l'approche indemnitaire, on prévoit la survenance **d'au plus** un événement pendant une période.

Définition 2.7 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche indemnitaire. Alors,*

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} B, & si\ I = 1 \\ 0, & si\ I = 0 \end{cases} \\ &= IB, \end{aligned}$$

*où B est une variable aléatoire représentant les coûts **si** un événement se produit et I est une variable aléatoire de Bernoulli (variable aléatoire d'**occurence**). On suppose les variables aléatoires B et I indépendantes.*

Proposition 2.8 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche indemnitaire. Alors,*

$$F_X(y) = (1-q) + qF_B(y),\ y \geq 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F_X(y) &= \Pr(X \leq y) \\ &= \Pr(X \leq y \,|I = 0)\Pr(I = 0) + \Pr(X \leq y \,|I = 1)\Pr(I = 1) \\ &= (1)(1-q) + \Pr(B \leq y)(q) \\ &= (1-q) + qF_B(y),\ y \geq 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.9 *On peut aussi écrire*

$$F_X(y) = \begin{cases} 1-q, \ \ si\ y=0 \\ (1-q)+(q)F_B(y), \ \ si\ y>0. \end{cases}$$

On note une masse à zéro, $\Pr(X=0)=\Pr(I=0)$*, qui est égale à* $(1-q)$*.*

Remarque 2.10 *Dans le cas où* B *est une variable aléatoire discrète avec* $B \in \{b_1, ..., b_n\}$ *où* $b_1 < b_2 < ... < b_n$*, on a que la variable aléatoire* X *prend des valeurs dans* $\{\mathbf{0}, b_1, ..., b_n\}$ *avec*

$$\begin{aligned} \Pr(X &= 0) = 1-q \\ \Pr(X &= b_j) = \Pr(X=b_j \,|I=0\,)\Pr(I=0) + \Pr(X=b_j \,|I=1\,)\Pr(I=1) \\ &= (0)\,(1-q) + \Pr(B=b_j)\,(q) \\ &= q\Pr(B=b_j). \end{aligned}$$

Remarque 2.11 *Étant donné que* B *et* I *sont des variable aléatoire indépendantes, on a* $\Pr(B \leq y \,|I=1\,) = \Pr(B \leq y)$*. Un exemple de dépendance serait lorsque l'on tient compte de l'environnement, d'une pandémie et qu'un paramètre* Θ *influencerait en même temps la fréquence, soit* I*, et la sévérité, soit* B*.*

Pour trouver l'espérance et la variance des coûts, nous aurons besoin des deux propositions qui suivent.

Proposition 2.12 *Soit* $E[X\,|Y\,]$ *une fonction de la variable aléatoire* Y *qui prend la valeur* $E[X\,|Y=y]$ *lorsque* $Y=y$*. Alors,*

$$E[X] = E[E[X\,|Y\,]]\,.$$

Preuve. On considère le cas discret dans le cadre de cette preuve. Le cas continu est similaire.

$$\begin{aligned} E[E[X\,|Y\,]] &= \sum_y E[X\,|Y=y]\Pr(Y=y) \\ &= \sum_y \left(\sum_x x\Pr(X=x\,|Y=y\,) \right) \Pr(Y=y) \\ &= \sum_y \sum_x x\Pr(X=x\,|Y=y\,)\Pr(Y=y) \\ &= \sum_y \sum_x x\Pr(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{\mathbf{x}} x \sum_{\mathbf{y}} \Pr(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{\mathbf{x}} x\Pr(X=x) \\ &= E[X]\,. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.13 *Soit* $E[X\,|Y\,]$ *et* $Var[X\,|Y\,]$ *des fonctions de la variable aléatoire* Y *qui prennent la valeur* $E[X\,|Y=y]$ *et* $Var(X\,|Y=y\,)$ *lorsque* $Y=y$*. Alors,*

$$Var(X) = E[Var(X\,|Y\,)] + Var(E[X\,|Y\,])\,.$$

Preuve. On développe le côté droit de l'égalité. Pour le premier terme, on a

$$Var(X\,|Y\,) = E\left[X^2\,|Y\,\right] - (E[X\,|Y\,])^2$$

d'où

$$\begin{aligned} E[Var(X\,|Y\,)] &= E\left[E\left[X^2\,|Y\,\right] - (E[X\,|Y\,])^2\right] \\ &= E\left[E\left[X^2\,|Y\,\right]\right] - E\left[(E[X\,|Y\,])^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - E\left[(E[X\,|Y\,])^2\right]. \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned} Var\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right) &= E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right] - \left(E\left[E\left[X\left|Y\right.\right]\right]\right)^2 \\ &= E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E\left[Var\left(X\left|Y\right.\right)\right] + Var\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right) &= E\left[X^2\right] - E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right] \\ &\quad + E\left[\left(E\left[X\left|Y\right.\right]\right)^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 \\ &= E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 \\ &= Var\left(X\right). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.14 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche indemnitaire. Alors,*

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= qE\left[B\right]; \\ Var(X) &= E\left[I\right]E\left[B^2\right] - \left(E\left[I\right]E\left[B\right]\right)^2. \end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= E\left[E\left[X\left|I\right.\right]\right] \\ &= E\left[X\left|I=0\right.\right]\Pr(I=0) + E\left[X\left|I=1\right.\right]\Pr(I=1) \\ &= (0)\left(1-q\right) + E\left[B\right]q \\ &= qE\left[B\right]. \end{aligned}$$

À noter que $(X\left|I=1\right.) = (B\left|I=1\right.) = B$ car les variables aléatoires B et I sont indépendantes. On peut aussi trouver $E\left[X\right]$ en déterminant une forme générale pour $E\left[X\left|I\right.\right]$ qui est une fonction de I. On a

$$\begin{aligned} E\left[X\left|I=0\right.\right] &= 0; \\ E\left[X\left|I=1\right.\right] &= E\left[B\right], \end{aligned}$$

d'où $E\left[X\left|I\right.\right] = IE\left[B\right]$. Alors,

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= E\left[E\left[X\left|I\right.\right]\right] \\ &= E\left[IE\left[B\right]\right] \\ &= E\left[I\right]E\left[B\right]. \end{aligned}$$

Pour évaluer la variance de X, on a $Var\left(X\right) = E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right]$, où

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= E\left[E\left[X^2\left|I\right.\right]\right] \\ &= E\left[X^2\left|I=0\right.\right]\Pr(I=0) + E\left[X^2\left|I=1\right.\right]\Pr(I=1) \\ &= (0)\left(1-q\right) + E\left[B^2\right]q. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right] \\ &= qE\left[B^2\right] - \left(qE\left[B\right]\right)^2 \\ &= E\left[I\right]E\left[B^2\right] - E^2\left[I\right]E^2\left[B\right]. \ \textbf{(*)} \end{aligned}$$

On aurait aussi pu procéder en trouvant une forme générale pour $E\left[X^2 \left| I \right.\right]$ qui est une fonction de I comme suit

$$\begin{aligned} E\left[X^2 \left| I = 0 \right.\right] &= 0; \\ E\left[X^2 \left| I = 1 \right.\right] &= E\left[B^2\right], \end{aligned}$$

d'où $E\left[X^2 \left| I \right.\right] = IE\left[B^2\right]$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= E\left[E\left[X^2 \left| I \right.\right]\right] \\ &= E\left[IE\left[B^2\right]\right] \\ &= E\left[I\right]E\left[B^2\right] \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} Var\left[X\right] &= E\left[X^2\right] - E^2\left[X\right] \\ &= E\left[I\right]E\left[B^2\right] - \left(E\left[I\right]E\left[B\right]\right)^2. \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la Proposition 2.13 pour trouver la variance en conditionnant sur la variable d'occurence I. Dans un premier temps, on doit trouver la forme générale pour $Var\left(X \left| I \right.\right)$. On dispose déjà de la forme générale de $E\left[X \left| I \right.\right]$. On a

$$\begin{aligned} Var\left(X \left| I = 0 \right.\right) &= 0 \\ Var\left(X \left| I = 1 \right.\right) &= Var\left(B\right), \end{aligned}$$

d'où $Var\left(X \left| I \right.\right) = IVar\left(B\right)$. Donc,

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left[Var\left(X \left| I \right.\right)\right] + Var\left(E\left[X \left| I \right.\right]\right) \\ &= E\left[I\right]Var\left(B\right) + Var\left(I\right)E^2\left[B\right]. \text{ (**)} \end{aligned}$$

Vérifions que les 2 approches conduisent au même résultat:

$$\begin{aligned} \text{(**) } Var\left(X\right) &= E\left[I\right]Var\left(B\right) + Var\left(I\right)E^2\left[B\right] \\ &= E\left[I\right]\left(E\left[B^2\right] - E^2\left[B\right]\right) + E^2\left[B\right]\left(E\left[I^2\right] - E^2\left[I\right]\right) \\ &= E\left[I\right]E\left[B^2\right] - E\left[I\right]E^2\left[B\right] + E^2\left[B\right]E\left[I^2\right] - E^2\left[B\right]E^2\left[I\right] \\ &= E\left[I\right]E\left[B^2\right] - E^2\left[I\right]E^2\left[B\right] \text{ car } E\left[I^2\right] = E\left[I\right] \text{ (*)}. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.15 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche indemnitaire. Alors,*

$$M_X(t) = P_I\left(M_B(t)\right) = M_I(\ln M_B(t))).$$

Preuve. On suppose que la fgm de B existe ce qui implique que la fgm de X existe aussi. Alors,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\ &= E\left[E\left[e^{tX} \left| I \right.\right]\right]. \end{aligned}$$

On obtient une forme générale pour $E\left[e^{tX} \left| I \right.\right]$ comme suit:

$$\begin{aligned} E\left[e^{tX} \left| I = 0 \right.\right] &= 1 \\ E\left[e^{tX} \left| I = 1 \right.\right] &= E\left[e^{tB}\right] = M_B(t), \end{aligned}$$

d'où $E\left[\mathrm{e}^{tX}\left|I\right.\right] = \left(M_B(t)\right)^I$. Alors,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[\left(M_B(t)\right)^I\right] \\ &= P_I\left(M_B(t)\right), \end{aligned}$$

où $P_I(s) = E\left[s^I\right]$ est la fonction génératrice des probabilités (fgp) de I évaluée à s et

$$\begin{aligned} P_I(s) &= E\left[s^I\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\ln s^I}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{(\ln s)I}\right] \\ &= M_I(\ln s), \end{aligned}$$

conduisant au résultat désiré. ■

Exemple 2.16 *On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance habitation. La valeur de la maison est de $b = 300\ 000\$$. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire par année avec $q = 0.1$. En cas d'incendie, on a*

$$B = bU,$$

où U est la proportion du dommage à la suite de l'incendie et $f_U(y) = 3y^2$, $0 \leq y \leq 1$. La variable aléatoire X représente les coûts pour le contrat.(a) Trouver $E[X]$. (b) Trouver $Var(X)$. (c) Trouver l'expression de $F_X(y)$. (d) Trouver la probabilité que les coûts soient supérieurs à 200 000\$. (e) Trouver la fonction de densité de X.

Solution. (a)

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I]\,E[B] \\ &= qE[B] \\ &= (0.1)\,E[B] \end{aligned}$$

$$E[B] = E[bU] = bE[U]$$

$$\begin{aligned} E[U] &= \int_0^1 x f_U(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\left(3x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[B] &= (300000)\left(\frac{3}{4}\right) = 225000 \\ E[X] &= (0.1)\,(225000) = 22500 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]\,Var(B) + Var(I)\,E^2[B] \\ &= qVar(B) + q(1-q)E^2[B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\,(B) &= Var\,(bU) \\ &= b^2 Var\,(U) \\ &= b^2(E\left[U^2\right] - E^2\left[U\right]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[U^2\right] &= \int\limits_0^1 \left(x^2\right)\left(3x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3x^5}{5}\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\,(U) &= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{5} - \frac{9}{16} \\ &= \frac{3}{80} \end{aligned}$$

$$Var\,(B) = (300000)^2\left(\frac{3}{80}\right)$$

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= (0.1)\,(300000)^2\left(\frac{3}{80}\right) + (0.1)\,(0.9)\,(225000)^2 \\ &= 4\ 893\ 750\ 000 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} F_X(y) &= \Pr(X \leq y) \\ &= 1 - q + qF_B(y) \text{ où } B = bU \\ &= 1 - q + q\Pr(bU \leq y) \\ &= 1 - q + q\Pr\left(U \leq \frac{y}{b}\right) \\ &= 1 - q + qF_U\left(\frac{y}{b}\right). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \Pr(X &> 200000) = 1 - \Pr(X \leq 200000) \\ &= 1 - (1 - q + qF_B(200000)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_B(200000) &= \Pr(B \leq 200000) \\ &= \Pr(bU \leq 200000) \text{ où } b = 300000 \\ &= \Pr\left(U \leq \frac{2}{3}\right) \\ &= \int\limits_0^{\frac{2}{3}} 3x^2\mathrm{d}x \\ &= x^3\Big|_0^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

$$\Pr(X > 200000) = 1 - \left(0.9 + (0.1)\left(\frac{8}{27}\right)\right) = 0.07037.$$

(e) X est une variable aléatoire mixte c'est-à-dire qu'elle a une masse à zéro et une portion continue entre 0 et 300000:

$$\begin{aligned} f_X(y) &= \frac{\mathrm{d}F_X(y)}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{\mathrm{d}(1-q+qF_B(y))}{\mathrm{d}y} \\ &= qf_B(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_B(y) &= \frac{\mathrm{d}F_B(y)}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{\mathrm{d}F_U(\frac{y}{b})}{\mathrm{d}y} \\ &= \frac{1}{b}f_U\left(\frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(y) &= \left\{ \begin{array}{c} 1-q,\ y=0 \\ q\left(\frac{1}{b}\right)f_U(\frac{y}{b}),\ 0<y<b \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 1-q,\ y=0 \\ \left(\frac{3q}{b^3}\right)y^2,\ 0<y<b \end{array} \right. . \end{aligned}$$

■

Remarque 2.17 *On observe que la variable aléatoire X peut prendre une valeur entre 0 et 300000 alors que $E[X]$ est petite relativement aux valeurs possibles de X (étant donné une masse importante à 0). Attention aux suprises! Par exemple, on a les valeurs suivantes de $E[X]$ en fonction de q :*

q	$E[X]$
0.1	22500
0.01	2250
0.001	225

Le choix des hypothèses du modèle (c'est-à-dire de la valeur du paramètre q de la loi de I) est crucial pour éviter qu'une compagnie ait des difficultés financières.

Exemple 2.18 *On suppose que la variable aléatoire des coûts X est définie selon l'approche indemnitaire, soit*

$$X = \left\{ \begin{array}{l} B,\ I=1 \\ 0,\ I=0, \end{array} \right.$$

où $I \sim$ Bernoulli(q) et B est une variable aléatoire avec fonction de répartition F_B. (a) Trouver l'expression de la $VaR_\kappa(X)$. (b) Trouver l'expression de la $TVaR_\kappa(X)$.

Solution. (a) On sait que $F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$. On cherche à identifier $F_X^{-1}(\kappa)$ pour $\kappa \in (0,1)$, c'est-à-dire on cherche le x^* tel que $F_X(x^*) = \kappa$. Pour $0 \le \kappa \le 1-q$, on a $VaR_\kappa(X) = 0$ alors que pour $1-q < \kappa \le 1$, on a

$$\begin{aligned} F_X(x^*) &= \Pr(X \le x^*) \\ &= 1-q+qF_B(x^*) \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

Alors, $F_B(x^*) = \frac{\kappa-(1-q)}{q}$ et donc

$$VaR_\kappa(X) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq \kappa \leq 1-q \\ F_B^{-1}\left(\frac{\kappa-(1-q)}{q}\right), \ 1-q < \kappa \leq 1. \end{cases}$$

(b)

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X\left(VaR_\kappa(X)\right) - \kappa\right)\right)$$

où

$E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] = E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} | I=0\right] \Pr(I=0) + E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}} | I=1\right] \Pr(I=1).$

De plus, on a

$$E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] = 0 \Pr(I=0) + qE\left[B \times 1_{\{B>VaR_\kappa(X)\}}\right] + qE\left[B \times 1_{\{B>VaR_\kappa(X)\}}\right],$$

et par conséquent on obtient

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\left\{qE\left[B \times 1_{\{B>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X\left(VaR_\kappa(X)\right) - \kappa\right)\right\}$$

où $F_X\left(VaR_\kappa(X)\right) = 1 - q + qF_B(VaR_\kappa(X))$.

Exemple 2.19 *On suppose que la variable aléatoire des coûts X est définie selon l'approche indemnitaire, soit*

$$X = \begin{cases} B, \ I=1 \\ 0, \ I=0 \end{cases},$$

où $I \sim Bern(0.15)$ et $B \sim Exp\left(\frac{1}{10000}\right)$. (a) Trouver $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.99}(X)$. (b) Trouver $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

■

Solution. (a) Pour $0 \leq \kappa \leq 1 - 0.15$, $VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = 0$. Alors, $VaR_{0.5} = 0$. Pour $0.85 < \kappa \leq 1$, $F_X^{-1}(\kappa)$ est la valeur de x^* tel que $F_X(x^*) = 1 - q + qF_B(x^*) = \kappa$, c'est-à-dire la valeur de x^* tel que

$$F_B(x^*) = \frac{\kappa-(1-q)}{q}.$$

Par conséquent,

$$VaR_\kappa(X) = F_B^{-1}\left(\frac{\kappa-(1-q)}{q}\right).$$

On a donc

$$VaR_{0.99}(X) = F_B^{-1}\left(\frac{0.99-0.85}{0.15}\right) = F_B^{-1}\left(\frac{14}{15}\right)$$

où $F_B(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10000}}$. Alors, on a $\mathrm{e}^{-\frac{x}{10000}} = 1 - \frac{14}{15}$ et donc $x = -10000\ln\left(1-\frac{14}{15}\right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(X) &= -10000\ln\left(1-\frac{14}{15}\right) \\ &= 27080.5 \end{aligned}$$

(b) Pour $\kappa = 0.5$, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.5}(X) &= \frac{1}{1-0.5}\left(E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.5}(X)\}}\right] + VaR_{0.5}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.5}(X)\right) - 0.5\right)\right) \\ &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.5}(X)\}}\right]}{1-0.5} \text{ car } VaR_{0.5}(X) = 0. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>0\}}\right] &= qE\left[B \times 1_{\{B>0\}}\right] \\ &= (0.15)\,E\left[B\right] \\ &= 1500. \end{aligned}$$

$$TVaR_{0.5}(X) = \frac{1500}{0.5} = 3000.$$

Pour $\kappa = 0.99$, on a

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(X) &= \frac{1}{1-0.99}\left(E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\right] + VaR_{0.99}(X)\left(F_X\left(VaR_{0.99}(X)\right) - 0.99\right)\right) \\ &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\right]}{1-0.99} \end{aligned}$$

car

$$F_X\left(VaR_{0.99}(X)\right) = 1 - 0.15 + 0.15F_B(27080.50201) = 0.99$$

étant donné que $\kappa = 0.99 > \Pr(X = 0) = 0.85$ et donc que la distribution de X est continue à cet endroit. Pour une variable aléatoire exponentielle, on a (voir annexe)

$$E\left[B \times 1_{\{B\leq b\}}\right] = -b\mathrm{e}^{-\beta b} + \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta b}\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} E\left[B \times 1_{\{B\leq 27080.5\}}\right] &= -27080.5\mathrm{e}^{-\frac{1}{10000}27080.5} + 10000\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10000}27080.5}\right) \\ &= 7528. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} E\left[B \times 1_{\{B>27080.5\}}\right] &= E\left[B\right] - E\left[B \times 1_{\{B\leq 27080.5\}}\right] \\ &= 10000 - 7528 \\ &= 2472. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>27080.5\}}\right] &= qE\left[B \times 1_{\{B>27080.5\}}\right] \\ &= (0.15)\,(2472) \\ &= 370.8. \end{aligned}$$

$$TVaR_{0.99}(X) = \frac{370.8}{1-0.99} = 37080.$$

■

2.3 Approche forfaitaire

Selon cette approche, on suppose que plusieurs sinistres peuvent survenir dans une période. Toutefois, si un ou plusieurs sinistres surviennent, on ne dispose que du montant total des sinistres encourus au cours de la période et non pas de la valeur individuelle de chaque sinistre.

Définition 2.20 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche forfaitaire. Alors,*

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} B, & si\ I = 1 \\ 0, & si\ I = 0 \end{cases} \\ &= IB, \end{aligned}$$

*où B est une variable aléatoire représentant l'ensemble des coûts pour un contrat si au moins un sinistre survient, c'est-à-dire la somme de tous les sinistres encourus si au moins un événement se produit au cours d'une période. De plus, la variable aléatoire I est une variable aléatoire de Bernoulli où $I = 1$ avec $\Pr(I = 1) = q$ si **au moins** un sinistre se produit et $I = 0$ avec $\Pr(I = 0) = 1 - q$ si aucun sinistre se produit. On suppose les variables aléatoires B et I indépendantes.*

Remarque 2.21 *Les définitions de X sous les approches indemnitaires et forfaitaires sont identiques mais leur interprétation diffère. Par conséquent, on a les mêmes expressions dans les deux cas pour $E[X], Var(X), F_X$ et M_X.*

Remarque 2.22 *Dans l'approche forfaitaire, on ne tient pas compte du nombre de sinistres mais seulement du montant total des sinistres si un sinistre survient. La fréquence des sinistres sera prise en compte dans l'approche fréquence-sévérité discutée à la section suivante.*

Exemple 2.23 *On considère un contrat d'assurance maladie émis à une famille composée de 2 adultes et 2 enfants. On suppose que la variable aléatoire d'occurence I obéit à une loi de Bernoulli de paramètre $q = 0.3$ et que la variable aléatoire B obéit à une loi exponentielle de paramètre $\beta = 0.0001$ telle que $E[B] = \frac{1}{\beta} = 10000$. (a) Trouver $E[X]$.(b) Trouver $Var(X)$. (c) Trouver F_X. (d) Trouver $VaR_{0.99}(X)$.*

Solution. (a) $E[X] = E[I]E[B] = (0.3)(10000) = 3000$. (b)

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[I]\,Var(B) + Var(I)\,E^2[B] \\ &= (0.3)(10000)^2 + (0.3)(0.7)(10000)^2 \\ &= 51\ 000\ 000. \end{aligned}$$

(c) $F_X(x) = (1-q) + qF_B(x) = 0.7 + 0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10000}}\right)$. (d) On cherche la valeur de x^* pour laquelle $F_X(x^*) = (1-q) + qF_B(x^*) = 0.99$:

$$\begin{aligned} 0.7 + 0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}}\right) &= 0.99 \\ 0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}}\right) &= 0.29 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}} &= \frac{29}{30} \\ \mathrm{e}^{-\frac{x^*}{10000}} &= \frac{1}{30} \\ \ln\left(\frac{1}{30}\right) &= -\frac{x^*}{10000}, \end{aligned}$$

et donc $VaR_{0.99}(X) = 34\ 011.97$. ■

2.4 Approche fréquence-sévérité

Définition 2.24 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche fréquence-sévérité. Alors,*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où M est une variable aléatoire représentant le nombre de sinistres et B_k est une variable aléatoire représentant le montant du kième sinistre. On suppose que $\{B_1, B_2, ...\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique B. De plus, on suppose que $\{B_1, B_2, ...\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes de la variable aléatoire de fréquence M.

Remarque 2.25 *Il est équivalent de définir la variable aléatoire X selon l'approche fréquence-sévérité comme suit:*

$$X = \begin{cases} 0, \ si \ M = 0 \\ B_1, \ si \ M = 1 \\ B_1 + B_2, \ si \ M = 2 \\ B_1 + B_2 + B_3, \ si \ M = 3 \\ \ldots \end{cases}$$

Remarque 2.26 *La variable aléatoire M correspond à la fréquence des sinistres. Elle est aussi appelée variable aléatoire de comptage. Le montant B d'un sinistre correspond à la sévérité (ou gravité) d'un sinistre.*

Remarque 2.27 *Étant donné que la variable aléatoire X est définie comme une somme aléatoire, celle-ci obéit à une loi composée.*

Proposition 2.28 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts associés à un risque individuel définie selon l'approche fréquence-sévérité. Alors,*

$$E[X] = E[M]\,E[B]\,.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X|M]] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E[X|M=j]\Pr(M=j). \end{aligned}$$

On a la forme générale suivante pour $E[X|M]$:

$$\begin{aligned} E[X|M=0] &= 0 \\ E[X|M=1] &= E[B_1] \\ E[X|M=2] &= E[B_1 + B_2] \\ &= E[B_1] + E[B_2] \\ &= 2E[B] \end{aligned}$$

étant donné que les variables aléatoires B_1 et B_2 sont identiquement distribuées. On a donc $E[X|M] = ME[B]$ ce qui conduit à

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X|M]] \\ &= E[ME[B]] \\ &= E[M]\,E[B]\,. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.29 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche fréquence-sévérité. Alors,*

$$Var(X) = E[Var(X|M)] + Var(E[X|M])\,.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} Var(X|M=0) &= 0 \\ Var(X|M=1) &= Var(B_1) \\ Var(X|M=2) &= Var(B_1 + B_2) \\ &= Var(B_1) + Var(B_2) \end{aligned}$$

car les variables aléatoires B_1 et B_2 sont supposées indépendantes. De plus,

$$Var\left(X\left|M=2\right.\right)=2Var\left(B\right)$$

car les variables aléatoires B_1 et B_2 sont supposées identiquement distribuées. On a donc $Var\left(X\left|M\right.\right)=MVar\left(B\right)$ ce qui conduit, avec l'expression générale obtenue pour $E\left[X\left|M\right.\right]$, au résultat désiré

$$\begin{aligned} Var\left(X\right) &= E\left[MVar\left(B\right)\right]+Var\left(ME\left[B\right]\right) \\ &= E\left[M\right]Var\left(B\right)+Var\left(M\right)E^2\left[B\right]. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.30 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts associés à un risque individuel définie selon l'approche fréquence-sévérité. Alors,*

$$F_X(y)=\Pr(M=0)+\sum_{k=1}^{\infty}\Pr(M=k)F_{B_1+...+B_k}(y).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F_X(y) &= \Pr(X\leq y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Pr(X\leq y\left|M=k\right.)\Pr(M=k) \\ &= \Pr(M=0)+\sum_{k=1}^{\infty}\Pr(M=k)F_{B_1+...+B_k}(y). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.31 *Il existe peu de lois pour B pour lesquelles on peut trouver une forme analytique pour $F_{B_1+...+B_k}(y), k\geq 2$. Si $B_1\sim B_2\sim ...\sim B\sim Exp(\beta)$, alors*

$$B_1+...+B_k\sim Erlang(k,\beta)$$

et si $B_1\sim B_2\sim ...\sim B\sim Gamma(\alpha,\beta)$, alors

$$B_1+...+B_k\sim Gamma(k\alpha,\beta).$$

On dit que ces lois sont fermées sous l'opération de la convolution.

Définition 2.32 *Soit deux variables aléatoires indépendantes X et Y. On définit $S=X+Y$. Alors, on a*

$$F_S(x)=F_{X+Y}(x)=F_X(x)*F_Y(x).$$

Cette opération, désignée par $*$, est appelée le produit de convolution. On dit qu'une loi est fermée sous le produit de convolution si la loi de la somme des variables aléatoires indépendantes X et Y appartient à la même famille que la loi régissant X et Y.

Proposition 2.33 *Soit X une variable aléatoire représentant les coûts d'un risque individuel définie selon l'approche fréquence-sévérité. Alors,*

$$\begin{aligned} M_X(t) &= P_M\left(M_B(t)\right) \\ &= M_M(\ln M_B(t)). \end{aligned}$$

Preuve. Deux approches différentes peuvent être utilisées pour démontrer la proposition. Selon une première approche, on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\ &= E\left[E\left[e^{tX}\,|M\right]\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[e^{tX}\,|M=0\right] &= 1 \\ E\left[e^{tX}\,|M=1\right] &= E\left[e^{tB_1}\right] = M_B(t) \\ E\left[e^{tX}\,|M=2\right] &= E\left[e^{t(B_1+B_2)}\right] \\ &= E\left[e^{tB_1}\right]E\left[e^{tB_2}\right] \end{aligned}$$

car les variables aléatoires B_1 et B_2 sont supposées indépendantes. De plus,

$$E\left[e^{tX}\,|M=2\right] = \left(E\left[e^{tB}\right]\right)^2$$

car les variables aléatoires B_1 et B_2 sont supposées identiquement distribuées. On obtient donc $E\left[e^{tX}\,|M\right] = (M_B(t))^M$ ce qui conduit à

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E_M\left[(M_B(t))^M\right] \\ &= P_M\left(M_B(t)\right) \\ &= M_M(\ln M_B(t)). \end{aligned}$$

Selon une deuxième approche, on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] \\ &= E\left[E\left[e^{tX}\,|M\right]\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E\left[e^{tX}\,|M=j\right]\Pr\left(M=j\right) \\ &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} E\left[e^{tX}\,|M=j\right]\Pr\left(M=j\right) \\ &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} E\left[e^{t(B_1+\ldots+B_j)}\right]\Pr\left(M=j\right) \\ &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} E\left[e^{tB_1}\right]\ldots E\left[e^{tB_j}\right]\Pr\left(M=j\right), \end{aligned}$$

car les variables aléatoires B_1, B_2,... sont supposées indépendantes. De plus, étant donné que les variables aléatoires B_1, B_2,... sont supposées identiquement distribuées, on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(E\left[e^{tB}\right]\right)^j \Pr\left(M=j\right) \\ &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} (M_B(t))^j \Pr\left(M=j\right) \\ &= P_M(M_B(t)). \end{aligned}$$

■

2.5 Distributions de fréquence

Les principales lois utilisées pour modéliser le nombre de sinistre sont les lois de Poisson, binomiale (incluant la loi de Bernoulli) et binomiale négative (incluant la loi géométrique).

2.5.1 Loi de Poisson

Les différentes caractéristiques de la loi de Poisson sont énumérées ci-dessous. Pour $M \sim Pois(\lambda)$, on a

Paramètre:	$\lambda > 0$
Fonction de masse de probabilité:	$\Pr(M = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k \in \{0, 1, 2, ...\}$
Espérance:	$E[M] = \lambda$
Variance:	$Var(M) = \lambda$
Fonction génératrice des moments:	$M_M(t) = e^{\left[\lambda(e^t-1)\right]}$
Fonction génératrice des probabilités:	$P_M(t) = e^{[\lambda(t-1)]}$

La loi de Poisson est une loi fondamentale en actuariat et dans d'autres domaines. L'utilisation de cette loi dans la modélisation sous-entend que l'on suppose $E[M] = VaR(M)$. Ce phénomène est appelé l'équidispersion. Dans plusieurs contextes de modélisation de la fréquence, cette propriété n'est pas respectée. Nous étudierons donc différentes extensions de la loi de Poisson, obtenues par mélange, permettant d'introduire de la surdispersion. Si la variable aléatoire M dans la modélisation du risque individuel X selon l'approche fréquence-sévérité obéit à une loi de Poisson, alors on dit que X obéit à une loi Poisson composée de paramètres λ et F_B, soit $X \sim Pois\ Comp(\lambda; F_B)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[M]\,E[B] = \lambda E[B]\,; \\
Var(X) &= E[M]\,Var[B] + Var[M]\,E^2[B] \\
&= \lambda Var[B] + \lambda E^2[B] \\
&= \lambda E\left[B^2\right]; \\
M_X(t) &= M_M(\ln M_B(t)) \\
&= e^{\lambda(M_B(t)-1)}.
\end{aligned}$$

2.5.2 Loi binomiale

Les différentes caractéristiques de la loi binomiale sont énumérées ci-dessous. Pour $M \sim Bin(n, q)$, on a

Paramètre:	$n \in \mathbb{N}, q \in (0, 1)$
Fonction de masse de probabilité:	$\Pr(M = k) = \binom{n}{k} (q)^k (1-q)^{n-k}, k \in \{0, 1, ..., n\}$
Espérance:	$E[M] = nq$
Variance:	$Var(M) = nq(1-q)$
Fonction génératrice des moments:	$M_M(t) = (qe^t + 1 - q)^n$
Fonction génératrice des probabilités:	$P_M(t) = (1 - q + qt)^n$

L'utilisation de cette loi dans la modélisation sous-entend que l'on suppose $VaR(M) < E[M]$. Ce phénomène est appelé la sousdipsersion. De plus, en fixant $nq = \lambda$, la loi binomiale tend vers la loi de Poisson de paramètre λ lorsque $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_M(t) &= \lim_{n\to\infty} (1 - q + qt)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} t\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda(t-1)}{n}\right)^n \\
&= e^{\lambda(t-1)}
\end{aligned}$$

car $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$ pour tout x. Ceci correspond donc à la fgp d'une variable aléatoire M obéissant à une loi de Poisson de paramètre λ. Si la variable aléatoire M dans la modélisation du risque individuel X selon l'approche fréquence-sévérité obéit à une loi binomiale, alors on dit que X obéit à une loi binomiale composée de paramètres n, q et F_B, soit $X \sim Bin\ Comp(n, q; F_B)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[M]\,E[B] = nqE[B]\,; \\
Var(X) &= E[M]\,Var[B] + Var[M]\,E^2[B] \\
&= nqVar[B] + nq(1-q)\,E^2[B] \\
&= nqVar[B] + nqE^2[B] - nq^2E^2[B] \\
&= nqE\left[B^2\right] - nq^2E^2[B]\,; \\
M_X(t) &= M_M(\ln M_B(t)) \\
&= (1-q+qM_B(t))\,.
\end{aligned}$$

2.5.3 Loi binomiale négative

La loi binomiale négative peut être représentée à l'aide de deux paramétrisations différentes. Pour la 1ière paramétrisation, on a pour $M \sim BinNég(r, q)$

Paramètre:	$r > 0,\ q \in (0, 1)$
Fonction de masse de probabilité:	$\Pr(M = k) = \binom{r+k-1}{k} q^r (1-q)^k, k \in \{0, 1, 2, ...\}$
Espérance:	$E[M] = r\left(\frac{1-q}{q}\right)$
Variance:	$Var(M) = r\left(\frac{1-q}{q^2}\right)$
Fonction génératrice des moments:	$M_M(t) = \left(\frac{q}{(1-(1-q)\mathrm{e}^t)}\right)^r$
Fonction génératrice des probabilités:	$P_M(t) = \left(\frac{q}{(1-(1-q)t)}\right)^r$

Remarque 2.34 *Il est équivalent d'écrire la fmp de M comme suit*

$$\Pr(M = k) = \binom{r+k-1}{r-1} q^r (1-q)^k,\ \ k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Remarque 2.35 *On peut interpréter la variable aléatoire M avec les fmp données ci-dessus comme le nombre d'**échecs** avant le rième succès.*

Remarque 2.36 *On dit également qu'une variable aléatoire avec la fonction de masse de probabilité suivante:*

$$\begin{aligned}
\Pr(M &= k) = \binom{k-1}{r-1} q^r (1-q)^{k-r}, k \in \{1, 2, ...\} \\
&= \binom{k-1}{k-r} q^r (1-q)^{k-r}, k \in \{1, 2, ...\}
\end{aligned}$$

*obéit à une loi binomiale négative de paramètres r et q. Toutefois, ici M représente le nombre d'**essais** avant le rième succès. À noter que le support débute à 1.*

Pour la 2ième paramétrisation, on a pour $M \sim BinNég(r, \beta)$

Paramètre:	$r > 0, \beta > 0$
Fonction de masse de probabilité:	$\Pr(M = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, k = 0, 1, ...$
Espérance:	$E[M] = r\beta$
Variance:	$Var(M) = r\beta(1+\beta)$
Fonction génératrice des moments:	$M_M(t) = (1-\beta(\mathrm{e}^t-1))^{-r}$
Fonction génératrice des probabilités:	$P_M(t) = (1-\beta(t-1))^{-r}$

Le lien entre les deux paramétrisations est $q = \frac{1}{1+\beta}$ ou $\beta = \frac{1-q}{q}$. Il est important de souligner que le paramètre r prend des valeurs strictement supérieures à 0 et qu'il ne doit pas nécessairement être un entier. De plus, on montrera plus loin que la loi binomiale négative peut être obtenue à l'aide d'un mélange de la loi de Poisson. À noter que l'on utilisera la première paramétrisation à moins d'avis contraire.

L'utilisation de cette loi dans la modélisation sous-entend que l'on suppose $VaR(M) > E[M]$. Ce phénomène est appelé la surdispersion. Si la variable aléatoire M dans la modélisation du risque individuel X selon l'approche fréquence-sévérité obéit à une loi binomiale négative, alors on dit que X obéit à une loi binomiale négative composée de paramètres r, q et F_B, soit $X \sim Bin\ Nég\ Composée(r, q; F_B)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[M]\,E[B] = r\left(\frac{1-q}{q}\right)E[B] \\
Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B] \\
&= r\left(\frac{1-q}{q}\right)Var(B) + r\left(\frac{1-q}{q^2}\right)E^2[B] \\
M_X(t) &= M_M(\ln M_B(t)) \\
&= \left(\frac{q}{1-(1-q)\,M_B(t)}\right)^r.
\end{aligned}$$

Proposition 2.37 *Soit les variables aléatoires $X_1 \sim Bin\ Comp(n, q^B; F_B)$, $X_2 \sim Pois\ Comp(\lambda; F_B)$ et $X_3 \sim Bin\ Nég\ Comp(r, q^{NB}; F_B)$ et les variables aléatoires de fréquence correspondantes M_1, M_2 et M_3 définies telle que $E[M_1] = E[M_2] = E[M_3]$. On suppose également que les lois des montants de sinistres sont identiques pour les 3 variables aléatoires composées. Alors,*

$$Var(X_1) \le Var(X_2) \le Var(X_3)\,.$$

Preuve. Étant donné $E[M_1] = E[M_2] = E[M_3]$, on a

$$nq^B = \lambda = \frac{r\left(1-q^{NB}\right)}{q^{NB}}.$$

Comparons dans un premier temps $Var(X_1)$ et $Var(X_2)$. On a

$$Var(X_1) = nq^B E\left[B^2\right] - n\left(q^B\right)^2 E^2[B]$$

et

$$Var(X_2) = \lambda E\left[B^2\right],$$

où $nq^B = \lambda$. On peut donc dire que $Var(X_1) \le Var(X_2)$. Maintenant, comparons $Var(X_2)$ et $Var(X_3)$. On a

$$Var(X_3) = r\left(\frac{1-q^{NB}}{q^{NB}}\right)Var[B] + r\left(\frac{1-q^{NB}}{\left(q^{NB}\right)^2}\right)E^2[B]$$

qui peut s'écrire comme suit étant donné que $\lambda = r\left(\frac{1-q^{NB}}{q^{NB}}\right)$

$$\begin{aligned}
Var(X_3) &= r\left(\frac{1-q^{NB}}{q^{NB}}\right)Var[B] + r\left(\frac{1-q^{NB}}{\left(q^{NB}\right)^2}\right)E^2[B] \\
&= \lambda Var[B] + \frac{\lambda}{q^{NB}}E^2[B] \\
&= \lambda\left(Var[B] + \frac{1}{q^{NB}}E^2[B]\right)
\end{aligned}$$

alors que pour X_2 on a

$$\begin{aligned}
Var(X_2) &= \lambda E\left[B^2\right] \\
&= \lambda\left(Var[B] + E^2[B]\right)
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure le résultat désiré. ■

Exemple 2.38 *Dans l'illustration ci-dessous, on fournit les valeurs de la fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire M obéissant à une loi de Poisson et binomiale négative (utilisant la 2ième paramétrisation) pour différents paramètres. Pour chaque loi, les paramètres sont fixés tels que la variable aléatoire M est de moyenne 2.*

Comparaison des lois Poisson et binomiale négative

Loi de M	Poisson	Bin negative	Bin negative	Bin negative	Bin negative
lambda	**2**	--	--	--	--
r	--	0,5	1	2	100
beta	--	4	2	1	0,02
q	--	0,2	0,333333333	0,5	0,980392157
q^r	--	0,447213595	0,333333333	0,25	0,138032967
1-q	--	0,8	0,666666667	0,5	0,019607843
EM	2	2	2	2	2
varM	2	10	6	4	2,04

k	Pr(M=k)	Pr(M=k)	Pr(M=k)	Pr(M=k)	Pr(M=k)
0	0,135335	0,447214	0,333333	0,250000	0,138033
1	0,270671	0,178885	0,222222	0,250000	0,270653
2	0,270671	0,107331	0,148148	0,187500	0,267999
3	0,180447	0,071554	0,098765	0,125000	0,178666
4	0,090224	0,050088	0,065844	0,078125	0,090209
5	0,036089	0,036063	0,043896	0,046875	0,036791
6	0,012030	0,026446	0,029264	0,027344	0,012624
7	0,003437	0,019646	0,019509	0,015625	0,003748
8	0,000859	0,014734	0,013006	0,008789	0,000983
9	0,000191	0,011133	0,008671	0,004883	0,000231
10	0,000038	0,008461	0,005781	0,002686	0,000049
11	0,000007	0,006461	0,003854	0,001465	0,000010
12	0,000001	0,004953	0,002569	0,000793	0,000002
13	0,000000	0,003810	0,001713	0,000427	0,000000
14	0,000000	0,002939	0,001142	0,000229	0,000000
15	0,000000	0,002273	0,000761	0,000122	0,000000
16	0,000000	0,001762	0,000507	0,000065	0,000000
17	0,000000	0,001368	0,000338	0,000034	0,000000
18	0,000000	0,001064	0,000226	0,000018	0,000000
19	0,000000	0,000829	0,000150	0,000010	0,000000
20	0,000000	0,000646	0,000100	0,000005	0,000000

Pour une valeur de $r = 0.5$, les probabilités que la variable aléatoire M prenne des valeurs élevées sont grandes. Quand la valeur du paramètre r croît, les valeurs de la fonction de masses de probabilité de M tend vers celles de la loi de Poisson. On peut confirmer ces observations par les résultats limites suivants pour $\lambda = r\beta$:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} E[M] &= \lim_{r\to\infty} r\beta = \lim_{r\to\infty} \lambda = \lambda \\
\lim_{r\to\infty} Var(M) &= \lim_{r\to\infty} r\beta(1+\beta) = \lim_{r\to\infty} \lambda\left(1+\frac{\lambda}{r}\right) = \lambda \\
\lim_{r\to\infty} P_M(t) &= \lim_{r\to\infty} (1-\beta(t-1))^{-r} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.
\end{aligned}$$

2.5.4 Lois Poisson-mélange

Tel que mentionné précédemment, l'équidispersion de la loi de Poisson empêche souvent de bien représenter le comportement aléatoire des données de fréquence en assurance IARD. Lors de la procédure de tarification en assurance, il est possible d'établir les paramètres de la loi de fréquence, par exemple la loi de Poisson, en fonction des caractéristiques observables des assurés. Toutefois, certaines caractéristiques ne sont pas observables, comme par exemple les habitudes de vie, habitudes de conduite, etc. Pour tenir compte de celles-ci, on introduit un facteur d'hétérogénéité qui permet d'introduire de la surdispersion dans la loi de Poisson.

Nous étudierons dans la présente section 3 généralisations de la loi de Poisson obtenues par mélange. Celles-ci sont la loi Poisson-gamma, Poisson-inverse gaussienne et Poisson-lognormale. Dans un premier temps nous traitons de façon générale le mélange de la loi de Poisson pour ensuite discuter des 3 généralisations énumérées ci-dessus.

Cas général

Soit Θ une variable aléatoire positive discrète ou continue telle que $E[\Theta] = 1$, $Var(\Theta) < \infty$ et $M_\Theta(t)$ existe. L'ajout de cette variable aléatoire dans la modélisation permettra d'introduire de l'incertitude au niveau du paramètre de la loi de Poisson en supposant que la variable aléatoire conditionnelle M pour une certaine réalisation de la variable aléatoire Θ, représentée par $(M\,|\Theta = \theta)$, obéit à une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$. Le paramètre de la loi de Poisson sera ainsi influencé par la réalisation de la variable aléatoire de mélange Θ. On peut interpréter la variable aléatoire Θ comme un paramètre de risque associé au paramètre de la loi de Poisson qui prend en compte les caractéristiques non observables de l'assuré. Ainsi, on a $(M\,|\Theta = \theta\,) \sim Poisson(\lambda\theta)$ avec

$$\begin{aligned} E[M\,|\Theta = \theta\,] &= \lambda\theta; \\ Var(M\,|\Theta = \theta\,) &= \lambda\theta; \\ M_{M|\Theta=\theta}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda\theta\left(\mathrm{e}^t-1\right)}; \\ P_{M|\Theta=\theta}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda\theta(t-1)}. \end{aligned}$$

Dans le cas où la variable aléatoire M représente le nombre d'accidents en assurance auto par exemple, le paramètre de risque Θ permet de tenir compte de différents éléments pouvant influencés la conduite d'un assuré et donc son expérience en terme de sinistres. Depuis peu, les compagnies d'assurance cherchent à utiliser des données télématiques pour avoir une meilleure appréciation du comportement de l'assuré. Ceci requiert l'utilsation d'outils comme le "machine learning" ou le "deep learning". Ici, la variable aléatoire Θ est un facteur multiplicatif. Si $\Theta = 2$, cela implique que la loi conditionnelle du nombre de sinistres est Poisson dont l'espérance est deux fois plus élevée contrairement au cas où $\Theta = 0.5$ qui conduit à une loi conditionnelle du nombre de sinistres qui est Poisson mais dont l'espérance est deux fois plus petite.

Proposition 2.39 *Soit une variable aléatoire conditionnelle* $(M\,|\Theta = \theta)$ *obéissant à une loi de Poisson de paramètre* $\lambda\theta$ *et* Θ *une variable aléatoire aléatoire positive, continue ou discrète, définie telle que* $E[\Theta] = 1$. *Alors,*

$$E[M] = \lambda.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E[M] &= E[E[M\,|\Theta)]] \\ &= E[\lambda\Theta] \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.40 *Soit une variable aléatoire conditionnelle* $(M\,|\Theta = \theta)$ *obéissant à une loi de Poisson de paramètre* $\lambda\theta$ *et* Θ *une variable aléatoire aléatoire positive, continue ou discrète, définie telle que* $E[\Theta] = 1$. *Alors,*

$$Var(M) = \lambda + \lambda^2 Var(\Theta).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} Var(M) &= E[Var(M\,|\Theta)] + Var(E[M\,|\Theta]) \\ &= E[\lambda\Theta] + Var(\lambda\Theta) \\ &= \lambda + \lambda^2 Var(\Theta). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.41 *L'ajout du paramètre d'hétérogénéité Θ n'a aucun impact sur l'espérance de la variable aléatoire de comptage M mais permet d'introduire de la surdispersion dans la distribution de M, c'est-à-dire que maintenant la variance de la variable aléatoire M est supérieure à l'espérance de M. En d'autres mots, la multiplication du paramètre λ par θ ajoute de l'incertitude par rapport à la distribution de M. Cette incertitude se traduit par une augmentation de la variabilité du nombre de sinistres.*

Proposition 2.42 *Soit une variable aléatoire conditionnelle $(M\,|\Theta = \theta)$ obéissant à une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$ et Θ une variable aléatoire aléatoire positive, continue ou discrète, définie telle que $E\,[\Theta] = 1$. Alors,*

$$M_M(t) = M_\Theta(\lambda(\mathrm{e}^t - 1)).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} M_M(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tM}\right] \\ &= E\left[E\left[\mathrm{e}^{tM}\,|\Theta\right]\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\lambda\Theta(\mathrm{e}^t-1)}\right] \\ &= M_\Theta(\lambda(\mathrm{e}^t - 1)). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.43 *Soit une variable aléatoire conditionnelle $(M\,|\Theta = \theta)$ obéissant à une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$ et Θ une variable aléatoire aléatoire positive, continue ou discrète, définie telle que $E\,[\Theta] = 1$. Alors,*

$$P_M(t) = M_\Theta(\lambda(t - 1)).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P_M(t) &= E\left[t^M\right] \\ &= E\left[E\left[t^M\,|\Theta\right]\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\lambda\Theta(t-1)}\right] \\ &= M_\Theta(\lambda(t - 1)). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.44 *Soit une variable aléatoire conditionnelle $(M\,|\Theta = \theta)$ obéissant à une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$ et Θ une variable aléatoire aléatoire positive continue définie telle que $E\,[\Theta] = 1$. Alors,*

$$\Pr(M = k) = \int\limits_{D_\Theta} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda\theta} f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \Pr(M &= k) = \int\limits_0^\infty \Pr\left(M = k\,|\Theta = \theta\,\right) f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda\theta)^k e^{-\lambda\theta}}{k!} f_\Theta(\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.45 *Soit une variable aléatoire conditionnelle* $(M\,|\Theta = \theta)$ *obéissant à une loi de Poisson de paramètre* $\lambda\theta$ *et* Θ *une variable aléatoire aléatoire positive discrète définie sur* $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ *et telle que* $E[\Theta] = 1$. *Alors,*

$$\Pr(M = k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(\lambda\theta_j)^k \mathrm{e}^{-\lambda\theta_j}}{k!} \Pr(\Theta = \theta_j).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Pr(M &= k) = \sum_{j=1}^{n} \Pr(M = k\,|\Theta = \theta_j) \Pr(\Theta = \theta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(\lambda\theta_j)^k \mathrm{e}^{-\lambda\theta_j}}{k!} \Pr(\Theta = \theta_j).\end{aligned}$$

■

Loi Poisson-gamma

Soit $\Theta \sim Gamma(\alpha = r, \beta = r)$ telle que $f_\Theta(\theta) = \frac{\beta^\alpha \theta^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}$. Alors, $E[\Theta] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{r} = 1$ et $Var(\Theta) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$. Dans ce cas, on dit que la variable aléatoire de comptage M obéit à une loi Poisson-gamma que l'on désigne par $M \sim P - Ga(\lambda, r)$.

Proposition 2.46 *Soit une variable aléatoire* M *obéissant à une loi Poisson-Gamma de paramètres* λ *et* r. *Alors,*

$$\begin{aligned}E[M] &= \lambda \\ Var(M) &= \lambda + \frac{\lambda^2}{r} \\ P_M(t) &= \left(\frac{r}{r - \lambda(t-1)}\right)^r.\end{aligned}$$

Preuve.

$$E[M] = \lambda E[\Theta] = \lambda(1) = \lambda$$

$$\begin{aligned}Var(M) &= \lambda + \lambda^2 Var(\Theta) \\ &= \lambda + \frac{\lambda^2}{r}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_M(t) &= M_\Theta(\lambda(t-1)) \\ &= \left(\frac{r}{r - \lambda(t-1)}\right)^r.\end{aligned}$$

■

On remarque que l'expression obtenue pour $P_M(t)$ ressemble à celle d'une loi binomiale négative de paramètres q et r qui est de la forme

$$P_M(t) = \left(\frac{q}{(1 - (1-q)t)}\right)^r.$$

Posons $\lambda = \frac{r(1-q)}{q}$, c'est-à-dire $\frac{1-q}{q} = \frac{\lambda}{r}$. Alors,

$$\begin{aligned}
P_M(t) &= \left(\frac{r}{r-\lambda(t-1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-q}{q}\right)(t-1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{q}{q-(1-q)(t-1)}\right)^r \\
&= \left(\frac{q}{q-(1-q)t+(1-q)}\right)^r \\
&= \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r,
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la fgp d'une loi binomiale négative de paramètres q et r.

Remarque 2.47 *Voir Exemples 2.6 et 2.7 de Marceau (2013).*

Remarque 2.48 *À noter que le paramètre $r > 0$ mais pas nécessairement entier. Pour $0 < r < 1$, la variance peut être élevée et ainsi produire des probabilités non négligeables à des valeurs élevées de M.*

Loi Poisson-inverse gaussienne

Soit $\Theta \sim IG(\mu, \beta)$ telle que $f_\Theta(\theta) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\beta\theta^3}} \exp\left(-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\beta\theta}\right)$. On pose $\mu = 1$ d'où $E[\Theta] = \mu = 1$ et $Var(\Theta) = \mu\beta = \beta$. Dans ce cas, on dit que la v.a de comptage M obéit à une loi Poisson-inverse gaussienne que l'on désigne par $M \sim P - IG(\lambda, \beta)$.

Proposition 2.49 *Soit une variable aléatoire M obéissant à une loi Poisson- inverse gaussienne de paramètres λ et β. Alors,*

$$\begin{aligned}
E[M] &= \lambda \\
Var(M) &= \lambda + \lambda^2\beta \\
P_M(t) &= \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1-2\beta\lambda(t-1)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Il n'existe pas de forme analytique pour la fonction de masse de probabilité de M car on ne peut évaluer de façon explicite

$$f_M(k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta x}(x-1)^2\right) \mathrm{d}\theta.$$

Toutefois, à l'aide de la fgp de M, on peut obtenir une formule récursive pour déterminer la fmp de M. Les points de départ de cette relation récursive sont

$$f_M(0) = P_M(0) = \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(1-\sqrt{1+2\beta\lambda}\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned}
f_M(1) &= \left.\frac{\mathrm{d}P_M(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\beta\lambda(t-1)}} P_M(t)\right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+2\beta\lambda}} f_M(0).
\end{aligned}$$

Pour $k = 2, 3, ...$, on utilise la relation récursive

$$\begin{aligned} f_M(k) &= \frac{2\lambda\beta}{1+2\lambda\beta}\left(1-\frac{3}{2k}\right) f_M(k-1) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{(1+2\lambda\beta)\,k\,(k+1)} f_M(k-2). \end{aligned}$$

Loi Poisson-lognormale

Soit $\Theta \sim LN(\mu, \sigma^2)$ telle que $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\theta} \exp -\frac{(\ln\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}$. On pose $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$ d'où $E[\Theta] = \mathrm{e}^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})} = 1$ et $Var(\Theta) = \mathrm{e}^{(2\mu+\sigma^2)}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1) = (\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$. Dans ce cas, on dit que la variable aléatoire de comptage M obéit à une loi Poisson-lognormale que l'on désigne par $M \sim P - LN(\lambda, \sigma^2)$.

Proposition 2.50 *Soit une variable aléatoire M obéissant à une loi Poisson-lognormale paramètres λ et σ^2. Alors,*

$$\begin{aligned} E[M] &= \lambda \\ Var(M) &= \lambda + \lambda^2(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1). \end{aligned}$$

Il n'existe pas de forme analytique pour la fonction de masse de probabilité de M. On doit avoir recours à des méthodes d'intégration numérique pour évaluer

$$f_M(k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} f_\Theta(\theta)\, d\theta = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{1}{\theta\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\lambda\theta - \frac{(\ln\theta + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\theta.$$

Remarque 2.51 *Voir Exemple 2.8 dans Marceau (2013).*

2.6 Distributions du montant d'un sinistre

Le montant d'un sinistre est représenté par une variable aléatoire avec support positif, $x \in \mathbb{R}^+$. Les lois les plus fréquemment utilisées sont les lois exponentielle, gamma, lognormale et Pareto. Les lois de Burr ainsi que Weibull sont également deux lois à ne pas négliger.

2.6.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi fondamentale en actuariat et en probabilité. Elle ne possède qu'un seul paramètre. Elle est un cas particulier des lois gamma et Weibull. De plus, son mode est à zéro. Les différentes caractéristiques de la loi exponentielle sont énumérées ci-dessous. Pour $X \sim Exp(\beta)$, on a

Paramètre:	$\beta > 0$
Fonction de répartition:	$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$
Fonction de densité:	$f(x) = \beta\mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$
Espérance:	$E[X] = \frac{1}{\beta}$
Variance:	$Var(X) = \frac{1}{\beta^2}$
Moments d'ordre k:	$E[X^k] = \left(\frac{1}{\beta}\right)^k k!$
Fonction génératrice des moments:	$M_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$
Espérance tronquée:	$E[X \times 1_{\{X \leq b\}}] = \frac{1}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta b}\right) - b\mathrm{e}^{-\beta b}$
Espérance limitée:	$E[\min(X,b)] = \frac{1}{\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta b}\right)$

La loi exponentielle sert de point de comparaison lors de la modélisation du montant d'un sinistre. Cette loi possède d'autres propriétés intéressantes dont celle énoncée dans la proposition qui suit.

Proposition 2.52 *Soit une variable aléatoire X telle que $X \sim Exp(\lambda)$. Alors,*

$$\Pr(X > s + t \,|X > t\,) = \Pr(X > s).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\Pr(X > s + t \,|X > t\,) &= \frac{\Pr(X > s + t \cap X > t)}{\Pr(X > t)} \\
&= \frac{\Pr(X > s + t)}{\Pr(X > t)} \\
&= \frac{\Pr(X > s)\Pr(X > t)}{\Pr(X > t)} \\
&= \Pr(X > s).
\end{aligned}$$

La loi exponentielle est ainsi dite sans mémoire. ■

Proposition 2.53 *Soit les variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_0 où $Y_1 \sim Exp(\beta_1)$ et $Y_0 \sim Exp(\beta_0)$. Alors, $X = \min(Y_1, Y_0) \sim Exp(\beta_1 + \beta_0)$.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\overline{F}_X(x) &= \Pr(\min(Y_1, Y_0) > x) \\
&= \Pr(Y_1 > x, Y_0 > x) \\
&= \Pr(Y_1 > x)\Pr(Y_0 > x) \\
&= \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\mathrm{e}^{-\beta_0 x} \\
&= \mathrm{e}^{-(\beta_1+\beta_0)x},
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la fonction de survie d'une loi exponentielle de paramètre $(\beta_1 + \beta_0)$. ■

2.6.2 Loi gamma

La loi gamma est une loi fondamentale en actuariat IARD. Les différentes caractéristiques de la loi gamma sont énumérées ci-dessous. Pour $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, on a

Paramètres:	$\alpha > 0$, $\beta > 0$
Fonction de répartition:	notée $H(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite
Fonction de densité:	$f(x) = \frac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$
Espérance:	$E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
Variance:	$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
Moments d'ordre k:	$E[X^k] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\beta^k}$
Fonction génératrice des moments:	$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}$
Espérance tronquée:	$E\left[X \times 1_{\{X \leq b\}}\right] = \frac{\alpha}{\beta} H(b; \alpha+1, \beta) = E[X] H(b; \alpha+1, \beta)$
Espérance limitée:	$E[\min(X, b)] = \frac{\alpha}{\beta} H(b; \alpha+1, \beta) + b[1 - H(b; \alpha, \beta)]$

Espérance limitée :

La loi gamma avec $\alpha = 1$ correspond à la loi exponentielle. Lorsque $\alpha = n$, où $n \in \mathbb{N}^+$, on dit que la variable aléatoire X obéit à une loi Erlang de paramètres n et β. Dans ce cas, la fonction de répartition a la forme explicite suivante:

$$F_X(x) = H(x; \alpha, \beta) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j \mathrm{e}^{-\beta x}}{j!}.$$

De plus, la somme de n variables aléatoires exponentielles de paramètre β obéit à une loi Erlang de paramètres n et β.

2.6.3 Loi lognormale

La loi lognormale est fréquemment utilisée en actuariat pour des applications notamment en assurance IARD et en réassurance. Elle est utile pour décrire le montant d'un sinistre qui peut prendre des valeurs très élevées en comparaison avec la moyenne. Cette loi a la particularité que sa fgm n'existe pas alors que tous ses moments existent. Les différentes caractéristiques de la loi lognormale sont énumérées ci-dessous. Pour $X \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$, on a $X = \mathrm{e}^Y$, où $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Paramètres:	$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$
Fonction de répartition:	$F(x) = \Phi(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})$, $x > 0$
Fonction de densité:	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x > 0$
Espérance:	$E[X] = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = M_Y(1)$
Variance:	$Var(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right) = M_Y(2) - (E[X])^2$
Moments d'ordre k:	$E\left[X^k\right] = \mathrm{e}^{k\mu+k^2\frac{\sigma^2}{2}}$
Fonction génératrice des moments:	aucune forme analytique
Espérance tronquée:	$E\left[X \times 1_{\{X\leq b\}}\right] = \exp(\mu+\sigma^2/2)\Phi(\frac{\ln b-\mu-\sigma^2}{\sigma})$
Espérance limitée:	$E[\min(X,b)] = \exp(\mu+\sigma^2/2)\Phi(\frac{\ln b-\mu-\sigma^2}{\sigma}) + b[1-\Phi(\frac{\ln b-\mu}{\sigma})]$

À noter que $\Phi(y)$ est la fonction de répartition pour la loi normale standard évaluée à y c'est-à-dire $\Phi(y) = F_Z(y)$ où $Z \sim Norm(0,1)$. La loi lognormale n'est pas fermée sous l'opération de la convolution, c'est-à-dire que si $B_i \sim LNorm(\mu, \sigma^2)$ alors la loi de la somme $B_1 + ... + B_k$ n'est pas lognormale. Plus spécifiquement, on ne connaît pas la loi de la somme ce qui pose problème lors de l'évaluation exacte de la fonction de répartition ou la $TVaR_\kappa$ de cette somme. Dans certaines circonstances, on aura recours à des méthodes basées sur la simulation ou des méthodes numériques.

2.6.4 Loi de Pareto

La loi de Pareto est également une loi très importante permettant la modélisation du montant d'un sinistre dans un contexte où une certaine probabilité est attribuée à des valeurs élevées de sinistre, d'où son utilisation notamment en assurance automobile pour les dommages corporels à autrui, assurance responsabilité, coûts reliés à des catastrophes naturelles, etc. Les différentes caractéristiques de la loi de Pareto sont énumérées ci-dessous. Pour $X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$, on a

Paramètres:	$\alpha > 0$, $\lambda > 0$
Fonction de répartition:	$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}$, $x > 0$
Fonction de densité:	$f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$, $x > 0$
Espérance:	$E[X] = \frac{\lambda}{\alpha-1}$,si $\alpha > 1$
Variance:	$Var(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$,si $\alpha > 2$
Moments d'ordre k:	$E\left[X^k\right] = \frac{\lambda^k k!}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha-i)}$, $\alpha > k$
Fonction génératrice des moments:	n'existe pas.
Espérance tronquée:	$E\left[X \times 1_{\{X\leq b\}}\right] = -b\left(\frac{\lambda}{\lambda+b}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha-1}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+b)^{\alpha-1}}\right)$
Espérance limitée:	$E[\min(X,b)] = \frac{\lambda}{\alpha-1}[1-\alpha(\frac{\lambda}{\lambda+b})^{\alpha-1} + (\alpha-1)(\frac{\lambda}{\lambda+b})^{\alpha}] + b(\frac{\lambda}{\lambda+b})^{\alpha}$

À noter que la fgm n'existe pas et que le moment d'ordre k, $E\left[X^k\right]$, existe seulement si $\alpha > k$. De plus, la loi de Pareto n'est pas fermée sous l'opération de la convolution, c'est-à-dire que si $B_i \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ alors la loi de la somme $B_1 + ... + B_k$ n'est pas Pareto. Plus spécifiquement, on ne connaît pas la loi de la somme ce qui pose problème lors de l'évaluation exacte de la fonction de répartition ou la $TVaR_\kappa$ de cette somme. Dans certaines circonstances, on aura recours à des méthodes basées sur la simulation et des méthodes numériques.

Remarque 2.54 *Pour modéliser des montants de sinistre pouvant prendre des valeurs très, très élevées par rapport à leurs moyennes, des généralisations de la loi de Pareto à 3 paramètres, comme les lois de Burr, log-logistique et Pareto généralisée peuvent être utilisées. L'ajout d'un troisième paramètre permet plus de souplesse dans la modélisation.*

Exemple 2.55 *Soit un contrat d'assurance IARD où le montant des sinistres est défini par une variable aléatoire X selon l'approche fréquence-sévérité telle que*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, M > 0 \\ 0, M = 0. \end{cases}$$

On suppose $M \sim Bin(n = 3, q = 0.1)$ et $B \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{1000}\right)$. (a) Trouver $E[X]$. (b) Trouver $Var(X)$. (c) Trouver $\Pr(X > 2000)$. (d) Trouver $E[X|M = 2]$. (e) Trouver $E[X|M \geq 1]$.

Solution. (a)

$$\begin{aligned} E[X] &= E[M] E[B] \\ &= (3)(0.1)(1000) \\ &= 300. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M] Var(B) + Var(M) E^2[B] \\ &= (3)(0.1)(1000)^2 + (3)(0.1)(0.9)(1000)^2 \\ &= 570\ 000. \end{aligned}$$

(c)

$$\Pr(X > 2000) = 1 - \Pr(X \leq 2000)$$

$$\begin{aligned} \Pr(X &\leq 2000) = \Pr(M = 0) \\ + \Pr(M &= 1) \Pr(B_1 \leq 2000) \\ + \Pr(M &= 2) \Pr(B_1 + B_2 \leq 2000) \\ + \Pr(M &= 3) \Pr(B_1 + B_2 + B_3 \leq 2000). \end{aligned}$$

On ne peut avoir plus que 3 sinistres car $M \sim$ *Binomiale* avec $n = 3$. On a

$$\Pr(M = 0) = \binom{3}{0} (0.1)^0 (0.9)^3 = 0.729$$

$$\begin{aligned} B_1 &\sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right) \\ B_1 + B_2 &\sim Erlang\left(2, \frac{1}{1000}\right) \\ B_1 + B_2 + B_3 &\sim Erlang\left(3, \frac{1}{1000}\right) \end{aligned}$$

où pour $Y \sim Erlang(k, \beta)$, on a

$$F_Y(y) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\beta y)^i e^{-\beta y}}{i!}.$$

$$\begin{aligned}
\Pr(B_1 &\leq 2000) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{1000}\times 2000} = 0.86466 \\
\Pr(B_1 + B_2 &\leq 2000) = 1 - \sum_{i=0}^{2-1} \frac{\left(\left(\frac{1}{1000}\right)(2000)\right)^i \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{1000}\right)(2000)}}{i!} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2} \\
&= 0.59399 \\
\Pr(B_1 + B_2 + B_3 &\leq 2000) = 1 - \sum_{i=0}^{3-1} \frac{\left(\left(\frac{1}{1000}\right)(2000)\right)^i \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{1000}\right)(2000)}}{i!} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2} - \frac{2^2\mathrm{e}^{-2}}{2!} \\
&= 0.32332.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Pr(X &\leq 2000) = 0.729 \\
&\quad + \binom{3}{1}(0.1)^1(0.9)^2\,(0.86466) \\
&\quad + \binom{3}{2}(0.1)^2(0.9)^1\,(0.59399) \\
&\quad + \binom{3}{3}(0.1)^3\,(0.32332) \\
&= 0.95547.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(X &> 2000) = 1 - \Pr(X \leq 2000) \\
&= 1 - 0.95547 \\
&= 0.04453.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
E\left[X\,|M=2\right] &= E\left[B_1 + B_2\right] \\
&= E\left[B_1\right] + E\left[B_2\right] \\
&= 2E\left[B\right] \\
&= (2)\,(1000) \\
&= 2000.
\end{aligned}$$

Autre façon d'évaluer $E\left[B_1 + B_2\right]$: on sait que $(B_1 + B_2) \sim Erlang(2, \frac{1}{1000})$ d'où

$$E\left[B_1 + B_2\right] = \frac{2}{\frac{1}{1000}} = 2000.$$

(e) Deux approches peuvent être utilisées pour trouver $E[X|M \geq 1]$. Selon la première approche, on a

$$\begin{aligned}
E[X|M \geq 1] &= E[X|M > 0] \\
&= E[E[X|M > 0, M]] \\
&= \sum_{k=1}^{3} E[X|M = k, M > 0] \Pr(M = k|M > 0) \\
&= \sum_{k=1}^{3} E[X|M = k] \Pr(M = k|M > 0) \\
&= \sum_{k=1}^{3} E[B_1 + ... + B_k] \frac{\Pr(M = k, M > 0)}{\Pr(M > 0)} \\
&= \sum_{k=1}^{3} kE[B] \frac{\Pr(M = k)}{\Pr(M > 0)} \\
&= E[B] E[M|M > 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[M] &= E[M|M > 0] \Pr(M > 0) + E[M|M \leq 0] \Pr(M \leq 0) \\
&= E[M|M > 0] \Pr(M > 0)
\end{aligned}$$

$$E[M|M > 0] = \frac{E[M]}{\Pr(M > 0)} = \frac{E[M]}{1 - \Pr(M \leq 0)} = \frac{E[M]}{1 - \Pr(M = 0)}.$$

On réévalue donc l'espérance $E[M]$ avec l'information supplémentaire détenue, soit que $M > 0$. Étant donné que l'on ne peut avoir une période sans aucun sinistre, on a l'inégalité

$$E[M|M > 0] = \frac{(3)(0.1)}{1 - (0.9)^3} = 1.107 > E[M]$$

Donc,

$$E[X|M \geq 1] = (1000)(1.107) = 1107 \ (> E[X] = 300).$$

Une deuxième approche est la suivante:

$$\begin{aligned}
E[X|M \geq 1] &= \sum_{k=1}^{3} E[X|M = k, M \geq 1] \Pr(M = k|M \geq 1) \\
&= \sum_{k=1}^{3} E[X|M = k] \Pr(M = k|M \geq 1) \\
&= \sum_{k=1}^{3} E[X|M = k] \frac{\Pr(M = k)}{\Pr(M \geq 1)} \\
&= E[B_1] \frac{\Pr(M = 1)}{1 - \Pr(M = 0)} + E[B_1 + B_2] \frac{\Pr(M = 2)}{1 - \Pr(M = 0)} + E[B_1 + B_2 + B_3] \frac{\Pr(M = 3)}{1 - \Pr(M = 0)} \\
&= (1000) \frac{\binom{3}{1}(0.1)(0.9)^2}{1 - \binom{3}{0}(0.1)^0(0.9)^3} + (2000) \frac{\binom{3}{2}(0.1)^2(0.9)^1}{1 - \binom{3}{0}(0.1)^0(0.9)^3} + (3000) \frac{\binom{3}{3}(0.1)^3(0.9)^0}{1 - \binom{3}{0}(0.1)^0(0.9)^3} \\
&= 1107.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Montant total des sinistres pour un portefeuille

3.1 Introduction

La mutualisation des risques est fondamentale en actuariat. Elle est le principe même sur lequel repose l'assurance. Dans ce chapitre, on examine la mutualisation des risques, plus précisement on étudie le comportement du montant total des sinistres pour un portefeuille composé de risques individuels. Ces coûts peuvent être...

- Les coûts pour un portefeuille d'assurance vie ou IARD (1 ou plusieurs lignes d'affaires).
- Les coûts pour un portefeuille de risques de crédit.
- Les coûts pour un régime d'assurance collective.
- Les engagements d'un régime de retraite pour une certaine année.

Connaître le comportement des coûts associés au portefeuille permet à une compagnie d'assurance ou autre entité financière d'évaluer la santé financière du portefeuille et aide l'actuaire dans la gestion des risques. De plus, l'information détenue sur le risque global associé au portefeuille est utilisée à des fins de tarification et de réassurance. On représente les coûts pour un portefeuille composé de n risques par la variable aléatoire S où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ainsi, la variable aléatoire X_i représente le coût en sinistres associé au contrat d'assurance i $(i = 1, ..., n)$ et la variable aléatoire S les coûts totaux auxquels est exposée la compagnie d'assurance en acceptant d'assurer ces n contrats d'assurance. Dans ce chapitre on tentera de répondre à différentes questions comme...

- Quel est l'impact sur le risque global associé au portefeuille de la compagnie d'assurance si n augmente?
- Comment peut-on quantifier le risque global?
- Est-ce qu'il y a un bénéfice à mutualiser des risques? Comment le mesurer?
- Une compagnie d'assurance peut-elle charger une prime à l'assuré i qui est plus petite que $E[X_i]$? Quelle serait la conséquence si elle choisissait de le faire?

3.2 Caractéristiques du montant total des sinistres S

Proposition 3.1 *Soit un portefeuille composé de n risques individuels X_i $(i = 1, ..., n)$ et S une variable aléatoire représentant le montant total des sinistres pour ce portefeuille. Alors,*

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i].$$

Preuve.

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1 + ... + X_n] \\ &= E[X_1] + ... + E[X_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i]. \end{aligned}$$

À noter que cette relation est vraie peu importe la relation d'indépendance ou de dépendance entre les risques $X_1, ..., X_n$. ■

Proposition 3.2 *Soit un portefeuille composé de n risques individuels X_i $(i = 1, ..., n)$ et S une variable aléatoire représentant le montant total des sinistres pour ce portefeuille. Alors,*

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j).$$

Si les risques $X_1, ..., X_n$ sont indépendants, alors

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

Si les risques $X_1, ..., X_n$ sont identiquement distribués, alors

$$Var(S) = nVar(X) + n(n-1)Cov(X_i, X_j).$$

Si les risques $X_1, ..., X_n$ sont indépendants et identiquement distribués, alors

$$Var(S) = nVar(X).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + ... + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, alors $Cov(X_i, X_j) = 0$, $\forall i, \forall j$ $(i \neq j)$ et par conséquent

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

Si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont identiquement distribuées, alors elles ont le même comportement aléatoire et par conséquent

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + ... + X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \\ &= nVar(X) + n(n-1) Cov(X_i, X_j). \end{aligned}$$

Si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, on obtient directement le résultat désiré à l'aide de ce qui a été montré ci-dessus. ■

Définition 3.3 *Soit un portefeuille composé de n risques individuels X_i $(i = 1, ..., n)$ et S une variable aléatoire représentant le montant total des sinistres pour ce portefeuille. Alors, la fonction de répartition de S est définie comme suit*

$$F_S(x) = \Pr(X_1 + ... + X_n \leq x).$$

L'évaluation de F_S est cruciale afin d'examiner le comportement de S. Elle permet notamment d'évaluer la solvabilité d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance ou d'une société financière. Également, elle sert à établir le capital économique ("un coussin") pour un portefeuille afin d'être en mesure de faire face au risque global associé au portefeuille.

Dans certains cas, il est possible d'obtenir une expression explicite pour F_S. Si ce n'est pas possible, on a recours à une méthode récursive, une méthode d'approximation basée sur les moments, une méthode d'approximation basée sur la simulation ou une méthode d'approximation basée sur des méthodes numériques.

Proposition 3.4 *Soit un portefeuille composé de n risques individuels X_i $(i = 1, ..., n)$ et S une variable aléatoire représentant le montant total des sinistres pour ce portefeuille. On suppose que la fgm de X_i existe pour $\forall i$. Alors,*

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[e^{tS}\right] \\ &= E\left[e^{t(X_1 + ... + X_n)}\right] \\ &= E\left[e^{tX_1} ... e^{tX_n}\right] \\ &= M_{X_1,...,X_n}(t, ..., t). \end{aligned}$$

Si les risques $X_1, ..., X_n$ sont indépendants, alors

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[e^{t(X_1 + ... + X_n)}\right] \\ &= E\left[e^{tX_1}\right] ... E\left[e^{tX_n}\right] \\ &= M_{X_1}(t) ... M_{X_n}(t). \end{aligned}$$

Si les risques $X_1, ..., X_n$ sont indépendants et identiquement distribués, alors

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[e^{t(X_1 + ... + X_n)}\right] \\ &= E\left[e^{tX_1}\right] ... E\left[e^{tX_n}\right] \\ &= (M_X(t))^n. \end{aligned}$$

La fgm de S permet de trouver $E\left[S^k\right]$ pour $k = 1, 2, ...$, permet d'identifier, **si possible**, la distribution de S et s'avère utile dans l'utilisation de méthodes numériques.

3.3 Exemples

Exemple 3.5 *On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie temporaire 1 an émis à des assurés dont les durées de vie $T_1, ..., T_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Le montant de prestation de décès est $b_i = b$, $i = 1, ..., n$. De plus, $\Pr(T_i \leq 1) = q$, soit la probabilité de décès au cours de la prochaine année. Les coûts pour le contrat i sont définis selon l'approche indemnitaire, soit*

$$X_i = \{bI_i, \ i = 1, ..., n \ \ ,$$

où $I_i \sim Bern(q)$. Le montant total des sinistres pour le portefeuille est $S = X_1 + ... + X_n$. (a) Trouver les valeurs possibles de S. (b) Trouver $E[S]$. (c) Trouver $Var(S)$. (d) Trouver $\Pr(S = k \times b)$, $k = 0, 1, ..., n$.

Solution. (a) $S \in \{0, b, 2b, ..., nb\}$. (b)

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = nE[X] = nbq.$$

(c)

$$\begin{aligned} Var(S) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \\ &= nVar(X) \\ &= nb^2 q(1-q). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} S &= X_1 + ... + X_n \\ &= bI_1 + ... + bI_n \\ &= b(I_1 + ... + I_n) \\ &= bN, \end{aligned}$$

où N correspond au nombre de décès parmi le goupe de risques individuels et donc $N \sim Bin(n, q)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \Pr(S &= k \times b) = \Pr(bN = k \times b) \\ &= \Pr(N = k) \\ &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.6 *Dans l'exemple ci-dessus, la distribution de $(I_1 + ... + I_n)$ peut être identifiée à l'aide de la fgm comme suit:*

$$\begin{aligned} M_N(t) &= E\left[\mathrm{e}^{t(I_1+...+I_n)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{tI_1}\right]...E\left[\mathrm{e}^{tI_n}\right] \\ &= M_{I_1}(t)...M_{I_n}(t) \\ &= (M_I(t))^n \\ &= (1 - q + q\mathrm{e}^t)^n, \end{aligned}$$

ce qui correspond à la fgm d'une variable aléatoire Binomiale(n, q).

Exemple 3.7 *On considère le portefeuille décrit à l'Exemple 3.5 où toutefois* $I_i \sim Bern(0.001i)$*,* $i = 1, ..., n = 5$*. On suppose que* $I_1, ..., I_5$ *sont des variables aléatoires indépendantes. (a) Trouver les valeurs possibles de* S*. (b) Trouver* $E[S]$*. (c) Trouver* $Var(S)$*. (d) Trouver* $\Pr(S = k \times b)$*,* $k = 0, 1, ..., n$*.*

Solution. (a) $S \in \{0, b, 2b, ..., 5b\}$. (b)

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1 + ... + X_5] \\ &= \sum_{i=1}^{5} E[X_i] \end{aligned}$$

où $E[X_i] = bE[I_i] = bq_i = (b)(0.001i)$. Donc,

$$\begin{aligned} E[S] &= b(0.001 + 0.002 + 0.003 + 0.004 + 0.005) \\ &= 0.015b. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + ... + X_5) \\ &= \sum_{i=1}^{5} Var(X_i) \end{aligned}$$

où $Var(X_i) = b^2 Var(I_i) = b^2 q_i(1 - q_i) = b^2(0.001i)(1 - 0.001i)$. Donc,

$$\begin{aligned} Var(S) &= b^2((0.001)(0.999) + (0.002)(0.998) + (0.003)(0.997) + (0.004)(0.996) + (0.005)(0.995)) \\ &= 0.014945b^2. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \Pr(S &= 0) = \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, ..., X_5 = 0) \\ &= \Pr(X_1 = 0) ... \Pr(X_5 = 0) \\ &= \Pr(I_1 = 0) ... \Pr(I_5 = 0) \\ &= (1 - 0.001)(1 - 0.002)(1 - 0.003)(1 - 0.004)(1 - 0.005) \\ &= 0.98508. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(S &= b) = \Pr(X_1 = b, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 0) \\ +\Pr(X_1 &= 0, X_2 = b, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 0) \\ +\Pr(X_1 &= 0, X_2 = 0, X_3 = b, X_4 = 0, X_5 = 0) \\ +\Pr(X_1 &= 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = b, X_5 = 0) \\ +\Pr(X_1 &= b, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = b) \\ &= (0.001)(1 - 0.002)(1 - 0.003)(1 - 0.004)(1 - 0.005) \\ &\quad +(1 - 0.001)(0.002)(1 - 0.003)(1 - 0.004)(1 - 0.005) \\ &\quad +(1 - 0.001)(1 - 0.002)(0.003)(1 - 0.004)(1 - 0.005) \\ &\quad +(1 - 0.001)(1 - 0.002)(1 - 0.003)(0.004)(1 - 0.005) \\ &\quad +(1 - 0.001)(1 - 0.002)(1 - 0.003)(1 - 0.004)(0.005) \end{aligned}$$

Même chose pour $\Pr(S = kb)$ avec $k = 2, 3, 4, 5$. ■

Exemple 3.8 *On considère le portefeuille décrit à l'Exemple 3.5 où toutefois le portefeuille est composé de 2 classes de* n_1 *et* n_2 *contrats indépendants. Pour les contrats de la première classe, on a*

$$\Pr(T_i \leq 1) = q_1, \ i = 1, ..., n_1$$

alors que pour les contrats de la deuxième classe, on a

$$\Pr(T_i \leq 1) = q_2, \; i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2.$$

Le montant de prestation pour tous les contrats est de b. Développer l'expression de f_S où $S \in \{0, b, ..., nb\}$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n_1} bI_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} bI_i \\ &= b\sum_{i=1}^{n_1} I_i + b\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} I_i \\ &= bN_1 + bN_2, \end{aligned}$$

où $N_1 \sim Bin(n_1, q_1)$ et $N_2 \sim Bin(n_2, q_2)$. On peut également écrire

$$S = bN,$$

où $N = N_1 + N_2$ n'obéit pas toutefois à une loi binomiale. On a donc

$$\Pr(S = kb) = \Pr(N = k), \; k = 0, 1, ..., n$$

où la distribution de N est obtenue avec le produit de convolution

$$\Pr(N = k) = \sum_{j=0}^{k} \Pr(N_1 = j) \Pr(N_2 = n - j).$$

■

Exemple 3.9 *On considère le portefeuille décrit à l'Exemple 3.8 où le montant de prestation pour les risques de la deuxième classe est maintenant de $b_2 = 2b$. Trouver la fonction de masse de probabilité de S.*

Solution. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n_1} bI_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} 2bI_i \\ &= b\sum_{i=1}^{n_1} I_i + 2b\sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} I_i \\ &= bN_1 + 2bN_2 \\ &= b(N_1 + 2N_2), \end{aligned}$$

où $N_1 \sim Bin(n_1, q_1)$ et $N_2 \sim Bin(n_2, q_2)$. On a $S \in \{0, b, 2b, 3b, ..., n_1b + 2n_2b\}$. Pour calculer $\Pr(S = kb)$, on doit procéder cas par cas, c'est-à-dire

$$\Pr(S = 0) = \Pr(N_1 = 0) \Pr(N_2 = 0)$$

$$\Pr(S = b) = \Pr(N_1 = 1) \Pr(N_2 = 0)$$

$$\Pr(S = 2b) = \Pr(N_1 = 2) \Pr(N_2 = 0) + \Pr(N_1 = 0) \Pr(N_2 = 1)$$

■

Remarque 3.10 *On observe avec l'Exemple 3.5, l'Exemple 3.8 et l'Exemple 3.9 que l'évaluation de la fonction de masse de S devient plus difficile à évaluer lorsque la description du portefeuille est plus complexe.*

Exemple 3.11 *On considère le portefeuille suivant comportant 3 classes de risques supposés indépendants où chaque classe est un regroupement de risques homogènes:*

Classe	*# contrats*	*Prestation*	*Prob. décès*
1	$n^{(1)} = 5$	$b^{(1)} = 2000$	$q^{(1)} = 0.0037$
2	$n^{(2)} = 12$	$b^{(2)} = 3000$	$q^{(2)} = 0.0088$
3	$n^{(3)} = 9$	$b^{(3)} = 1000$	$q^{(3)} = 0.0065.$

On désigne les coûts du risque i de la classe j par $X_i^{(j)}$ définie par

$$X_i^{(j)} = b^{(j)} I_i^{(j)},$$

où $I_i^{(j)} \sim Bern(q^{(j)})$. Le paramètre de la loi de Bernoulli ne dépend pas de i de telle sorte que la probabilité de décès est la même pour les risques d'une même classe. (a) Trouver $E[S]$. (b) Trouver $Var(S)$. (c) Trouver $\Pr(S=0)$, $\Pr(S=1000)$, $\Pr(S=2000)$.

Solution. (a)

$$\begin{aligned} E[S] &= E\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}\right] \\ &= n^{(1)}b^{(1)}q^{(1)} + n^{(2)}b^{(2)}q^{(2)} + n^{(3)}b^{(3)}q^{(3)} \\ &= (5)(2000)(0.0037) + (12)(3000)(0.0088) + (9)(1000)(0.0065) \\ &= 412.3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}\right) \\ &= n^{(1)}\left(b^{(1)}\right)^2 q^{(1)}(1-q^{(1)}) + n^{(2)}\left(b^{(2)}\right)^2 q^{(2)}(1-q^{(2)}) + n^{(3)}\left(b^{(3)}\right)^2 q^{(3)}(1-q^{(3)}) \\ &= (5)(2000)^2(0.0037)(1-0.0037) + (12)(3000)^2(0.0088)(1-0.0088) + (9)(1000)^2(0.0065)(1-0.0065) \\ &= 1\ 073\ 882. \end{aligned}$$

(c) On a $S = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)}$ où $S^{(j)} = b^{(j)}N^{(j)}$ et $N^{(j)} \sim Bin(n^{(j)}, q^{(j)})$. Alors,

$$\begin{aligned} \Pr(S &= 0) = \Pr(S^{(1)} = 0, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 0) \\ &= \Pr(S^{(1)} = 0)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 0) \\ &= \Pr(N^{(1)} = 0)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 0) \\ &= (1-0.0037)^5(1-0.0088)^{12}(1-0.0065)^9 \\ &= 0.8325. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(S &= 1000) = \Pr(S^{(1)} = 0, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 1000) \\ &= \Pr(S^{(1)} = 0)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 1000) \\ &= \Pr(N^{(1)} = 0)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 1) \\ &= (1-0.0037)^5(1-0.0088)^{12}\binom{9}{1}(0.0065)(1-0.0065)^8 \\ &= 0.049. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S &= 2000) = \Pr(S^{(1)} = 2000, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 0) \\
+\Pr(S^{(1)} &= 0, S^{(2)} = 0, S^{(3)} = 2000) \\
&= \Pr(S^{(1)} = 2000)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 0) \\
+\Pr(S^{(1)} &= 0)\Pr(S^{(2)} = 0)\Pr(S^{(3)} = 2000) \\
&= \Pr(N^{(1)} = 1)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 0) \\
+\Pr(N^{(1)} &= 0)\Pr(N^{(2)} = 0)\Pr(N^{(3)} = 2) \\
&= \binom{5}{1}(0.0037)(1-0.0037)^4(1-0.0088)^{12}(1-0.0065)^9 \\
&\quad +(1-0.0037)^5(1-0.0088)^{12}\binom{9}{2}(0.0065)^2(1-0.0065)^7 \\
&= 0.01674.
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.12 *On considère le portefeuille de l'Exemple 3.11 où toutefois* $n^{(1)} = 421$, $n^{(2)} = 749$ *et* $n^{(3)} = 375$. *On fixe la prime par contrat à 1.2 fois la prime pure, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned}
\Pi_i^{(j)} &= \textit{prime pour } \textbf{\textit{un}} \textit{ risque de la classe } j \\
&= 1.2 \times E\left[X_i^{(j)}\right] = (1.2)\, b^{(j)} q^{(j)}.
\end{aligned}$$

À l'aide de l'approximation normale, évaluer la probabilité que les coûts totaux pour le portefeuille excèdent le revenu total de primes, soit

$$\Pr(S > REV),$$

où $REV =$ *revenu total* $= \sum_{j=1}^{3} n^{(j)}\Pi^{(j)}$ *où* $n^{(j)}\Pi^{(j)}$ *correspond à l'ensemble des primes de la classe* j.

Solution.

$$\begin{aligned}
\Pr(S > REV) &= 1 - \Pr(S \leq REV) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{REV - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[S] &= E\left[S^{(1)}\right] + E\left[S^{(2)}\right] + E\left[S^{(3)}\right] \\
&= (421)(2000)(0.0037) + (749)(3000)(0.0088) + (375)(1000)(0.0065) \\
&= 25\ 326.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var\left(S^{(1)}\right) + Var\left(S^{(2)}\right) + Var\left(S^{(3)}\right) \\
&= (421)(2000)^2(0.0037)(1-0.0037) + (749)(3000)^2(0.0088)(1-0.0088) + (375)(1000)^2(0.0065)(1-0.0065) \\
&= 67\ 428\ 179
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
REV &= \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} \\
&= (1.2)\, E[S] \\
&= 30391.8
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\Pr(S &> REV) = 1 - \Pr(S \leq REV) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{REV - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{30391.8 - 25326.5}{\sqrt{67428179}}\right) \\
&\approx 1 - \Pr(Z \leq 0.6169) \text{ où } Z \sim N(0,1) \\
&= 1 - 0.7313 \\
&= 0.2687.
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.13 *Soit une portefeuille constitué de deux risques X_1 et X_2 définis par*

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases}$$

où B_1, B_2 et (I_1, I_2) sont indépendants. On ne précise toutefois pas la relation de dépendance entre I_1 et I_2. On définit le montant total des sinistres pour le portefeuille par $S = X_1 + X_2$. (a) Trouver $E[S]$. (b) Trouver $Var(S)$. (c) Trouver F_S.

Solution. (a)

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[X_1 + X_2] \\
&= E[X_1] + E[X_2],
\end{aligned}$$

où $E[X_i] = E[I_i]\, E[B_i]$. (b)

$$Var(S) = Var(X_1) + Var(X_1) + 2Cov(X_1, X_2).$$

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]\, E[X_2]$$
$$E[X_1 X_2] = E[E[X_1 X_2 | I_1, I_2]]$$

$$\begin{aligned}
E[X_1 X_2 | I_1 = 0, I_2 = 0] &= 0 \\
E[X_1 X_2 | I_1 = 0, I_2 = 1] &= 0 \\
E[X_1 X_2 | I_1 = 1, I_2 = 0] &= 0 \\
E[X_1 X_2 | I_1 = 1, I_2 = 1] &= E[B_1 B_2] = E[B_1]\, E[B_2].
\end{aligned}$$

On déduit donc

$$E[X_1 X_2 | I_1, I_2] = I_1 I_2 E[B_1]\, E[B_2]$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
E[X_1 X_2] &= E[I_1 I_2 E[B_1]\, E[B_2]] \\
&= E[B_1]\, E[B_2]\, E[I_1 I_2].
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1]\, E[X_2] \\
&= E[B_1]\, E[B_2]\, E[I_1 I_2] - E[B_1]\, E[B_2]\, E[I_1]\, E[I_2] \\
&= E[B_1]\, E[B_2]\, Cov(I_1, I_2).
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\
&= E[I_1] Var(B_1) + Var(I_1) E^2[B_1] \\
&\quad + E[I_2] Var(B_2) + Var(I_2) E^2[B_2] \\
&\quad + 2E[B_1] E[B_2] Cov(I_1, I_2).
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(S \leq x) \\
&= \Pr(X_1 + X_2 \leq x) \\
&= \Pr(X_1 + X_2 \leq x \,| I_1 = 0, I_2 = 0) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\
&\quad + \Pr(X_1 + X_2 \leq x \,| I_1 = 1, I_2 = 0) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\
&\quad + \Pr(X_1 + X_2 \leq x \,| I_1 = 0, I_2 = 1) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\
&\quad + \Pr(X_1 + X_2 \leq x \,| I_1 = 1, I_2 = 1) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \Pr(B_1 \leq x) + \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \Pr(B_2 \leq x) \\
&\quad + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \Pr(B_1 + B_2 \leq x).
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.14 *On considère un portefeuille de $n = 2$ contrats d'assurance-maladie. On suppose que le montant total des sinistres pour le contrat i est défini par*

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases},$$

où $I_1 \sim Bern(0.2)$, $I_2 \sim Bern(0.25)$, $B_1 \sim Gamma\left(2, \frac{2}{1000}\right)$ et $B_2 \sim Gamma\left(1, \frac{2}{1000}\right)$. On suppose que les variables aléatoires I_1, I_2, B_1, B_2 sont indépendantes. (a) Trouver $E[S]$. (b) Trouver $Var(S)$. (c) Trouver $\Pr(S \leq 2100)$.

Solution. (a)

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[X_1 + X_2] \\
&= E[X_1] + E[X_2] \\
&= E[I_1] E[B_1] + E[I_2] E[B_2] \\
&= (0.2)(1000) + (0.25)(500) \\
&= 325.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var(X_1 + X_2) \\
&= Var(X_1) + Var(X_2) \\
&= E[I_1] Var[B_1] + Var[I_1] E^2[B_1] + E[I_2] Var[B_2] + Var[I_2] E^2[B_2] \\
&= (0.2)\left(\frac{2}{(2/1000)^2}\right) + (0.2)(0.8)\left(\frac{2}{2/1000}\right)^2 + (0.25)\left(\frac{1}{(2/1000)^2}\right) + (0.25)(0.75)\left(\frac{1}{2/1000}\right)^2 \\
&= 260000 + 109375 \\
&= 369375.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\Pr(S &\leq 2100) = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1} \Pr(S \leq 2100 \,|I_1 = i_1, I_2 = i_2\,) \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2) \\
&= \Pr(X_1 + X_2 \leq 2100 \,|I_1 = 0, I_2 = 0\,) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\
+ \Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100 \,|I_1 = 1, I_2 = 0\,) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\
+ \Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100 \,|I_1 = 0, I_2 = 1\,) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\
+ \Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100 \,|I_1 = 1, I_2 = 1\,) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(S &\leq 2100) = (1) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \Pr(B_1 \leq 2100) \\
+ \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) \Pr(B_2 \leq 2100) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \Pr(B_1 + B_2 \leq 2100)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 0) = \Pr(I_1 = 0) \Pr(I_2 = 0) \\
&= (0.8)\,(0.75) \\
&= 0.6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) = \Pr(I_1 = 1) \Pr(I_2 = 0) \\
&= (0.2)\,(0.75) \\
&= 0.15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) = \Pr(I_1 = 0) \Pr(I_2 = 1) \\
&= (0.8)\,(0.25) \\
&= 0.2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) = \Pr(I_1 = 1) \Pr(I_2 = 1) \\
&= (0.2)\,(0.25) \\
&= 0.05
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(B_1 &\leq 2100) = 1 - \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\left(\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)\right)^j \mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)}}{j!} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-4.2} - 4.2\mathrm{e}^{-4.2} \\
&= 0.922
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(B_2 &\leq 2100) = 1 - \mathrm{e}^{-4.2} \\
&= 0.985
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(B_1 + B_2 &\leq 2100) = 1 - \sum_{j=0}^{3-1} \frac{\left(\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)\right)^j \mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{1000}\right)(2100)}}{j!} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-4.2} - 4.2\mathrm{e}^{-4.2} - \frac{(4.2)^2\mathrm{e}^{-4.2}}{2!} \\
&= 0.78976,
\end{aligned}$$

car $(B_1 + B_2) \sim Erlang\left(3, \frac{2}{1000}\right)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq 2100) = 0.6 + (0.15)(0.922) + (0.12)(0.985) + (0.05)(0.78976) \\ &= 0.974788. \end{aligned}$$

■

À noter que dans cet exemple, on peut calculer F_S de façon explicite étant donné que $(B_1 + B_2) \sim Erlang(\beta)$.

Exemple 3.15 *On considère l'Exemple 3.14 mais où toutefois les variables aléatoires I_1 et I_2 ne sont plus indépendantes. On suppose plutôt que $Cov(I_1, I_2) = 0.03$. (a) Trouver $E[S]$. (b) Trouver $Var(S)$. (c) Trouver $\Pr(S \leq 2100)$.*

Solution. (a) Même si les variables aléatoires I_1 et I_2 ne sont plus indépendantes, on obtient le même résultat pour $E[S]$. (b)

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1 + X_2) \\ &= Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= 260000 + 109375 + 2Cov(X_1, X_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= Cov(I_1 B_1, I_2 B_2) \\ &= E[I_1 B_1 I_2 B_2] - E[I_1 B_1] E[I_2 B_2] \\ &= E[B_1] E[B_2] E[I_1 I_2] - E[B_1] E[I_1] E[B_2] E[I_2] \\ &= E[B_1] E[B_2] Cov(I_1, I_2) \\ &= (1000)(500)(0.03) \\ &= 15000. \end{aligned}$$

On aurait pu également évaluer $Cov(X_1, X_2)$ comme suit:

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1] E[X_2]$$

où

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= E[I_1 B_1 I_2 B_2] \\ &= E[B_1] E[B_2] E[I_1 I_2]. \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} E[I_1 I_2] &= Cov(I_1, I_2) + E[I_1] E[I_2] \\ &= 0.03 + (0.2)(0.25) \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} E[X_1 X_2] &= (1000)(500)(0.08) \\ &= 40000. \end{aligned}$$

De plus, on sait que

$$\begin{aligned} E[X_1] &= E[I_1] E[B_1] = (0.2)(1000) = 200 \\ E[X_2] &= E[I_2] E[B_2] = (0.25)(500) = 125, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= 40\ 000 - (200)(125) \\ &= 15000. \end{aligned}$$

Une troisième approche aurait pu être utilisée pour trouver $Cov(X_1, X_2)$, soit en conditionnant sur (I_1, I_2). On a

$$Cov(X_1, X_2) = E\left[Cov(X_1, X_2 \left| \underline{I} \right.)\right] + Cov(E\left[X_1 \left| \underline{I} \right.\right], E\left[X_2 \left| \underline{I} \right.\right]),$$

où $\underline{I} = (I_1, I_2)$ et

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2 \left| I_1 = 0, I_2 = 0 \right.) &= 0 \\ Cov(X_1, X_2 \left| I_1 = 1, I_2 = 0 \right.) &= 0 \\ Cov(X_1, X_2 \left| I_1 = 0, I_2 = 1 \right.) &= 0 \\ Cov(X_1, X_2 \left| I_1 = 1, I_2 = 1 \right.) &= Cov(B_1, B_2). \end{aligned}$$

On a donc

$$Cov(X_1, X_2 \left| \underline{I} \right.) = I_1 I_2 Cov(B_1, B_2)$$

d'où

$$\begin{aligned} E\left[Cov(X_1, X_2 \left| \underline{I} \right.)\right] &= Cov(B_1, B_2) E\left[I_1 I_2\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car les variables aléatoires B_1 et B_2 sont indépendantes. De plus, on a pour le 2ième terme impliqué dans la covariance

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \left| \underline{I} \right.\right] &= I_1 E\left[B_1\right] \\ E\left[X_2 \left| \underline{I} \right.\right] &= I_2 E\left[B_2\right] \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$Cov(E\left[X_1 \left| \underline{I} \right.\right], E\left[X_2 \left| \underline{I} \right.\right]) = E\left[B_1\right] E\left[B_2\right] Cov(I_1, I_2)$$

On obtient donc pour la covariance

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E\left[Cov(X_1, X_2 \left| \underline{I} \right.)\right] + Cov(E\left[X_1 \left| \underline{I} \right.\right], E\left[X_2 \left| \underline{I} \right.\right]) \\ &= 0 + E\left[B_1\right] E\left[B_2\right] Cov(I_1, I_2) \\ &= (1000)(500)(0.03) \\ &= 15000, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Var\,(S) &= Var\,(X_1 + X_2) \\ &= Var\,(X_1) + Var\,(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) \\ &= 260000 + 109375 + (2)(15000) \\ &= 399375. \end{aligned}$$

(c) On doit évaluer les probabilités conjointes d'occurence.

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 1) = E\left[I_1 I_2\right] \\ &= Cov(I_1, I_2) + E\left[I_1\right] E\left[I_2\right] \\ &= 0.03 + (0.2)(0.25) \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 1, I_2 = 0) = \Pr(I_1 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.2 - 0.08 \\ &= 0.12, \end{aligned}$$

car $\Pr(I_1 = 1) = \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) + \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1)$.

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 1) = \Pr(I_2 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.25 - 0.08 \\ &= 0.17. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_1 &= 0, I_2 = 0) = 1 - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) - \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) - \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\ &= 1 - 0.08 - 0.12 - 0.17 \\ &= 0.63. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq 2100) = \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \Pr(S \leq 2100 \,| I_1 = i_1, I_2 = i_2) \Pr(I_1 = i_1, I_2 = i_2) \\ &= \Pr(X_1 + X_2 \leq 2100 \,| I_1 = 0, I_2 = 0) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) \\ + \Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100 \,| I_1 = 1, I_2 = 0) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\ + \Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100 \,| I_1 = 0, I_2 = 1) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) \\ + \Pr(X_1 + X_2 &\leq 2100 \,| I_1 = 1, I_2 = 1) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq 2100) = (1) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 0) + \Pr(B_1 \leq 2100) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 0) \\ + \Pr(B_2 &\leq 2100) \Pr(I_1 = 0, I_2 = 1) + \Pr(B_1 + B_2 \leq 2100) \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) \\ &= 0.63 + (0.922)\,(0.12) + (0.985)\,(0.17) + (0.78976)\,(0.08) \\ &= 0.9712708. \end{aligned}$$

■

Exemple 3.16 *On considère l'Exemple 3.14 mais avec un nombre n de contrat et où les variables aléatoires I_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique I. On suppose également que les variables aléatoires B_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées. Les variables aléatoires $I_1, ..., I_n$ sont considérées indépendantes de même pour les variables aléatoires $B_1, ..., B_n$. Trouver l'expression pour F_S.*

Solution. On définit $S = X_1 + ... + X_n$ et $N = I_1 + ... + I_n$, où $N \sim Bin(n, q)$. On peut donc exprimer S sous la forme d'une somme aléatoire

$$S = \begin{cases} 0, \ N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} C_k, \ N > 0, \end{cases}$$

où C_k représente les coûts pour un des contrats ayant eu un sinistre ou plus et N correspond au nombre de contrats du portefeuille ayant eu un sinistre ou plus. De plus, on a que les variables aléatoires $C_1, C_2, ...$ sont identiquement distribuées comme la variable aléatoire B représentant le montant total des sinistres pour un contrat. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \Pr(S &\leq x) = \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{n} \Pr(S \leq x \,| N = k) \Pr(N = k) \\ &= \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{n} \Pr(C_1 + ... + C_k \leq x) \Pr(N = k). \end{aligned}$$

■

Remarque 3.17 *La variable aléatoire B_1 diffère de la variable aléatoire C_1.*

Remarque 3.18 *On ne se préoccupe pas de la provenance des coûts, c'est-à-dire de quel contrat provient les sinistres.*

Remarque 3.19 *Il est possible d'écrire S comme une somme aléatoire car les contrats sont homogènes, c'est-à-dire $I_1, ..., I_n$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées ainsi que les variables aléatoires $B_1, ..., B_n$.*

Exemple 3.20 *On suppose qu'un portefeuille d'assurance est divisé en $m = 3$ classes. On désigne par $n^{(j)}$ le nombre de contrats pour la classe j avec*

j	$n^{(j)}$	$q^{(j)}$	Loi de $B^{(j)}$
1	200	0.15	Pareto$(\alpha = 2.2, \lambda = 1200)$
2	150	0.24	Lognormale$(\mu = 7, \sigma^2 = 4)$
3	350	0.18	Gamma$\left(\alpha = 3, \beta = \frac{3}{1000}\right)$.

On suppose que les contrats sont indépendants et $S = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}$, où les variables aléatoires $X_i^{(j)}$ $\left(i = 1, ..., n^{(j)}\right)$ sont identiquement distribuées comme la variable aléatoire $X^{(j)}$ définie par

$$X^{(j)} = \begin{cases} B^{(j)}, \ I^{(j)} = 1 \\ 0, \ I^{(j)} = 0 \end{cases}$$

Utiliser l'approximation normale pour évaluer $\Pr(S > x)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} E[S] &= E\left[\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n^{(j)}} E\left[X_i^{(j)}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{3} n^{(j)} E\left[X^{(j)}\right], \end{aligned}$$

car $X_i^{(j)}$ $\left(i = 1, ..., n^{(j)}\right)$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées comme la variable aléatoire $X^{(j)}$. On a les moments suivants pour les variables aléatoires $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}$:

$$\begin{aligned} B^{(1)} &\sim Pareto(\alpha = 2.2, \lambda = 1200) \\ E\left[B^{(1)}\right] &= \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \frac{1200}{2.2 - 1} = 1000 \\ Var\left(B^{(1)}\right) &= \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} - \left(\frac{\lambda}{\alpha - 1}\right)^2 \\ &= \frac{2(1200)^2}{(1.2)(0.2)} - (1000)^2 \\ &= 11000000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{(2)} &\sim Lognormale(\mu = 7, \sigma^2 = 4) \\ E\left[B^{(2)}\right] &= \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = \mathrm{e}^{7 + \frac{4}{2}} = \mathrm{e}^9 \\ Var\left(B^{(2)}\right) &= \mathrm{e}^{2\mu + 2\sigma^2} - \left(\mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \\ &= \mathrm{e}^{22} - (\mathrm{e}^9)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^{(3)} &\sim Gamma\left(\alpha=3,\beta=\frac{3}{1000}\right)\\
E\left[B^{(3)}\right] &= \frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{\frac{3}{1000}}=1000\\
Var\left(B^{(3)}\right) &= \frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{3}{\left(\frac{3}{1000}\right)^2}=333333.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E[S] &= (200)(0.15)(1000)+(150)(0.24)\left(\mathrm{e}^9\right)+(350)(0.18)(1000)\\
&= 384711.
\end{aligned}$$

Pour la variance du montant total des sinistres, on a

$$\begin{aligned}
Var(S) &= Var\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n^{(j)}}X_i^{(j)}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{3}n^{(j)}Var\left(X^{(j)}\right)
\end{aligned}$$

car les contrats sont supposés indépendants et $X_i^{(j)}\sim X^{(j)}$, pour $i=1,...,n^{(j)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
Var(S) &= (200)\left(E\left[I^{(1)}\right]Var\left(B^{(1)}\right)+Var\left(I^{(1)}\right)E^2\left[B^{(1)}\right]\right)\\
&\quad+(150)\left(E\left[I^{(2)}\right]Var\left(B^{(2)}\right)+Var\left(I^{(2)}\right)E^2\left[B^{(2)}\right]\right)\\
&\quad+(350)\left(E\left[I^{(3)}\right]Var\left(B^{(3)}\right)+Var\left(I^{(3)}\right)E^2\left[B^{(3)}\right]\right)\\
&= (200)\left((0.15)(11000000)+(0.15)(0.85)\left(1000^2\right)\right)\\
&\quad+(150)\left((0.24)\left(\mathrm{e}^{22}-\mathrm{e}^{18}\right)+(0.24)(0.76)\left(\mathrm{e}^9\right)^2\right)\\
&\quad+(350)\left((0.18)(333333)+(0.18)(0.82)\left(1000^2\right)\right)\\
&= (200)(1777500)+(150)(856597069)+(350)(207600)\\
&= 128917720350.
\end{aligned}$$

Selon l'approximation normale, on a

$$\begin{aligned}
\Pr(S \leq x) &= \Phi\left(\frac{x-E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{x-384711}{\sqrt{128917720350}}\right)
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.21 *On considère un portefeuille d'assurance auto où, selon l'approche fréquence-sévérité, on a*

$$X_i=\begin{cases}\sum_{j=1}^{M_i}B_{i,j}, & M_i>0\\ 0, & M_i=0\end{cases}.$$

On définit $S=X_1+...+X_n$ où $X_1,...,X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes. On suppose $M_i\sim Poisson(\lambda_i)$, $(i=1,...,n)$ et les variables aléatoires $M_1,M_2,...,M_n$ sont indépendantes. Les variables aléatoires $B_{i,1},B_{i,2},...,B_{i,M_i}$ sont identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique B_i. On suppose également que M_i et $(B_{i,1},B_{i,2},...,B_{i,M_i})$ sont indépendantes. Identifier la loi de S.

Solution. On utilise la fonction génératrice des moments pour identifier la loi de S.

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{tX_1}\right]...E\left[\mathrm{e}^{tX_n}\right] \\
&= M_{X_1}(t)...M_{X_n}(t),
\end{aligned}$$

où $X_i \sim$ *Poisson Composée*$(\lambda_i; F_{B_i})$ et par conséquent $M_{X_i}(t) = M_{M_i}(\ln M_{B_i}(t))$. De plus, étant donné que $M_i \sim$ *Poisson*(λ_i), on a $M_{M_i}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i(\mathrm{e}^t-1)}$, d'où

$$\begin{aligned}
M_{X_i}(t) &= M_{M_i}(\ln M_{B_i}(t)) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_i\left(\mathrm{e}^{\ln M_{B_i}(t)}-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_i\left(M_{B_i}(t)-1\right)}.
\end{aligned}$$

On obtient donc la fonction génératrice des moments suivante pour le montant total des sinistres S

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= M_{X_1}(t)...M_{X_n}(t) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_1\left(M_{B_1}(t)-1\right)}...\mathrm{e}^{\lambda_n(M_{B_n}(t)-1)} \\
&= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(M_{B_i}(t)-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i M_{B_i}(t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_{TOT}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{TOT}}M_{B_i}(t)-1\right)}
\end{aligned}$$

où $\lambda_{TOT} = \lambda_1 + ... + \lambda_n$. Alors, S obéit à une loi Poisson composée de paramètres $\left(\lambda_{TOT}; \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{TOT}}F_{B_i}\right)$. Étant donné que S obéit à une loi composée, on peut écrire

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} C_k, & N > 0 \\ 0, & N = 0, \end{cases}$$

où $C_1, C_2, ...$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique C, $N \sim$ *Poisson*$(\lambda_{TOT} = \lambda_1 + ... + \lambda_n)$, $F_C(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{TOT}}F_{B_i}(x)$ et $M_C(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_{TOT}}M_{B_i}(t)$. On a donc que la variable aléatoire C obéit à un mélange des lois de B_1, ..., B_n. ■

Exemple 3.22 *On considère un portefeuille d'assurance de contrats IARD tel que le montant total des sinistres du portefeuille est défini par* $S = X_1 + ... + X_n$*, où* $X_i \sim$ *Binomiale Composée*$(n_i, q_i; F_{B_i})$*. Soit les hypothèses (restrictives) suivantes:* $q_i = q$ *et* $B_i \sim B$, $i \in \{1, 2..., n\}$*. Si l'on suppose que* X_i $(i = 1, ..., n)$ *sont des variables aléatoires indépendantes, identifier la loi de* S*.*

Solution. On utilise la fonction génératrice des moments pour identifier la loi de S.

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{tX_1}\right]...E\left[\mathrm{e}^{tX_n}\right] \\
&= M_{X_1}(t)...M_{X_n}(t) \\
&= \left(1 - q_1 + q_1 M_{B_1}(t)\right)^{n_1}...\left(1 - q_n + q_n M_{B_n}(t)\right)^{n_n} \\
&= \left(1 - q + q M_B(t)\right)^{n_1}...\left(1 - q + q M_B(t)\right)^{n_n} \\
&= \left(1 - q + q M_B(t)\right)^{n_1+n_2+...+n_n} \\
&= \left(1 - q + q M_B(t)\right)^{n_{TOT}},
\end{aligned}$$

où $n_{TOT} = n_1 + ... + n_n$. Alors, S obéit à une loi binomiale composée de paramètres $(n_{TOT}, q; F_B)$. On peut donc écrire la variable aléatoire S comme une somme aléatoire

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} C_k, & N > 0 \\ 0, & N = 0, \end{cases}$$

où $N \sim Binomiale(n_{TOT}, q)$, $C_1, C_2, ...$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées comme la variable aléatoire B et C_k correspond au coût du *kième* sinistre du portefeuille ce qui diffère de la définition de C_k dans l'Exemple 3.16. ■

Exemple 3.23 *On considère un portefeuille d'assurance de contrats IARD tel que le montant total des sinistres du portefeuille est défini par $S = X_1 + ... + X_n$, où $X_i \sim Binomiale\ N\acute{e}gative\ Compos\acute{e}e(r_i, q_i; F_{B_i})$, soit*

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0, \end{cases},$$

où $M_i \sim Binomiale\ N\acute{e}gative\,(r_i, q_i)$. Soit les hypothèses (restrictives) suivantes: $q_i = q$ et $B_{i,k} \sim B_i$, $i \in \{1, 2..., n\}, k \in \{1, 2, ..., M_i\}$. Si l'on suppose que X_i $(i = 1, ..., n)$ sont des variables aléatoires indépendantes, identifier la loi de S.

Solution. On utilise la fonction génératrice des moments pour identifier la loi de S.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[e^{tS}\right] \\ &= E\left[e^{t(X_1+...+X_n)}\right] \\ &= E\left[e^{tX_1}\right]...E\left[e^{tX_n}\right] \\ &= M_{X_1}(t)...M_{X_n}(t) \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\,M_B(t)}\right)^{r_1}...\left(\frac{q}{1-(1-q)\,M_B(t)}\right)^{r_n} \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\,M_B(t)}\right)^{r_{TOT}} \end{aligned}$$

où $r_{TOT} = r_1 + ... + r_n$. Alors, S obéit à une loi binomiale négative composée de paramètres $(r_{TOT}, q; F_B)$. ■

3.4 Mesures de risque

En connaissant la distribution du montant total des sinistres S, on est en mesure d'évaluer différentes quantités permettant de quantifier, de mesurer le risque global associé au portefeuille de risques. Les mesures de risque VaR et $TVaR$ seront à nouveau utilisées à cette fin ainsi qu'une mesure d'insolvabilité.

Définition 3.24 *Soit S une variable aléatoire avec fonction de répartition F_S. On définit la mesure de risque Value-at-Risk, notée VaR_κ, par*

$$VaR_\kappa(S) = F_S^{-1}(\kappa) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_S(x) \geq \kappa\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_S(x) < \kappa\},$$

où $\kappa \in (0, 1)$ est un niveau de confiance fixé et F_S^{-1} est la fonction inverse de la fonction de répartition de S.

Définition 3.25 *Soit S une variable aléatoire avec fonction de répartition F_S. On définit la mesure de risque Tail Value-at-Risk, notée $TVaR_\kappa$, par*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(S)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(E\left[S\times 1_{\{S>VaR_\kappa(S)\}}\right]+VaR_\kappa(S)\left(F_S\left(VaR_\kappa(S)\right)-\kappa\right)\right), \end{aligned}$$

où $\kappa \in (0,1)$ est un niveau de confiance fixé.

Exemple 3.26 *On considère un portefeuille de 2 contrats d'assurance temporaire 1 an. Pour ces 2 contrats, la prestation de décès est $b = 1000$. On définit les coûts pour le contrat i selon l'approche indemnitaire, soit*

$$X_i = \{bI_i \ , \ i = 1, 2 \ ,$$

où I_1, I_2 sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $I_i \sim Bern(q = 0.009)$, $i = 1, 2$. (a) Trouver $VaR_{0.99}(X_i)$, $i = 1, 2$. (b) Trouver $VaR_{0.99}(X_1 + X_2)$. (c) Comparer $VaR_{0.99}(X_1) + VaR_{0.99}(X_2)$ avec la réponse obtenue en b) et commenter.

Solution. (a) On a $X_i \in \{0, 1000\}$ avec $\Pr(X_i = 0) = 0.991$ et $\Pr(X_i = 1000) = 0.009$, pour $i = 1, 2$. Alors $VaR_{0.99}(X_1) = VaR_{0.99}(X_2) = 0$. (b) On a $(X_1 + X_2) \in \{0, 1000, 2000\}$ avec

$$\begin{aligned} \Pr(X_1+X_2 &= 0) = (0.991)^2 = 0.98208 \\ \Pr(X_1+X_2 &= 1000) = (2)(0.009)(0.991) = 0.017838 \\ \Pr(X_1+X_2 &= 2000) = (0.009)^2 = 0.000081. \end{aligned}$$

Alors, $VaR_{0.99}(X_1 + X_2) = 1000$. (c) $VaR_{0.99}(X_1) + VaR_{0.99}(X_2) < VaR_{0.99}(X_1 + X_2)$ ce qui illustre le non respect de la sous-additivité de la mesure de risque VaR_κ. ■

Exemple 3.27 *On considère un portefeuille de 2 risques indépendants X_1 et X_2 où $X_i = bI_i$, $i = 1, 2$ avec $I_i \sim Bernoulli(q = 0.1)$ et $b = 1000$. On définit $S = X_1 + X_2$. (a) Trouver $VaR_{0.85}(X_i)$, $i = 1, 2$. (b) Trouver $TVaR_{0.85}(X_i)$, $i = 1, 2$. (c) Trouver $VaR_{0.85}(S)$ et comparer avec $VaR_{0.85}(X_1) + VaR_{0.85}(X_2)$. (d) Trouver $TVaR_{0.85}(S)$ et comparer avec $TVaR_{0.85}(X_1) + TVaR_{0.85}(X_2)$.*
Solution. *On a $S \in \{0, 1000, 2000\}$ avec*

$$\begin{aligned} \Pr(S &= 0) = (0.9)^2 = 0.81 \\ \Pr(S &= 1000) = (2)(0.1)(0.9) = 0.18 \\ \Pr(S &= 2000) = (0.1)^2 = 0.01. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

k	$\Pr(S = k \times 1000)$	$\Pr(S \leq 1000k)$
0	0.81	0.81
1	0.18	0.99
2	0.01	1.00

(a) $VaR_{0.85}(X_1) = VaR_{0.85}(X_2) = 0$. (b)

$$\begin{aligned} TVaR_{0.85}(X_1) &= \frac{1}{1-0.85}\left(E\left[X_1\times 1_{\{X_1>VaR_{0.85}(X_1)\}}\right]+VaR_{0.85}(X_1)\left(F_{X_1}\left(VaR_{0.85}(X_1)\right)-0.85\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.85}E\left[X_1\times 1_{\{X_1>VaR_{0.85}(X_1)\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-0.85}E\left[X_1\times 1_{\{X_1>0\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-0.85}E\left[X_1\right] \\ &= \frac{1}{1-0.85}(1000)(0.1) \\ &= 666.67. \end{aligned}$$

$$TVaR_{0.85}(X_2) = TVaR_{0.85}(X_1) = 666.67.$$

(c)

$$VaR_{0.85}(S) = 1000 > VaR_{0.85}(X_1) + VaR_{0.85}(X_2).$$

(d)

$$\begin{aligned} TVaR_{0.85}(S) &= \frac{1}{1-0.85}\left(E\left[S \times 1_{\{S>VaR_{0.85}(S)\}}\right] + VaR_{0.85}(S)\left(F_S\left(VaR_{0.85}(S)\right) - 0.85\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.85}\left(E\left[S \times 1_{\{S>1000\}}\right] + (1000)\left(F_S(1000) - 0.85\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-0.85}\left((0.01)(2000) + (1000)(0.99 - 0.85)\right) \\ &= 1067 < TVaR_{0.85}(X_1) + TVaR_{0.85}(X_2). \end{aligned}$$

■

Définition 3.28 *Soit une mesure de risque ρ_κ. Le bénéfice de mutualisation, qui correspond au montant épargné par l'agrégation des risques, est défini par*

$$B_\kappa^\rho(S; X_1, ..., X_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_\kappa(X_i)\right) - \rho_\kappa(S),$$

où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Remarque 3.29 *La mesure de risque VaR_κ n'étant pas sous-additive, il peut arriver que le bénéfice de mutualisation soit négatif.*

Remarque 3.30 *La mesure de risque $TVaR_\kappa$ étant cohérente et donc sous-additive, le bénéfice de mutualisation sous cette mesure de risque est toujours positif. Ceci fournit un argument supplémentaire favorisant l'utilisation de la $TVaR_\kappa$ au lieu de la VaR_κ.*

Remarque 3.31 *Soit une compagnie ABC composée de n lignes d'affaires dont les coûts sont définis par les variables alléatoires $X_1, ..., X_n$. Les coûts totaux pour la compagnie sont $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Pour calculer le capital économique de la compagnie ABC, est-il préférable d'utiliser $\sum_{i=n}^{n} TVaR_\kappa(X_i)$ ou $TVaR_\kappa(S)$? Il est préférable d'utiliser $TVaR_\kappa(S)$ car $\sum_{i=n}^{n} TVaR_\kappa(X_i)$ ignore le bien fait de la mutualisation des risques ce qui conduira à un capital économique trop élevé.*

Une autre mesure permettant de connaître la santé financière d'un portefeuille est la mesure de solvabilité. Celle-ci vise à évaluer la probabilité que le détenteur d'un portefeuille de risques rencontre ses engagements au cours de la prochaine période. Dans ce cours, la mesure de solvabilité utilisée est la probabilité de ruine.

Définition 3.32 *On considère le portefeuille d'une compagnie d'assurance constitué des contrats $X_1, ..., X_n$. La prime associée au contrat i est désginée par Π_i, $i = 1, ..., n$. Le montant total des sinistres pour le portefeuille est $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et le revenu total pour le portefeuille Π_{PTF}. Un capital initial u est alloué au portefeuille. On définit la probabilité d'insolvabilité par*

$$\begin{aligned} \Psi_n(u) &= \Pr(S > u + \Pi_{PTF}) \\ &= 1 - F_S(u + \Pi_{PTF}). \end{aligned}$$

On doit donc connaître la fonction de répartition du montant total des sinistres F_S pour évaluer $\Psi_n(u)$, d'où l'importance d'être en mesure d'évaluer F_S.

Remarque 3.33 *La probabilité d'insolvabilité (ou probabilité de ruine) est un outil qui aide l'actuaire dans l'évaluation et la gestion des risques. Elle sert notamment à vérifier si le niveau de capital alloué u au portefeuille est suffisant, à vérifier si le niveau de prime est adéquat et à choisir une politique de réassurance appropriée.*

3.5 Mutualisation des risques et coûts par contrat

En assurance, chaque assuré transfère son risque individuel à une compagnie d'assurance. Le regroupement (ou mutualisation) de ces risques individuels constitue le risque global de l'assureur. Pour comprendre l'impact de ce regroupement, il est nécessaire d'examiner le comportement aléatoire du coût moyen par contrat, c'est-à-dire la part du risque global attribuée à un contrat, pour un portefeuille de contrats dont les coûts sont identiquement distribués. On cherche donc à savoir quel est l'impact sur les coûts associées à un risque de regrouper plusieurs risques: est-ce que cela conduit à augmenter ou diminuer ses propres coûts.

On considère un portefeuille constitué de n contrats dont les coûts sont identiquement distribués. On définit le montant total des coûts pour le portefeuille par $S_n = X_1 + ... + X_n$, où $X_i \sim X$ pour $i = 1, ..., n$. La mutualisation des risques est fondée sur un partage équitable des coûts du portefeuille sur l'ensemble des contrats du portefeuille. La part allouée à un contrat suite à la mise en commun des risques est donnée par

$$W_n = \frac{S_n}{n}.$$

On examine donc le comportement de W_n par rapport au comporterment de X dans deux contextes différents, soit dans le cadre d'un regroupement de risques indépendants et de risques dépendants.

3.5.1 Risques indépendants

Soit un portefeuille composé de n risques $X_1, ..., X_n$ que l'on suppose indépendants et identiquement distribués. Regardons l'espérance et la variance de la part allouée W_n dans un tel contexte. On a

$$\begin{aligned} E[W_n] &= E\left[\frac{S_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n}E[S_n] \\ &= \frac{1}{n}nE[X] \\ &= E[X]. \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'espérance du coût moyen est égale à l'espérance du coût pour un seul contrat et donc que le nombre de contrats n'a aucun impact sur la part du risque global allouée à chaque contrat, soit

$$\lim_{n\to\infty} E[W_n] = E[X].$$

Pour la variance de la part allouée à un contrat, on a

$$\begin{aligned} Var(W_n) &= Var\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}Var(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2}nVar(X) \\ &= \frac{Var(X)}{n} \\ &< Var(X). \end{aligned}$$

On constate que la variance du coût moyen est inférieure à la variance du coût pour un contrat lorsque le nombre de contrat dans le portefeuille est supérieur à 1. On a donc que la variabilité de la part attribuée à chaque contrat diminue lorsque la taille du portefeuille s'accroît. On parvient à éliminer entièrement le "risque" ou l'incertitude représentée par la variance de W_n par le regroupement des risques, soit

$$\lim_{n\to\infty} Var\,(W_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{Var\,(X)}{n} = 0.$$

Ce phénomène est appelé l'effet de mutualisation des risques. Il repose sur l'hypothèse d'indépendance entre les risques et a justifié le fonctionnement de l'assurance à ses débuts. Traditionnellement, on disait que le risque global de l'assurance était diversifiable. On appelle aussi ce risque le risque non systémique.

3.5.2 Risques dépendants

Soit un portefeuille composé des n risques $X_1, ..., X_n$ que l'on suppose dépendants et identiquement distribués. Regardons l'espérance et la variance de la part allouée W_n dans un tel contexte. On a

$$\begin{aligned} E\,[W_n] &= E\left[\frac{S_n}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n}E\,[S_n] \\ &= \frac{1}{n}nE\,[X] \\ &= E\,[X]\,. \end{aligned}$$

On obtient le même résultat que pour un regroupement de risques indépendants et identiquement distribués, c'est-à-dire que le lien entre les contrats n'a aucun impact sur l'espérance du coût moyen par contrat. Pour la variance du coût moyen, on obtient dans ce cas-ci

$$\begin{aligned} Var\,(W_n) &= Var\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(nVar(X) + n(n-1)Cov(X_1, X_2)\right) \\ &= \frac{Var(X)}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Cov(X_1, X_2). \end{aligned}$$

De plus, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Var\,(W_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{Var(X)}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)Cov(X_1, X_2) \\ &= Cov(X_1, X_2). \end{aligned}$$

On observe que bien que la taille du portefeuille augmente, on ne parvient pas à éliminer entièrement le risque inhérent à la variabilité de la part allouée. Ce risque résiduel correspond au risque non-diversifiable, appelé aussi le risque systémique.

Remarque 3.34 *Traditionnellement, le risque de mortalité et maladie ainsi que le risque d'assurance IARD étaient considérés diversifiables.*

Remarque 3.35 *Exemples de risques considérés non-diversifiables: amélioration de la mortalité (facteur commun), risque d'épidémie (assurance vie, assurance maladie), risque climatique (assurance vie, assurance agricole), risque d'inflation (assurance maladie, assurance IARD), risques financiers (liés aux taux d'intérêts), risque de marché pour titres avec possibilité de défaut.*

Remarque 3.36 *Voir les exemples 3.22, 3.23, 3.24 (pages 122-125) de Marceau (2013).*

3.6 Mutualisation, loi des grands nombres et nécessité d'une marge positive

Le mécanisme d'assurance fonctionne si une compagnie d'assurance demande une prime appropriée selon le risque couvert par le contrat. Supposons pour le moment que le modèle choisi pour décrire les coûts d'un contrat est adéquat. On suppose que la prime demandée est Π. Quelle doit être la valeur de Π par rapport à l'espérance des coûts $E[X]$? Comment se comporte le portefeuille si $\Pi \leq E[X]$ ou si $\Pi \geq E[X]$?

Pour répondre à ces questions, on examine l'impact du niveau de prime Π sur la probabilité d'insolvabilité. Plus précisément, on étudie le comportement de la probabilité de ruine $\Psi_n(u)$ en fonction du niveau de prime Π lorsque le nombre de contrats n augmente. Pour ce faire, on utilise la loi des grands nombres. Celle-ci repose sur les inégalités de Markov et de Chebyshev.

Proposition 3.37 ***Inégalité de Markov*** *Soit X une variable aléatoire prenant que des valeurs non négatives avec $E[X] < \infty$. Alors, on a pour $\forall a > 0$,*

$$\Pr(X > a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire continue telle que $E[X] < \infty$. Alors,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a x f_X(x)\mathrm{d}x + \int_a^\infty x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \int_a^\infty x f_X(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \int_a^\infty a f_X(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$E[X] \geq \int_a^\infty a f_X(x)\mathrm{d}x = a\left(\Pr(X > a)\right),$$

ce qui conduit au résultat désiré. ■

Proposition 3.38 ***Inégalité de Chebyshev*** *Soit X une variable aléatoire telle que $E[X] < \infty$ et $Var(X) < \infty$. Alors, pour toute valeur de $k > 0$, on a*

$$\Pr(|X - E[X]| \geq k\sqrt{Var(X)}) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Preuve. Soit $Y = \frac{(X-E[X])^2}{Var(X)}$ une variable aléatoire prenant des valeurs non négatives. À l'aide de l'inégalité de Markov avec $a = k^2$, on a

$$\Pr(Y \geq k^2) \leq \frac{E[Y]}{k^2}$$

ou de façon équivalente

$$\Pr\left(\frac{(X - E[X])^2}{Var(X)} \geq k^2\right) \leq \frac{E\left[(X - E[X])^2\right]}{k^2 Var(X)} = \frac{1}{k^2}.$$

Étant donné que $\frac{(X-E[X])^2}{Var(X)} \geq k^2$ est équivalent à $\frac{(X-E[X])}{\sqrt{Var(X)}} \geq k$ ou $\frac{-(X-E[X])}{\sqrt{Var(X)}} \geq k$, on peut écrire $|X - E[X]| \geq k\sqrt{Var(X)}$ qui conduit au résultat désiré. ■

Remarque 3.39 *Les inégalités de Markov et Chebyshev permettent de trouver des bornes pour des probabilités lorsque seulement la moyenne ou la moyenne et la variance de la distribution sont connues.*

Remarque 3.40 *Étant donné que l'inégalité de Chebyshev est valide pour tout choix de distribution de X, la borne obtenue sur la probabilité est plutôt large, souvent trop élevée. Cette inégalité est toutefois un outil théorique utilisé dans plusieurs résultats importants comme la loi des grands nombres.*

Remarque 3.41 *On utilisera l'inégalité de Chebyshev pour démontrer la nécessité de charger une prime strictement supérieure à la prime pure pour éviter la ruine avec certitude.*

Proposition 3.42 ***Loi des grands nombres*** *Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $E[X_i] < \infty$ et $Var(X_i) > 0$, $i = 1, ..., n$. Alors, pour $\forall \varepsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - E[X]\right|\right) \geq \varepsilon \to 0,$$

ce qui correspond à

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|W_n - E[X]|) \geq \varepsilon \to 0.$$

Preuve: Soit le coût moyen par contrat W_n. Selon l'inégalité de Chebyshev, on a

$$\Pr\left(|W_n - E[W_n]| \geq k\sqrt{Var[W_n]}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

qui est équivalent à

$$\Pr\left(|W_n - \mu| \geq k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

car

$$\begin{aligned}
E[W_n] &= E\left[\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n}E[X_1 + ... + X_n] \\
&= \frac{n\mu}{n} = \mu \\
Var(W_n) &= Var\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}Var(X_1 + ... + X_n) \\
&= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.
\end{aligned}$$

Si, pour $\forall \varepsilon > 0$ on définit k tel que $k^2 = \frac{n\varepsilon^2}{\sigma^2}$, on a

$$\Pr\left(|W_n - \mu| \geq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et par conséquent

$$\Pr(|W_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|W_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\right) \to 0.$$

Remarque 3.43 *La loi des grands nombres dit donc que la probabilité que le coût moyen par contrat W_n diffère de son espérance μ de plus d'une très petite quantité ε tend vers 0 lorsque le nombre de contrats dans le portefeuille est très grand.*

Proposition 3.44 *On considère un portefeuille de n contrats d'assurance dont les coûts sont définis par les variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, ..., X_n$ avec $X_i \sim X$ et $E[X_i] = E[X] < \infty$ et $Var(X_i) = Var(X) < \infty$ pour $i = 1, ..., n$. On désigne par S les coûts pour l'ensemble du portefeuille et par Π_i, $i = 1, ..., n$, la prime pour le contrat i, où $\Pi_i = (1+\theta) E[X_i]$ et θ correspond à la marge relative de sécurité. Soit la probabilité d'insolvabilité $\Psi_n(u) = \Pr\left(S > u + \sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right)$, où u est le capital initial. On a les résultats suivants:*

(1) Si $\theta > 0$ et $u = 0$, alors $\underset{n\to\infty}{lim} \Psi_n(0) = 0$.
(2) Si $\theta < 0$ et $u = 0$, alors $\underset{n\to\infty}{lim} \Psi_n(0) = 1$.
(3) Si $\theta = 0$ et $u = 0$, alors $\underset{n\to\infty}{lim} \Psi_n(0) = 0.5$.

Preuve. (1) Soit $\theta > 0$.

$$\begin{aligned}
\Psi_n(0) &= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right) \\
&= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} (1+\theta) E[X_i]\right) \\
&= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} E[X_i] + \theta \sum_{i=1}^{n} E[X_i]\right) \\
&= \Pr(S > E[S] + \theta E[S]) \\
&= \Pr(S - E[S] > \theta E[S]) \\
&= \Pr\left(S - E[S] > \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \sqrt{Var(S)}\right) \\
&= \Pr\left(S - E[S] > k\sqrt{Var(S)}\right),
\end{aligned}$$

où $k = \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}$. Sachant que

$$\begin{aligned}
\Pr\left(|S - E[S]| > k\sqrt{Var(S)}\right) &= \Pr\left(S - E[S] > k\sqrt{Var(S)}\right) \\
&\quad + \Pr\left(S - E[S] < -k\sqrt{Var(S)}\right),
\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Psi_n(0) &= \Pr\left(S - E[S] > k\sqrt{Var(S)}\right) \\
&= \Pr\left(|S - E[S]| > k\sqrt{Var(S)}\right) - \Pr\left(S - E[S] < -k\sqrt{Var(S)}\right) \\
&\leq \Pr\left(|S - E[S]| > k\sqrt{Var(S)}\right).
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Chebyshev, on a

$$\Psi_n(0) \leq \Pr\left(|S - E[S]| > k\sqrt{Var(S)}\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2} &= \frac{1}{\left(\frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)^2} \\
&= \frac{Var\,(S)}{\theta^2 E^2\,[S]} \\
&= \frac{nVar\,(X)}{\theta^2\,(nE\,[X])^2} \\
&= \frac{nVar\,(X)}{\theta^2\,(nE\,[X])^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2} &= \left(\frac{1}{\theta^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\sqrt{Var\,(X)}}{E\,[X]}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\theta^2}\right)(c)^2,
\end{aligned}$$

où $c = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E[X]}$ correspond au coefficient de variation. Alors, si $\theta > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(0) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\theta^2}\right)(c)^2 = 0.$$

(2) Soit $\theta < 0$.

$$\begin{aligned}
\Psi_n(0) &= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right) \\
&= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} (1+\theta)\,E\,[X_i]\right) \\
&= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} E\,[X_i] + \theta \sum_{i=1}^{n} E\,[X_i]\right) \\
&= \Pr\,(S > E\,[S] + \theta E\,[S]) \\
&= \Pr\,(S - E\,[S] > \theta E\,[S])
\end{aligned}$$

Posons $\theta = -\gamma$ et donc $\gamma > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Psi_n(0) &= \Pr\,(S - E\,[S] > \theta E\,[S]) \\
&= \Pr\,(S - E\,[S] > -\gamma E\,[S]) \\
&= 1 - \Pr\,(S - E\,[S] \leq -\gamma E\,[S])\,.
\end{aligned}$$

De plus, on sait que

$$\Pr\,(|S - E\,[S]| \leq -\gamma E\,[S]) = \Pr\,(S - E\,[S] \leq -\gamma E\,[S]) + \Pr\,(S - E\,[S] \geq \gamma E\,[S])$$

$$\begin{aligned}
\Pr\,(S - E\,[S] \leq -\gamma E\,[S]) &= \Pr\,(|S - E\,[S]| \leq -\gamma E\,[S]) - \Pr\,(S - E\,[S] \geq \gamma E\,[S]) \\
1 - \Pr\,(S - E\,[S] \leq -\gamma E\,[S]) &= 1 - (\Pr\,(|S - E\,[S]| \leq -\gamma E\,[S]) - \Pr\,(S - E\,[S] \geq \gamma E\,[S])) \\
&= 1 - \Pr\,(|S - E\,[S]| \leq -\gamma E\,[S]) + \Pr\,(S - E\,[S] \geq \gamma E\,[S])
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$1 - \Pr\left(S - E[S] \leq -\gamma E[S]\right) \geq 1 - \Pr\left(|S - E[S]| \leq -\gamma E[S]\right).$$

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Psi_n(0) &= 1 - \Pr\left(S - E[S] \leq -\gamma E[S]\right) \\
&\geq 1 - \Pr\left(|S - E[S]| \leq -\gamma E[S]\right) \\
&= 1 - \Pr\left(|S - E[S]| \leq -\frac{\gamma E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\sqrt{Var(S)}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(|S - E[S]| \geq \frac{\gamma E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\sqrt{Var(S)}\right) \\
&= 1 - \Pr\left(|S - E[S]| \geq k\sqrt{Var(S)}\right),
\end{aligned}$$

où $k = \frac{\gamma E[S]}{\sqrt{Var(S)}}$. Par l'inégalité de Chebyshev, on a

$$\begin{aligned}
\Psi_n(0) &= 1 - \Pr\left(|S - E[S]| \geq k\sqrt{Var(S)}\right) \\
&\geq 1 - \frac{1}{k^2} \\
&= 1 - \frac{1}{\left(\frac{\gamma E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)^2} \\
&= 1 - \frac{nVar(X)}{\gamma^2 n^2 E^2[X]} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma^2 n}\left(\frac{\sqrt{Var(X)}}{E[X]}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma^2 n}c^2,
\end{aligned}$$

où $c = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E[X]}$ correspond au coefficient de variation. Alors, si $\theta < 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(0) \leq \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{\gamma^2 n}c^2 = 1.$$

(3) Soit $\theta = 0$. On utilise le théorème central limite pour démonter ce cas-ci.

$$\begin{aligned}
\Psi_n(0) &= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right) \\
&= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} (1+0)\, E[X_i]\right) \\
&= \Pr\left(S > \sum_{i=1}^{n} E[X_i]\right) \\
&= \Pr\left(S > E[S]\right) \\
&= \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{E[S] - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right).
\end{aligned}$$

Par le théorème central limite, on a donc

$$\Psi_n(0) = \Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} > \frac{E[S] - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \Psi_n(0) \to \Pr(Z > 0) = \Phi(0) = 0.5$. ■

La proposition ci-dessous montre l'importance pour une compagnie d'évaluer une prime majorée qui est supérieure à la prime pure, c'est-à-dire

$$PM(X) > PP(X) = E[X].$$

Il existe différentes méthodes (voir Marceau (2013), chapitre 4) pour fixer la prime majorée. À noter que la prime majorée est la prime calculée pour le risque d'assurance uniquement. Nous discuterons des principes de prime au chapitre 5.

3.7 Mutualisation et présence d'un facteur aléatoire commun

Soit un portefeuille de n contrats dont les coûts sont désignés par les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$. On suppose que celles-ci sont identiquement distribuées. On définit une variable aléatoire Θ (discrète ou continue) représentant l'environnement ou les conditions environnementales affectant le comportement aléatoire de l'ensemble du portefeuille. Ainsi, la variable aléatoire Θ affecte le comportement de $X_1, ..., X_n$. On suppose également que les variables aléatoires $(X_1 |\Theta = \theta), ..., (X_n |\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes.

On retrouve différents exemples d'application de la présence d'un facteur aléatoire commun. La variable aléatoire Θ peut représenter, notamment, les conditions climatiques (assurance IARD, un peu assurance vie), améliorations de la mortalité (assurance vie et rente), conditions affectant l'état de santé des assurés (comme des épidémies, températures très élevées), certaines conditions financières, etc.

Exemple 3.45 *On considère un portefeuille de n contrats dont les coûts sont désignés par les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$. Ces variables aléatoires sont supposées identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique X. On suppose que le portefeuille est affecté par un facteur aléatoire commun que l'on désigne par la variable aléatoire Θ, où $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m\}$. On suppose également que les variables aléatoires $(X_1 |\Theta = \theta), ..., (X_n |\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes. (a) Trouver $F_X(x)$. (b) Trouver $E[X]$. (c) Trouver $Var(X)$. (d) Trouver $F_S(x)$. (e) Trouver $E[S]$. (f) Trouver $Var(S)$.*

Solution. (a)

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^{m} F_{X|\Theta=\theta_j}(x|\theta_j) \Pr(\Theta = \theta_j)$$

(b)

$$E[X] = E[E[X|\Theta]] = \sum_{j=1}^{m} E[X|\Theta = \theta_j] \Pr(\Theta = \theta_j)$$

(c)

$$Var(X) = E[Var(X|\Theta)] + Var(E[X|\Theta]),$$

où

$$\begin{aligned} E[Var(X|\Theta)] &= \sum_{j=1}^{m} Var(X|\Theta = \theta_j) \Pr(\Theta = \theta_j) \\ Var(E[X|\Theta]) &= E\left[(E[X|\Theta])^2\right] - E^2[E[X|\Theta]] \\ &= \sum_{j=1}^{m} (E(X|\Theta = \theta_j))^2 \Pr(\Theta = \theta_j) - \left(\sum_{j=1}^{m} E(X|\Theta = \theta_j) \Pr(\Theta = \theta_j)\right)^2 \end{aligned}$$

(d)

$$F_S(x) = \sum_{j=1}^{m} F_{S|\Theta=\theta_j}(x|\theta_j)\Pr(\Theta=\theta_j)$$

(e)

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1 + ... + X_n] \\ &= nE[X] \end{aligned}$$

car les variables aléatoires sont identiquement distribuées. (f)

$$Var(S) = E[Var(S|\Theta)] + Var(E[S|\Theta])$$

$$E[S|\Theta=\theta] = E[X_1 + ... + X_n|\Theta=\theta] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i|\Theta=\theta] = nE[X|\Theta=\theta],$$

étant donné que les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont identiquement distribuées. De plus,

$$Var(S|\Theta=\theta) = Var(X_1 + ... + X_n|\Theta=\theta) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i|\Theta=\theta),$$

étant donné que les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont conditionnellement indépendantes. Les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ étant aussi identiquement distribuées, on a

$$Var(S|\Theta=\theta) = nVar(X|\Theta=\theta).$$

Alors, pour des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ identiquement distribuées et $(X_1|\Theta=\theta), ..., (X_n|\Theta=\theta)$ conditionnellement indépendantes, on a

$$\begin{aligned} Var(S) &= E[Var(S|\Theta)] + Var(E[S|\Theta]) \\ &= E[nVar(X|\Theta)] + Var(nE[X|\Theta]) \\ &= nE[Var(X|\Theta)] + n^2 Var(E[X|\Theta]). \end{aligned}$$

Prendre note que $Var(S) >>> nVar(X) = n(E[Var(X|\Theta)] + Var(E[X|\Theta]))$. ■

Prenons le temps d'examiner le comportement du coût moyen par contrat, soit $W_n = \frac{S_n}{n}$, plus particulièrement le comportement de $Var(W_n)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Var(W_n) &= \lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} Var(S_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(nE[Var(X|\Theta)] + n^2 Var(E[X|\Theta])\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E[Var(X|\Theta)] + Var(E[X|\Theta]) \\ &= Var(E[X|\Theta]). \end{aligned}$$

Le terme $Var(E[X|\Theta])$ correspond à la portion du risque que l'on ne parvient pas à éliminer suite à la mutualisation des risques en présence d'un facteur aléatoire représentant les conditions environnementales.

Remarque 3.46 *La variance de S se décompose en 2 termes: composante attribuée au risque diversifiable $E[Var(S|\Theta)]$ et composante attribuée au risque non-diversifiable $Var(E[S|\Theta])$.*

Remarque 3.47 *Le défi de l'évaluation de*

$$F_S(x) = \sum_{j=1}^{m} F_{S|\Theta=\theta_j}(x|\theta_j)\Pr(\Theta=\theta_j)$$

réside dans l'évaluation de $F_{S|\Theta=\theta_j}(x|\theta_j)$. *Dans certains cas, on connait l'expression de* $F_{S|\Theta=\theta_j}(x|\theta_j)$, *fonction de répartition d'une somme de variables aléatoires conditionnellement indépendantes. Sinon, on utilise des méthodes d'approximation pour évaluer* $F_{S|\Theta=\theta_j}(x|\theta_j)$ *pour chaque* j.

Exemple 3.48 *On considère un portefeuille d'assurance temporaire 1 an dans une certaine région exposée à des catastrophes climatiques. On désigne par* Θ *une variable aléatoire représentant les conditions climatiques pour l'année. On suppose* $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ *où* θ_1 *correspond à des conditions climatiques normales et* θ_2 *correspond à des conditions climatiques anormales. De plus, on a*

$$\Pr(\Theta=\theta_j) = \begin{cases} 0.8, & j=1 \\ 0.2, & j=2. \end{cases}$$

Sachant que $\Theta=\theta_j$, *on suppose que les variables aléatoires* $(I_1|\Theta=\theta_j), ..., (I_n|\Theta=\theta_j)$ *sont conditionnellement indépendantes et* $(I_i|\Theta=\theta_j) \sim Bern(\beta^{(j)})$ *où* $\beta^{(1)}=0.001$ *et* $\beta^{(2)}=0.01$. *(a) Trouver la fonction de masse de probabilité de* I_i. *(b) Trouver* $E[X_i]$ *et* $Var[X_i]$. *(c) Trouver* $E[S]$. *(d) Trouver* $Var(S)$. *(e) Trouver* $\Pr(S=k\times b)$. *(f) À l'aide de l'approximation normale, trouver* $\Pr(S>REV)$ *si la prime par contrat est la prime pure majorée de 20%.*

Solution. (a)

$$\begin{aligned} \Pr(I_i &= 1) = \Pr\left(I_i=1\left|\Theta=\theta^{(1)}\right.\right)\Pr(\Theta=\theta^{(1)}) + \Pr(I_i=1\left|\Theta=\theta^{(2)}\right.)\Pr(\Theta=\theta^{(2)}) \\ &= (0.001)(0.8)+(0.01)(0.2) \\ &= 0.0028 \\ &= q,\ \forall i. \end{aligned}$$

$$\Pr(I_i=0) = 1-q = 0.9978,\ \forall i.$$

(b)

$$\begin{aligned} E[X_i] &= bE[I_i] \\ &= 0.0028b,\ \forall i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X_i) &= b^2 Var(I_i) \\ &= b^2(0.0028)(1-0.0028) \\ &= 0.002792b^2,\ \forall i. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1+...+X_n] \\ &= nE[X_i] \\ &= (n)(0.0028b). \end{aligned}$$

Prendre note que la relation de dépendance entre $I_1, ..., I_n$ n'a aucun impact sur $E[S]$. (d)

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(X_1+...+X_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n} Cov(X_i, X_k). \end{aligned}$$

On doit donc trouver la covariance entre deux risques, soit $Cov(X_i, X_k)$, $i \neq k$. On propose deux approches pour obtenir cette covariance. Selon l'approche no.1, on utilise la définition de base de la covariance et on conditionne sur la variable aléatoire Θ pour trouver l'espérance du produit ayant déjà trouvé $E[X_i]$. On a

$$\begin{aligned} E[X_i X_k] &= E[bI_i bI_k] \\ &= b^2 E[I_i I_k], \end{aligned}$$

où

$$E[I_i I_k] = \sum_{i_i=0}^{1} \sum_{i_k=0}^{1} i_i i_k \Pr(I_i = i_i, I_k = i_k).$$

Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes alors $\Pr(I_i = i_i, I_k = i_k) \neq \Pr(I_i = i_i) \times \Pr(I_k = i_k)$. On doit conditionner sur le facteur commun représentant les conditions climatiques, c'est-à-dire sur la variable aléatoire de mélange Θ:

$$\begin{aligned} \Pr(I_i &= i_i, I_k = i_k) = \sum_{j=1}^{2} \Pr(I_i = i_i, I_k = i_k \,|\Theta = \theta_j\,) \Pr(\Theta = \theta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \Pr(I_i = i_i \,|\Theta = \theta_j\,) \Pr(I_k = i_k \,|\Theta = \theta_j\,) \Pr(\Theta = \theta_j) \end{aligned}$$

car les variables aléatoires $(I_1 \,|\Theta = \theta_j\,), ..., (I_n \,|\Theta = \theta_j\,)$ sont conditionnellement indépendantes. Alors,

$$\begin{aligned} \Pr(I_i &= 0, I_k = 0) = \Pr(I_i = 0, I_k = 0 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 0, I_k = 0 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= \Pr(I_i = 0 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(I_k = 0 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 0 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(I_k = 0 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= (0.999)(0.999)(0.8) + (0.99)(0.99)(0.2) \\ &= 0.9944208. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_i &= 0, I_k = 1) = \Pr(I_i = 0, I_k = 1 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 0, I_k = 1 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= \Pr(I_i = 0 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(I_k = 1 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 0 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(I_k = 1 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= (0.999)(0.001)(0.8) + (0.99)(0.01)(0.2) \\ &= 0.0027792. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_i &= 1, I_k = 0) = \Pr(I_i = 1, I_k = 0 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 1, I_k = 0 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= \Pr(I_i = 1 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(I_k = 0 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 1 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(I_k = 0 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= (0.001)(0.999)(0.8) + (0.01)(0.99)(0.2) \\ &= 0.0027792. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(I_i &= 1, I_k = 1) = \Pr(I_i = 1, I_k = 1 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 1, I_k = 1 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= \Pr(I_i = 1 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(I_k = 1 \,|\Theta = \theta_1\,) \Pr(\Theta = \theta_1) + \Pr(I_i = 1 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(I_k = 1 \,|\Theta = \theta_2\,) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= (0.001)(0.001)(0.8) + (0.01)(0.01)(0.2) \\ &= 0.0000208. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} E[I_i I_k] &= (0)(0)(0.9944208) + (0)(1)(0.0027792) + (1)(0)(0.0027792) + (1)(1)(0.0000208) \\ &= 0.0000208 \end{aligned}$$

et par conséquent on a

$$\begin{aligned}
Cov(X_i, X_k) &= E[X_i X_k] - E[X_i] E[X_k] \\
&= b^2 E[I_i I_k] - (0.0028b)^2 \\
&= 0.0000208b^2 - (0.0028b)^2 \\
&= 0.00001296b^2.
\end{aligned}$$

Selon l'approche no.2, on conditionne par rapport à la variable aléatoire Θ directement sur la covariance entre les variables aléatoires de Bernoulli, soit

$$\begin{aligned}
Cov(X_i, X_k) &= Cov(bI_i, bI_k) \\
&= b^2 Cov(I_i, I_k) \\
&= b^2 \left(Cov(E[I_i | \Theta], E[I_k | \Theta]) + E[Cov(I_i, I_k | \Theta)] \right)
\end{aligned}$$

où $Cov(I_i, I_k | \Theta) = 0$ car $(I_1 | \Theta = \theta_j), ..., (I_n | \Theta = \theta_j)$ sont conditionnellement indépendantes. On sait que

$$(I_i | \Theta = \theta_j) \sim Bern(\beta^{(j)}) \text{ où } \beta^{(1)} = 0.001 \text{ et } \beta^{(2)} = 0.01,$$

et

$$\Pr(\Theta = \theta_j) = \begin{cases} 0.8, & j = 1 \\ 0.2, & j = 2. \end{cases}$$

Alors, $E[I_i | \Theta = \theta_j] = \beta^{(j)} = h(\theta_j)$ pour $j = 1, 2$ et donc $E[I_i | \Theta] = h(\Theta)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
Cov(I_i, I_k) &= b^2 Cov(h(\Theta), h(\Theta)) \\
&= b^2 Var(h(\Theta)) \\
&= b^2 \left(E\left[h^2(\Theta)\right] - E^2[h(\Theta)] \right) \\
&= b^2 \left(\left(\beta^{(1)}\right)^2 (0.8) + \left(\beta^{(2)}\right)^2 (0.2) - \left(\left(\beta^{(1)}\right)(0.8) + \left(\beta^{(2)}\right)(0.2)\right)^2 \right) \\
&= b^2 \left((0.001)^2 (0.8) + (0.01)^2 (0.2) - ((0.001)(0.8) + (0.01)(0.2))^2 \right) \\
&= 0.00001296b^2.
\end{aligned}$$

Pour conclure, on a

$$\begin{aligned}
Var(S) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} Cov(X_i, X_k) \\
&= nVar(X_1) + n(n-1) Cov(X_1, X_2) \\
&= (n) \left(0.002792b^2\right) + n(n-1) \left(0.00001296b^2\right).
\end{aligned}$$

(e) On a $S = bN$ où $N = I_1 + ... + I_n$ est une somme de variables aléatoires identiquement distribuées mais qui ne sont pas indépendantes. Alors,

$$\begin{aligned}
\Pr(S &= kb) = \Pr(bN = kb) \\
&= \Pr(N = k) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \Pr(I_1 + I_2 + ... + I_n = k | \Theta = \theta_j) \Pr(\Theta = \theta_j)
\end{aligned}$$

où $(I_1 + ... + I_n |\Theta = \theta_j)$ est une somme de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $\beta^{(j)}$ qui sont indépendantes et identiquement distribuées. Ainsi, on a $(I_1+...+I_n |\Theta = \theta_j) \sim Bin(n, \beta^{(j)})$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\Pr(S &= kb) = \Pr(N = k)\\ &= \sum_{j=1}^{2} \Pr(N = k |\Theta = \theta_j) \Pr(\Theta = \theta_j)\\ &= \sum_{j=1}^{2} \binom{n}{k} (\beta^{(j)})^k (1 - \beta^{(j)})^{n-k} \Pr(\Theta = \theta_j).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(S &= 0) = (1 - \beta^{(1)})^n (0.8) + (1 - \beta^{(2)})^n (0.2)\\ &= (1 - 0.001)^n (0.8) + (1 - 0.01)^n (0.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(S &= b) = \Pr(N = 1)\\ &= \sum_{j=1}^{2} \binom{n}{1} (\beta^{(j)})^k (1 - \beta^{(j)})^{n-1} \Pr(\Theta = \theta_j)\\ &= \binom{n}{1} (\beta^{(1)})^k (1 - \beta^{(1)})^{n-1} (0.8) + \binom{n}{1} (\beta^{(2)})^k (1 - \beta^{(2)})^{n-1} (0.2)\\ &= \binom{n}{1} (0.001)^k (1 - 0.001)^{n-1} (0.8) + \binom{n}{1} (0.01)^k (1 - 0.01)^{n-1} (0.2)\\ &= (1 - 0.001)^n (0.8) + (1 - 0.01)^n (0.2).\end{aligned}$$

Même chose pour $k = 2, 3, ...$(f) On fixe la prime égale à $\Pi = 1.2E[S]$ et l'on veut trouver $\Pr(S > REV) = 1 - \Pr(S \leq REV)$. Pour ce faire, on doit appliquer l'approximation normale correctement, c'est-à-dire sur des variables aléatoires indépendantes. On sait que

$$\Pr(S \leq REV) = \sum_{j=1}^{2} \Pr(S \leq REV |\Theta = \theta_j) \Pr(\Theta = \theta_j)$$

où $(S |\Theta = \theta_j)$ est une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Alors,

$$\Pr(S \leq REV |\Theta = \theta_1) = \Pr\left(\frac{(S |\Theta = \theta_1) - E[S |\Theta = \theta_1]}{\sqrt{Var(S |\Theta = \theta_1)}} \leq \frac{(REV |\Theta = \theta_1) - E[S |\Theta = \theta_1]}{\sqrt{Var(S |\Theta = \theta_1)}}\right)$$

où $(REV |\Theta = \theta_1) = 1.2E[S |\Theta = \theta_1]$ et

$$\begin{aligned}E[S |\Theta = \theta_1] &= E[X_1 + ... + X_n |\Theta = \theta_1]\\ &= nE[X_1 |\Theta = \theta_1]\\ &= (n)(b) E[I |\Theta = \theta_1]\\ &= (n)(b) \left(\beta^{(1)}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(S |\Theta = \theta_1) &= Var(X_1 + ... + X_n |\Theta = \theta_1)\\ &= nVar(X_1 |\Theta = \theta_1)\\ &= (n) \left(b^2\right) Var(I |\Theta = \theta_1)\\ &= (n) \left(b^2\right) \left(\beta^{(1)}\right) (1 - \beta^{(1)}).\end{aligned}$$

Également,

$$\Pr(S \leq REV \, |\Theta = \theta_2\,) = \Pr\left(\frac{(S\,|\Theta = \theta_2\,) - E\left[S\,|\Theta = \theta_2\,\right]}{\sqrt{Var(S\,|\Theta = \theta_2\,)}} \leq \frac{(REV\,|\Theta = \theta_2\,) - E\left[S\,|\Theta = \theta_2\,\right]}{\sqrt{Var(S\,|\Theta = \theta_2\,)}}\right)$$

où $(REV\,|\Theta = \theta_2\,) = 1.2E\left[S\,|\Theta = \theta_2\,\right]$ et

$$\begin{aligned} E\left[S\,|\Theta = \theta_2\,\right] &= E\left[X_1 + ... + X_n\,|\Theta = \theta_2\,\right] \\ &= nE\left[X_1\,|\Theta = \theta_2\,\right] \\ &= (n)\,(b)\,E\left[I\,|\Theta = \theta_2\,\right] \\ &= (n)\,(b)\,\beta^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\,(S\,|\Theta = \theta_2\,) &= Var\,(X_1 + ... + X_n\,|\Theta = \theta_2\,) \\ &= nVar\,(X_1\,|\Theta = \theta_2\,) \\ &= (n)\left(b^2\right)Var\,(I\,|\Theta = \theta_2\,) \\ &= (n)\left(b^2\right)\left(\beta^{(2)}\right)(1 - \beta^{(2)}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\Pr(S \leq REV\,|\Theta = \theta_1\,) = \Phi\left(\frac{(S\,|\Theta = \theta_1\,) - (n)\,(b)\left(\beta^{(1)}\right)}{\sqrt{(n)\,(b^2)\left(\beta^{(1)}\right)(1 - \beta^{(1)})}}\right)$$

$$\Pr(S \leq REV\,|\Theta = \theta_2\,) = \Phi\left(\frac{(S\,|\Theta = \theta_2\,) - (n)\,(b)\left(\beta^{(2)}\right)}{\sqrt{(n)\,(b^2)\left(\beta^{(2)}\right)(1 - \beta^{(2)})}}\right)$$

et pour terminer

$$\Pr(S \leq REV) = \alpha_1\Phi\left(\frac{(S\,|\Theta = \theta_1\,) - (n)\,(b)\left(\beta^{(1)}\right)}{\sqrt{(n)\,(b^2)\left(\beta^{(1)}\right)(1 - \beta^{(1)})}}\right) + \alpha_2\Phi\left(\frac{(S\,|\Theta = \theta_2\,) - (n)\,(b)\left(\beta^{(2)}\right)}{\sqrt{(n)\,(b^2)\left(\beta^{(2)}\right)(1 - \beta^{(2)})}}\right).$$

■

Exemple 3.49 *Soit un portefeuille de* 2000 *contrats d'assurance dont les coûts sont définis par les variables aléatoires* $X_1, ..., X_{2000}$. *Les conditions environnementales affectant le portefeuille sont définies par la variable aléatoire de mélange* $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ *avec* $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.7$ *et* $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.3$. *Pour* $\Theta = \theta_j$, *on a* $(X_i\,|\Theta = \theta_j\,) \sim PoisComp\left(\lambda_i^{(j)}, F_{B_i}\right)$. *On dispose des données suivantes pour les contrats* $i = 1, ..., 1000$*:*

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(j)} &= 0.02\left(j^2\right),\ \textit{pour } j = 1, 2. \\ B_i &\sim LN\,(\mu = 2; \sigma = 0.9)\,,\ \textit{pour } j = 1, 2. \end{aligned}$$

alors que pour les contrats $i = 1001, ..., 2000$, *on a*

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(j)} &= 0.05\left(j^2\right),\ \textit{pour } j = 1, 2. \\ B_i &\sim LN\,(\mu = 2; \sigma = 0.8)\,,\ \textit{pour } j = 1, 2. \end{aligned}$$

On définit le coût total pour la portefeuille par la variable aléatoire $S = X_1 + ... + X_n$. *(a) Évaluer* $E[S]$. *(b) Évaluer* $Var\,(S)$. *(c) Utiliser l'approximation normale pour évaluer* $F_S(x)$.

Solution. (a)

$$\begin{aligned} E[S] &= E[X_1 + ... + X_{2000}] \\ &= E[X_1 + ... + X_{1000} | \Theta = \theta_1] \Pr(\Theta = \theta_1) + E[X_1 + ... + X_{2000} | \Theta = \theta_2] \Pr(\Theta = \theta_2) \end{aligned}$$

Pour $\Theta = \theta_1$, on a

$$E[X_i | \Theta = \theta_1] = \begin{cases} (0.02)\, \mathrm{e}^{2+\frac{(0.9)^2}{2}} = 0.22157, & i = 1, ..., 1000 \\ (0.05)\, \mathrm{e}^{2+\frac{(0.8)^2}{2}} = 0.50878, & i = 1001, ..., 2000 \end{cases}$$

et pour $\Theta = \theta_2$, on a

$$E[X_i | \Theta = \theta_2] = \begin{cases} (0.08)\, \mathrm{e}^{2+\frac{(0.9)^2}{2}} = 0.88627, & i = 1, ..., 1000 \\ (0.2)\, \mathrm{e}^{2+\frac{(0.8)^2}{2}} = 2.0351, & i = 1001, ..., 2000. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} E[S] &= ((1000)(0.22157) + (1000)(0.50878))(0.7) + ((1000)(0.88627) + (1000)(2.0351))(0.3) \\ &= 1387.7. \end{aligned}$$

(b) Pour $B_i \sim LN(\mu = 2; \sigma = 0.9)$, on a

$$\begin{aligned} E[B_i] &= \mathrm{e}^{2+\frac{(0.9)^2}{2}} = 11.078 \\ Var(B_i) &= \mathrm{e}^{2(2)+(0.9)^2} \left(\mathrm{e}^{(0.9)^2} - 1\right) = 153.16 \end{aligned}$$

Pour $B_i \sim LN(\mu = 2; \sigma = 0.8)$, on a

$$\begin{aligned} E[B_i] &= \mathrm{e}^{2+\frac{(0.8)^2}{2}} = 10.176 \\ Var(B_i) &= \mathrm{e}^{2(2)+(0.8)^2} \left(\mathrm{e}^{(0.8)^2} - 1\right) = 92.826. \end{aligned}$$

$$Var(S) = E[Var(S|\Theta)] + Var(E[S|\Theta])$$

$$\begin{aligned} Var(S | \Theta = \theta_1) &= Var(X_1 + ... + X_{2000} | \Theta = \theta_1) \\ &= Var(X_1 + ... + X_{1000} | \Theta = \theta_1) + Var(X_{1001} + ... + X_{2000} | \Theta = \theta_1) \\ &= (1000)(0.02)\left(153.16 + (11.078)^2\right) + (1000)(0.05)\left(92.826 + (10.176)^2\right) \\ &= 15336 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(S | \Theta = \theta_2) &= Var(X_1 + ... + X_{2000} | \Theta = \theta_2) \\ &= Var(X_1 + ... + X_{1000} | \Theta = \theta_2) + Var(X_{1001} + ... + X_{2000} | \Theta = \theta_2) \\ &= (1000)(0.08)\left(153.16 + (11.078)^2\right) + (1000)(0.2)\left(92.826 + (10.176)^2\right) \\ &= 61346 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Var(S|\Theta)] &= Var(S | \Theta = \theta_1) \Pr(\Theta = \theta_1) + Var(S | \Theta = \theta_2) \Pr(\Theta = \theta_2) \\ &= (15336)(0.7) + (61346)(0.3) \\ &= 29139 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[S|\Theta=\theta_1] &= E[X_1+...+X_{2000}|\Theta=\theta_1] \\
&= E[X_1+...+X_{1000}|\Theta=\theta_1]+E[X_{1001}+...+X_{2000}|\Theta=\theta_1] \\
&= (1000)(0.02)(11.078)+(1000)(0.05)(10.176) \\
&= 730.36
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[S|\Theta=\theta_2] &= E[X_1+...+X_{2000}|\Theta=\theta_2] \\
&= E[X_1+...+X_{1000}|\Theta=\theta_2]+E(X_{1001}+...+X_{2000}|\Theta=\theta_2) \\
&= (1000)(0.08)(11.078)+(1000)(0.2)(10.176) \\
&= 2921.4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(E[S|\Theta]) &= E\left[(E[S|\Theta])^2\right]-E^2[E[S|\Theta]] \\
&= \left((730.36)^2(0.7)+(2921.4)^2(0.3)\right)-(1387.7)^2 \\
&= 1.0081\times 10^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(S) &= E[Var(S|\Theta)]+Var(E[S|\Theta]) \\
&= 29139+1.0081\times 10^6 \\
&= 1.0372\times 10^6
\end{aligned}$$

(c)

$$F_S(x)=\Pr(S\le x|\Theta=\theta_1)\Pr(\Theta=\theta_1)+\Pr(S\le x|\Theta=\theta_2)\Pr(\Theta=\theta_2)$$

$$\Pr(S\le x|\Theta=\theta_1)=\Phi\left(\frac{(S|\Theta=\theta_1)-730.36}{\sqrt{15336}}\right)$$

$$\Pr(S\le x|\Theta=\theta_2)=\Phi\left(\frac{(x|\Theta=\theta_2)-2921.4}{\sqrt{61346}}\right)$$

$$F_S(x)=\Phi\left(\frac{x-730.36}{\sqrt{15336}}|\Theta=\theta_1\right)(0.7)+\Phi\left(\frac{x-2921.4}{\sqrt{61346}}|\Theta=\theta_2\right)(0.3)$$

■

Exemple 3.50 *Soit un portefeuille de n contrats d'assurance dont les coûts sont définis par les variables aléatoires $X_1,...,X_n$. Les conditions environnementales affectant le portefeuille sont définies par la variable aléatoire $\Theta\in\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$. On suppose que si $\Theta=\theta_j$, alors*

$$X_i\sim Gamma\left(\alpha=2,\beta=\frac{1}{1000j^2}\right),\ j=1,2,3.$$

On définit $S=X_1+...+X_n$ où

$$F_S(x)=\sum_{j=1}^{3}H\left(x;2n,\frac{1}{1000j^2}\right)\Pr(\Theta=\theta_j)$$

avec

$$\begin{aligned}
\Pr(\Theta=\theta_1) &= 0.5 \\
\Pr(\Theta=\theta_2) &= 0.4 \\
\Pr(\Theta=\theta_3) &= 0.1.
\end{aligned}$$

On définit $W_n=\frac{S}{n}$. (a) Tracer $F_{W_n}(x)$ pour $n=1,10,100,1000,10000$. (b) Calculer $VaR_\kappa(W_n)$ pour $n=1,10,100,1000,10000$ et $\kappa=0.99$. (c) Calculer $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $n=1,10,100,1000,10000$ et $\kappa=0.99$.

Chapitre 4

Méthodes de simulation stochastique

4.1 Introduction

L'utilisation des méthodes fondées sur la simulation stochastique est fondamental au travail d'un actuaire. Celles-ci permettent de faire des calculs complexes lorsqu'il est impossible d'obtenir des résultats explicites ou d'utiliser des méthodes numériques. Les méthodes basées sur la simulation, qui requièrent l'utilisation d'un ordinateur, sont fondées sur l'utilisation d'un générateur de nombre pseudo-aléatoire (GNPA), voir *Marceau (2013)*, pages 181-182 pour plus de détails.

4.2 Méthode inverse

On dispose d'un générateur de nombre pseudo-aléatoire pouvant produire une réalisation $U^{(j)}$ d'une variable aléatoire uniforme $U \sim U\left(0,1\right)$. On veut produire une réalisation d'une variable aléatoire X avec fonction de répartition F_X et fonction de répartition inverse F_X^{-1}. Pour utiliser la méthode inverse, la fonction de répartition inverse F_X^{-1} se doit d'avoir une forme analytique. À noter que souvent, les fonctions inverses sont déjà programmées dans différents langages informatiques, et ce même pour les lois normale et gamma qui n'ont pas de fonction quantile analytique. De plus, en R ou en Excel, on peut utiliser les fonctions préprogrammées pour simuler des réalisations pour les lois discrètes Poisson, binomiale, binomiale négative et les lois continues exponentielle, gamma, normale, lognormale. La procédure pour obtenir une réalisation $X^{(j)}$ de la variable aléatoire X est la suivante:

1. Produire une réalisation $U^{(j)}$ d'une variable aléatoire $U \sim Unif\left(0.1\right)$.

2. Obtenir une réalisation de la variable aléatoire X avec $X^{(j)} = F_X^{-1}\left(U^{(j)}\right)$.

Exemple 4.1 *Soit $X \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$. On a obtenu les 3 réalisations suivantes de $U \sim U\left(0,1\right)$: $U^{(1)} = 0.242$, $U^{(2)} = 0.761$, $U^{(3)} = 0.809$. Produire 3 réalisations de la variable aléatoire X.*

Solution. On cherche le x^* tel que $F_X(x^*) = u$

$$\begin{aligned} F_X(x^*) &= 1 - \mathrm{e}^{-\beta x^*} = u \\ \mathrm{e}^{-\beta x^*} &= 1 - u \\ -\beta x^* &= \ln(1-u) \\ x^* &= \frac{-1}{\beta}\ln(1-u) = F_X^{-1}(u). \end{aligned}$$

Alors, les 3 réalisations de la variable aléatoire X sont

j	$U^{(j)}$	$X^{(j)}$
1	0.242	$-\frac{1}{\left(\frac{1}{1000}\right)}\ln(1-0.242) = 277.07$
2	0.761	$-1000\ln(1-0.761) = 1431.3$
3	0.809	$-1000\ln(1-0.809) = 1655.5.$

■

Exemple 4.2 *Soit X une variable aléatoire où*

$$X = \begin{cases} B, & I = 1 \\ 0, & I = 0, \end{cases}$$

où $I \sim Bern(0.2)$ et $B \sim LN(\mu = 10, \sigma = 1)$. On suppose que les variables aléatoires I et B sont indépendantes. À l'aide des mêmes réalisations de la variable aléatoire U que dans l'Exemple 4.1, produire 3 réalisations de la variable aléatoire X.

Solution. On a

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$$

et

$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & 0 < u \leq 1-q \\ F_B^{-1}\left(\frac{u-(1-q)}{q}\right), & 1-q < u \leq 1. \end{cases}$$

Étant donné les deux premières réalisations de U, soit $U^{(1)}$ et $U^{(2)}$, on obtient $X^{(1)} = 0$ et $X^{(2)} = 0$. Pour la 3ième réalisation de la variable aléatoire X, on a

$$\begin{aligned} X^{(3)} &= F_B^{-1}\left(\frac{0.809-(1-0.2)}{0.2}\right) \\ &= F_B^{-1}(0.045), \end{aligned}$$

où $B = e^Y$ où $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. On doit donc trouver le x^* tel que $F_B(x^*) = 0.045$.

$$\begin{aligned} F_B(x^*) &= \Pr(B \leq x^*) \\ &= \Pr(\ln B \leq \ln x^*) \\ &= \Pr(Y \leq \ln x^*), \text{ où } Y \sim N(\mu, \sigma^2) \\ &= \Pr\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln x^* - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr(Z \leq z) \text{ où } Z \sim N(0,1) \text{ et } z = \frac{\ln x^* - \mu}{\sigma} \\ &= 0.045. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} F_B^{-1}(0.045) &= x^* \\ &= e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.045)} \\ &= e^{10+(-1.6954)} \\ &= 4042. \end{aligned}$$

En résumé, on obtient:

j	$U^{(j)}$	$X^{(j)}$
1	0.242	0
2	0.761	0
3	0.809	4042

■

4.3 Simulation d'une somme finie de v.a indépendantes

Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes avec fonction de répartition F_{X_i} et fonction de répartition inverse $F_{X_i}^{-1}$, $i = 1, ..., n$. On définit la variable aléatoire $S = X_1 + ... + X_n$. Généralement, on ne connaît pas F_S et l'on est intéressé à approximer F_S ou toute autre mesure qui en découle. On veut utiliser la simulation plutôt que l'approximation normale pour approximer ces quantités. La procédure est la suivante pour simuler des réalisations de la variable aléatoire S:

1. On simule les réalisations $U_1^{(j)}$,...,$U_n^{(j)}$ des variabless aléatoires indépendantes $U_1 \sim Unif\,(0,1)$,..., $U_n \sim Unif\,(0,1)$.
2. On produit les réalisations $X_1^{(j)}$,...,$X_n^{(j)}$ des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$:
$$X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right),\ i = 1, ..., n.$$
3. On produit la réalisation $S^{(j)}$ de S avec:
$$S^{(j)} = X_1^{(j)} + ... + X_n^{(j)}.$$
4. On répète cette procédure pour $j = 1, ..., n_{sim}$.

Exemple 4.3 *Soit les variables aléatoires* $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$, $X_2 \sim Pareto\,(\alpha = 3, \lambda = 2000)$ *et* $X_3 \sim LN\,(\mu = 8, \sigma = 1)$. *On définit* $S = X_1 + X_2 + X_3$. *On dispose des réalisations suivantes des variables aléatoires indépendantes* U_1, U_2, *et* U_3 *où* $U_i \sim Unif\,(0,1)$*:*

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$U_3^{(j)}$
1	0.541	0.906	0.442
2	0.603	0.269	0.339
3	0.272	0.569	0.717

Produire 3 réalisations de la variable aléatoire S.

Solution. Pour la variable aléatoire X_1, on a les trois réalisations suivantes:

$$\begin{aligned}
X_1^{(1)} &= \frac{-1}{\beta}\ln(1 - U_1^{(1)}) = -1000\ln(1 - 0.541) = 778.71 \\
X_1^{(2)} &= \frac{-1}{\beta}\ln(1 - U_1^{(2)}) = -1000\ln(1 - 0.603) = 923.82 \\
X_1^{(3)} &= \frac{-1}{\beta}\ln(1 - U_1^{(3)}) = -1000\ln(1 - 0.272) = 317.45
\end{aligned}$$

Pour simuler des réalisations de la variable aléatoire X_2, on doit trouver le x^* tel que $F_{X_2}(x^*) = u$.

$$\begin{aligned}
F_{X_2}(x^*) &= \Pr(X_2 \leq x^*) \\
&= 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^*}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\lambda}{\lambda + x^*}\right)^{\alpha} &= 1 - u \\
\left(\frac{\lambda}{\lambda + x^*}\right) &= (1 - u)^{\frac{1}{\alpha}} \\
x^* &= \lambda\left(\frac{1}{(1 - u)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right).
\end{aligned}$$

On a donc les trois réalisations suivantes de la variable aléatoire X_2:

$$\begin{aligned}
X_2^{(1)} &= \lambda\left(\frac{1}{\left(1-U^{(1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}-1\right)=2000\left(\frac{1}{(1-0.906)^{\frac{1}{3}}}-1\right)=2398.7\\
X_2^{(2)} &= \lambda\left(\frac{1}{\left(1-U^{(2)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}-1\right)=2000\left(\frac{1}{(1-0.269)^{\frac{1}{3}}}-1\right)=220.19\\
X_2^{(3)} &= \lambda\left(\frac{1}{\left(1-U^{(3)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}-1\right)=2000\left(\frac{1}{(1-0.569)^{\frac{1}{3}}}-1\right)=647.71.
\end{aligned}$$

Pour les réalisations de X_3, on a, étant donné l'exemple précédent,

$$\begin{aligned}
X_3^{(1)} &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}\left(U^{(1)}\right)}=\mathrm{e}^{8+\Phi^{-1}(0.442)}=\mathrm{e}^{8+(-0.1459)}=2576.28\\
X_3^{(2)} &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}\left(U^{(2)}\right)}=\mathrm{e}^{8+\Phi^{-1}(0.339)}=\mathrm{e}^{8+(-0.4152)}=1968.05\\
X_3^{(3)} &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}\left(U^{(3)}\right)}=\mathrm{e}^{8+\Phi^{-1}(0.717)}=\mathrm{e}^{8+(0.5740)}=5292.26
\end{aligned}$$

On obtient donc les réalisations suivantes de la variable aléatoire S :

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$U_3^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$X_3^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	0.541	0.906	0.442	778.71	2398.7	2576.28	5753.89
2	0.603	0.269	0.339	923.82	220.19	1968.05	3112.06
3	0.272	0.569	0.717	317.45	647.71	5292.26	6257.42

■

Remarque 4.4 *On approxime $F_S(x)=\Pr(S\leq x)$ par*

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_S(x) &= \frac{\#\ de\ S^{(j)}\leq x}{n_{sim}}\\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n_{sim}} 1_{(-\infty,x]}S^{(j)}}{n_{sim}}.
\end{aligned}$$

On peut montrer que $\widetilde{F}_S(x)\to F_S(x)$ lorsque $n_{sim}\to\infty$.

Exemple 4.5 *Soit une variable aléatoire $S=X_1+X_2$ où*

$$\begin{aligned}
X_1 &\sim Exp\left(\beta=\frac{1}{100}\right)\\
X_2 &\sim Pareto\,(\alpha=2.5,\lambda=300)\,.
\end{aligned}$$

Approximer $F_S(x)$ pour $x=100,150,200,250,300,550$ par simulation à l'aide des réalisations uniformes suivantes:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$
1	0.734	0.217
2	0.592	0.192
3	0.901	0.831
4	0.471	0.562
5	0.394	0.743

Solution. On a

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{100}} \\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{100}} &= 1 - F_{X_1}(x) \\ \frac{-x}{100} &= \ln(1 - F_{X_1}(x)) \\ x &= -100\ln(1 - F_{X_1}(x)) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$X_1 = -100\ln(1 - U_1),$$

où $U_1 \sim Unif(0,1)$. De façon similaire,

$$\begin{aligned} F_{X_2}(x) &= 1 - \left(\frac{300}{300+x}\right)^{2.5} = u \\ \left(\frac{300}{300+x}\right)^{2.5} &= 1 - u \\ \frac{300}{300+x} &= (1-u)^{\frac{1}{2.5}} \\ 300 + x &= \frac{300}{(1-u)^{\frac{2}{5}}} \\ x &= \frac{300}{(1-u)^{\frac{2}{5}}} - 300 \\ &= 300\left(\frac{1}{(1-u)^{\frac{2}{5}}} - 1\right) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$X_2 = 300\left(\frac{1}{(1-U_2)^{\frac{2}{5}}} - 1\right)$$

où $U_2 \sim Unif(0,1)$. On obtient les réalisations suivantes lors de la simulation:

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)} = -100\ln(1-U_1^{(j)})$	$X_2^{(j)} = 300\left(\frac{1}{\left(1-U_2^{(j)}\right)^{\frac{2}{5}}} - 1\right)$	$S^{(j)} = X_1^{(j)} + X_2^{(j)}$
1	0.734	0.217	132.43	30.84	163.27
2	0.592	0.192	89.65	26.71	116.36
3	0.901	0.831	231.26	310.90	542.16
4	0.471	0.562	63.68	117.38	181.06
5	0.394	0.743	50.09	216.59	266.68

Avec les simulations ci-dessus, on obtient l'approximation suivante de F_S par $F_{\widetilde{S}}$:

x	$F_{\widetilde{S}}(x)$
100	0
150	$\frac{1}{5}$
200	$\frac{3}{5}$
250	$\frac{3}{5}$
300	$\frac{4}{5}$
550	1

■

Remarque 4.6 *La précision de l'approximation s'améliore avec le nombre de simulations.*

On peut aussi définir de façon plus générale $S = g(X_1, ..., X_n)$ qui est une fonction de $X_1, ..., X_n$. Pour produire une réalisation $S^{(j)}$ de S on a qu'à faire une simple modification à l'étape (3) où $S^{(j)} = g(X_1, ..., X_n)$.

4.4 Somme aléatoire de v.a indépendantes

Soit X une variable aléatoire définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, \; M > 0 \\ 0, \; M = 0. \end{cases}$$

On suppose que $\{B_1, B_2, ...\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées comme la variable aléatoire canonique B. De plus, on suppose que $\{B_1, B_2, ...\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes de la variable aléatoire de fréquence M.

Généralement, on n'obtient pas une expression explicite pour F_X et évidemment également pour F_X^{-1}. On ne peut donc utiliser directement la méthode inverse pour obtenir une réalisation de la variable aléatoire X. Voici la procédure pour simuler des réalisations $X^{(j)}$ de X:

1. On simule une réalisation $M^{(j)}$ de M.
2. Si $M^{(j)} = 0$, alors $X^{(j)} = 0$ et on passe à l'étape (4).
3. Si $M^{(j)} > 0$, alors
   (a) On simule des réalisations $B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, ..., B_{M^{(j)}}^{(j)}$ de $B_1, B_2, ..., B_{M^{(j)}}$
   (b) On calcule $X^{(j)} = B_1^{(j)} + ... + B_{M^{(j)}}^{(j)}$
4. On répète pour $j = 1, 2, ..., n_{sim}$.

Exemple 4.7 *Soit X une variable aléatoire définie par*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, \; M > 0 \\ 0, \; M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles. Supposons $M \sim Poisson(\lambda = 2)$ et $B \sim Pareto(\alpha = 2.5, \lambda = 1500)$. On a les réalisations suivantes de la variable aléatoire $U \sim Unif\,(0,1)$

j	$U^{(j)}$
1	*0.124*
2	*0.792*
3	*0.612*
4	*0.597*
5	*0.347*

Simuler 2 réalisations de $X^{(j)} = B_1^{(j)} + ... + B_{M^{(j)}}^{(j)}$.

Solution. On doit dans un premier temps simuler une réalisation de la variable aléatoire discrète M. Les étapes pour simuler une variable aléatoire discrète $X \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sont les suivantes: (1) Simuler une réalisation $U^{(j)}$ de $U \sim Unif(0,1)$. (2) Appliquer la transformation suivante avec $F_X^{-1}(u)$ définie par

$$X = F_X^{-1}(u) = \begin{cases} x_1, \text{ si } 0 \leq U \leq \Pr(X = x_1) \\ x_2, \text{ si } \Pr(X_1 = x_1) < U \leq \Pr(X = x_1) + \Pr(X = x_2) \\ \vdots \\ x_n, \text{ si } \Pr(X = x_1) < U \leq \Pr(X = x_1) + ... + \Pr(X = x_n) \end{cases}$$

Pour $M \sim Poisson(\lambda = 2)$, on a

$\Pr(M=0) = \mathrm{e}^{-2} = 0.1353$		$\Pr(M \leq 0) = 0.1353$
$\Pr(M=1) = 2\mathrm{e}^{-2} = 0.2707$		$\Pr(M \leq 1) = 0.4060$
$\Pr(M=2) = \frac{2^2\mathrm{e}^{-2}}{2!} = 0.2707$	$\Rightarrow$	$\Pr(M \leq 2) = 0.6767$
$\Pr(M=3) = \frac{2^3\mathrm{e}^{-2}}{3!} = 0.1804$		$\Pr(M \leq 3) = 0.8571$
$\Pr(M=4) = \frac{2^4\mathrm{e}^{-2}}{4!} = 0.0902$		$\Pr(M \leq 4) = 0.9473$
$\vdots$		$\vdots$

ce qui conduit aux résultats suivants lors de la simulation:

j	$U^{(j)}$	$M^{(j)}$	$X^{(j)}$
1	0.124	$M^{(1)} = 0$	$X^{(1)} = 0$

j	$U^{(j)}$	$M^{(j)}$	$B(j)$	
1	0.792	$M^{(2)} = 3$		$X^{(2)} = B_1^{(2)} + B_2^{(2)} + B_3^{(2)}$
2	0.612		$B_1^{(2)} = 1500\left(\frac{1}{(1-0.612)^{\frac{1}{2.5}}} - 1\right) = 657.58$	
3	0.597		$B_2^{(2)} = 1500\left(\frac{1}{(1-0.597)^{\frac{1}{2.5}}} - 1\right) = 657.58$	
4	0.347		$B_3^{(2)} = 1500\left(\frac{1}{(1-0.347)^{\frac{1}{2.5}}} - 1\right) = 657.58$	$X^{(2)} = 2138.81$

Les 2 réalisations de la variable aléatoire X sont donc $X^{(1)} = 0$ et $X^{(2)} = 2138.81$. ■

4.5 Lois définies par un mélange

Soit Θ une variable aléatoire continue ou discrète, dit la variable aléatoire du mélange avec fonction de répartition F_Θ et fonction inverse F_Θ^{-1}.

On suppose que la loi de X est définie en fonction de Θ où $F_{X|\Theta=\theta}$ est la fonction de répartition conditionnelle de X sachant que $\Theta = \theta$ et que $F_{X|\Theta=\theta}^{-1}$ est la fonction inverse de $F_{X|\Theta=\theta}$. On suppose également que l'on connait bien la forme de $F_{X|\Theta=\theta}$ et de $F_{X|\Theta=\theta}^{-1}$.

Si $\Theta \in \{\theta_1, ..., \theta_n\}$, alors l'expression de F_X est donnée par

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{n} F_{X|\Theta=\theta_k}(x) \Pr(\Theta = \theta_k).$$

Si Θ est une variable aléatoire continue, alors l'expression de F_X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|\Theta=\theta_k}(x) f(\theta) \, d\theta.$$

Très souvent, on n'a pas de forme analytique pour F_X^{-1},que Θ soit une variable aléatoire discrète ou continue. Alors, on a recours à la procédure suivante pour produire une réalisation de $X^{(j)}$ de X:

1. On simule une réalisation $\Theta^{(j)}$ par la méthode inverse c'est-à-dire
$$\Theta^{(j)} = F_\Theta^{-1}(U^{(j)}) \text{ où } U^{(j)} \text{ est une réalisation de } U \sim Unif(0,1).$$
2. Sachant $\Theta^{(j)}$, on simule une réalisation de X avec
$$X^{(j)} = F_{X|\Theta^{(j)}=\theta^{(j)}}^{-1}(V^{(j)}) \text{ où } V^{(j)} \text{ est une réalisation de } V \sim Unif(0,1).$$

Exemple 4.8 *Soit une variable aléatoire $\Theta \sim LN(\mu = -0.5, \sigma^2)$ telle que $E[\Theta] = 1$. Sachant que $\Theta = \theta$, on a $(M\,|\Theta = \theta) \sim Poisson(2\theta)$. Simuler 2 réalisations $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$ de la variable aléatoire M à l'aide des réalisations uniformes suivantes:*

j	$U^{(j)}$	$V^{(j)}$
1	0.147	0.317
2	0.941	0.304

Solution. On doit dans un premier temps trouver la valeur du paramètre σ de la loi lognormale car on a $\Theta \sim LN(\mu = -0.5, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} E[\Theta] &= \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = \mathrm{e}^{-0.5+\frac{\sigma^2}{2}} = 1 \\ &\Rightarrow -0.5 + \frac{\sigma^2}{2} = \ln(1) \\ &\Rightarrow \sigma^2 = 1 \text{ car } ln(1) = 0. \end{aligned}$$

Pour simuler une première réalisation de la variable aléatoire Θ, soit $\Theta^{(1)}$, on a

$$\Theta^{(1)} = \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}\left(U^{(1)}\right)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Theta^{(1)} &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(0.147)} \\ &= \mathrm{e}^{-0.5+1\times(-1.54939)} \\ &= 0.1288. \end{aligned}$$

Ainsi, on a que $(M^{(1)}\,\left|\Theta^{(1)} = 0.1288\right.) \sim Poisson\left((2)\,(0.1288) = 0.2576\right)$. On doit donc produire une réalisation d'une variable aléatoire Poisson de moyenne 0.2576 avec $F^{-1}_{M^{(1)}|\Theta=\theta}$. Pour cela, on doit trouver $F_{M^{(1)}|\Theta=\theta}$:

$$\begin{aligned} \Pr(M^{(1)} &= 0\left|\Theta^{(1)} = 0.1288\right.) = \mathrm{e}^{-0.2576} = 0.77288 \\ \Pr(M^{(1)} &= 1\left|\Theta^{(1)} = 0.1288\right.) = 0.2576\mathrm{e}^{-0.2576} = 0.19912 \\ \Pr(M^{(1)} &= 2\left|\Theta^{(1)} = 0.1288\right.) = \frac{(0.2576)^2\mathrm{e}^{-0.2576}}{2!} = 0.025649 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(M^{(1)} &\leq 0 \mid \Theta^{(1)} = 0.1288134) = 0.77288 \\ \Pr(M^{(1)} &\leq 1 \mid \Theta^{(1)} = 0.1288134) = 0.972 \end{aligned}$$

Étant donné la réalisation $V^{(1)} = 0.317$ de la variable aléatoire uniforme V, on a

$$F^{-1}_{M^{(1)}|\Theta=\theta}(0.317) = 0.$$

En résumé pour la première réalisation $M^{(1)}$ de la variable aléatoire M on a

j	$U^{(j)}$	$\Theta^{(j)}$	$V^{(j)}$	$M^{(j)}$
1	0.147	0.1288	0.317	0

Passons maintenant à la simulation d'une deuxième réalisation de la variable aléatoire M, soit $M^{(2)}$. Avec la réalisation $U^{(2)} = 0.941$, on obtient

$$\begin{aligned} \Theta^{(2)} &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(0.941)} \\ &= \mathrm{e}^{-0.5+1\times(-1.0692)} \\ &= 1.76685. \end{aligned}$$

On a donc que $(M^{(2)} \,|\Theta^{(2)} = 1.76685\,) \sim Poisson((2)\,(1.76685) = 3.5337)$. On doit ainsi simuler une réalisation d'une variable aléatoire Poisson de moyenne 3.5337 avec $F^{-1}_{M^{(2)}|\Theta^{(2)}=\theta}$. On doit trouver $F_{M^{(2)}|\Theta^{(2)}=\theta}$:

$$\begin{aligned}
\Pr(M^{(2)} &= 0 \left|\Theta^{(2)} = 1.76685\,\right) = \mathrm{e}^{-3.5337} = 0.02920 \\
\Pr(M^{(2)} &= 1 \left|\Theta^{(2)} = 1.76685\,\right) = 3.5337\mathrm{e}^{-3.5337} = 0.10317 \\
\Pr(M^{(2)} &= 2 \left|\Theta^{(2)} = 1.76685\,\right) = \frac{(3.5337)^2\mathrm{e}^{-3.5337}}{2!} = 0.18229 \\
\Pr(M^{(2)} &= 3 \left|\Theta^{(2)} = 1.76685\,\right) = \frac{(3.5337)^3\mathrm{e}^{-3.5337}}{3!} = 0.214719 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(M^{(2)} &\leq 0 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.0292 \\
\Pr(M^{(2)} &\leq 1 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.13237 \\
\Pr(M^{(2)} &\leq 2 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.31466 \\
\Pr(M^{(2)} &\leq 3 \mid \Theta^{(2)} = 1.76685) = 0.529379
\end{aligned}$$

■

Étant donné la réalisation $V^{(2)} = 0.304$ de la variable aléatoire uniforme V, on a

$$F^{-1}_{M^{(1)}|\Theta=\theta}(0.304) = 2.$$

En résumé, pour la deuxième réalisation $M^{(2)}$, on a

j	$U^{(j)}$	$\Theta^{(j)}$	$V^{(j)}$	$M^{(j)}$
2	0.941	1.76685	0.304	2

Exemple 4.9 *On considère un portefeuille de 2 contrats d'assurance maladie influencés par les conditions climatiques. On désigne par Θ la variable aléatoire représentant ces conditions climatiques avec $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ et*

k	$\Pr(\Theta = \theta_k)$	$\Pr(\Theta \leq \theta_k)$
1	0.8	0.8
2	0.15	0.95
3	0.05	1

On suppose que les coûts pour le contrat i sont définis par

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases}$$

avec $B_i \sim Exp(\beta_i)$ où $\beta_1 = \frac{1}{1000}$, $\beta_2 = \frac{1}{2000}$ et $(I_i\,|\Theta = \theta_k\,) \sim Bern(q_i^{(k)})$

k	$q_1^{(k)}$	$q_2^{(k)}$
1	0.05	0.06
2	0.10	0.11
3	0.20	0.21

On désigne par S la variable aléatoire représentant l'ensemble des coûts pour le portefeuille où $S = X_1 + X_2$. En utilisant dans l'ordre les 11 réalisations uniformes suivantes

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$U^{(j)}$	0.791	0.124	0.978	0.556	0.972	0.731	0.671	0.355	0.986	0.821	0.726

simuler 3 réalisations de la variable aléatoire S, soit $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$.

Solution. (a) Première réalisation de la variable aléatoire X: On doit dans un premier temps simuler une réalisation de la variable aléatoire Θ. Étant donné $U^{(1)} = 0.791$, on a $\Theta^{(1)} = \theta_1$ et donc

$$\begin{aligned} (I_1^{(1)} \,\Big|\, \Theta^{(1)} = \theta_1) &\sim Bern(q_1^{(1)} = 0.05) \\ (I_2^{(1)} \,\Big|\, \Theta^{(1)} = \theta_1) &\sim Bern(q_2^{(1)} = 0.06) \end{aligned}$$

On doit donc simuler une réalisation d'une variable aléatoire $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$ et d'une variable aléatoire $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$ avec la méthode inverse. Pour une variable aléatoire $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(I_1^{(1)} &\leq 0 \,\Big|\, \Theta^{(1)} = \theta_1) = 0.95 \\ \Pr(I_1^{(1)} &\leq 1 \,\Big|\, \Theta^{(1)} = \theta_1) = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme $U^{(2)} = 0.124$, on a $I_1^{(1)} = 0$ et par conséquent $X_1^{(1)} = 0$. Pour une variable aléatoire $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(I_2^{(1)} &\leq 0 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 0.94 \\ \Pr(I_2^{(1)} &\leq 1 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 1 \end{aligned}$$

Étant donné la troisième réalisation uniforme $U^{(3)} = 0.978$, on obtient $I_2^{(1)} = 1$. On doit donc simuler une réalisation $B_2^{(1)}$ avec la méthode inverse. On a

$$X_2^{(1)} = -2000 \ln \left(1 - F_{B_2^{(1)}}(U^{(4)})\right),$$

où $U^{(4)} = 0.556$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} X_2^{(1)} &= -2000 \ln (1 - 0.556) \\ &= 1623.86. \end{aligned}$$

En résumé, pour la première réalisation de S, on a

$U^{(1)}$	$U^{(2)}$	$I_1^{(1)}$	$U^{(3)}$	$I_2^{(1)}$	$U^{(4)}$	$X_2^{(1)}$	$S^{(1)}$
0.791	0.124	0	0.978	1	0.556	1623.86	1623.86.

(b) Deuxième réalisation de la variable aléatoire X: On doit dans un premier temps simuler une réalisation de la variable aléatoire Θ. Étant donné $U^{(5)} = 0.972$, on a $\Theta^{(2)} = \theta_3$ et donc

$$\begin{aligned} (I_1^{(2)} \,\Big|\, \Theta^{(2)} = \theta_3) &\sim Bern(q_1^{(3)} = 0.2) \\ (I_2^{(2)} \,\Big|\, \Theta^{(2)} = \theta_3) &\sim Bern(q_2^{(3)} = 0.21) \end{aligned}$$

On doit donc simuler une réalisation d'une variable aléatoire $Bern(q_1^{(3)} = 0.05)$ et d'une variable aléatoire $Bern(q_2^{(3)} = 0.06)$ avec la méthode inverse. Pour une v.a $Bern(q_1^{(3)} = 0.2)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(I_1^{(2)} &\leq 0 \,\Big|\, \Theta^{(2)} = \theta_3) = 0.8 \\ \Pr(I_1^{(2)} &\leq 1 \,\Big|\, \Theta^{(2)} = \theta_3) = 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme $U^{(6)} = 0.731$ ce qui conduit à $I_1^{(2)} = 0$ et par conséquent $X_1^{(2)} = 0$. Pour une variable aléatoire $Ber\cancel{n}(q_2^{(3)} = 0.21)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(I_2^{(2)} &\leq 0 \mid \Theta^{(2)} = \theta_3) = 0.79 \\ \Pr(I_2^{(2)} &\leq 1 \mid \Theta^{(2)} = \theta_3) = 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme $U^{(7)} = 0.671$, on a $I_2^{(2)} = 0$ et par conséquent $X_2^{(2)} = 0$. En résumé, pour la deuxième réalisation de S, on a

$U^{(5)}$	$U^{(6)}$	$I_1^{(2)}$	$U^{(7)}$	$I_2^{(2)}$	$S^{(2)}$
0.972	0.731	0	0.671	0	0

(c) Troisième réalisation de la variable aléatoire X: On doit dans un premier temps simuler une réalisation de la variable aléatoire Θ. État donné $U^{(8)} = 0.355$, on a $\Theta^{(3)} = \theta_1$ et donc

$$\begin{aligned} (I_1^{(3)} \big| \Theta^{(3)} = \theta_1) &\sim Bern(q_1^{(1)} = 0.05) \\ (I_2^{(3)} \big| \Theta^{(3)} = \theta_1) &\sim Bern(q_2^{(1)} = 0.06) \end{aligned}$$

On doit donc simuler une réalisation d'une variable aléatoire $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$ et d'une variable aléatoire $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$ avec la méthode inverse. Pour une v.a $Bern(q_1^{(1)} = 0.05)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(I_1^{(3)} &\leq 0 \big| \Theta^{(3)} = \theta_1) = 0.95 \\ \Pr(I_1^{(3)} &\leq 1 \big| \Theta^{(3)} = \theta_1) = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, avec le nombre uniforme uniforme $U^{(9)} = 0.986$, on a $I_1^{(3)} = 1$. On doit donc simuler une réalisation de $B_1^{(3)}$ avec la méthode inverse. On a

$$X_1^{(3)} = -1000 \ln \left(1 - U^{(10)}\right),$$

où $U^{(10)} = 0.821$ et par conséquent $X_1^{(3)} = 1720.37$. Pour une variable aléatoire $Bern(q_2^{(1)} = 0.06)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(I_2^{(3)} &\leq 0 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 0.94 \\ \Pr(I_2^{(3)} &\leq 1 \mid \Theta^{(1)} = \theta_1) = 1 \end{aligned}$$

Étant donné la troisième réalisation uniforme $U^{(11)} = 0.726$, on obtient $I_2^{(3)} = 0$ et par conséquent $X_2^{(3)} = 0$. En résumé, pour la première réalisation de S, on a

$U^{(8)}$	$U^{(9)}$	$I_1^{(3)}$	$U^{(10)}$	$I_2^{(3)}$	$U^{(11)}$	$X_1^{(3)}$	$S^{(3)}$
0.355	0.986	1	0.821	0	0.726	1720.37	1720.37

■

4.6 Application de la simulation

Soit X une variable aléatoire quelconque dont on peut produire des réalisations $X^{(1)}, ..., X^{(n_{sim})}$ peu importe la méthode. On veut évaluer $E[\gamma(X)]$ dont il est difficile, voir impossible d'obtenir l'expression exacte. On approxime l'espérance de $\gamma(X)$ par

$$\frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} \gamma\left(X^{(j)}\right).$$

Par exemple, si on veut évaluer $\Pr(X \leq y)$, alors on définit $F_X(y) = E\left[1_{\{X \leq y\}}\right]$. On approxime $F_X(y)$ par

$$\widehat{F}_n(y) = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} 1_{\left\{X^{(j)} \leq y\right\}}.$$

On veut maintenant évaluer $\Theta = E[\gamma(X)]$ où γ est une fonction de X. Alors, on approxime Θ par $\widehat{\Theta}_n$ où

$$\widehat{\Theta}_n = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} \gamma\left(X^{(j)}\right).$$

Par la loi des grands nombres, on a $\lim_{n\to\infty} \widehat{\Theta}_n = \Theta$. De plus,

$$\begin{aligned}
E\left[\widehat{\Theta}_n\right] &= E\left[\frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} \gamma\left(X^{(j)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} E\left[\gamma\left(X^{(j)}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n_{sim}} n_{sim} E[\gamma(X)] \\
&= E[\gamma(X)],
\end{aligned}$$

car les variables aléatoires $X^{(1)}, ..., X^{(n_{sim})}$ sont identiquement distribuées. Pour la variance, on a

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{\Theta}_n\right) &= Var\left(\frac{1}{n_{sim}} \sum_{j=1}^{n_{sim}} \gamma\left(X^{(j)}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n_{sim}}\right)^2 \sum_{j=1}^{n_{sim}} Var\left(\gamma\left(X^{(j)}\right)\right),
\end{aligned}$$

car les variables aléatoires $X^{(1)}, ..., X^{(n_{sim})}$ sont indépendantes. De plus,

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{\Theta}_n\right) &= \left(\frac{1}{n_{sim}}\right)^2 \sum_{j=1}^{n_{sim}} Var\left(\gamma\left(X^{(j)}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n_{sim}}\right)^2 n_{sim} Var(\gamma(X)) \\
&= \frac{1}{n_{sim}} Var(\gamma(X)),
\end{aligned}$$

car les variables aléatoires $X^{(1)}, ..., X^{(n_{sim})}$ sont identiquement distribuées. On peut donc dire que $\lim_{n\to\infty} Var\left(\widehat{\Theta}_n\right) = 0$. En terminant, on peut affirmer à l'aide du théorème central limite, que la variable aléatoire centrée réduite

$$\left(\frac{\widehat{\Theta}_n - E\left[\widehat{\Theta}_n\right]}{\sqrt{Var\left(\widehat{\Theta}_n\right)}}\right)$$

obéit à une loi normale standard. Ceci permet de construire un intervalle de confiance pour $\widehat{\Theta}_n$.

4.7 Approximation des mesures VaR_κ et $TVaR_\kappa$

Soit les réalisations ordonnées de la v.a X notées par $\left\{X^{[1]}, X^{[2]}, ..., X^{[n_{sim}]}\right\}$. On a donc $X^{[1]} < X^{[2]} < ... < X^{[n_{sim}]}$. On rappelle que l'on approxime $F_X(x)$ par $\widehat{F}_n(x)$, où

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{nbre\ de\ réalisations\ de\ X \leq x}{n_{sim}}$$

est la fonction de répartition empirique. On veut évaluer $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ à l'aide des réalisations $\left\{X^{[1]}, X^{[2]}, ..., X^{[n_{sim}]}\right\}$. On approxime $VaR_\kappa(X)$ par

$$\begin{aligned}\widehat{VaR_\kappa}(X) &= \widehat{F}_n^{-1}(\kappa) \\ &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : \widehat{F}_n(x) \geq \kappa\right\} \\ &= X^{[j_0]}.\end{aligned}$$

Si $(n_{sim} \times \kappa)$ est un entier, alors $j_0 = n_{sim} \times k$ et $\widehat{F}_n\left(X^{[j_0]}\right) = \frac{n_{sim} \times k}{n_{sim}} = k$. Par exemple, pour $n_{sim} = 1000$ et $\kappa = 95\%$, on a $j_0 = n_{sim} \times k = 950$. Si $(n_{sim} \times \kappa)$ n'est pas un entier, alors $j_0 = [(n_{sim} \times k) + 1]$, où $[x]$ est la partie entière de x. Par exemple, pour $n_{sim} = 1000$ et $\kappa = 99.55\%$, on a $j_0 = 996$ mais $\widehat{F}_n\left(X^{[j_0]}\right) = \frac{996}{1000} > \kappa = 0.9955$...soit un niveau de confiance supérieur à celui demandé.

On approxime la $TVaR_\kappa(X)$ par

$$\widehat{TVaR}_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{n_{sim}}\sum_{j=j_0+1}^{n_{sim}} X^{[j]} + X^{[j_0]}\left(\widehat{F}_n\left(X^{[j_0]}\right) - \kappa\right)\right),$$

où le premier terme correspond à la moyenne des réalisations supérieures à la VaR_κ et le deuxième terme est un ajustement si $\frac{j_0}{n_{sim}} > \kappa$. A noter que ce dernier terme est nul si $(n_{sim} \times \kappa) = j_0$.

En actuariat, on doit calcuer des valeurs de VaR_κ et $TVaR_\kappa$ pour des niveaux de confiance κ élevés, soit $95\% < \kappa < 99.99\%$. Pour s'assurer d'obtenir des résultats fiables, il est important de générer un nombre important de réalisations.

Exemple 4.10 *Dans l'Exemple 4.5, approximer $VaR_{0.6}(S)$ et $VaR_{0.75}(S)$.*

Solution. Pour $\kappa = 0.6$, on a

$$\begin{aligned}n_{sim} \times \kappa &= 5 \times 0.6 = 3 \\ &\Rightarrow VaR_{0.6}(S) \approx S^{(3)} = 181.06.\end{aligned}$$

Pour $\kappa = 0.75$, on a

$$\begin{aligned}n_{sim} \times \kappa &= 5 \times 0.75 = 3.75 \\ &\Rightarrow VaR_{0.75}(S) \approx S^{([3.75]+1)} = S^{(4)} = 266.68.\end{aligned}$$

■

Chapitre 5

Principes de calcul de la prime majorée

Dans les chapitres précédents, nous avons appris à calculer la prime pure pour un contrat. Celle-ci correspond à l'espérance des coûts pour un contrat. Tel que vu au chapitre 3, on ne peut réduire l'espérance des coûts d'un contrat en le mutualisant avec d'autres contrats. Bien qu'il soit intéressant de calculer la prime pure pour un contrat, une compagnie ne peut espérer demeurer en affaire si elle ne charge que la prime pure à ses clients. La compagnie doit inclure une marge de sécurité pour couvrir les écarts défavorables. De plus, un montant doit être aussi ajouté pour couvrir les dépenses et une marge de profit exigée des investisseurs.

Dans le présent chapitre, on s'intéresse à la marge de sécurité qui doit être ajoutée à la prime pure pour donner, ce que l'on appelle, la prime majorée. Ainsi,

$$\Pi(X) = PP(X) + MR(X),$$

où $\Pi(X)$ correspond à la prime majorée, $PP(X)$ correspond à la prime pure et $MR(X)$ à la marge de sécurité.

5.1 Propriétés désirables

Afin d'être cohérent et de bien servir les intérêts d'une compagnie d'assurance, un principe de calcul de la prime majorée doit comporter certaines propriétés. Les principales propriétés et leurs implications respectives sont énumérées ci-dessous. La liste n'est pas exhaustive.

Propriété 1: Marge de sécurité positive.
La prime majorée doit être supérieure à la prime pure $\Pi(X) \geq PP(X)$.

Propriété 2: Exclusion de la marge de sécurité non-justifiée.
On a $\Pi(a) = a$ pour une constante a.

Propriété 3: Additivité
Soit X_1 et X_2 deux risques indépendants. On doit avoir $\Pi(X_1 + X_2) = \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$.

Propriété 4: Sous-additivité
Soit X_1 et X_2 deux risques. On doit avoir $\Pi(X_1 + X_2) \leq \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$.

Propriété 5: Invariance d'échelle
Soit une constante $a > 0$. On doit avoir $\Pi(aX) = a\Pi(X)$.

Propriété 6: Invariance à la translation
Soit une constante $a > 0$. On doit avoir $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$.

Propriété 7: Majoration
Pour une valeur maximale X_{MAX} que peut atteindre un contrat X, on doit avoir $\Pi(X) \leq X_{MAX}$.

5.2 Principaux principes de calcul de prime

Maintentant que l'on connaît les propriétés désirables d'un principe de calcul de la prime majorée, regardons certains de ces principes et vérifions s'ils respectent ces dites propriétés.

1. Principe de la valeur espérée:

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= (1+\eta)E[X] \\ MR(X) &= \eta E[X]\end{aligned}$$

Ce principe de prime respecte les propriétés 1-3-4-7 mais ne respecte pas les propriétés 2 et 6 car

$$\Pi(a) = (1+\eta)E[a] = (1+\eta)a \neq a$$

et

$$\begin{aligned}\Pi(X+a) &= (1+\eta)E[X+a] \\ &= (1+\eta)(E[X]+a) \\ &= (1+\eta)E[X]+(1+\eta)a \\ &\neq \Pi(X)+a.\end{aligned}$$

2. Principe de la variance:

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= E[X]+\eta Var(X) \\ MR(X) &= \eta Var(X).\end{aligned}$$

Ce principe de prime respecte les propriétés 1-2-3-6-7 mais ne respecte pas la propriété 5. Pour la propriété 4, cela dépend du lien entre les risques X_1 et X_2 car

$$\begin{aligned}\Pi(X_1+X_2) &= E[X_1+X_2]+\eta Var(X_1+X_2) \\ &= E[X_1]+E[X_2]+\eta Var(X_1)+\eta Var(X_2)+2\eta Cov(X_1,X_2) \\ &= \Pi(X_1)+\Pi(X_2)+\eta Cov(X_1,X_2).\end{aligned}$$

Si les risques sont indépendants ou si la covariance entre X_1 et X_2 est négative, alors la propriété 4 est respectée.

3. Principe de l'écart-type:

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= E[X]+\eta\sqrt{Var(X)} \\ MR(X) &= \eta\sqrt{Var(X)}.\end{aligned}$$

Ce principe de prime respecte les propriétés 1-2-5-6-7 mais ne respecte pas les propriétés 3 et 4 car

$$\begin{aligned}\Pi(X_1+X_2) &= E[X_1+X_2]+\eta\sqrt{Var(X_1+X_2)} \\ &= E[X_1]+E[X_2]+\eta\sqrt{Var(X_1+X_2)} \\ &\neq \Pi(X_1)+\Pi(X_2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Pi(X_1+X_2) &= E[X_1+X_2]+\eta\sqrt{Var(X_1+X_2)} \\ &\nleq \Pi(X_1)+\Pi(X_2).\end{aligned}$$

4. Principe de la VaR:

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= VaR_\kappa(X)\\ MR(X) &= VaR_\kappa(X) - E[X].\end{aligned}$$

Ce principe de prime respecte les propriétés 2-5-6-7 mais ne respecte pas les propriétés 1-3-4.

5. Principe de la $TVaR$:

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= TVaR_\kappa(X)\\ MR(X) &= TVaR_\kappa(X) - E[X].\end{aligned}$$

Ce principe de prime respecte toutes les propriétés.

6. Principe exponentiel:

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= \frac{1}{\eta}\ln(M_X(\eta))\\ MR(X) &= \frac{1}{\eta}\ln(M_X(\eta)) - E[X].\end{aligned}$$

Ce principe de prime respecte toutes les propriétés.

Remarque 5.1 *Il existe un lien entre le principe exponentiel et le principe de la variance. Soit la fonction génératrice des cumulants définie par*

$$\begin{aligned}C_X(t) &= \ln E\left[\mathrm{e}^{tX}\right]\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j\frac{t^j}{j!}\end{aligned}$$

où $\kappa_j = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\ln E\left[\mathrm{e}^{tX}\right]|_{t=0}$ *est dit le* j^e *cumulant. On déduit* $\kappa_1 = E[X]$ *et* $\kappa_2 = Var(X)$*. On peut ainsi approximer la prime majorée obtenue avec le principe exponentiel par la prime majorée obtenue avec le principe de la variance comme suit*

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= \frac{1}{\eta}\ln(M_X(\eta))\\ &\approx \frac{1}{\eta}\left(\kappa_1\eta + \kappa_2\frac{\eta^2}{2!}\right)\\ &= \kappa_1 + \frac{\eta}{2}\kappa_2\\ &= E[X] + \frac{\eta}{2}Var(X)\\ &= E[X] + \eta^* Var(X).\end{aligned}$$

Exemple 5.2 *Soit la variable aléatoire* X *telle que* $X \sim Poisson\ Composée\,(\lambda = 0.5; F_B)$ *où* $B \sim Gamma\left(\alpha = 3, \beta = \frac{1}{2000}\right)$*. Trouver la prime majorée selon les différents principes de primes en supposant* $\eta = 0.6$ *pour les principes de la valeur espérée et de l'écart-type,* $\eta = 0.0001$ *pour les principes de la variance et exponentiel et* $\kappa = 0.99$ *pour les principes de la* VaR *et de la* $TVaR$*.*

Solution. Selon le modèle proposé, on a $X = \sum_{j=1}^{M} B_j$ où $M \sim Poisson\,(\lambda = 0.5)$ et $B_j \sim Gamma\left(\alpha = 3, \beta = \frac{1}{2000}\right)$, pour $\forall j$. Ainsi,

$$\begin{aligned}E[X] &= E[M]\,E[B]\\ &= (0.5)\left(\frac{3}{\frac{1}{2000}}\right)\\ &= 3000.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[M]\,Var(B) + Var(M)\,E^2[B] \\ &= (0.5)\frac{3}{\left(\frac{1}{2000}\right)^2} + (0.5)(6000)^2 \\ &= 24000000. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \Pr(M=0) + \sum_{m=1}^{\infty} H(x;\alpha m,\beta)\Pr(M=m).$$

Pour la fonction génératrice des moments, on a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= P_M(M_B(t)) \\ &= \mathrm{e}^{\lambda(M_B(t)-1)} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda\left(\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}-1\right)},\ t<\beta. \end{aligned}$$

(1) Principe de la valeur espérée avec $\eta = 0.6$:

$$\begin{aligned} \Pi(X) &= (1+\eta)E[X] \\ &= (1.6)(3000) \\ &= 4800. \end{aligned}$$

(2) Principe de la variance avec $\eta = 0.0001$:

$$\begin{aligned} \Pi(X) &= E[X] + \eta Var(X) \\ &= 3000 + (0.0001)(24000000) \\ &= 5400. \end{aligned}$$

(3) Principe de l'écart-type avec $\eta = 0.6$:

$$\begin{aligned} \Pi(X) &= E[X] + \eta\sqrt{Var(X)} \\ &= 3000 + (0.6)\sqrt{Var(24000000)} \\ &= 5939. \end{aligned}$$

(4) Principe de la VaR avec $\kappa = 0.99$:

$$\begin{aligned} \Pi(X) &= VaR_{0.99}(X) \\ &= \inf\{x\in\mathbb{R} : F_X(x) \geq 0.99\} \\ &= 28542 \end{aligned}$$

(5) Principe de la $TVaR$ avec $\kappa = 0.99$:

$$\begin{aligned} \Pi(X) &= TVaR_{0.99}(X) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{0.99}(X)\}}\right]}{1-0.99} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} E\left[(B_1+\ldots+B_k)\times 1_{\{B_1+\ldots+B_k>VaR_{0.99}(X)\}}\right]\Pr(M=k)}{1-0.99} \\ &= \end{aligned}$$

■

Chapitre 6

Méthodes d'agrégation

6.1 Motivation

On considère un portefeuille de n risques $X_1, ..., X_n$. L'agrégation des risques $X_1, ..., X_n$ mène l'actuaire à évaluer la distribution des coûts $S_n = X_1 + ... + X_n$. On est donc confronter à devoir évaluer la distribution de la somme des variables aléatoires $(X_1, ..., X_n)$ indépendantes ou non. À noter que cette évaluation s'avère un enjeu important dans différentes disciplines, notamment l'actuariat, la gestion quantitative des risques, les probabilités appliquées, l'économie, la statistique.

Pour rencontrer cet objectif, on doit examiner les points suivants :

- Structures de dépendance : On doit établir la structure de dépendance entre les risques $X_1, ..., X_n$
  - Risques indépendants ou dépendants ?
  - Distributions multivariées
  - Théorie des copules
- Méthodes d'agrégation : On doit avoir des méthodes pour évaluer F_{S_n}
  - Méthodes d'approximation basées sur les moments
  - Méthodes de simulation Monte Carlo – risques indépendants
  - Méthodes de simulation Monte Carlo – risques dépendants
  - Méthodes (numériques) d'agrégation – risques indépendants
  - Méthodes (numériques) d'agrégation – risques dépendants
- Mesures de risque et capital économique :
  - Soit une mesure de risque $\rho_k(S_n)$
  - Par exemple, on a $\rho_k(S_n) = VaR_\kappa(S_n)$ ou $\rho_k(S_n) = TVaR_\kappa(S_n)$
  - On calcule $\rho_k(S_n)$
  - On calcule le capital économique

$$CE_\kappa(S_n) = \rho_k(S_n) - E[S_n]$$

- Allocation de capital :
  - Comment doit-on partager $\rho_k(S_n)$ parmi les $X_1, ..., X_n$?

– On utilise une méthode pour calculer les parts allouées $\rho_\kappa(S_n;X_1)$, ..., $\rho_\kappa(S_n;X_n)$ à $X_1,...,X_n$ de telle sorte que
$$\rho_k(S_n) = \rho_\kappa(S_n;X_1) + ... + \rho_\kappa(S_n;X_n)$$

Problème 6.1 *Somme finie. Soit les variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 avec*

$$\begin{aligned} X_1 &\sim LN(\mu,\sigma) \\ X_2 &\sim Ga(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

On définit $S_2 = X_1 + X_2$. On veut évaluer F_{S_2} pour calculer $VaR_\kappa(S_2)$, $TVaR_\kappa(S_2)$, etc.

Problème 6.2 *Somme aléatoire. Soit une variable aléatoire X définie par*

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}, \tag{6.1}$$

où

- *M est une variable aléatoire discrète de fréquence,*
- *$B_1, B_2, ...$ est une suite de variable aléatoire continues positives indépendantes et identiquement distribuées dont la distribution est la même que la variable aléatoire canonique $B \sim LN(\mu,\sigma)$;*
- *et la suite de variable aléatoire $B_1, B_2, ...$ est indépendante de M.*

On veut évaluer F_X pour calculer $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$, etc. On propose une approche alternative à la méthode de simulation Monte Carlo.

Dans le présent chapitre, on traite le cas où les risques sont indépendants. Ensuite, aux chapitres suivants, nous aurons les outils nécessaires pour évaluer la distribution des coûts d'un portefeuille de risques dépendants.

6.2 Somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes

On considère n variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1,...,X_n$ définies sur le support arithmétique $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$ avec fonction de masse de probabilité $f_{X_1}(kh) = \Pr(X_1 = kh)$ et $f_{X_2}(kh) = \Pr(X_2 = kh)$, pour $k \in \mathbb{N}$. On a que h représente l'unité monétaire ou le pas de discrétisation. Plus loin sera expliqué les méthodes de discrétisation.

Soit la variable aléatoire $S_n = X_1 + ... + X_n$. On veut évaluer la fonction de masse de probabilité de S_n que l'on désigne par $f_{S_n}(kh) = \Pr(S_n = kh)$, $k \in \mathbb{N}$. On a recours à une procédure récursive pour déterminer les valeurs de f_{S_n}. Voici les différentes étapes de cette procédure récursive:

Étapes:

(1) Cas $n = 2$: Calculer $f_{S_2}(kh)$ pour $S_2 = X_1 + X_2$. En général, on a

$$\begin{aligned} f_{S_2}(kh) &= \Pr(S_2 = kh) \\ &= \Pr(X_1 + X_2 = kh) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(X_1 = (k-j)h, X_2 = jh). \end{aligned}$$

Étant donné l'hypothèse d'indépendance entre les variables aléatoires $X_1,...,X_n$, on en déduit

$$\begin{aligned} f_{S_2}(kh) &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(X_1 = (k-j)h) \Pr(X_2 = jh) \\ &= \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}((k-j)h) f_{X_2}(jh). \end{aligned}$$

(2) Cas $n = 3, 4, ...$: Pour calculer les valeurs de f_{S_n}, on doit connaître les valeurs de $f_{S_{n-1}}$:

$$\begin{aligned} f_{S_n}(kh) &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(S_{n-1} = (k-j)h) \Pr(X_n = jh) \\ &= \sum_{j=0}^{k} f_{S_{n-1}}((k-j)h) f_{X_n}(jh), k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exemple 6.3 *(Exemple 6.1 (Marceau (2013))). Soit les variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, ..., X_n$ où $X_i \sim BinN\acute{e}g(2, 1-(0.01)(i))$, $i = 1, 2, ..., 10$ avec*

$$\begin{aligned} \Pr(X_i = k) &= \binom{r+k-1}{k} (q)^r (1-q)^k \\ &= \binom{2+k-1}{k} (1-(0.01)(i))^r ((0.01)(i))^k, \end{aligned}$$

et la variable aléatoire $S_{10} = X_1 + ... + X_{10}$. Trouver la fonction de masse de probabilité de S_{10} à l'aide de la procédure récursive avec $h = 1$ pour $k = 0, 1, ..., 11$.

Solution. Pour $k = 0, ..., 11$, on calcule

$$f_{S_2}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}((k-j)h) f_{X_2}(jh).$$

Pour $k = 0, ..., 11$, on calcule

$$f_{S_3}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{S_2}((k-j)h) f_{X_3}(jh).$$

Pour $k = 0, ..., 11$, on calcule

$$f_{S_4}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{S_3}((k-j)h) f_{X_4}(jh).$$

Etc... ■

- Pour $k = 0, ..., 11$, on calcule

$$f_{S_{10}}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{S_9}((k-j)h) f_{X_{10}}(jh).$$

On obtient les valeurs suivantes de $f_{S_{10}}(k)$, pour $k = 0, 1, ..., 11$:

k	0	1	2	3	4	5
$f_{S_{10}}(k)$	0.319610	0.351571	0.205669	0.085080	0.027928	0.007742
k	6	7	8	9	10	11
$f_{S_{10}}(k)$	0.001884	0.000413	0.000083	0.000016	0.000003	0.000000

Avec ces valeurs, on obtient $E[S_{10}] = 1.183605$ et $\mathrm{Var}(S_{10}) = 1.274424$ que l'on vérifie aisément.

Remarque 6.4 *Le risque d'erreur (manipulation) est possible. Il est important de se vérifier. Les trois relations suivantes peuvent être validées facilement :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} f_{S_n}(kh) &= 1 \\ \sum_{k=0}^{m} kh f_{S_n}(kh) &= E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ \sum_{k=0}^{m} kh^2 f_{S_n}(kh) &= E\left[S_n^2\right] = Var(S_n) + E[S_n]^2 \text{ avec } Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \end{aligned}$$

Remarque 6.5 *Si n est grand, il peut s'avérer long d'appliquer cette approche récursive.*

6.3 Somme de n variables aléatoires discrètes i.i.d

On considère le cas particulier où les n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ discrètes indépendantes sont également identiquement distribuées. On note $f_{S_n}(kh) = f_X^{*n}(kh)$ le n-ième produit de convolution de f_X avec elle-même. Alors, on a

$$f_{S_n}(kh) = f_X^{*n}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_X^{*(n-1)}((k-j)h) f_X(jh),$$

pour $k \in \mathbb{N}$ et $n = 2, 3, ...$

Pour ce cas particulier, il y a une procédure plus rapide pour calculer les valeurs de $f_{S_n}(kh) = f_X^{*n}(kh)$, $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 6.6 ***Algorithme de De Pril.*** *On a*

$$f_{S_n}(kh) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1) \frac{j}{k} - 1 \right) f_{S_n}((k-j)h) f_X(jh) \tag{6.2}$$

dont le point de départ est

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n.$$

Preuve. Pour faire la preuve, il est préférable de procéder comme suit. On définit les variables aléatoires Y et T_n sur $\mathbb{N}$ de telle sorte que $X = hY$ et $S_n = hT_n$ avec

$$T_n = Y_1 + ... + Y_n,$$

où $Y_1, ..., Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $Y_i \sim Y$, pour $i = 1, 2, ..., n$. On a recours aux relations suivantes :

$$f_X(kh) = f_Y(k)$$

et

$$f_{S_n}(kh) = f_{T_n}(k), \tag{6.3}$$

pour $k \in \mathbb{N}$. On démontre la relation récursive pour $f_{T_n}(k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, et ensuite, on applique (6.3). La procédure suivante est assez courante pour obtenir une relation récursive. On rappelle que l'on a

$$\begin{aligned} P_{T_n}(t) &= E\left[t^{T_n}\right] \\ &= E\left[t^{(Y_1+...+Y_n)}\right] \\ &= E\left[t^{Y_1}\right] ... E\left[t^{Y_n}\right] \\ &= \left(E\left[t^{Y}\right]\right)^n \\ &= (P_Y(t))^n \end{aligned}$$

On dérive $P_{T_n}(t)$ par rapport t

$$P'_{T_n}(t) = nP_Y(t)^{n-1} P'_Y(t). \tag{6.4}$$

On multiplie les deux côtés de (6.4) par $tP_Y(t)$

$$tP_Y(t) P'_{T_n}(t) = tP_Y(t) nP_Y(t)^{n-1} P'_Y(t). \tag{6.5}$$

La partie de gauche de (6.5) est

$$tP_Y(t) P'_{T_n}(t) = (P_Y(t)) \left(tP'_{T_n}(t)\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j f_Y(j) \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} kt^k f_{T_n}(k) \right). \tag{6.6}$$

La partie de droite de (6.5) correspond à

$$
\begin{aligned}
tP_Y(t)\, nP_Y(t)^{n-1} P_Y'(t) &= n\left(P_Y(t)^n\right)\left(tP_Y'(t)\right) \\
&= n\left(P_{T_n}(t)\right)\left(tP_Y'(t)\right) \qquad (6.7) \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k f_{T_n}(k)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jt^j f_Y(j)\right). \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

On combine (6.6) et (6.8)

$$
\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j f_Y(j)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kt^k f_{T_n}(k)\right) = n\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k f_{T_n}(k)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jt^j f_Y(j)\right). \qquad (6.9)
$$

On identifie de part et d'autre de (6.9) les coefficients de t^k pour chaque $k \in \mathbb{N}^+$. Puis, à partir de ces coefficients, il est possible d'identifier la relation récursive voulue. Pour le côté gauche, on a

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j f_Y(j)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kt^k f_{T_n}(k)\right) &= \left(f_Y(0) + tf_Y(1) + t^2 f_Y(2) + ...\right)\left(tf_{T_n}(1) + 2t^2 f_{T_n}(2) + 3t^3 f_{T_n}(3) + ...\right) \\
&= f_Y(0)\left(tf_{T_n}(1) + 2t^2 f_{T_n}(2) + 3t^3 f_{T_n}(3) + ...\right) \\
&\quad + tf_Y(1)\left(tf_{T_n}(1) + 2t^2 f_{T_n}(2) + 3t^3 f_{T_n}(3) + ...\right) \\
&\quad + t^2 f_Y(2)\left(tf_{T_n}(1) + 2t^2 f_{T_n}(2) + 3t^3 f_{T_n}(3) + ...\right) \\
&\quad + ... \\
&= \left(f_Y(0) f_{T_n}(1)\right) t + \left(2f_Y(0) f_{T_n}(2) + f_Y(1) f_{T_n}(1)\right) t^2 + \left(3f_Y(0) f_{T_n}(3) + 2f_Y(1) f_{T_n}\right.
\end{aligned}
$$

Ainsi, les coefficients devant t^k dans le côté gauche de (6.9) sont

$$
\sum_{j=0}^{k-1} (k-j)\, f_Y(j)\, f_{T_n}(k-j). \qquad (6.10)
$$

Pour le côté droit, on a

$$
\begin{aligned}
n\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k f_{T_n}(k)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jt^j f_Y(j)\right) &= n\left(f_{T_n}(0) + tf_{T_n}(1) + t^2 f_{T_n}(2) + t^3 f_{T_n}(3) + ...\right)\left(tf_Y(1) + 2t^2 f_Y(2) + 3t^3 f_Y(3) + \right. \\
&= nf_Y(1)\, f_{T_n}(0)\, t \\
&\quad + n\left(f_Y(1)\, f_{T_n}(1) + 2f_Y(2)\, f_{T_n}(0)\right) t^2 \\
&\quad + n\left(3f_Y(3)\, f_{T_n}(0) + 2f_Y(2)\, f_{T_n}(1) + f_Y(1)\, f_{T_n}(2)\right) t^3 + ...
\end{aligned}
$$

Ainsi, les coefficients devant t^k dans le côté droit de (6.9) sont

$$
n\sum_{j=1}^{k} jf_Y(j)\, f_{T_n}(k-j). \qquad (6.11)
$$

On combine (6.10) et (6.11)

$$
\sum_{j=0}^{k} (k-j)\, f_Y(j)\, f_{T_n}(k-j) = n\sum_{j=0}^{k} jf_Y(j)\, f_{T_n}(k-j).
$$

On isole $f_{T_n}(k)$

$$kf_Y(0)\,f_{T_n}(k)+\sum_{j=1}^{k}(k-j)\,f_Y(j)\,f_{T_n}(k-j)=n\sum_{j=1}^{k}jf_Y(j)\,f_{T_n}(k-j)\,.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}kf_Y(0)\,f_{T_n}(k) &= n\sum_{j=1}^{k}jf_Y(j)\,f_{T_n}((k-j))\\ &\quad -\sum_{j=1}^{k}(k-j)\,f_Y(j)\,f_{T_n}(k-j)\\ &= \sum_{j=1}^{k}(nj+j-k)\,f_Y(j)\,f_{T_n}(k-j)\\ &= \sum_{j=1}^{k}((n+1)\,j-k)\,f_Y(j)\,f_{T_n}(k-j)\,.\end{aligned}$$

On obtient la relation récursive voulue suivante :

$$f_{T_n}(k)=\frac{1}{f_Y(0)}\sum_{j=1}^{k}f_Y(j)\left((n+1)\,\frac{j}{k}-1\right)f_{T_n}((k-j))\,,$$

pour $k\in\mathbb{N}^+$. Finalement, avec

$$f_{S_n}(kh)=f_{T_n}(k)$$

et

$$f_X(kh)=f_Y(k)\,,$$

on déduit

$$f_{S_n}(kh)=\frac{1}{f_X(0)}\sum_{j=1}^{k}f_X(jh)\left((n+1)\,\frac{jh}{kh}-1\right)f_{S_n}((k-j)\,h)\,,\ k\in\mathbb{N}^+.$$

■

Remarque 6.7 *L'algorithme de la proposition 6.6 est récursif. On doit connaître les valeurs de $f_{S_n}(0h)$, ..., $f_{S_n}((k-1)\,h)$ afin de calculer $f_{S_n}(kh)$. On commence par calculer $f_{S_n}(0)=(f_X(0))^n$. On calcule*

$$f_{S_n}(1h)=\frac{1}{f_X(0h)}f_X(1h)\left((n+1)\,\frac{1}{1}-1\right)f_{S_n}(0h)\,.$$

On détermine

$$f_{S_n}(2h)=\frac{1}{f_X(0h)}\left\{\begin{array}{c} f_X(1h)\left((n+1)\,\frac{1}{2}-1\right)f_{S_n}(1h)\\ +f_X(2h)\left((n+1)\,\frac{2}{2}-1\right)f_{S_n}(0h)\end{array}\right\}.$$

On poursuit pour $k\in\{3,4,...\}$.

Remarque 6.8 *Dans certains cas, l'algorithme peut être instable numériquement et produire des valeurs incohérentes.*

Exemple 6.9 *On a $n=20$ et $X\in\{0,1,2,3\}$ avec fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(X=x)=\left\{\begin{array}{c}0.6,\ x=0\\ 0.25,\ x=1\\ 0.1,\ x=2\\ 0.05,\ x=3.\end{array}\right.$$

Évaluer $f_{S_{20}}(k)$ pour $k=0,1,...,60$.

Solution.

$$f_{S_{20}}(0) = (f_X(0))^{20} = (0.6)^{20}$$

$$\begin{aligned}
f_{S_{20}}(1) &= \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_{S_{20}}(k-j) f_X(j) \\
&= \frac{1}{f_X(0)} \left((20+1)\frac{1}{1} - 1 \right) f_{S_{20}}(0) f_X(1) \\
&= \left(\frac{1}{0.6} \right) (20)\, (0.6)^{20}\, (0.25) \\
&= 0.00030468
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{S_{20}}(2) &= \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{2} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_{S_{20}}(k-j) f_X(j) \\
&= \frac{1}{f_X(0)} \left((20+1)\frac{1}{2} - 1 \right) f_{S_{20}}(2-1) f_X(1) \\
&\quad + \frac{1}{f_X(0)} \left((20+1)\frac{2}{2} - 1 \right) f_{S_{20}}(0) f_X(2) \\
&= \left(\frac{1}{0.6} \right) \left(\frac{19}{2} \right) (0.00030468)\, (0.25) \\
&\quad + \left(\frac{1}{0.6} \right) (20)\, (0.6)^{20}\, (0.1) \\
&= 0.00012187 + 0.001206 \\
&= 0.0013279 \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

■

Exemple 6.10 *Exemple 6.4 (Marceau (2013). Soit les variables aléatoires indépendantes* $X_1, ..., X_{10}$ *où* $X_i \sim Bin\,(5, 0.2)$ *pour* $i = 1, 2, ..., 10$*. On définit* $S_{10} = X_1 + ... + X_{10}$*.*

- *Étape no.1 :* $f_{S_{10}}(0) = (f_X(0))^{10}$*.*
- *Étape no.2 : on obtient les valeurs suivantes pour* $f_{S_{10}}(k)$*,* $k = 0, 1, ..., 5$ *:*

k	0	1	2	3	4	5
$f_{S_{10}}(k)$	0.000014	0.000178	0.001093	0.004371	0.012840	0.029531

Puisque $S_{10} \sim Bin\,(50, 0.2)$*, il est possible de vérifier l'exactitude de ces valeurs.*

Remarque 6.11 *Soit les variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées* $X_1, ..., X_n \in \{k_0 h, (k_0+1)\, h, ...\}$*. Ainsi,* $\Pr(X_i = 0) = 0$*. Cela implique que* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \in \{nk_0 h, (nk_0+1)\, h, ...\}$*. Comment appliquer l'algorithme de De Pril dont le terme au dénominateur est* $f_X(0)$*? On définit* $Y_i = X_i - k_0 h \in \{0, 1h, 2h, ...\}$*,* $i = 1, 2, ..., n$ *et* $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$*. Alors, on évalue les valeurs de* $f_T(kh)$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) avec l'algorithme récursif de la proposition 6.6. On obtient celles de* $f_{S_n}(kh)$ *avec*

$$f_{Sn}(kh) = f_T((k - k_0 n)\, h)\,,\ k = k_0 n, k_0 n + 1, ...$$

6.4 Somme aléatoire et algorithme de Panjer

6.4.1 Notions préliminaires

Soit une variable aléatoire X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}, \tag{6.12}$$

où

- M est une variable aléatoire discrète de fréquence,
- $B_1, B_2, ...$ est une suite de variables aléatoires positives, indépendantes, identiquement distribuées et définies sur $\{0h, 1h, 2h, ...\}$ dont la distribution est la même que la variable aléatoire canonique B ;
- et la suite de variables aléatoires $B_1, B_2, ...$ est indépendante de M.

Alors, la variable aléatoire X prend des valeurs dans $\{0h, 1h, 2h, ...\}$. La fonction de masse de probabilité X est définie par $f_X(kh) = \Pr(X = kh)$, pour $k \in \mathbb{N}$. L'approche générale pour calculer $f_X(kh)$ est

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_{B_1+...+B_j}(0) \\ &= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_B^{*j}(0) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_M(j) (f_B(0))^j = P_M(f_B(0)) \end{aligned} \tag{6.13}$$

et

$$f_X(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_{B_1+...+B_j}(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_B^{*j}(kh), \ k \in \mathbb{N}^+. \tag{6.14}$$

Bien que (6.13) soit aisée à évaluer, (6.14) demande plus de temps de calcul. On doit recourir à l'algorithme récursif de De Pril pour évaluer les valeurs de $f_B^{*j}(kh)$ pour chaque $j \in \mathbb{N}^+$ et chaque $k \in \mathbb{N}^+$.

Panjer (1981) a proposé un algorithme appelé désormais «algorithme de Panjer». Il s'agit d'une relation récursive permettant le calcul des valeurs de f_X à la condition que la variable aléatoire M fasse partie de la famille $(a, b, 0)$.

6.4.2 Famille (a,b,0) de lois de fréquence

Définition 6.12 *Une distribution de fréquence pour une variable aléatoire M appartient à la famille de distributions de fréquence $(a, b, 0)$ si f_M satisfait la relation récursive suivante :*

$$\begin{aligned} f_M(k) &= \Pr(M = k) \\ &= \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1), \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. Le point de départ est $f_M(0) > 0$ (d'où le nom $(a, b, 0)$).

Seules les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative sont membres de cette famille. On indique les valeurs des paramètres a et b pour les membres de la famille (a,b,0) :

- loi de Poisson : $a = 0$ et $b = \lambda$;

- loi binomiale négative (avec r, q) : $a = 1 - q$ et $b = (1 - q)(r - 1)$;
- loi binomiale négative (avec r, β) : $a = \frac{\beta}{1+\beta}$ et $b = (r - 1) \frac{\beta}{1+\beta}$;
- loi binomiale : $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n + 1) \frac{q}{1-q}$.

De plus, on a

$$P_M(t) = E\left[t^M\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\, t^k. \tag{6.15}$$

La relation récursive suivante pour P_M est utilisée dans le développement de l'algorithme de Panjer.

Proposition 6.13 *Pour une distribution de la famille* $(a, b, 0)$*, on a*

$$P'_M(t) = atP'_M(t) + (a + b) P_M(t), \tag{6.16}$$

où $P'_M(t) = \frac{\mathrm{d}\ P_M(t)}{\mathrm{d}t}$.

Preuve. On prend la dérivée de (6.15) par rapport à t

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, kt^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1)\, kt^{k-1}. \end{aligned}$$

On réarrange les termes et on obtient

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, kt^{k-1} + b\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, t^{k-1} \\ &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, kt^{k-1} + bP_M(t). \end{aligned}$$

On remplace k par $k - 1 + 1$

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)(k-1+1)\, t^{k-1} + bP_M(t) \\ &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)(k-1)\, t^{k-1} \\ &\quad +a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, t^{k-1} + bP_M(t) \end{aligned}$$

On réarrange à nouveau légèrement

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= at\sum_{k=2}^{\infty} f_M(k-1)(k-1)\, t^{k-2} \\ &\quad +aP_M(t) + bP_M(t) \end{aligned}$$

On observe

$$\sum_{k=2}^{\infty} f_M(k-1)(k-1)\, t^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, kt^{k-1} = P'_M(t).$$

Alors, on obtient

$$P'_M(t) = atP'_M(t) + aP_M(t) + bP_M(t)$$

qui correspond à (6.16). ■

6.4.3 Algorithme de Panjer

L'algorithme de Panjer est une relation qui permet de calculer récursivement la fonction de masse de probabilité de X, lorsque la loi de M fait partie de la classe (a,b,0).

Algorithme 6.14 ***Panjer.*** *Le point de départ de l'algorithme est*

$$f_X(0) = M_M(\ln(f_B(0))) = P_M(f_B(0))$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(a + b\frac{jh}{kh}\right) f_B(jh) f_X((k-j)h)}{1 - af_B(0)}, k \in \mathbb{N}^+.$$

Preuve. Afin de démontrer le résultat, il est préférable de procéder comme suit. On définit les variables aléatoires Y et C sur $\mathbb{N}$ de telle sorte que $X = hY$ et $B = hC$, avec

$$Y = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} C_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

sous les hypothèses usuelles et où C_1, C_2, ..., forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $C_i \sim C$, pour $i = 1, 2, \ldots$. On utilise les liens suivants:

$$f_B(kh) = f_C(k)$$

et

$$f_X(kh) = f_Y(k), \tag{6.17}$$

pour $k \in \mathbb{N}$. On commence par prouver la relation récursive pour $f_Y(k)$, avec $k \in \mathbb{N}$, puis on applique (6.17). Comme pour l'algorithme de De Pril, on a recours à la fonction génératrice des probabilités de Y donnée par

$$P_Y(t) = E\left[t^Y\right] = P_M(P_C(t)).$$

On sait que $f_Y(0) = P_M(f_C(0))$, ce qui fournit le point de départ de l'algorithme de Panjer. On dérive la fonction génératrice de Y par rapport à t

$$P_Y'(t) = P_M'(P_C(t)) P_C'(t). \tag{6.18}$$

On remplace la formule récursive (6.16)

$$P_M'(t) = atP_M'(t) + (a+b) P_M(t),$$

dans (6.18) et on obtient

$$\begin{aligned} P_Y'(t) &= (aP_C(t) P_M'(P_C(t)) + (a+b) P_M(P_C(t))) P_C'(t) \\ &= aP_C(t)\{P_M'(P_C(t)) P_C'(t)\} + (a+b)\{P_M(P_C(t))\} P_C'(t) \qquad (6.19) \\ &= aP_C(t) P_Y'(t) + (a+b) P_Y(t) P_C'(t). \qquad (6.20) \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} P_C(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_C(j) t^j, \\ P_C'(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} j f_C(j) t^{j-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_Y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_Y(k)\, t^k, \\ P'_Y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k)\, t^{k-1}. \end{aligned}$$

On utilise ces expressions dans (6.20)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k)\, t^{k-1} &= a \sum_{j=0}^{\infty} f_C(j)\, t^j \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k)\, t^{k-1} \\ &\quad + (a+b) \sum_{j=0}^{\infty} f_Y(j)\, t^j \sum_{k=0}^{\infty} k f_C(k)\, t^{k-1}. \end{aligned}$$

On multiplie par t afin que les arguments des fonctions de masse de probabilité et les exposants de t soient identiques:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k)\, t^{k} &= a \sum_{j=0}^{\infty} f_C(j)\, t^j \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k)\, t^{k} \\ &\quad + (a+b) \sum_{j=0}^{\infty} f_Y(j)\, t^j \sum_{k=0}^{\infty} k f_C(k)\, t^{k}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Les sommes en (6.21) sont de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k$$

où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} k f_Y(k)\, t^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k &= a \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_C(j)\, t^j \right) \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} m f_Y(m)\, t^m \right) \\ \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k &= (a+b) \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_Y(j)\, t^j \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} m f_C(m)\, t^m \right). \end{aligned}$$

On identifie la relation récursive à partir de l'observation que $c_k = d_k + e_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^+$. Facilement, on déduit ■

$$c_k = k f_Y(k) \tag{6.22}$$

Pour d_k et e_k, on utilise les relations (6.10) et (6.11) déduites préccédemment dans le cadre de l'algorithme de DePril et on obtient

$$d_k = a \sum_{j=0}^{k} (k-j)\, f_C(j)\, f_Y(k-j) \tag{6.23}$$

et

$$e_k = (a+b) \sum_{j=0}^{k} j f_C(j)\, f_Y(k-j)\,. \tag{6.24}$$

En combinant (6.22), (6.23) et (6.24), on obtient

$$\begin{aligned} kf_Y(k) &= a\sum_{j=0}^{k}(k-j)\,f_C(j)\,f_Y(k-j) \\ &\quad +(a+b)\sum_{j=0}^{k} jf_C(j)\,f_Y(k-j)\,. \end{aligned}$$

On réarrange une première fois l'égalité comme suit

$$\begin{aligned} kf_Y(k) &= akf_C(0)\,f_Y(k) \\ &\quad +a\sum_{j=1}^{k}(k-j)\,f_C(j)\,f_Y(k-j) \\ &\quad +(a+b)\sum_{j=1}^{k} jf_C(j)\,f_Y(k-j) \end{aligned}$$

et une deuxième fois pour obtenir

$$\begin{aligned} kf_Y(k) &= akf_C(0)\,f_Y(k) \\ &\quad +\sum_{j=1}^{k}(a(k-j)+(a+b)\,j)\,f_C(j)\,f_Y(k-j)\,. \end{aligned}$$

En isolant $f_Y(k)$, on obtient

$$\begin{aligned} (1-af_C(0))\,kf_Y(k) &= \sum_{j=1}^{k}(ak+bj)\,f_C(j)\,f_Y(k-j) \\ f_Y(k) &= \frac{1}{1-af_C(0)}\sum_{j=1}^{k}\left(a+b\frac{j}{k}\right)f_C(j)\,f_Y(k-j)\,,\ k\in\mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Nous regardons maintenant trois cas particuliers de l'algorithme de Panjer, soit lorsque X obéit à une loi Poisson composée, binomiale négative composée et binomiale composée.

Algorithme 6.15 ***Panjer - Poisson composée.*** *Soit $M \sim Pois(\lambda)$. Le point de départ de l'algorithme de Panjer est*

$$\begin{aligned} f_X(0) &= P_M(f_B(0)) \\ &= \mathrm{e}^{\lambda(f_B(0)-1)} \end{aligned}$$

et, étant donné que $a=0$ et $b=\lambda$ pour $M \sim Poisson(\lambda)$, la relation récursive

$$f_Y(k)=\frac{1}{1-af_C(0)}\sum_{j=1}^{k}\left(a+b\frac{j}{k}\right)f_C(j)\,f_Y(k-j)$$

conduit à

$$f_X(kh)=\frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} jf_B(jh)f_X((k-j)\,h),\ k\in\mathbb{N}^+.$$

Algorithme 6.16 ***Panjer - Binomiale négative composée.*** *Soit $M \sim BN(r,q)$. Le point de départ de l'algorithme de Panjer est*

$$\begin{aligned} f_X(0) &= P_M\left(f_B\left(0\right)\right) \\ &= \left(\frac{q}{1-(1-q)\,f_B(0)}\right)^r \end{aligned}$$

et, étant donné que $a = 1-q$ et $b = (1-q)(r-1)$ pour $M \sim$ Binomiale négative(r,q) la relation récursive

$$f_Y\left(k\right) = \frac{1}{1-af_C\left(0\right)}\sum_{j=1}^{k}\left(a+b\frac{j}{k}\right)f_C\left(j\right)f_Y\left(k-j\right)$$

conduit à

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right)f_B(jh)f_X((x-j)\,h)}{1-(1-q)\,f_B(0)}, k \in \mathbb{N}^+.$$

Algorithme 6.17 ***Panjer - Binomiale composée.*** *Soit $M \sim Bin(n,q)$. Le point de départ de l'algorithme de Panjer est*

$$\begin{aligned} f_X(0) &= P_M\left(f_B\left(0\right)\right) \\ &= \left(1-q+qf_B\left(0\right)\right)^n \end{aligned}$$

et, étant donné que $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n+1)\frac{q}{1-q}$ pour $M \sim$ Binomiale(n,q), la relation récursive

$$f_Y\left(k\right) = \frac{1}{1-af_C\left(0\right)}\sum_{j=1}^{k}\left(a+b\frac{j}{k}\right)f_C\left(j\right)f_Y\left(k-j\right)$$

conduit à

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{k}\right)f_B(j)f_X((k-j)\,h)}{1-q+qf_B(0)}, k \in \mathbb{N}^+.$$

Dans l'exemple suivant, on applique l'algorithme de Panjer à des lois composées.

Exemple 6.18 *(Exemple 6.10 Marceau (2013)). La variable aléatoire X est définie selon (6.12) où $B \in \{1000, 2000, ..., 6000\}$ avec les valeurs suivantes de $f_B\left(1000k\right)$:*

k	0	1	2	3	4	5	6
$f_B\left(1000k\right)$	0	0.20	0.30	0.20	0.15	0.l0	0.05

On déduit que $E\left[B\right] = 2800$ et $\mathrm{Var}\left(B\right) = 2\ 060\ 000$. On considère trois hypothèses pour la distribution de la variable aléatoire M:

Hypothèse	M	$E\left[X\right]$	$Var\left(X\right)$
*no.*1	$M \sim Poisson\left(\lambda = 1.25\right)$	3500	12 375 000
*no.*2	$M \sim Binomiale\left(n = 10, q = 0.125\right)$	3500	11 150 000
*no.*3	$M \sim BinNég\left(r = 0.5, \beta = 2.5\right)$	3500	36 875 000

Sous l'hypothèse no.1, on a

$$\begin{aligned} f_X\left(0\right) &= P_M\left(f_B\left(0\right)\right) \\ &= \exp\left(\lambda\left(f_B\left(0\right)-1\right)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda\right) \\ &= \exp\left(-1.25\right) \\ &= 0.286505 \end{aligned}$$

Avec la formule de Panjer donnée par $f_X(kh) = \frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j f_B(jh) f_X((k-j)\,h)$*, on a*

$$\begin{aligned} f_X\,(1000) &= \frac{\lambda}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_B(1000j) f_X(1000\,(1-j)) \\ &= 1.25\,(1)\, f_B\,(1000)\, f_X\,(0) \\ &= (1.25)\,(0.2)\,(0.286505) \\ &= 0.071626 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X\,(2000) &= \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_B(1000j) f_X(1000\,(2-j)) \\ &= \frac{1.25}{2}\left((1)\, f_B\,(1000)\, f_X\,(1000) + (2)\, f_B\,(2000)\, f_X\,(0)\right) \\ &= \frac{1.25}{2}\left((1)\,(0.2)\,(0.071626) + (2)\,(0.3)\,(0.286505)\right) \\ &= 0.116393. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse 2, on obtient la masse à zéro suivante

$$f_X\,(0) = P_M\,(f_B\,(0)) = (1 - q + q f_B\,(0))^n = 0.263076$$

et avec la formule de Panjer donnée par $f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{k}\right) f_B(j) f_X((k-j)h)}{1-q+qf_B(0)}$*, on a*

$$\begin{aligned} f_X\,(1000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(-q + \frac{(n+1)qj}{1}\right) f_B(1000j) f_X(1000\,(1-j))}{1 - q + q f_B(0)} \\ &= \frac{\left(-0.125 + \frac{(11)(0.125)(1)}{1}\right) f_B\,(1000)\, f_X\,(0)}{1 - 0.125} \\ &= 0.075164 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X\,(2000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(-q + \frac{(n+1)qj}{2}\right) f_B(1000j) f_X(1000\,(2-j))}{1 - q + q f_B(0)} \\ &= \frac{\left(-0.125 + \frac{(11)(0.125)(1)}{2}\right) (0.20)\,(0.075164)}{1 - 0.125} \\ &\quad + \frac{\left(-0.125 + \frac{(11)(0.125)(2)}{2}\right) (0.30)\,(0.263076)}{1 - 0.125} \\ &= 0.122411. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse 3, on obtient la masse à zéro suivante

$$\begin{aligned} f_X\,(0) &= P_M\,(f_B\,(0)) = \left(\frac{1}{(1 - \beta((f_B(0)) - 1))}\right)^r \\ &= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r = \left(\frac{1}{1+2.5}\right)^{0.5} = 0.534522 \end{aligned}$$

et avec la formule de Panjer donnée par $f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right)f_B(jh)f_X((x-j)h)}{1-(1-q)f_B(0)}$ *avec* $q = \frac{1}{1+\beta}$*, on a*

$$\begin{aligned}
f_X(1000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{1}\right)f_B(1000j)f_X(1000(1-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)} \\
&= \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)1}{1}\right)(0.2)(0.534522)}{1+2.5-(2.5)(0)} \\
&= 0.038180
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_X(2000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{2}\right)f_B(1000j)f_X(1000(2-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)} \\
&= \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)1}{2}\right)(0.2)(0.038180)}{1+2.5-(2.5)(0)} \\
&\quad + \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)2}{2}\right)(0.3)(0.534522)}{1+2.5-(2.5)(0)} \\
&= 0.061361.
\end{aligned}$$

On reproduit quelques valeurs de $f_X(1000k)$ *ci-dessous :*

k	*0*	*5*	*10*	*20*	*30*
$f_X(1000k)$ *hyp 1*	*0.286505*	*0.083659*	*0.020898*	*0.000368*	*0.000002*
$f_X(1000k)$ *hyp 2*	*0.263076*	*0.088471*	*0.020159*	*0.000177*	*0.000000*
$f_X(1000k)$ *hyp 3*	*0.534522*	*0.042620*	*0.016593*	*0.003770*	*0.000981*

Exemple 6.19 *On considère un portefeuille d'assurance-auto de 200 contrats séparé en 2 classes où* $X^{(i)}$ *représente les coûts pour un contrat de la classe i et* $X^{(i)} \sim$ *Poisson composée*$(\lambda^{(i)}; F_{B^{(i)}})$*. De plus, on a les données suivantes:*

i	$n^{(i)}$	$\lambda^{(i)}$
1	*100*	*0.02*
2	*100*	*0.03*

.

Les fonctions de masse de probabilité $f_{B^{(1)}}$ *et* $f_{B^{(2)}}$ *sont définies comme suit*

k	$f_{B^{(1)}}(10000k)$		$f_{B^{(2)}}(10000k)$
1	0.3		0.2
2	0.4		0.25
3	0.2		0.25
4	0.08		0.15
5	0.02		0.05.

(a) Identifier la loi de $S_n = X_1^{(1)} + ... + X_{100}^{(1)} + X_{101}^{(2)} + ... + X_{200}^{(2)}$.

(b) Calculer $f_{S_n}(0)$, $f_{S_n}(10000)$, $f_{S_n}(20000)$.

Solution. (a) $S_n \sim$ *Poisson composée*$(\lambda_{TOT}; F_C)$ où

$$\begin{aligned}
\lambda_{TOT} &= (100)(\lambda_1) + (100)(\lambda_2) = 5 \\
f_C(10000k) &= \frac{2}{5}f_{B_1}(10000k) + \frac{3}{5}f_{B_2}(10000k)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
M_{S_n}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS_n}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{t\left(X_1^{(1)}+\ldots+X_{100}^{(1)}+X_{101}^{(2)}+\ldots+X_{200}^{(2)}\right)}\right] \\
&= \left(M_{X_1}(t)\right)^{100}\left(M_{X_2}(t)\right)^{100} \\
&= \left(\mathrm{e}^{100\lambda_1\left(M_{B_1}(t)-1\right)}\right)\left(\mathrm{e}^{100\lambda_2\left(M_{B_2}(t)-1\right)}\right) \\
&= \left(\mathrm{e}^{100\lambda_1 M_{B_1}(t)-100\lambda_1}\right)\left(\mathrm{e}^{100\lambda_2 M_{B_2}(t)-100\lambda_2}\right) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_{TOT}\left(\frac{100\lambda_1}{\lambda_{TOT}}M_{B_1}(t)+\frac{100\lambda_2}{\lambda_{TOT}}M_{B_2}(t)-1\right)}.
\end{aligned}$$

(b) $f_{S_n}(0) = P_{M_{TOT}}\left(f_C(0)\right) = \exp\left(\lambda_{TOT}\left(f_C(0)-1\right)\right) = \mathrm{e}^{-5}$,

$$\begin{aligned}
f_{S_n}(10000) &= \left(\lambda_{TOT}\right) f_C(10000) f_{S_n}(0) \\
&= (5)\left(\binom{2}{5}(0.3)+\binom{3}{5}(0.2)\right)\mathrm{e}^{-5} = 1.2\mathrm{e}^{-5} \\
&= 0.008085536
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{S_n}(20000) &= \frac{\lambda_{TOT}}{2}\left(f_C(10000)f_{S_n}(10000)+2f_C(20000)f_{S_n}(0)\right) \\
&= \frac{5}{2}\left((0.24)\left(1.2\mathrm{e}^{-5}\right)+2\left(\binom{2}{5}(0.25)+\binom{3}{5}(0.25)\right)\left(\mathrm{e}^{-5}\right)\right) \\
&= \frac{5}{2}\left((0.24)\left(1.2\mathrm{e}^{-5}\right)+0.5\mathrm{e}^{-5}\right) \\
&= 0.013273755
\end{aligned}$$

■

Remarque 6.20 *L'algorithme de Panjer produit des valeurs exactes pour les probabilités et non des approximations.*

Remarque 6.21 *Petit résumé...*

Loi de M	Départ $(f_X(0))$	Relation récursive $(f_X(kh))$
$Pois\,(\lambda)$	$\mathrm{e}^{\lambda(f_B(0)-1)}$	$\frac{\lambda}{k}\sum_{j=1}^{k} j f_B(jh) f_X((k-j)\,h)$
$Bin\,(n,q)$	$(1-q+qf_B(0))^n$	$\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{k}\right)f_B(j)f_X((k-j)h)}{1-q+qf_B(0)}$
$BN\,(r,q)$	$\left(\frac{q}{1-(1-q)f_B(0)}\right)^r$	$\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right)f_B(jh)f_X((x-j)h)}{1-(1-q)f_B(0)}$

6.5 Méthodes de discrétisation

6.5.1 Somme finie de variables aléatoires

Soit des variables aléatoires indépendantes **continues** et positives $B_1, ..., B_n$ et une variable aléatoire X définie par $X = B_1 + ... + B_n$. Afin d'utiliser les algorithmes récursifs de convolution, on approxime la variable aléatoire B_i par une variable aléatoire discrète $\widetilde{B}_i$ définie sur le support $A_h = \{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$,où $h > 0$ est appelé le pas de discrétisation. La fonction de masse de probabilité de $\widetilde{B}$ est

$$f_{\widetilde{B}}(kh) = \Pr\left(\widetilde{B}_i = kh\right), k \in \mathbb{N},$$

pour $i = 1, 2, ..., n$.

On définit la variable aléatoire $\widetilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i$, qui est aussi définie sur A_h. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\widetilde{X}$ peuvent être calculées avec les algorithmes récursifs de convolution. On approxime les quantités relatives à la variable aléatoire X (e.g. F_X, $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$, prime *stop-loss*) par les quantités correspondantes relatives à $\widetilde{X}$.

6.5.2 Somme aléatoire de variables aléatoires

Soit une variable aléatoire X définie par la somme aléatoire

$$X = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, M > 0 \end{cases},$$

où

- les variables aléatoires $B_1, B_2, ...$ sont indépendantes, identiquement distribuées et continues positives avec fonction de répartition F_B
- la variable aléatoire M appartient à la classe (a,b,0).

Pour appliquer l'algorithme de Panjer ou tout autre algorithme récursif, on approxime les variables aléatoires B_1, B_2, ... par des variables aléatoires discrètes $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2$,... définies sur A_h. On définit la variable aléatoire $\widetilde{X}$ par

$$\widetilde{X} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j, M > 0 \\ 0, M > 0 \end{cases},$$

en préservant les mêmes hypothèses. On observe que la variable aléatoire $\widetilde{X}$ est aussi définie sur A_h. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\widetilde{X}$ sont calculées avec l'algorithme de Panjer. Ensuite, on approxime les quantités relatives à la variable aléatoire X (e.g. F_X, $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$, prime *stop-loss*) par les quantitiés correspondantes de $\widetilde{X}$.

6.5.3 Différentes méthodes

Il existe un certain nombre de méthodes de discrétisation permettant de définir une variable aléatoire $\widetilde{B}$ qui approxime une variable aléatoire B: méthodes *upper* et *lower*, méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée (présentée dans Marceau (2013, chapitre 6)), méthode d'arrondissement. Dans le cadre de cours, nous étudierons uniquement les méthodes *upper* et *lower*.

Méthode upper

On définit une variable aléatoire discrète $\widetilde{B}^{(u)}$ sur A_h où h est le pas de discrétisation, avec fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_{\widetilde{B}^{(u)}}(0) &= F_B(h) \\ F_{\widetilde{B}^{(u)}}(h) &= F_B(2h) \\ F_{\widetilde{B}^{(u)}}(2h) &= F_B(3h) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ainsi, $F_{\widetilde{B}^{(u)}}(kh) = F_B((k+1)h)$ ou de façon équivalente

$$F_{\widetilde{B}^{(u)}}(x) = \begin{cases} F_B(h),\ 0 \leq x < h \\ F_B(2h),\ h \leq x < 2h \\ F_B(3h),\ 2h \leq x < 3h \\ \vdots \end{cases}$$

On a donc $F_B(x) \leq F_{\widetilde{B}^{(u)}}(x)$ pour tout $x \geq 0$. La fonction de masse de probabilité de $\widetilde{B}^{(u)}$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} f_{\widetilde{B}^{(u)}}(0) & = & F_{\widetilde{B}^{(u)}}(0) = F_B(h) \\ f_{\widetilde{B}^{(u)}}(h) & = & F_{\widetilde{B}^{(u)}}(h) - F_{\widetilde{B}^{(u)}}(0) = F_B(2h) - F_B(h) \\ & \vdots & \end{array}$$

ou de façon générale par

$$\begin{array}{rcl} f_{\widetilde{B}^{(u)}}(kh) & = & F_{\widetilde{B}^{(u)}}(kh) - F_{\widetilde{B}^{(u)}}((k-1)h) \\ & = & F_B((k+1)h) - F_B(kh). \end{array}$$

Méthode lower

On définit une variable aléatoire discrète $\widetilde{B}^{(l)}$ sur A_h où h est le pas de discrétisation, avec fonction de répartition

$$\begin{array}{rcl} F_{\widetilde{B}^{(l)}}(0) & = & 0 \\ F_{\widetilde{B}^{(l)}}(h) & = & F_B(h) \\ F_{\widetilde{B}^{(l)}}(2h) & = & F_B(2h) \\ & \vdots & \end{array}$$

Ainsi, $F_{\widetilde{B}^{(l)}}(kh) = F_B(kh)$ ou de façon équivalente

$$F_{\widetilde{B}^{(l)}}(x) = \begin{cases} 0,\ 0 \leq x < h \\ F_B(h),\ h \leq x < 2h \\ F_B(2h),\ 2h \leq x < 3h \\ \vdots \end{cases}$$

On a donc $F_{\widetilde{B}^{(l)}}(x) \leq F_B(x)$ pour tout $x \geq 0$. La fonction de masse de probabilité de $\widetilde{B}^{(l)}$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} f_{\widetilde{B}^{(l)}}(0) & = & 0 \\ f_{\widetilde{B}^{(l)}}(h) & = & F_{\widetilde{B}^{(l)}}(h) - F_{\widetilde{B}^{(l)}}(0) = F_B(h) \\ f_{\widetilde{B}^{(l)}}(2h) & = & F_{\widetilde{B}^{(l)}}(2h) - F_{\widetilde{B}^{(l)}}(h) = F_B(2h) - F_B(h) \\ & \vdots & \end{array}$$

ou de façon générale par

$$\begin{array}{rcl} f_{\widetilde{B}^{(l)}}(kh) & = & F_{\widetilde{B}^{(l)}}(kh) - F_{\widetilde{B}^{(l)}}((k-1)h) \\ & = & F_B(kh) - F_B((k-1)h). \end{array}$$

Remarques:

(1) La méthode lower est plus conservatrice que la méthode upper.

(2) $0 \notin$ au support de $\widetilde{X}^{(l)}$.

(3) Pour $k = 0, 1, 2, ...$, on a

$$F_{\widetilde{B}^{(l)}}(kh) \leq F_B(kh) \leq F_{\widetilde{B}^{(u)}}(kh).$$

(4) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$F_{\widetilde{B}^{(l)}}(x) \leq F_B(x) \leq F_{\widetilde{B}^{(u)}}(x).$$

(5) Plus h est petit, plus $F_{\widetilde{B}^{(u)}}(x)$ et $F_{\widetilde{B}^{(l)}}(x)$ sont près de F_B.

(6) Pour $j = 1, 2, ...$, on a

$$F^{*j}_{\widetilde{B}^{(l)}}(x) \leq F^{*j}_B(x) \leq F^{*j}_{\widetilde{B}^{(u)}}(x)$$

où

$$
\begin{aligned}
F^{*j}_{\widetilde{B}^{(l)}}(x) &= \Pr(\widetilde{B}^{(l)}_1 + \widetilde{B}^{(l)}_2 + ... + \widetilde{B}^{(l)}_j \leq x) \\
F^{*j}_{\widetilde{B}^{(u)}}(x) &= \Pr(\widetilde{B}^{(u)}_1 + \widetilde{B}^{(u)}_2 + ... + \widetilde{B}^{(u)}_j \leq x).
\end{aligned}
$$

(7) Pour $x \in \mathcal{R}^+$, on a

$$
\begin{aligned}
F_{\widetilde{X}^{(l)}}(x) &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(M=j) F^{*j}_{\widetilde{B}^{(l)}}(x) \\
&\leq \\
F_X(x) &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(M=j) F^{*j}_{B}(x) \\
&\leq \\
F_{\widetilde{X}^{(u)}}(x) &= \Pr(M=0) + \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(M=j) F^{*j}_{\widetilde{B}^{(u)}}(x).
\end{aligned}
$$

Exemple 6.22 ***(Valeurs exactes - Exemple 6.11 (Marceau 2013))*** *On applique l'algorithme de Panjer conjointement avec les méthodes upper et lower de discrétisation. Soit une variable aléatoire $X \sim BinNégComp\,(r, q; F_B)$, avec $r = 1$, $q = 0.5$ et $B \sim Exp\,(0.2)$. Pour cet exemple, on connaît la forme explicite de la fonction de répartition de X qui est donnée par*

$$F_X\,(x) = 1 - (1-q)\,\mathrm{e}^{-\beta q x}, \qquad x \geq 0.$$

Cela permet de comparer les valeurs obtenues avec les approximations.

x	$Low_{h=1}$	$Low_{h=\frac{1}{4}}$	$Low_{h=\frac{1}{16}}$	*Exacte*	$Up_{h=\frac{1}{16}}$	$Up_{h=\frac{1}{4}}$	$Up_{h=1}$
0	0.50000	0.50000	0.500000	0.5	0.50313	0.51250	0.54983
1	0.54532	0.54702	0.54744	0.54758	0.55055	0.55944	0.59470
2	0.58653	0.58961	0.59038	0.59064	0.59344	0.60186	0.63510
3	0.62400	0.62820	0.62924	0.62959	0.63225	0.64020	0.67147
4	0.65808	0.66316	0.66442	0.66484	0.66735	0.67485	0.70421
5	0.68907	0.69483	0.69626	0.69674	0.69910	0.70616	0.73369
10	0.78737	0.81375	0.81549	0.81606	0.81778	0.82289	0.84246
20	0.92523	0.93062	0.93191	0.93233	0.93317	0.93565	0.94487
30	0.97109	0.97416	0.97487	0.97511	0.97549	0.97662	0.98071
40	0.98882	0.99037	0.99073	0.99084	0.99101	0.99151	0.99325
50	0.99568	0.99641	0.99658	0.99663	0.99670	0.99691	0.99764

La différence entre les valeurs upper *et* lower *diminue quand h s'approche de 0. La valeur de h choisie dépend de l'échelle de la distribution de B. On présente dans le tableau ci-dessous les valeurs exactes et celles obtenues par approximation de $VaR_\kappa\,(X)$:*

κ	$Up_{h=1}$	$Up_{h=\frac{1}{4}}$	$Up_{h=\frac{1}{16}}$	*Exacte*	$Low_{h=\frac{1}{16}}$	$Low_{h=\frac{1}{4}}$	$Low_{h=1}$
0.5	0	0	0	0	0	0	0
0.95	21	22.5	22.9375	23.02585	23.125	23.5	25
0.995	43	45.875	45.875	46.05167	46.25	46.75	49

□

Les approximations de F_X produites avec la discrétisation *upper* (*lower*) seront toujours supérieures (*inférieures*) aux valeurs exactes de F_X. Cette relation est démontrée en utilisant les notions d'ordres stochastiques portant sur la comparaison des risques.

Exemple 6.23 ***(Valeurs approximatives - Exemple 6.12 (Marceau 2013))*** *On considère un portefeuille constitué de 100 contrats indépendants d'assurance automobile. Les coûts pour un contrat sont représentés par la variable aléatoire $X \sim PoissonComp\,(\lambda, F_B)$ avec $\lambda = 0.025$ et $B \sim Pareto\,(3, 10)$.*

On veut évaluer F_S *où* $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ *et les variables aléatoires* X_i $(i = 1, 2, ..., 100)$ *sont indépendantes, identiquement distribuées avec* $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., 100)$*. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs obtenues des approximations de* $F_S(x)$ *en appliquant l'algorithme de Panjer conjointement avec les méthodes de discrétisation* upper *et* lower *(avec* $h = 1$ *et* $h = \frac{1}{4}$*) :*

x	$F_{\widetilde{S}^{low,h=1}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{low,h=\frac{1}{4}}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{up,h=\frac{1}{4}}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{up,h=1}}(x)$
0	0.0820850	0.0820850	0.09812643	0.1528517
1	0.1331183	0.1403239	0.16071324	0.2188115
5	0.3320781	0.3545721	0.38149450	0.4391453
10	0.5364597	0.5616138	0.58571454	0.6310597
20	0.7836771	0.7998287	0.81308686	0.8355891
30	0.8962240	0.9045299	0.91096430	0.9214718
40	0.9472100	0.9513226	0.95443381	0.9594453
50	0.9712884	0.9733614	0.97491838	0.9774225

La valeur exacte de $F_S(0)$ *est 0.0820850. L'écart entre les bornes inférieures et supérieures diminue avec* h *qui décroît. Les valeurs obtenues des approximations de* $VaR_\kappa(S)$ *sont :*

κ	0.5	0.95	0.995
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{up,h=1}\right)$	7	37	84
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{up,h=\frac{1}{4}}\right)$	7.75	38.75	85.25
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{low,h=\frac{1}{4}}\right)$	8.5	39.75	86.25
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{low,h=1}\right)$	9	41	88

Les méthodes lower et upper permettent d'établir des bornes pour les valeurs exactes de la fonction de répartition, de la VaR et de la TVaR. Cela est un net avantage par rapport aux méthodes de simulation Monte Carlo. Pour $X = B_1 + ... + B_n$ et pour

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, M > 0 \end{cases},$$

on observe toujours

$$F_{\widetilde{X}^{(low,h')}}(x) \leq F_{\widetilde{X}^{(low,h)}}(x) \leq F_X(x) \leq F_{\widetilde{X}^{(up,h)}}(x) \leq F_{\widetilde{X}^{(up,h')}}(x)$$

pour $x \geq 0$ et $h \leq h'$. Ces relations sont démontrées dans Marceau (2013, chapitre 7).

6.6 Transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide est un algorithme performant utilisé pour déterminer la transformée de Fourier (fonction caractéristique) d'une variable aléatoire discrète. La FFT ("Fast Fourier Transform") est programmée dans plusieurs logiciels, notamment en R. Elle permet de déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète à partir d'un vecteur des valeurs de sa fonction de masse de probabilité. Elle permet aussi de calculer les valeurs de la fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire discrète à partir de sa fonction caractéristique, ce qui pour nous s'avéra très utile pour trouver la fonction de masse d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Définition 6.24 *Soit une variable aléatoire X discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec fonction de masse de probabilité f_X. On définit la fonction caractéristique de X, que l'on désigne par $\widetilde{f}_X$, comme suit:*

$$\widetilde{f}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} f_X(k).$$

Cette fonction se veut une généralisation de la fonction génératrice des moments. Elle a l'avantage d'exister pour toute loi contrairement à la fonction génératrice des moments. De plus, les propriétés vérifiées par la fonction génératrice des moments le sont également par la fonction caractéristique, notamment pour n variables aléatoires indépendantes $X_1, ..., X_n$, on a

$$M_{X_1+...+X_n}(t) = M_{X_1}(t)...M_{X_n}(t)$$

qui se traduit en terme de la fonction caractéristique par

$$\widetilde{f}_{X_1+...+X_n}(t) = \widetilde{f}_{X_1}(t)...\widetilde{f}_{X_n}(t).$$

Cette propriété de la fonction caractéristique nous sera fort utile dans ce qui suit.

Exemple 6.25 *Soit une variable aléatoire X définie par*

$$X = \begin{cases} B, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases},$$

où $I \sim Bern(q)$. On sait que

$$M_X(t) = P_I(M_B(t)).$$

Ceci se traduit en termes de la fonction caractéristique par

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_X(t) &= P_I(\widetilde{f}_B(t)) \\ &= (1-q) + q\widetilde{f}_B(t). \end{aligned}$$

Exemple 6.26 *Soit une variable aléatoire X obéissant à une loi composée et définie par*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où M est une variable aléatoire de comptage. On sait que

$$M_X(t) = P_M(M_B(t)).$$

Ceci se traduit en termes de la fonction caractéristique par

$$\widetilde{f}_X(t) = P_M(\widetilde{f}_B(t)).$$

Proposition 6.27 *Soit un vecteur* $\underline{f}= (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$. *L'application de la FFT à ce vecteur* $\underline{f}$ *conduit à un autre vecteur de même dimension, que l'on désigne par* $\underline{\widetilde{f}}= (\widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1, ..., \widetilde{f}_{n-1})$ *où*

$$\widetilde{f}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n} jk} f_k,\ j = 0, 1, ..., n-1.$$

Proposition 6.28 *Soit un vecteur* $\underline{\widetilde{f}}= (\widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1, ..., \widetilde{f}_{n-1})$. *L'application de la FFT inverse (IFFT) à ce vecteur* $\widetilde{f}$ *conduit à un autre vecteur de même dimension, que l'on désigne par* $\underline{f}= (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ *où*

$$f_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{n} jk} \widetilde{f}_k,\ j = 0, 1, ..., n-1.$$

Remarque 6.29 *Pour une utilisation efficiente de la méthode FFT, le vecteur* $\underline{\widetilde{f}}= (\widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1, ..., \widetilde{f}_{n-1})$ *doit compter un nombre de composantes égal au nombre de termes dans le vecteur de masses de probabilité désiré et doit aussi être un multiple de 2. On choisit donc* $n = 2^m$ *où* m *est un entier élevé (par exemple* $m = 14, 15, ...$*).*

6.6.1 Somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes

Soit deux variables aléatoires discrètes X et Y avec fonction de masse de probabilité f_X et f_Y respectivement. Soit lavariable aléatoire discrète S telle que $S = X + Y$ avec fonction de masse de probabilité f_S. On cherche à évaluer f_S avec la méthode FFT.

Voici les étapes de l'algorithme:

- Construire les vecteurs $\underline{f}_X$ et $\underline{f}_Y$. Ils doivent être de même longueur 2^m, ce qui est possible en ajoutant suffisamment de 0 à chacun des vecteurs.
- Utiliser la fonction FFT pour produire les vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$ à partir des vecteurs $\underline{f}_X$ et $\underline{f}_Y$.
- Étant donné que $\widetilde{f}_{X+Y}(t) = \widetilde{f}_X(t)\widetilde{f}_Y(t)$, faire le produit des deux vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$ pour obtenir $\widetilde{f}_S = \underline{\widetilde{f}}_X\ \underline{\widetilde{f}}_Y$.
- Utiliser la fonction FFT inverse (IFFT) pour obtenir le vecteur f_S à l'aide de $\widetilde{f}_S$.

À noter que les vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$ doivent comporter chacun 2^m éléments où m est fixé de telle sorte que 2^m soit plus grand que le nombre d'éléments non nuls de la fonction de masse de probabilité de la variable aléatoire S. Par exemple, si $X \in \{0, 1, ..., 10\}$ et comporte donc 11 éléments et si $Y \in \{0, 1, ..., 20\}$ et comporte donc 21 éléments, alors $S \in \{0, 1, ..., 30\}$ et comporte 31 éléments. Donc, les vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_X$ et $\underline{\widetilde{f}}_Y$ doivent avoir au moins $2^5 = 32$ éléments. Il faut donc ajouter 21 zéros au vecteur $\underline{\widetilde{f}}_X$ et 11 zéros au vecteur $\underline{\widetilde{f}}_Y$.

Exemple 6.30 *(Exemple 6.17 (Marceau (2013)) Soit* $S = X_1 + X_2$ *où les variables aléatoires.* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes et* $X_1 \sim Pois\,(\lambda = 2.3)$ *et* $X_2 \sim BN\left(r = 3, q = \frac{1}{4}\right)$.

On obtient les valeurs suivantes avec la méthode fft en utilisant la `fft.directconvo` *fournie à l'exemple* **??** *:*

k	0	10	20	30	40	50
$f_S(k)$	0.001567	0.070021	0.018271	0.002436	0.000250	0.000022

6.6.2 Somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes

Soit les variables aléatoires discrètes indépendantes $X_1, ..., X_n$ avec fonction de masse de probabilité $f_{X_1}, ..., f_{X_n}$ respectivement. Soit la variable aléatoire discrète S telle que $S = X_1 + ... + X_n$ avec fonction de masse de probabilité f_S. On cherche à évaluer f_S avec la méthode FFT.

Voici les étapes de l'algorithme:

- Construire les vecteurs $\underline{f}_{X_1}, ..., \underline{f}_{X_n}$ avec un nombre égal de 2^m composantes, ce qui est possible en ajoutant suffisamment de 0 à chacun des vecteurs.
- Utiliser la fonction FFT pour produire les vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_{X_1}, ..., \underline{\widetilde{f}}_{X_n}$ à partir des vecteurs $\underline{f}_{X_1}, ..., \underline{f}_{X_n}$.
- Étant donné que $\widetilde{f}_{X_1+...+X_n}(t) = \widetilde{f}_{X_1}(t)...\widetilde{f}_{X_n}(t)$, faire le produit des vecteurs $\underline{\widetilde{f}}_{X_1}, ..., \underline{\widetilde{f}}_{X_n}$ pour obtenir $\widetilde{f}_S$.
- Utiliser la fonction FFT inverse (IFFT) pour obtenir le vecteur f_S à l'aide de $\widetilde{f}_S$.

Exemple 6.31 *(Exemple 6.20 Marceau (2013)). Pour des fins d'illustration, on suppose un portefeuille de 200 contrats.On examine le nombre de sinistres pour l'ensemble du portefeuille. On suppose que* $X_i \sim BN(r_i, q_i)$ *où*

$$r_i = \begin{cases} 2, & i = 1, 2, ..., 100 \\ 3, & i = 101, 102, ..., 200 \end{cases}$$

et

$$q_i = \begin{cases} \frac{8}{10}, & i = 1, 2, ..., 60 \\ \frac{9}{10}, & i = 61, 62, ..., 100 \\ \frac{8.5}{10}, & i = 101, 102, ..., 170 \\ \frac{9.5}{10}, & i = 171, 172, ..., 200. \end{cases}$$

On obtient les valeurs suivantes de f_S *où* $S = \sum_{i=1}^{200} X_i$ *:*

k	70	80	90	100	110	120
$f_S(k)$	0.023570	0.040784	0.024751	0.006029	0.000656	0.000035

À l'aide des valeurs obtenues pour f_S*, on détermine que* $E[S] = 80.68455$ *et* $\mathrm{Var}(S) = 95.9613$*. Ces valeurs sont vérifiables car on sait évaluer les valeurs exactes de l'espérance et la variance de* S*.*

6.6.3 Somme aléatoire

Soit une variable aléatoire X qui obéit à une loi composée définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0, \end{cases}$$

où M est une variable aléatoire discrète; $B_1, B_2, ...$ est une suite de variables aléatoires positives, indépendantes, identiquement distribuées et définies sur $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$ dont la distribution est la même que la variable aléatoire canonique B et la suite $B_1, B_2, ...$ est indépendante de la v.a discrète M. On a donc que la variable aléatoire $X \in \{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$ et que sa fonction de masse de probabilité est donnée par $f_X(kh) = \Pr(X = kh)$, pour $k \in \mathbb{N}$. On cherche à évaluer f_X avec la méthode FFT.

Voici les étapes de l'algorithme:

- Construire le vecteur $\underline{f}_B$ en ajoutant suffisamment de 0.
- Utiliser la fonction FFT pour produire le vecteur $\underline{\widetilde{f}}_B$ à partir du vecteur $\underline{f}_B$.
- Trouver le vecteur $\widetilde{f}_X(t)$ à l'aide de la relation $\widetilde{f}_X(t) = P_M(\widetilde{f}_B(t))$.
- Utiliser la fonction FFT inverse (IFFT) pour obtenir le vecteur f_X à l'aide de $\widetilde{f}_X$.

Remarque 6.32 *Voir Exemple 6.24 de Marceau (2013) où l'on considère un portefeuille de 2 lignes d'affaires. On compare les résultats obtenus avec FFT et avec Panjer et le produit de convolution. L'évaluation par la FFT est très efficace en termes de temps de calcul. Le temps de calcul obtenus avec FFT dans les exemples présentés sont moindres qu'avec les autres méthodes récursives. La méthode FFT est également simple d'application.*

6.7 Approximation Poisson composée

On examine l'application de l'approximation Poisson composée dans l'évaluation de la distribution des coûts totaux pour un portefeuille dont les risques sont modélisés selon l'approche indemnitaire ou l'approche forfaitaire.

L'approximation Poisson composée se fait en deux étapes: on approxime la variable aléatoire discrète S par une variable aléatoire T qui obéit à une loi Poisson composée. Ensuite, on utilise l'algorithme de Panjer ou la FFT pour trouver f_T et par le fait même F_T. On utilise F_T pour évaluer approximativement F_S.

On présente l'approximation Poisson composée dans le cas particulier de l'approche indemnitaire et ensuite le cas général des approches indemnitaire et forfaitaire.

6.7.1 Cas particulier

On considère un portefeuille composé de n contrats d'assurance vie sur une période fixée (e.g. un an). Pour le contrat i, on note le montant de prestation par b_i $(i = 1, 2, ..., n)$ que l'on suppose entier. La probabilité de décès de l'assuré est représentée par q_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

On définit la variable aléatoire des coûts pour le contrat i par $X_i = b_i I_i$, où I_i est une variable aléatoire de Bernoulli telle que

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'assuré } i \text{ décède} \\ 0, & \text{si l'assuré } i \text{ survit} \end{cases},$$

avec $\Pr(I_i = 1) = q_i$. La variable aléatoire $S = X_1 + ... + X_n$ désigne le montant total des sinistres pour le portefeuille. Pour l'ensemble de la section, on suppose que les coûts individuels des assurés sont indépendants. On procède selon les deux étapes suivantes pour définir la variable aléatoire T de loi Poisson composée.

À la première étape, on approxime chaque $X_i = b_i I_i$ $(i = 1, ..., n)$ par une variable aléatoire Y_i définie par $Y_i = b_i M_i$, où la variable aléatoire $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$. Il y a deux choix possibles pour définir λ_i :

- **choix 1 :** on définit λ_i de telle sorte que $E[M_i] = \lambda_i = E[I_i] = q_i \quad (i = 1, ..., n)$;
- **choix 2 :** on définit λ_i de telle sorte que $\Pr(M_i = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda_i} = \Pr(I_i = 0) = 1 - q_i \quad (i = 1, ..., n)$, ce qui implique que $\lambda_i = -\ln(1 - q_i)$, pour $i = 1, ..., n$.

Cette approximation est possible parce que la valeur de q_i est relativement petite ce qui implique que la probabilité que M_i prenne des valeurs supérieures à 1 est presque nulle c'est-à-dire $\Pr(M_i > 1) \cong 0$. Cela est illustré dans le prochain exemple.

Exemple 6.33 *Soit la variable aléatoire $M \sim Pois(\lambda)$. Dans le tableau suivant, on présente les valeurs de*

$$\begin{aligned} \Pr(M > 1) &= 1 - \Pr(M \leq 1) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{1!} \end{aligned}$$

dans les cas où λ est défini selon les choix 1 et 2 avec des valeurs plausibles de probabilités de décès :

q	*choix 1 :* $\lambda = q$	*choix 2 :* $\lambda = -\ln(1-q)$
0.0001	0.000000	0.000000
0.0005	0.000000	0.000000
0.0010	0.000000	0.000001
0.0050	0.000012	0.000013
0.0100	0.000050	0.000050
0.0500	0.001209	0.001271
0.1000	0.004679	0.005176
0.2000	0.017523	0.021485

Les probabilités de décès pour une personne de 20, 40, 60 et 80 ans sont de l'ordre de 0.0004, 0.0013, 0.0092, 0.0741. Dans le contexte des risques de crédit, les probabilités de défaut sont généralement inférieures à 10 %. □

Dans une deuxième étape, on définit la variable aléatoire T comme étant la somme des variables aléatoires Y_1, ..., Y_n, soit $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_T(t) &= E\left[e^{tT}\right] \\ &= E\left[e^{t(Y_1+...+Y_n)}\right] \\ &= E\left[e^{t(b_1M_1+...+b_nM_n)}\right] \\ &= E\left[e^{t(b_1M_1)}\right]...E\left[e^{t(b_nM_n)}\right] \\ &= E\left[e^{tb_1(M_1)}\right]...E\left[e^{tb_n(M_n)}\right] \\ &= e^{\lambda_1\left(e^{tb_1}-1\right)}...e^{\lambda_n\left(e^{tb_n}-1\right)} \\ &= e^{\lambda_1 e^{tb_1}+...+\lambda_n e^{tb_n}-\lambda_1-...-\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_{TOT}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{TOT}}e^{tb_1}+...+\frac{\lambda_n}{\lambda_{TOT}}e^{tb_n}-1\right)} \end{aligned}$$

et donc T obéit à une loi Poisson composée de paramètres $(\lambda_{TOT}; F_C)$ où F_C est un mélange de variables aléatoires dégénérées à $b_1, ..., b_n$. Alors, on peut écrire

$$T = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} C_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0, \end{cases}$$

où $M = M_1 + ... + M_n \sim Poisson(\lambda_{TOT} = \lambda_1 + ... + \lambda_n)$ et

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_{TOT}} 1_{[b_1,\infty)}(x) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_{TOT}} 1_{[b_n,\infty)}(x)$$

où

$$1_{[a,\infty)} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq a \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Ensuite, on approxime la variable aléatoire S par la variable aléatoire T. On utilise l'algorithme de Panjer ou la FFT pour calculer les valeurs de f_T avec comme point de départ

$$f_T(0) = \Pr(T = 0) = e^{-\lambda_{TOT}}$$

et pour $k = 1, 2, ...$ et $C \in \{1, 2, ..., r\}$ avec $r = \max(b_1, ..., b_n)$,

$$f_T(k) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{\min(k,r)} j \times f_C(j) f_T(k-j).$$

À noter que si l'on définit les λ_i selon le choix 1, il en résulte que $E[T] = E[S]$. Par contre, si l'on fixe les λ_i selon le choix 2, on a $\Pr(T = 0) = \Pr(S = 0)$.

Exemple 6.34 *On considère un portefeuille de 5 contrats d'assurance vie temporaire 1 an. On détient les informations suivantes:*

i	q_i	b_i
1	0.001	1000
2	0.002	4000
3	0.003	2000
4	0.001	3000
5	0.002	2000.

On approxime S par T et l'on suppose que $\lambda_1, ..., \lambda_5$ sont fixés tel que $E[M_i] = E[I_i]$. Évaluer $f_T(1000k)$ pour $k = 0, 1, 2, ...$avec l'algorithme de Panjer.

Solution. On a $X_i = b_i I_i$ que l'on approxime par $Y_i = b_i M_i$ et par conséquent on approxime $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$ par $T = \sum_{i=1}^{5} Y_i$ où $T \sim$ *Poisson composée*$(\lambda_{TOT}; F_C)$ avec $\lambda_{TOT} = \lambda_1 + ... + \lambda_5 = 0.009$ car $\lambda_1 = q_1 = 0.001, ..., \lambda_5 = q_5 = 0.002$. La variable aléatoire C prend des valeurs dans l'ensemble de toutes les valeurs possibles de prestation $b_1, ..., b_n$:

$$\begin{aligned} F_C(x) &= \sum_{i=1}^{5} \frac{\lambda_i}{\lambda_{TOT}} 1_{[b_i,\infty)}(x) \\ &= \frac{0.001}{0.009} 1_{[1000,\infty)}(x) + \frac{0.002}{0.009} 1_{[4000,\infty)}(x) + \frac{0.003}{0.009} 1_{[2000,\infty)}(x) + \frac{0.001}{0.009} 1_{[3000,\infty)}(x) + \frac{0.002}{0.009} 1_{[2000,\infty)}(x). \end{aligned}$$

Alors,

$$F_C(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & x = 1000 \\ \frac{6}{9}, & x = 2000 \\ \frac{7}{9}, & x = 3000 \\ 1, & x \geq 4000. \end{cases}$$

et également

$$\begin{aligned} f_C(1000) &= \frac{1}{9} \left(\text{aussi} = \frac{0.001}{0.009}\right) \\ f_C(2000) &= \frac{6-1}{9} = \frac{5}{9} \left(\text{aussi} = \frac{0.003 + 0.002}{0.009}\right) \\ f_C(3000) &= \frac{7-6}{9} = \frac{1}{9} \left(\text{aussi} = \frac{0.001}{0.009}\right) \\ f_C(4000) &= \frac{9-7}{9} = \frac{2}{9} \left(\text{aussi} = \frac{0.002}{0.009}\right) \end{aligned}$$

Avec l'algorithme de Panjer donné par

$$f_T(0) = \mathrm{e}^{-\lambda_{TOT}}$$

$$f_T(k) = \frac{\lambda_{TOT}}{k} \sum_{j=1}^{\min(k,r)} j f_C(j) f_T(k-j),$$

on obtient

$$f_T(0) = \mathrm{e}^{-\lambda_{TOT}} = \mathrm{e}^{-0.009}$$

$$f_T(1000) = \left(\frac{\lambda_{TOT}}{1}\right) f_C(1000) f_T(0) = (0.009) \left(\frac{1}{9}\right) \left(\mathrm{e}^{-0.009}\right)$$

$$\begin{aligned} f_T(2000) &= \left(\frac{\lambda_{TOT}}{2}\right) \left(f_C(1000) f_T(1000) + 2 f_C(2000) f_T(0)\right) \\ &= \left(\frac{0.009}{2}\right) \left(\left(\frac{1}{9}\right) \left(0.001\mathrm{e}^{-0.009}\right) + (2) \left(\frac{5}{9}\right) \left(\mathrm{e}^{-0.009}\right)\right) \end{aligned}$$

■

Exemple 6.35 *Supposons un portefeuille d'assurance vie divisé en 5 classes tel que*

i	q_i	b_i	n_i
1	0.001	4000	28
2	0.002	2000	45
3	0.003	1000	32
4	0.001	3000	17
5	0.002	1000	54

.

Utiliser l'approximation Poisson composée pour approximer f_S. Fixer les paramètres λ_i en supposant $E[M_i] = E[I_i]$, soit $\lambda_i = q_i$.

Solution. On a $X_i = b_i I_i$ que l'on approxime par $Y_i = b_i M_i$ et par conséquent on approxime $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$ par $T = \sum_{i=1}^{5} Y_i$ où $T \sim$ *Poisson composée*$(\lambda_{TOT}; F_C)$ avec

$$\begin{aligned} \lambda_{TOT} &= n_1\lambda_1 + ... + n_5\lambda_5 \\ &= (28)(0.001) + (45)(0.002) + (32)(0.003) + (17)(0.001) + (54)(0.002) \\ &= 0.339. \end{aligned}$$

La variable aléatoire C prend des valeurs dans l'ensemble de toutes les valeurs possibles de prestation $b_1, ..., b_n$:

$$\begin{aligned} f_C(1000) &= \frac{n_3\lambda_3 + n_5\lambda_5}{\lambda_{TOT}} = \frac{(32)(0.003) + (54)(0.002)}{0.339} = 0.6018 \\ f_C(2000) &= \frac{n_2\lambda_2}{\lambda_{TOT}} = \frac{(45)(0.002)}{0.339} = 0.2655 \\ f_C(3000) &= \frac{n_4\lambda_4}{\lambda_{TOT}} = \frac{(17)(0.001)}{0.339} = 0.05015 \\ f_C(4000) &= \frac{n_1\lambda_1}{\lambda_{TOT}} = \frac{(28)(0.001)}{0.339} = 0.0826 \end{aligned}$$

Avec l'algorithme de Panjer donné par

$$f_T(0) = \mathrm{e}^{-\lambda_{TOT}}$$

$$f_T(k) = \frac{\lambda_{TOT}}{k} \sum_{j=1}^{\min(k,r)} j f_C(j) f_T(k-j)$$

on obtient

$$f_T(0) = \mathrm{e}^{-\lambda_{TOT}} = \mathrm{e}^{-0.339} = 0.71248$$

$$\begin{aligned} f_T(1000) &= \left(\frac{\lambda_{TOT}}{1}\right) f_C(1000) f_T(0) \\ &= (0.339)(0.6018)\left(\mathrm{e}^{-0.339}\right) \\ &= 0.14535 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} f_T(2000) &= \left(\frac{\lambda_{TOT}}{2}\right)(f_C(1000) f_{TOT}(1000) + 2 f_C(2000) f_{T_{TOT}}(0)) \\ &= \left(\frac{0.339}{2}\right)((0.6018)(0.14535) + (2)(0.2655)(0.71248)) \\ &= 0.07895. \end{aligned}$$

Dans le prochain exemple, on présente une application élaborée de l'approximation Poisson composée permettant de comparer les valeurs résultant de l'approximation avec les valeurs exactes qui ont été obtenues en utilisant directement la FFT.

Exemple 6.36 *On considère un portefeuille d'assurance vie temporaire 1 an de 100 participants. Les montants de prestation (exprimés en multiples de 10 000) sont 1, 2, 3, 4 et 5. Les participants peuvent être âgés de 25, 35 ou 45 ans. Les taux de décès proviennent de la table de mortalité GAM-83. La répartition des participants par âge et montant de prestation est présentée dans le tableau suivant :*

montant	$q_{25} = 0.000464$	$q_{35} = 0.00086$	$q_{45} = 0.002183$	*Total*
10 000	*4*	*5*	*8*	*17*
20 000	*8*	*10*	*6*	*24*
30 000	*7*	*9*	*5*	*21*
40 000	*4*	*7*	*10*	*21*
50 000	*5*	*6*	*6*	*17*
Total	*28*	*37*	*35*	*100*

Le support du montant total des sinistres S est $\{0, 10\ 000, 20\ 000, ..., 2\ 970\ 000\}$. L'espérance et l'écart type de S sont $E[S] = 3600$ et $\sqrt{\mathrm{Var}(S)} = 11\ 445.26$. Dans le tableau suivant, les valeurs exactes de F_S sont obtenues avec la FFT et les valeurs de F_T ont été produites avec l'algorithme de Panjer où l'on suppose que $\lambda_i = q_i$ pour $i = 1, 2, ..., 100$) :

k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$	k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$
0	*0.88575*	*0.88584*	*9*	*0.99972*	*0.99970*
1	*0.90671*	*0.90677*	*10*	*0.99993*	*0.99992*
2	*0.92948*	*0.92952*	*11*	*0.99996*	*0.99996*
3	*0.94945*	*0.94946*	*12*	*0.99998*	*0.99998*
4	*0.97654*	*0.97652*	*13*	*0.99999*	*0.99999*
5	*0.99593*	*0.99588*	*14*	*1.00000*	*1.00000*
6	*0.99725*	*0.99721*	*15*	*1.00000*	*1.00000*
7	*0.99832*	*0.99828*	..	...	...
8	*0.99913*	*0.99911*	*297*	*1.00000*	*1.00000*

On constate que les valeurs de F_T sont très près de F_S, ce qui justifie fortement l'utilisation de l'approximation Poisson composée.

On multiplie le nombre de participants dans chaque classe du régime par 5. Le nombre total de participants passe à 500. Le support pour la variable aléatoire S devient $\{0, 10\ 000, 20\ 000, ..., 14\ 850\ 000\}$. L'espérance et l'écart type de S sont $E[S] = 18\ 100$ et $\sqrt{\mathrm{Var}(S)} = 25\ 592.4$. Les valeurs exactes de F_S obtenues avec la FFT et les valeurs de F_T produites avec l'algorithme de Panjer selon l'approche où $\lambda_i = q_i$ pour $i = 1, 2, ..., 500$ sont présentées dans le tableau suivant :

k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$	k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$
0	0.54521	0.54548	15	0.99951	0.99950
1	0.60971	0.60990	20	0.99998	0.99998
2	0.68284	0.68301	21	0.99999	0.99999
3	0.75099	0.75108	22	0.99999	0.99999
4	0.84404	0.84405	23	1.00000	1.00000
5	0.91838	0.91829	...	...	...
10	0.99211	0.99205	1485	1.00000	1.00000

La qualité de l'approximation de F_S par F_T demeure excellente. □

6.7.2 Cas général

On définit les coûts du portefeuille par la variable aléatoire $S = X_1 + ... + X_n$ où

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases}, \ (i = 1, ..., n).$$

On procède en deux étapes pour définir la variable aléatoire T de la loi Poisson composée qui approxime la variable aléatoire S. La première étape réside à approximer chaque variable aléatoire X_i par une variable aléatoire Y_i définie par

$$Y_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M_i} B_{i,j}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où la variable aléatoire $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ et $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... est une suite de variables aléatoires i.i.d. (convention : $B_{i,j} \sim B_i$) indépendantes de M_i. Comme précédemment, on peut faire les choix 1 et 2 pour définir λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

À la deuxième étape, on définit la variable aléatoire T comme étant la somme des variable aléatoire Y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ de la loi Poisson composée, soit $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. On déduit que $T \sim PComp(\lambda, F_C)$ avec $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} F_{B_1}(x) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda} F_{B_n}(x).$$

On utilise l'algorithme de Panjer ou la FFT pour évaluer f_T. Si les variable aléatoire B_1, ..., B_n sont continues, la variable aléatoire C est aussi continue. Il suffit de discrétiser F_C et d'appliquer l'algorithme de Panjer ou la FFT pour une loi Poisson composée.

Exemple 6.37 *On considère un portefeuille de* 6 *contrats d'assurance habitation volet incendie. On suppose* $B_i \in \{100, 200, 300\}$ *et qu'il ne peut pas y avoir plus d'un incendie par période. De plus, on détient les informations suivantes:*

i	q_i	$f_{B_i}(100)$	$f_{B_i}(200)$	$f_{B_i}(300)$
1	0.01	0.2	0.3	0.5
2	0.02	0.5	0.4	0.1
3	0.03	0.3	0.3	0.4
4	0.01	0.4	0.5	0.1
5	0.02	0.2	0.2	0.6
6	0.03	0.6	0.3	0.1

On définit $S = X_1 + ... + X_n$ *et l'on approxime* S *par* T *où*

$$T = Y_1 + ... + Y_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} C_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

tel que $M \sim Poisson(\lambda_1 + ... + \lambda_6)$. *On fixe* $\Pr(M_i = 0) = \Pr(I_i = 0)$. *Approximer* F_S *à l'aide de l'approximation Poisson composée.*

Solution. On fixe $\Pr(M_i = 0) = \Pr(I_i = 0)$ ce qui conduit à $\lambda_i = -\ln(1 - q_i)$, $i = 1, 2, ..., 6$ et également

$$\begin{aligned} \lambda_{TOT} &= \lambda_1 + ... + \lambda_6 \\ &= -\ln(0.99) - \ln(0.98) - ... - \ln(0.97) \\ &= 0.1214. \end{aligned}$$

De plus, la variable aléatoire C prend des valeurs dans $\{100, 200, 300\}$

$$\begin{aligned} f_C(100) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_{TOT}} f_{B_1}(100) + ... + \frac{\lambda_6}{\lambda_{TOT}} f_{B_6}(100) \\ &= \left(\frac{-\ln(0.99)}{0.1214}\right)(0.2) + ... + \left(\frac{-\ln(0.97)}{0.1214}\right)(0.6) \\ &= 0.3919. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_C(200) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_{TOT}} f_{B_1}(200) + ... + \frac{\lambda_6}{\lambda_{TOT}} f_{B_6}(200) \\ &= \left(\frac{-\ln(0.99)}{0.1214}\right)(0.3) + ... + \left(\frac{-\ln(0.97)}{0.1214}\right)(0.3) \\ &= 0.3165. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_C(300) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_{TOT}} f_{B_1}(300) + ... + \frac{\lambda_6}{\lambda_{TOT}} f_{B_6}(300) \\ &= \left(\frac{-\ln(0.99)}{0.1214} \right) (0.5) + ... + \left(\frac{-\ln(0.97)}{0.1214} \right) (0.1) \\ &= 0.2916. \end{aligned}$$

On a donc $T \in \{0, 100, 200, ..., 1800\}$ et avec l'algorithme de Panjer, on obtient

$$\begin{aligned} f_T(0) &= \mathrm{e}^{-\lambda_{TOT}} \\ &= \mathrm{e}^{-0.1214} \\ &= 0.8857 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_T(100) &= \lambda_{TOT} f_C(100) f_{TOT}(0) \\ &= (0.1214)(0.3919)\left(\mathrm{e}^{-0.1214}\right) \\ &= 0.8857. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_T(200) &= \frac{\lambda_{TOT}}{2} \left(f_C(100) f_{TOT}(100) + 2 f_C(200) f_{TOT}(0) \right) \\ &= \left(\frac{0.1214}{2} \right) \left((0.3919)(0.04214) + (2)(0.3165)\left(\mathrm{e}^{-0.1214}\right) \right) \\ &= 0.035 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_T(300) &= ... \\ &\vdots \\ f_T(1800) &= ... \end{aligned}$$

■

Exemple 6.38 *On suppose un portefeuille constitué de 3 classes de contrats en assurance habitation. Les coûts pour le contrat i de la classe j sont définis par*

$$X_i^{(j)} = \begin{cases} B_i^{(j)}, \ I_i^{(j)} = 1 \\ 0, \ I_i^{(j)} = 0 \end{cases}$$

où $B_i^{(j)} = 500 U_i^{(j)}$ $(i = 1, ..., n^{(j)}; j = 1, 2, 3)$ pour un bâtiment d'une valeur de 500\$ et une proportion de dommage de $U_i^{(j)}$. Pour $j = 1, 2, 3$, $q_i^{(j)} = q^{(j)}$ et $U_i^{(j)} \sim U^{(j)} \in (0, 1)$, on a

j	$q^{(j)}$	$F_{U^{(j)}}(x)$	$n^{(j)}$
1	0.01	x^4	*41*
2	0.02	x^3	*57*
3	0.03	x^2	*62*

Approximer F_S à l'aide de l'approximation Poisson composée.

Solution. On approxime $S = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n^{(j)}} X_i^{(j)}$ par $T = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n^{(j)}} Y_i^{(j)}$ où Y_i obéit à une loi Poisson composée et donc on peut écrire

$$T = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} C_k, \ M > 0 \\ 0, \ M = 0, \end{cases} ,$$

où

$$\begin{aligned} M &\sim Poisson(\lambda_{TOT}), \\ \lambda_{TOT} &= \sum_{j=1}^{3} n^{(j)}\lambda^{(j)} \text{ avec } \lambda^{(j)} = q^{(j)} \text{ ou } \lambda^{(j)} = -\ln(1-q^{(j)}), \\ F_C(x) &= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{n^{(j)}\lambda^{(j)}}{\lambda_{TOT}}\right) F_{B^{(j)}}(x). \end{aligned}$$

F_C est donc un mélange de 3 fonctions de répartition continues

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \text{on doit approximer } C \text{ par } \widetilde{C}^{(u)} \text{ et/ou } \widetilde{C}^{(l)} \\ &\Rightarrow \quad \text{on approxime } T \text{ par } \widetilde{T}^{(u)} \text{ et/ou } \widetilde{T}^{(l)}. \end{aligned}$$

Considérons l'approximation de C par $\widetilde{C}^{(l)}$ (c'est-à-dire pas de masse à zéro). Prenons un pas de discrétisation $h = 100$. Alors, $f_{\widetilde{C}^{(l)}}(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{C}^{(l)}}(100) &= F_{\widetilde{C}^{(l)}}(100) = F_C(100) \\ &= \frac{n^{(1)}\lambda^{(1)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(1)}}(100) + \frac{n^{(2)}\lambda^{(2)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(2)}}(100) + \frac{n^{(3)}\lambda^{(3)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(3)}}(100), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} F_{B^{(j)}}(x) &= \Pr(B^{(j)} \leq x) \\ &= \Pr(500U^{(j)} \leq x) \\ &= F_{U^{(j)}}\left(\frac{x}{500}\right). \end{aligned}$$

et l'on prend $\lambda^{(j)} = q^{(j)}$, d'où $\lambda_{TOT} = \sum_{j=1}^{3} n^{(j)}\lambda^{(j)} = 3.41$. On obtient donc

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{C}^{(l)}}(100) &= \frac{(41)\,(0.01)}{3.41}\left(\frac{100}{500}\right)^4 + \frac{(57)\,(0.02)}{3.41}\left(\frac{100}{500}\right)^3 + \frac{(62)\,(0.03)}{3.41}\left(\frac{100}{500}\right)^2 \\ &= 0.02468. \end{aligned}$$

Pour $f_{\widetilde{C}^{(l)}}(200)$, on a

$$f_{\widetilde{C}^{(l)}}(200) = F_{\widetilde{C}^{(l)}}(200) - F_{\widetilde{C}^{(l)}}(100) = F_C(200) - F_C(100),$$

où

$$\begin{aligned} F_C(200) &= \frac{n^{(1)}\lambda^{(1)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(1)}}(200) + \frac{n^{(2)}\lambda^{(2)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(2)}}(200) + \frac{n^{(3)}\lambda^{(3)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(3)}}(200) \\ &= \frac{(41)\,(0.01)}{3.41}\left(\frac{200}{500}\right)^4 + \frac{(57)\,(0.02)}{3.41}\left(\frac{200}{500}\right)^3 + \frac{(62)\,(0.03)}{3.41}\left(\frac{200}{500}\right)^2 \\ &= 0.11175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{C}^{(l)}}(200) &= 0.11175 - 0.02468 \\ &= 0.08707. \end{aligned}$$

Pour $f_{\widetilde{C}^{(l)}}(300)$, on a

$$f_{\widetilde{C}^{(l)}}(300) = F_{\widetilde{C}^{(l)}}(300) - F_{\widetilde{C}^{(l)}}(200) = F_C(300) - F_C(200)$$

où

$$
\begin{aligned}
F_C(300) &= \frac{n^{(1)}\lambda^{(1)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(1)}}(300) + \frac{n^{(2)}\lambda^{(2)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(2)}}(300) + \frac{n^{(3)}\lambda^{(3)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(3)}}(300) \\
&= \frac{(41)\,(0.01)}{3.41}\left(\frac{300}{500}\right)^4 + \frac{(57)\,(0.02)}{3.41}\left(\frac{300}{500}\right)^3 + \frac{(62)\,(0.03)}{3.41}\left(\frac{300}{500}\right)^2 \\
&= 0.28416
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\widetilde{C}^{(l)}}(300) &= 0.28416 - 0.11175 \\
&= 0.17241
\end{aligned}
$$

Pour $f_{\widetilde{C}^{(l)}}(400)$, on a

$$
f_{\widetilde{C}^{(l)}}(400) = F_{\widetilde{C}^{(l)}}(400) - F_{\widetilde{C}^{(l)}}(300) = F_C(400) - F_C(300)
$$

où

$$
\begin{aligned}
F_C(400) &= \frac{n^{(1)}\lambda^{(1)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(1)}}(400) + \frac{n^{(2)}\lambda^{(2)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(2)}}(400) + \frac{n^{(3)}\lambda^{(3)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(3)}}(400) \\
&= \frac{(41)\,(0.01)}{3.41}\left(\frac{400}{500}\right)^4 + \frac{(57)\,(0.02)}{3.41}\left(\frac{400}{500}\right)^3 + \frac{(62)\,(0.03)}{3.41}\left(\frac{400}{500}\right)^2 \\
&= 0.56951
\end{aligned}
$$

Pour $f_{\widetilde{C}^{(l)}}(500)$, on a

$$
f_{\widetilde{C}^{(l)}}(500) = F_{\widetilde{C}^{(l)}}(500) - F_{\widetilde{C}^{(l)}}(400) = F_C(500) - F_C(400)
$$

où

$$
\begin{aligned}
F_C(500) &= \frac{n^{(1)}\lambda^{(1)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(1)}}(500) + \frac{n^{(2)}\lambda^{(2)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(2)}}(500) + \frac{n^{(3)}\lambda^{(3)}}{\lambda_{TOT}} F_{B^{(3)}}(500) \\
&= \frac{(41)\,(0.01)}{3.41}\left(\frac{500}{500}\right)^4 + \frac{(57)\,(0.02)}{3.41}\left(\frac{500}{500}\right)^3 + \frac{(62)\,(0.03)}{3.41}\left(\frac{500}{500}\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\widetilde{C}^{(l)}}(500) &= 1 - 0.56951 \\
&= 0.43049.
\end{aligned}
$$

Ensuite, on applique l'algorithme de Panjer comme suit:

$$
\begin{aligned}
f_{\widetilde{T}}(0) &= \mathrm{e}^{-\lambda_{TOT}} = \mathrm{e}^{-3.41} \\
f_{\widetilde{T}}(100) &= \lambda_{TOT} f_{\widetilde{C}^{(l)}}(100) f_{\widetilde{T}}(0) = (3.41)\,(0.02468)\left(\mathrm{e}^{-3.41}\right) = 0.007807 \\
f_{\widetilde{T}}(200) &= \left(\frac{\lambda_{TOT}}{2}\right)\left(f_{\widetilde{C}^{(l)}}(100) f_{\widetilde{T}}(100) + 2 f_{\widetilde{C}^{(l)}}(200) f_{\widetilde{T}}(0)\right) \\
&= \frac{3.41}{2}\left((0.02468)\,(0.007807) + (2)\,(0.08707)\left(\mathrm{e}^{-3.41}\right)\right) \\
&= 0.010139 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

■

Exemple 6.39 *Les coûts pour un portefeuille composé de 200 titres avec risques de défaut répartis en 8 classes sont définis par la variable aléatoire S où*

$$S = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{i,j,k}.$$

La variable aléatoire $X_{i,j,k}$ représente les pertes éventuelles pour le titre k de la classe (i,j), avec $k = 1,2,...,n_{ij}$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ et $j = 1,\ 2$. On définit $X_{i,j,k} = B_{i,j,k} I_{i,j,k}$ avec $I_{i,j,k} \sim Bern(q_j)$ et $B_{i,j,k} \sim B_i$, $k = 1,2,...,n_{ij}$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ et $j = 1,\ 2$. Selon les caractéristiques du titre, la probabilité de défaut est q_j, où q_j = 0.01 ou 0.05. De plus, les coûts résultants d'un défaut B_i prennent des valeurs qui n'excèdent par leur capital en vigueur $m_i \in \{1000, 2000, 5000, 10\ 000\}$. La fonction de masse de probabilité de B_j est désignée par f_{B_i} $(i = 1,\ 2, 3, 4)$. Les informations à propos du portefeuille sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

i	j	q_j	m_i	n_{ij}	i	j	q_j	m_i	n_{ij}
1	1	0.01	1000	30	1	2	0.05	1000	10
2	1	0.01	2000	40	2	2	0.05	2000	20
3	1	0.01	5000	25	3	2	0.05	5000	35
4	1	0.01	10 000	25	4	2	0.05	10 000	15

De plus, on a les informations suivantes :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{B_1}(1000k)$	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$f_{B_2}(1000k)$	0.6	0.4	–	–	–	–	–	–	–	–
$f_{B_3}(1000k)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	–	–	–	–	–
$f_{B_4}(1000k)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05

On construit l'approximation Poisson composée en définissant les paramètres de la loi de Poisson selon le choix 1. On déduit que $\lambda = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} n_{ij} q_j = 5.2$ et

$$\begin{aligned} f_C(1000k) &= \frac{0.8}{5.2} f_{B_1}(1000k) + \frac{1.4}{5.2} f_{B_2}(1000k) \\ &\quad + \frac{2}{5.2} f_{B_3}(1000k) + \frac{0.95}{5.2} f_{B_4}(1000k), \end{aligned}$$

pour $k = 1,2,...,10$ et $f_C(k) = 0$ ailleurs. Les valeurs de $F_S(k)$ (exactes, obtenues avec FFT) et $F_T(k)$ (résultant de l'approximation) sont indiquées ci-dessous :

0	$F_S(1000k)$	$F_T(1000k)$
0	0.004944	0.005517
10	0.345661	0.350454
20	0.804856	0.802274
30	0.969703	0.967215
40	0.997156	0.996545
50	0.999822	0.999744

On apprécie la qualité de l'approximation Poisson composée. À partir des valeurs obtenues, on détermine que $E[T] = 14.26$, qui est égale à $E[S]$ puisque l'approximation est bâtie sur le choix 1.

6.8 Distribution mélange d'Erlang

6.8.1 Définition de base

Soit la variable aléatoire Y dont la fonction de densité et la fonction de répartition sont respectivement

$$f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k h(x; k, \beta) \text{ et } F_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x; k, \beta),$$

où ζ_k est un poids positif attribué à la k-ème distribution d'Erlang et β est le paramètre d'échelle commun. La v.a Y est dit obéir à une loi mélange d'Erlang de paramètres $\underline{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, ...)$ et β. On utilise la notation

$Y \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta\right)$. On peut aussi tenir compte du cas où il y a une masse de probabilité non nulle à 0, ce qui conduit à

$$F_Y(x) = \zeta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x; k, \beta),$$

où $\zeta_0 = \Pr(K = 0) \geq 0$.

6.8.2 Somme aléatoire

La loi mélange d'Erlang s'interprète aussi comme une somme aléatoire où

$$Y = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{K} C_k, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases}, \tag{6.25}$$

où

- K est une variable aléatoire discrète dont la fonction de masse de probabilité est

  $$f_K(k) = \Pr(K = k) = \zeta_k, k \in \mathbb{N},$$

  et la f.g.p. est $P_K(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k s^k$
- $C_k \sim Exp(\beta)$
- $C_1, C_2, ...$ forment une suite de v.a i.i.d et indépendantes de K

À noter que la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y est

$$M_Y(t) = P_K(M_C(t))$$

avec $M_C(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$.

L'interprétation de la distribution mélange d'Erlang sous la forme d'une somme aléatoire permet notamment d'écrire directement l'expression pour la $TVaR_\kappa(Y)$

$$TVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \frac{k}{\beta} \overline{H}\left(VaR_\kappa(Y); k+1, \beta\right).$$

Les autres caractéristiques de la distribution sont fournies en annexe de Marceau (2013).

6.8.3 Théorème de Tijms

La classe des distributions mélange d'Erlang est dense dans la classe des distributions avec support positif comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 6.40 ***Théorème de Tijms***. *Soit une variable aléatoire positive X avec une fonction de répartition F_X. On définit la fonction de répartition F_h par*

$$F_h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(F_X(jh) - F_X((j-1)h)\right) H\left(x; j, \frac{1}{h}\right), \; x \geq 0.$$

Alors, on a

$$\lim_{h \to 0} F_h(x) = F_X(x),$$

en tout point de continuité x de F_X.

Il est donc possible d'approximer toute distribution avec support positif par une distribution mélange d'Erlang ayant le **même** paramètre d'échelle. La classe des distributions mélange d'Erlang contient bien entendu la distribution exponentielle et la distribution Erlang comme cas particulier.

6.8.4 Mélange d'exponentielles

La distribution mélange d'exponentielles fait aussi partie de la classe mélange d'Erlang.

Proposition 6.41 ***Mélange d'exponentielles.*** *Soit une variable aléatoire Y obéissant à une loi mélange d'exponentielles avec*

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x},$$

où $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ et $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. De plus, on suppose que $\beta_i < \beta_m$ pour $i = 1, 2, ..., m-1$ (sans perte de généralité). Alors, on démontre que $Y \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta_m\right)$ avec $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) + p_m$, et

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1}, \tag{6.26}$$

pour $k \in \{2, 3, ...\}$. On cesse de calculer les valeurs de ζ_k à k_0 de telle sorte que $\sum_{k=1}^{k_0} \zeta_k = 1$.

Preuve. La fonction génératrice des moments de Y est donnée par

$$M_Y(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\beta_i}{\beta_i - t}. \tag{6.27}$$

Pour $i = 1, 2, ..., m-1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_i}{\beta_i - t} &= \frac{\beta_m}{\beta_m - t}\left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta_m}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)\frac{\beta_m}{\beta_m - t}}\right) \\
&= \frac{\beta_m}{\beta_m - t}\frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^k \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k \\
&= \frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^k \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^{k+1} \\
&= \frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^{k}.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\beta_i}{\beta_i - t} \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} p_i \frac{\beta_i}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k \\
&= p_1 \frac{\beta_1}{\beta_m} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{1-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^1 + \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{2-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^2 + \ldots \right\} \\
&\quad + p_2 \frac{\beta_2}{\beta_m} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{1-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^1 + \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{2-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^2 + \ldots \right\} \\
&\quad + p_3 \frac{\beta_3}{\beta_m} \left\{ \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_m}\right)^{1-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^1 + \left(1 - \frac{\beta_3}{\beta_m}\right)^{2-1} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^2 + \ldots \right\} \\
&\quad + \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \left\{ p_1 \frac{\beta_1}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{1-1} + p_2 \frac{\beta_2}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{1-1} + \ldots + p_m \frac{\beta_m}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_m}\right)^{1-1} \right\} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^1 \\
&\quad + \left\{ p_1 \frac{\beta_1}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{2-1} + p_2 \frac{\beta_2}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{2-1} + \ldots + p_m \frac{\beta_m}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_m}\right)^{2-1} \right\} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^2 \\
&\quad + \left\{ p_1 \frac{\beta_1}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_m}\right)^{3-1} + p_2 \frac{\beta_2}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_m}\right)^{3-1} + \ldots + p_m \frac{\beta_m}{\beta_m} \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_m}\right)^{3-1} \right\} \left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^3 \\
&\quad + \ldots
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la fonction génératrice des moments d'une loi mélange d'Erlang dont le paramètre d'échelle est β_m. ■

Ce résultat est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 6.42 *Soit la variable aléatoire Y obéissant au mélange d'exponentielles dont la fonction de densité est*

$$f_Y(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-\frac{1}{24}x}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}\right), \quad x \geq 0.$$

Alors, on $Y \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta_2 = \frac{1}{6}\right)$ et

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= p_1 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + p_2 \\
&= \left(\frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{24}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} + \frac{2}{3} \\
&= 0.75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= p_1 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\left(1-\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{24}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(1-\frac{\left(\frac{1}{24}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= 0.0625 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La fonction de densité de la variable aléatoire Y peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
f_Y(x) &= 0.75h\left(x;1,6^{-1}\right)+0.0625h\left(x;2,6^{-1}\right)+... \\
&\quad +\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^9 h\left(x;10,6^{-1}\right)+...+\frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{99} h\left(x;100,6^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Pour cet exemple, on observe que $\sum_{k=1}^{100}\zeta_k = 1$. $\square$

6.8.5 Somme aléatoire de variables aléatoires mélange d'Erlang

Proposition 6.43 ***Distribution composée avec montants de sinistres de loi mélange d'Erlang.*** *Soit une variable aléatoire X qui obéit à une loi composée telle que*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M>1 \\ 0, & M=0 \end{cases},$$

où $B \sim MixErl\left(\underline{\zeta},\beta\right)$ avec $\underline{\zeta}=(\zeta_0,\zeta_1,...)$. Alors, on a

$$X \sim MixErl\left(\underline{\xi},\beta\right) \text{ avec } \underline{\xi}=(\xi_0,\xi_1,...).$$

Preuve. On utilise la fonction génératrice des moments pour démontrer le résultat. On sait que

$$M_X(t) = P_M(M_B(t))$$

où, étant donné que $B \sim MixErl\left(\underline{\zeta},\beta\right)$, on a

$$M_B(t) = P_K(M_C(t))$$

car

$$B = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} C_k, & K>0 \\ 0, & K=0 \end{cases},$$

où $C_k \sim C \sim Exp(\beta)$ et K est une variable aléatoire discrète avec fonction de masse $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,...)$. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= P_M(M_B(t)) \\
&= P_M(P_K(M_C(t))) \\
&= P_L(M_C(t))
\end{aligned}$$

où $P_L(t) = P_M(P_k(t))$ est la fonction génératrice des probabilités d'une variable aléatoire discrète L définie par

$$L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M>0 \\ 0, & M=0 \end{cases}$$

où $K_j \sim K$. On peut donc conclure que $X \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$ avec

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{L} C_j, & L > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}$$

où la variable aléatoire discrète L est définie par

$$L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases} \tag{6.29}$$

et K_1, K_2, ... forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées comme la variable aléatoire K. La fonction de masse de probabilité de L est désignée par $\Pr(L = k) = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. Les variable aléatoire C_1, C_2, ... sont indépendantes et identiquement distribuées comme la variable aléatoire $C \sim Exp(\beta)$. Les valeurs de ξ_k $(k \in \mathbb{N})$ sont calculées avec l'algorithme de Panjer (si la distribution de M appartient à la classe (a,b,0)) ou la FFT. ■

Remarque 6.44 *Regardons plus en détails le résultat de la proposition ci-dessous par le biais d'un exemple...*

Exemple 6.45 *Soit les variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 et X_3 où $X_i \sim PoissonComp(\lambda_i, F_{B_i})$ et $B_i \sim Erlang(i, \beta)$. On suppose $\beta = \frac{1}{1000}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 1$. On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$. Alors, $S \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$.*

Solution. On a $S \sim PoissonComp(\lambda_S; F_C)$ où $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6$ et

$$\begin{aligned} F_C(x) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{\lambda_S} F_{B_i}(x) \\ &= \frac{3}{6} H(x; 1, \beta) + \frac{2}{6} H(x; 2, \beta) + \frac{1}{6} H(x; 3, \beta). \end{aligned}$$

On observe que $C \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$ où $\underline{\xi} = \left(\xi_0 = 0, \xi_1 = \frac{3}{6}, \xi_2 = \frac{2}{6}, \xi_3 = \frac{1}{6}\right)$ et $\beta = \frac{1}{1000}$. On peut donc écrire

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} C_j, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

où $N \sim Poisson(\lambda_S = 6)$ et $C_j \sim C \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$. On a donc que la variable aléatoire S correspond à une somme aléatoire de variables aléatoires mélange d'Erlang et peut s'écrire comme suit

$$F_S(x) = \Pr(N = 0) + \Pr(N = 1) F_C(x) + \Pr(N = 2) F_{C_1 + C_2}(x) + ...$$

On doit trouver la distribution de la somme $C_1 + C_2$ ...

$$\begin{aligned}
M_{C_1+C_2}(t) &= E\left[e^{t(C_1+C_2)}\right] \\
&= E\left[e^{tC_1}\right] E\left[e^{tC_2}\right] \\
&= (M_C(t))^2 \\
&= \left(\frac{3}{6}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right) + \frac{2}{6}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^3\right)^2 \\
&= \left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^2\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^4 + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^2\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^3\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^3\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{C_1+C_2}(t) &= E\left[e^{t(C_1+C_2)}\right] \\
&= \left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^2 \\
&\quad + \left(\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^3 \\
&\quad + \left(\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^4 \\
&\quad + \left(\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\right)\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^5 \\
&\quad + \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^6
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
F_{C_1+C_2}(x) &= (\xi_1)^2 H(x;2,\beta) \\
&\quad + ((\xi_1)(\xi_2) + (\xi_2)(\xi_1)) H(x;3,\beta) \\
&\quad + \left((\xi_1)(\xi_3) + (\xi_3)(\xi_1) + (\xi_2)^2\right) H(x;4,\beta) \\
&\quad + ((\xi_2)(\xi_3) + (\xi_3)(\xi_2)) H(x;5,\beta) \\
&\quad + (\xi_3)^2 H(x;6,\beta)
\end{aligned}$$

et par conséquent $(C_1 + C_2) \sim MixErl\left(\underline{\eta} = (\eta_2, ..., \eta_6); \beta\right)$. Mais...ceci revient à utiliser la proposition précédente dans laquelle on a

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{L} C_j, & L > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}$$

où L est une variable aléatoire discrète et $C_j \sim C \sim Exp(\beta)$. Ainsi,

$$F_S(x) = \Pr(L=0) + \Pr(L=1) H(x;1,\beta) + \Pr(L=2) H(x;2,\beta) + ...$$

où $\Pr(L=k)=\xi_k$. Mais...comment trouver les valeurs des poids ξ_k? On sait que

$$L=\begin{cases}\sum_{j=1}^{M}K_j, & M>0\\ 0, & L=0\end{cases}$$

où $\Pr(L=k)=\xi_k$. On peut utiliser la FFT ou si la variable aléatoire M appartient à la famille $(a,b,0)$, on peut utiliser l'algorithme de Panjer comme suit:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \Pr(L=0)\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda_S}\\ &= \mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \Pr(L=1)\\ &= \frac{\lambda_s}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_K(j)\, f_L(k-j)\\ &= (6)(1)\, f_K(1)\, f_L(0)\\ &= (6)(1)\left(\frac{3}{6}\right)\mathrm{e}^{-6}\\ &= 3\mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \Pr(L=2)\\ &= \frac{\lambda_s}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_K(j)\, f_L(k-j)\\ &= \left(\frac{6}{2}\right)\left((1)\, f_K(1)\, f_L(1)+(2)\, f_K(2)\, f_L(0)\right)\\ &= (3)\left(\left(\frac{3}{6}\right)(3)\,\mathrm{e}^{-6}+(2)\left(\frac{2}{6}\right)\mathrm{e}^{-6}\right)\\ &= \frac{13}{2}\mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_3 &= \Pr(L=3)\\ &\vdots\end{aligned}$$

■

Exemple 6.46 *Soit les variables aléatoires indépendantes* $X_i \sim PoissonComp(\lambda_i, F_{B_i})$ *avec* $\lambda_i = i$ *et* $B_i \sim Erl\left(6-i, \frac{1}{100}\right)$ *pour* $i=1,2,...,5$. *La variable aléatoire* $S=\sum_{i=1}^{5} X_i \sim PoissonComp(\lambda=15, F_D)$ *où* $F_D(x)=\sum_{i=1}^{5}\frac{\lambda_i}{15}H\left(x;6-i,\frac{1}{100}\right)$. *En appliquant la proposition 6.43, S obéit aussi à une loi* $MixErl\left(\underline{\xi}, \beta=\frac{1}{100}\right)$. *On indique quelques valeurs de* ξ_k *pour* $k=0,1,2,20,21,22$ *dans le tableau suivant :*

k	0	1	2
ξ_k	3.059×10^{-7}	1.5295×10^{-6}	5.0474×10^{-6}
k	20	21	22
ξ_k	0.01444919	0.01693319	0.01952672

On déduit les valeurs suivantes de $VaR_\kappa(S)$ *pour* $\kappa=0.5,\ 0.95,\ 0.995$ *: 3409.363, 5589.821, 7031.789.* □

6.8.6 Somme finie de variables aléatoires mélange d'Erlang

Proposition 6.47 ***Somme finie de variable aléatoire obéissant à des mélanges d'Erlang.*** *On considère un portefeuille de n risques indépendants X_1, ..., X_n où $X_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta\right)$ avec $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, ...\right)$ et $\zeta_k^{(i)} = \Pr(K_i = k)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors,*

$$S \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$$

avec $\underline{\nu} = (\nu_0, \nu_1, ...)$. Ainsi, la variable aléatoire S obéit aussi à un mélange d'Erlang avec

$$\nu_k = \Pr(K_1 + ... + K_n = k), \ k \in \mathbb{N}.$$

Preuve. En effet, on a

$$\begin{aligned} M_S(r) &= E\left[\mathrm{e}^{rS}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{rX_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P_{K_i}(M_C(r)) = P_{K_1+...+K_n}(M_C(r)), \end{aligned}$$

où $P_{K_1+...+K_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k s^k$ est la fonction génératrice des probabilités de $K_1 + ... + K_n$. Les valeurs de ν_k sont obtenues, soit avec l'algorithme de produit de convolution, soit avec la FFT. □ ■

Corollaire 6.48 *Soit les variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 où*

$$Y_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta\right)$$

où $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, ...\right)$ pour $i = 1, 2$. On définit $S = Y_1 + Y_2$. Alors, on peut définir la variable aléatoire S comme suit

$$S = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} C_j, \ N > 0 \\ 0, \ N = 0 \end{cases}$$

où $\Pr(N = k) = \nu_k$ et donc $S \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$.

Preuve. On a

$$Y_i \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{K_i} C_j, \ K_i > 0 \\ 0, \ K_i = 0 \end{cases}$$

où $\Pr(K_i = k) = \zeta_k^{(i)}$ et donc

$$\begin{aligned} M_{Y_i}(t) &= P_{K_i}(M_C(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(i)} (M_C(t))^k. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left[e^{t(Y_1+Y_2)}\right] \\
&= M_{Y_1}(t)\, M_{Y_2}(t) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(1)} (M_C(t))^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(2)} (M_C(t))^k\right) \\
&= \left(\zeta_0^{(1)}\zeta_0^{(2)}\right)(M_C(t))^0 \\
&\quad + \left(\zeta_0^{(1)}\zeta_1^{(2)} + \zeta_1^{(1)}\zeta_0^{(2)}\right)(M_C(t))^1 \\
&\quad + \left(\zeta_0^{(1)}\zeta_2^{(2)} + \zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(1)} + \zeta_2^{(1)}\zeta_0^{(2)}\right)(M_C(t))^2 \\
&\quad + ... \\
&= \nu_0 (M_C(t))^0 + \nu_1 (M_C(t))^1 + \nu_2 (M_C(t))^2 + ... \\
&= P_N(M_C(t)).
\end{aligned}$$

On a donc que $S \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$ où

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \Pr(N=0) \\
&= \Pr(K_1+K_2=0) \\
&= \Pr(K_1=0)\Pr(K_2=0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \Pr(N=1) \\
&= \Pr(K_1+K_2=1) \\
&= \Pr(K_1=0)\Pr(K_2=1) + \Pr(K_1=1)\Pr(K_2=0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= \Pr(N=2) \\
&= \Pr(K_1+K_2=2) \\
&= \Pr(K_1=0)\Pr(K_2=2) + \Pr(K_1=1)\Pr(K_2=1) + \Pr(K_1=2)\Pr(K_2=0) \\
&...
\end{aligned}$$

et de façon générale

$$\begin{aligned}
\nu_n &= \Pr(N=n) \\
&= \Pr(K_1+K_2=n) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \Pr(K_1=j)\Pr(K_2=n-j)
\end{aligned}$$

■

Exercice 6.49 *Soit les variables aléatoires indépendantes* X_1 *et* X_2 *où*

$$X_i \sim BNComp\left(r_i, q_i; F_{B^{(i)}}\right)$$

avec $r_1 = 1.5$, $q_1 = 0.4$, $r_2 = 2$, $q_2 = 0.5$ *et*

$$B_i \sim Erlang\left(2i-1, \beta = \frac{1}{1000}\right).$$

On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Identifier la loi de $X_1 \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(1)}, \beta\right)$.

(b) Identifier la loi de $X_2 \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(2)}, \beta\right)$.

(c) Identifier la loi de $S \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta\right)$.

Exercice 6.50 *Soit les deux variables aléatoires*

$$X_1 \sim BNComp\left(r_1 = 2, q_1 = 0.25; F_{B_1}\right)$$

et

$$X_2 \sim BNComp\left(r_2 = 1.5, q_2 = 0.5; F_{B_2}\right),$$

où les variables aléatoires B_1 et B_2 obéissent à des lois mélanges d'exponentielles dont les fonctions de densité sont

$$\begin{aligned} f_{B_1}(x) &= \frac{1}{5}\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}x} + \frac{4}{5}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}, \ x \geq 0, \\ f_{B_2}(x) &= \frac{1}{10}\frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}x} + \frac{9}{10}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}, \ x \geq 0. \end{aligned}$$

Montrer que $S = X_1 + X_2 \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{2}\right)$. Les premières valeurs de ν_k pour $k = 0, 1, ..., 4$ sont fournies dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
ν_k	0.022097	0.042924	0.055101	0.059488	0.058952

Il est alors possible de calculer les valeurs de $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5,\ 0.95,\ 0.995$: 19.7584, 78.6563, 133.2851. $\square$

Remarque 6.51 *Procéder par étapes pour obtenir les valeurs de $\underline{\nu}$:*

- Utiliser le résultat de la proposition (6.41) pour représenter les distributions de B_1 et B_2 sous forme de mélange d'Erlang c'est-à-dire $B_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta = \frac{1}{2}\right)$ où il faut calculer les valeurs des composantes de $\underline{\zeta}^{(i)}$ pour $i = 1, 2$.
- Utiliser le résultat de la proposition (6.43) afin de représenter les distributions de X_1 et X_2 sous forme de mélange d'Erlang c'est-à-dire $X_i \sim MixErl\left(\underline{\xi}^{(i)}, \beta = \frac{1}{2}\right)$où il faut calculer les valeurs des composantes de $\underline{\xi}^{(i)}$ pour $i = 1, 2$.
- Utiliser le résultat de la proposition (6.47) pour représenter la distribution de S sous forme d'un mélange d'Erlang $S \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{2}\right)$ où il faut calculer les valeurs des composantes de $\underline{\nu}$.

********************************NEXT YEAR**

6.8.7 La somme aléatoire de variable aléatoire obéissant à un mélange d'Erlang obéit à un mélange d'Erlang - suite

On fournit une présentation plus détaillée concernant la Proposition 6.43 sur les mélanges d'Erlang et les sommes aléatoires.

Contexte et objectif

Contexte. On définit une variable aléatoire X par

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}, \tag{6.30}$$

où $\{B_j, j = 1, 2, ...\}$ forme une suite de variable aléatoire i.i.d. et indépendante de la variable aléatoire discrète M. De plus, on a

$$B_j \sim B$$

et

$$f_M(k) = \gamma_k$$

pour $k \in \mathbb{N}$.

Objectif. On suppose que la variable aléatoire B obéit à une loi mélange d'Erlang. On veut montrer que la v.a X obéit aussi une loi mélange d'Erlang (avec une masse de probabilité à 0).

La variable aléatoire B obéit à une loi mélange d'Erlang

Soit la variable aléatoire B qui obéit à une mélange d'Erlang c'est-à-dire la variable aléatoire B est définie par

$$B = \sum_{j=1}^{K} C_j,$$

où $\{C_j, j = 1, 2, ...\}$ forme une suite de variable aléatoire i.i.d. et indépendante de la variable aléatoire discrète K. De plus, on a

$$C_j \sim C \sim \exp(\beta)$$

et

$$f_K(j) = \alpha_j$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Cela signifie que

$$M_B(t) = P_K(M_B(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{M_C(t)\}^j. \tag{6.31}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_B(x) &= \Pr(K=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(K=k) H(x; k, \beta) \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k H(x; k, \beta), \end{aligned}$$

où $H(x; n, \beta)$ est la fonction de répartition d'une loi Erlang de paramètres n et β.

Précision sur la notation

On précise la notation par rapport à la définition donnée en (6.30).

En effet, si B_j obéit à un mélange d'Erlang, on convient que

$$B_j = \sum_{l=1}^{K_j} C_{j,l},$$

où $\{C_{j,l}, l = 1, 2, ...\}$ forme une suite de variable aléatoire i.i.d. et indépendante de la variable aléatoire discrète K_j.

De plus, on a

$$C_{j,l} \sim C_j \sim C \sim \exp(\beta)$$

et

$$K_j \sim K.$$

On démontre que X obéit à un mélange d'Erlang

On sait que

$$M_X(t) = P_M(M_B(t)) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \{M_B(t)\}^k . \tag{6.32}$$

Après avoir remplacé (6.31) dans (6.32), on obtient

$$M_X(t) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{M_C(t)\}^j \right\}^k$$

qui devient

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \gamma_0 \\ &\quad + \gamma_1 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{M_C(t)\}^j \right\}^1 \\ &\quad + \gamma_2 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{M_C(t)\}^j \right\}^2 \\ &\quad + \gamma_3 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{M_C(t)\}^j \right\}^3 \\ &\quad + \gamma_4 \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{M_C(t)\}^j \right\}^4 \\ &\quad + ... \end{aligned}$$

Maintenant, comme il est important de mettre les fgm $M_C(t)$, $\{M_C(t)\}^2$, $\{M_C(t)\}^3$, ...en évidence, on obtient

$$M_X(t) = \tau_0 \{M_C(t)\}^0 + \tau_1 \{M_C(t)\}^1 + \tau_2 \{M_C(t)\}^2 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} \tau_k \{M_C(t)\}^k \tag{6.33}$$

où

$$\tau_0 = \gamma_0 = \Pr(M = 0)$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \gamma_1\alpha_1 \\ &= \Pr(M=1)\times\Pr(K_1=1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \gamma_1\alpha_2+\gamma_1\alpha_1\alpha_1 \\ &= \Pr(M=1)\times\Pr(K_1=2)+\Pr(M=2)\times\Pr(K_1=1)\times\Pr(K_2=1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \gamma_1\alpha_3+\gamma_2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_1)+\gamma_3(\alpha_1\alpha_1\alpha_1) \\ &= \Pr(M=1)\times\Pr(K_1=3) \\ &\quad+\Pr(M=2)\times\Pr(K_1=2)\times\Pr(K_2=1) \\ &\quad+\Pr(M=2)\times\Pr(K_1=1)\times\Pr(K_2=2) \\ &\quad+\Pr(M=3)\times\Pr(K_1=1)\times\Pr(K_2=1)\times\Pr(K_3=1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tau_4 &= \gamma_1\alpha_4+\gamma_2(\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_1+\alpha_2\alpha_2) \\ &\quad+\gamma_3(\alpha_2\alpha_1\alpha_1+\alpha_1\alpha_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_1\alpha_2)+\gamma_4(\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1) \\ &= \Pr(M=1)\times\Pr(K_1=4) \\ &\quad+\Pr(M=2)\times\Pr(K_1=3)\times\Pr(K_2=1) \\ &\quad+\Pr(M=2)\times\Pr(K_1=1)\times\Pr(K_2=3) \\ &\quad+\Pr(M=2)\times\Pr(K_1=2)\times\Pr(K_2=2) \\ &\quad+\Pr(M=3)\times\Pr(K_1=2)\times\Pr(K_2=1)\times\Pr(K_3=1) \\ &\quad+\Pr(M=3)\times\Pr(K_1=1)\times\Pr(K_2=2)\times\Pr(K_3=1) \\ &\quad+\Pr(M=3)\times\Pr(K_1=1)\times\Pr(K_2=1)\times\Pr(K_3=2) \\ &\quad+\Pr(M=4)\times\Pr(K_1=1)\times\Pr(K_2=1)\times\Pr(K_3=1)\times\Pr(K_4=1)\end{aligned}$$

...

Bref, les valeurs de τ_k que l'on obtient correspondent en fait aux valeurs de la fonction de masse de probabilité d'une variable aléatoire L dont la représentation est donnée par

$$L=\begin{cases}\sum_{j=1}^{M}K_j, & M>0\\ 0, & M=0\end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles.

On précise que

$$\tau_k=\Pr(L=k)$$

pour $k\in\mathbb{N}$.

De plus, le développement en (6.33) signifie que

$$M_X(t)=P_L(M_C(t))$$

et que la variable aléatoire X peut être représentée sous la forme suivante :

$$X=\begin{cases}\sum_{j=1}^{L}C_j, & L>0\\ 0, & L=0\end{cases}.$$

On conclut (avec une démonstration plus brève) et on résume

En résumé, on a

$$M_X(t) = P_M(M_B(t)) = P_M(P_K(M_C(t))). \tag{6.34}$$

Remplaçons $M_C(t)$ par s. Alors, on a

$$P_M(P_K(M_C(t))) = P_M(P_K(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k s^k,$$

qui correspond à la fgp d'une variable aléatoire discrète L, que l'on représente par

$$L = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles.

On note

$$f_L(k) = \Pr(L = k) = \tau_k$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Les valeurs de τ_k peuvent être obtenues avec la FFT, si on connaît l'expression de la fgp $P_M(t)$ de la variable aléatoire M. De plus, si la distribution de M appartient à la famille $(a, b, 0)$, on peut utiliser l'algorithme de Panjer.

Puisque l'on a

$$P_L(s) = P_M(P_K(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k s^k,$$

alors (6.34) devient

$$M_X(t) = P_L(M_C(t))$$

ce qui conduit à

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{L} C_j, & L > 0 \\ 0, & L = 0 \end{cases}. \tag{6.35}$$

De (6.35), on déduit

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(L = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(L = k) H(x; k, \beta) \\ &= \tau_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k H(x; k, \beta), \end{aligned}$$

ce qui correpond à la fonction de répartition d'une loi mélange Erlang avec masse à 0.

On termine par le dessert : un exemple

En utilisant la notation ci-dessus, on a

k	1	2	3	4
α_k	0.3	0.4	0.2	0.1

$\beta = 0.1$, et

$$M \sim NBin(r = 2.5, q = 0.8).$$

On obtient

k	1	2	3	4
α_k	0.3	0.4	0.2	0.1

Les valeurs de $\tau_k = \Pr(L = k)$, pour $k = 0, 1, 2, ..., 20$ sont fournies ci-dessous :

k	τ_k	k	τ_k
0	0.572433	11	0.001302
1	0.085865	12	0.000739
2	0.123503	13	0.000415
3	0.082097	14	0.000234
4	0.059984	15	0.000130
5	0.028351	16	0.000072
6	0.020011	17	0.000040
7	0.011689	18	0.000022
8	0.006905	19	0.000012
9	0.003876	20	0.000007
10	0.002304		

On indique ci-dessous quelques valeurs de $F_X(x)$:

x	20	50	100
$F_X(x)$	0.7570376	0.9197882	0.989448

AJOUTER APPROXIMATION PAR MOMENTS, APPROXIMATION NORMALE
Rappel: Théorème central limite (voir livre vert Panjer et Willmot)
Version 1: Soient $X_1, ..., X_n$ des variable aléatoire indépendantes et identiquement distribuées.
On note

$$\begin{aligned} E[X_i] &= E[X] \\ Var[X_i] &= Var[X]. \end{aligned}$$

On définit $S_{TOT} = X_1 + ... + X_n$ où

$$\begin{aligned} E[S_{TOT}] &= E[X_1 + ... + X_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ &= n \times E[X] \\ Var[S_{TOT}] &= Var[X_1 + ... + X_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] \\ &= n \times Var[X]. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\Pr\left(\frac{S_{TOT} - E[S_{TOT}]}{\sqrt{Var[S_{TOT}]}} \leq y\right) \underset{n\to\infty}{\to} F_Z(y) \text{ où } Z \sim N(0,1).$$

Version 2: Soient $X_1, ..., X_n$ des variable aléatoire indépendantes.
On définit $S_{TOT} = X_1 + ... + X_n$ où

$$\begin{aligned} E[S_{TOT}] &= E[X_1 + ... + X_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ Var[S_{TOT}] &= Var[X_1 + ... + X_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] \end{aligned}$$

La condition d'application de ce résultat est que les variable aléatoire X_i $(i = 1, ..., n)$ aient un comportement relativement semblable. Plus précisément, la condition nécessaire et suffisante pour l'application du Théorème Central Limite est

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{|y|>t\sigma} (y - \mu_j)^2 dF_j(y) = 0$$

où

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= Var[S_{TOT}] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_j^2 \\ \sigma_j^2 &= Var[X_j] \end{aligned}$$

On veut s'assurer que les variances individuelles σ_j^2 sont petites en comparaison avec leur somme σ^2, c'est-à-dire pour un ε fixé et n suffisamment grand:

$$\frac{\sigma_j}{\sigma} < \varepsilon, \; j = 1, ..., n.$$

Alors, on a

$$\Pr\left(\frac{S_{TOT}-E\left[S_{TOT}\right]}{\sqrt{Var\left[S_{TOT}\right]}}\leq y\right)\underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow}F_Z(y) \text{ où } Z\sim N(0,1).$$

Interprétation des conditions d'application des 2 versions du TCL:

(1) Les risques doivent être indépendants dans les **deux** versions.

(2) Pour la version 1, on peut supposer que les X_i représentent les coûts d'une protection d'assurance pour un seul type de véhicule (ex: Echo bleue) et un profil de conducteur (ex: homme, 18-25 ans).

$$\begin{aligned} S_{TOT} &= X_1+...+X_n \\ &= \text{coûts pour les } n \text{ conducteurs hommes de 18-25 ans} \\ &\quad \text{d'une Echo bleue.} \end{aligned}$$

(3) Pour la version 2, les X_i peuvent représenter les coûts d'une protection i pour l'ensemble du portefeuille de contrats d'assurance mais pour différentes protections dont les coûts ne diffèrent pas trop en terme d'ampleur (magnitude).

$$\begin{aligned} S_{TOT} &= X_1+...+X_n \\ \text{où } X_1 &: \text{coûts d'assurance avion} \\ X_2 &: \text{coûts d'assurance navire.} \end{aligned}$$

On présente des applications de ces résultats dans la section suivante.

Chapitre 7

Notions sur la dépendance

7.1 Introduction

On considère un portefeuille de n risques représenté par le vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. Jusqu'à présent, on a toujours supposé connaître le comportement marginal, individuel de chaque risque, soit F_{X_i} pour $i = 1, ..., n$. En pratique, les actuaires ou gestionnaires ont généralement une bonne idée du comportement des coûts ou des X_i mais pour différentes raisons, ils ont une faible idée du comportement conjoint de $\mathbf{X}$. En d'autres termes, on possède une idée plus ou moins floue de la structure de dépendance entre les composantes de $\mathbf{X}$. La modélisation de la dépendance pose des défis:

1. Choisir le bon modèle.
2. Identifier la distribution d'une fonction de $\mathbf{X}$.
3. Estimation et validation des paramètres du modèle choisi pour $\mathbf{X}$.

Dans ce chapitre et les prochains chapitres, on vise à répondre (en partie) à ces questions. Plus spécifiquement, on présente des notions liées à la dépendance, des lois multivariées et une introduction à la théorie des copules.

7.2 Classe de Fréchet

Définition 7.1 *Soit un vecteur de variables aléatoires* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *dont les fonctions de répartition marginales sont* $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$. *La classe de Fréchet, que l'on désigne par* $\Gamma(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$ *correspond à l'ensemble de toutes les fonctions de répartition conjointes de* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *ayant pour marginales* $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$. *Cet ensemble possède une infinité d'éléments.*

Exemple 7.2 *La fonction de répartition conjointe de* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où* $X_1, ..., X_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes, soit* $F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) ... F_{X_n}(x_n)$ *appartient à* $\Gamma(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$.

Proposition 7.3 *Soit un vecteur de variables aléatoires* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *dont les fonctions de répartition marginales sont* $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ *et* $F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) \in \Gamma(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$. *Alors,*

$$F_{\mathbf{X}}^{-}(x_1, ..., x_n) \leq F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) \leq F_{\mathbf{X}}^{+}(x_1, ..., x_n),$$

où $F_{\mathbf{X}}^{-}(x_1, ..., x_n) = \max(F_{X_1}(x_1) + ... + F_{X_n}(x_n) - (n-1); 0)$ *est la borne inférieure de Fréchet et* $F_{\mathbf{X}}^{+}(x_1, ..., x_n) = \min(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n))$ *est la borne supérieure de Fréchet.*

Preuve. On débute par démontrer la borne supérieure de Fréchet. On a

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr(\{X_1 \leq x_1\}, ... \{X_n \leq x_n\}) \\ &= \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right). \end{aligned}$$

Or, on sait que $\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\} \subseteq \{X_i \leq x_i\}$, pour $i = 1, ..., n$. Donc,

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right) \leq \Pr(\{X_i \leq x_i\}), \text{ pour } i = 1, ..., n.$$

Alors,

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right) \leq \min(\Pr(\{X_1 \leq x_1\}), ..., \Pr(\{X_n \leq x_n\})).$$

Pour la borne inférieure de Fréchet, posons d'abord $n = 2$ et ensuite on passera au cas général. On a

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \Pr(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\}) \\ &= \Pr(\{X_1 \leq x_1\}) + \Pr(\{X_2 \leq x_2\}) - \Pr(\{X_1 \leq x_1\} \cup \{X_2 \leq x_2\}) \\ &\geq \Pr(\{X_1 \leq x_1\}) + \Pr(\{X_2 \leq x_2\}) - 1. \end{aligned}$$

Étant donné que $\Pr(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\}) \geq 0$, on a

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \max(\Pr(\{X_1 \leq x_1\}) + \Pr(\{X_2 \leq x_2\}) - 1; 0).$$

Prenons maintenant le cas général pour n. On a

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right) \\ &= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i > x_i\}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \Pr(\{X_i > x_i\}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - \Pr(\{X_i \leq x_i\})) \\ &= 1 - n + \sum_{i=1}^{n} \Pr(\{X_i \leq x_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(\{X_i \leq x_i\}) - (n-1). \end{aligned}$$

Étant donné que $F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) \geq 0$, on obtient

$$F_{\mathbf{X}}^{-}(x_1, ..., x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} \Pr(\{X_i \leq x_i\}) - (n-1); 0\right).$$

■

Remarque 7.4 *La borne supérieure de Fréchet $F_{\mathbf{X}}^{+}(x_1, ..., x_n)$ est une fonction de répartition pour toute valeur de n alors que la borne inférieure de Fréchet $F_{\mathbf{X}}^{-}(x_1, ..., x_n)$ est une fonction de répartition uniquement pour $n = 2$.*

Remarque 7.5 *Quelles sont les relations de dépendance entre les éléments d'un vecteur* $\mathbf{X}$ *qui a comme fonction de répartition conjointe les bornes inférieures et supérieures de Fréchet? On répond à cette question dans les deux prochaines sections.*

7.3 Comonotonocité

Définition 7.6 *Soit un vecteur de variables aléatoires* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$. *Les composantes du vecteur* $\mathbf{X}$ *sont dites comonotones, si et seulement si, il existe des fonctions monotones croissantes ("non-decreasing")* $\phi_1, ..., \phi_n$ *et une variable aléatoire* Z *telles que*

$$(X_1, ..., X_n) \sim (\phi_1(Z), ..., \phi_n(Z)),$$

c'est-à-dire $X_1 \sim \phi_1(Z), ..., X_n \sim \phi_n(Z)$.

La comonotonocité correspond à la dépendance positive parfaite où toutes les composantes d'un vecteur dépendent d'une même variable aléatoire Z. Si la variable aléatoire Z prend une valeur élevée (faible), alors $X_1, ..., X_n$ prendront également des valeurs élevées (faibles) car elles sont des fonctions monotones croissantes de Z.

Exemple 7.7 *Soit une variable aléatoire* $Z \sim N(0,1)$ *et la fonction* $\phi_i(x) = \mu_i + \sigma_i x$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$, $\mu_i \in \mathbb{R}$. *Alors, les variables aléatoires*

$$\begin{aligned} X_1 &= \phi_1(Z) = \mu_1 + \sigma_1 Z \\ &\ldots \\ X_n &= \phi_n(Z) = \mu_n + \sigma_n Z \end{aligned}$$

sont comonotones. On déduit à l'aide de la fonction génératrice des moments que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

On peut aussi définir un vecteur de variables aléatoires comonotones de la façon suivante: soit un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ avec fonctions de répartition $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ et fonctions quantiles correspondantes $F_{X_1}^{-1}, ..., F_{X_n}^{-1}$. Soit une variable aléatoire $U \sim Unif(0,1)$. Si les composantes du vecteur $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ sont données par

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U), \; i = 1, ..., n,$$

alors les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont comonotones. Selon la définition de comonotonocité on a que $\phi_i = F_{X_i}^{-1}$ et $Z = U$.

Proposition 7.8 *Un vecteur de variables aléatoires* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *possède des composantes comonotones si, et seulement si, sa fonction de répartition conjointe* $F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n)$ *est la borne supérieure de Fréchet* $F_{\mathbf{X}}^{+}(x_1, ..., x_n)$.

Preuve. Soit un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ tel que les composantes sont données par

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U),$$

où U obéit à une loi uniforme sur $(0,1)$. Alors,

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr(X_1 \le x_1, ..., X_n \le x_n) \\ &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) \le x_1, ..., F_{X_n}^{-1}(U) \le x_n\right) \\ &= \Pr(U \le F_{X_1}(x_1), ..., U \le F_{X_n}(x_n)) \\ &= \Pr(U \le \min(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n))) \\ &= \min(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)) \\ &= F_{\mathbf{X}}^{+}(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

La fonction de répartition conjointe de $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ où les composantes sont comonotones correspond à la borne supérieure de Fréchet. ■

On examine maintenant l'algorithme de simulation de réalisations d'un vecteur de variables aléatoires comonotones. Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur de variables aléatoires comonotones. On utilise la représentation des variables aléatoires comonotones via $F_{X_1}^{-1}, ..., F_{X_n}^{-1}$ et la variable aléatoire $U \sim Unif(0,1)$ pour construire un algorithme simple de simulation.

Algorithme 7.9 ***Simulation des réalisations de*** $(X_1, ..., X_n)$

1. *On simule une réalisation $U^{(j)}$ de $U \sim Unif(0,1)$.*
2. *On simule une réalisation $\mathbf{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, ..., X_n^{(j)}\right)$ de $\mathbf{X}$ avec $X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1}\left(U^{(j)}\right)$, ..., $X_n^{(j)} = F_{X_n}^{-1}\left(U^{(j)}\right)$.*
3. *On répète pour $j = 1, ..., nsimul$.*

Remarque 7.10 *On utilise la même réalisation $U^{(j)}$ de U pour les réalisations $X_1^{(j)}$,..., $X_n^{(j)}$.*

Proposition 7.11 *Soit un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ où les composantes sont des variables aléatoires comonotones. Soit $S = X_1 + ... + X_n$. Alors,*

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i) \\ TVaR_\kappa(S) &= \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i). \end{aligned}$$

Preuve. Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ tel que $X_i = F_{X_i}^{-1}(U)$,où U obéit à une loi uniforme sur $(0,1)$ et

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \\ &= \phi(U), \end{aligned}$$

où ϕ est une fonction croissante de U car elle est la somme de fonctions croissantes. Alors,

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= VaR_\kappa(\phi(U)) \\ &= \phi(VaR_\kappa(U)), \end{aligned}$$

car, telle qu'énoncé dans la Proposition 1.35 du Chapitre 1, la VaR d'une fonction croissante est égale à la fonction évaluée à la VaR de cette variable aléatoire. De plus,

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &= \phi(VaR_\kappa(U)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(VaR_\kappa(U)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(\kappa) \\ &= \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i). \end{aligned}$$

Pour la $TVaR$ de la somme, on a

$$\begin{aligned}
TVaR_{\kappa}(S) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_u(S)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} \sum_{i=1}^{n} VaR_u(X_i)\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_u(X_i)\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} TVaR_{\kappa}(X_i).
\end{aligned}$$

■

Remarque 7.12 *Les relations données dans la 7.11 sont valides pour des variables aléatoires discrètes, continues ou mixtes et pour tout choix de distribution.*

Il est intéressant de faire un retour sur le bénéfice de mutualisation discuté précédemment. Prenons comme mesure de risque la $TVaR$ pour laquelle on a déjà montré qu'elle est sous-additive et donc que le bénéfice de mutualisation est donné par

$$B_{\kappa}(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_{\kappa}(X_i) - TVaR_{\kappa}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

Étant donné la propriété de sous-additivité de la $TVaR$, on a

$$B_{\kappa}(X_1, ..., X_n) \geq 0.$$

Si les risques $X_1, ..., X_n$ sont comonotones, on a

$$B_{\kappa}(X_1, ..., X_n) = 0. \tag{7.1}$$

Le bénéfice de mutualisation est nul et donc correspond à la borne inférieure du bénéfice de mutualisation possible. Ainsi, il n'y a aucun bénéfice de diversification qui est obtenu par la mutualisation de risques comonotones. On peut également interpréter 7.1 comme suit. Supposons une société, soit une banque ou une compagnie d'assurance, possèdant n lignes d'affaires. Les coûts associés à ces lignes d'affaires sont représentés par les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ et supposons que ces variables aléatoires ne sont pas comonotones. Supposons que le "chief risk officer" établit le capital pour la société comme suit:

$$Cap_k(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_{\kappa}(X_i). \tag{7.2}$$

Selon 7.2, le capital est surrévalué car

$$\sum_{i=1}^{n} TVaR(X_i) \geq TVaR(S)$$

où $S = X_1 + ... + X_n$ et de plus, le choix de la méthode pour établir le capital suppose implicitement que les risques sont comonotones. Une telle décision peut également être prise par un organisme de surveillance qui impose 7.2 à la société alors que le "chief risk officer" croit selon le modèle interne de la compagnie que les risques ne sont pas comonotones. Dans ce cas, l'organisme de surveillance force la compagnie à être conservatrice et ne lui permet pas de reconnaître le bénéfice engendré par la mutualisation des risques $X_1, ..., X_n$.

Soit $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur de variables aléatoires comonotones et $S = X_1 + ... + X_n$. Dans ce cas, à quoi correspond la fonction de répartition F_S? On sait que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \\ &= \phi(U), \end{aligned}$$

où $U \sim Unif(0,1)$ et $\phi = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}$ est une fonction croissante sur $(0,1)$. On a recours à cette fonction pour évaluer F_S. En fait, on a

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr(S \leq x) \\ &= \Pr(\phi(U) \leq x) \\ &= \Pr\left(U \leq \phi^{-1}(x)\right) \\ &= \phi^{-1}(x), \end{aligned}$$

étant donné que $U \sim Unif(0,1)$. Dans certains cas de comonotonocité, on peut trouver une forme analytique pour F_S en identifiant ϕ^{-1}. Autrement, on doit avoir recours à des méthodes d'optimisation numériques. Tel qu'illustré dans les exemples ci-dessous, il est plus facile d'agréger des variables aléatoires comonotones que des variables aléatoires indépendantes.

Exemple 7.13 *Soit un vecteur de variables aléatoires comonotones* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où* $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, ..., n$. *Soit* $S = X_1 + ... + X_n$. *Trouver* F_S *et* $VaR_\kappa(S)$.

Solution. On a $F_{X_i}(x_i) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x_i}$, $i = 1, ..., n$ et donc

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{\beta_i} \ln(1-y), \text{ pour } y \in (0,1). \end{aligned}$$

On observe que

$$\phi(y) = \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}\right) \ln(1-y).$$

Sachant que $F_S(x) = \phi^{-1}(x)$, on pose $\phi(y) = x$ et on isole y. On obtient

$$\begin{aligned} \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}\right) \ln(1-y) &= x \\ \ln(1-y) &= \frac{x}{\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}\right)} \\ 1 - y &= \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}}\right) x} \\ y &= 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}}\right) x} \end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle. Alors, $S \sim Exp(\beta^*)$ et $VaR_\kappa(S) = \frac{-1}{\beta^*}\ln(1-\kappa)$ où $\beta^* = \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta_1}+...+\frac{1}{\beta_n}\right)}$. ■

Exemple 7.14 *Soit le vecteur de variables aléatoires comonotones* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où* $X_i \sim Pareto(\alpha, \lambda_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. *Soit* $S = X_1 + ... + X_n$. *Trouver* F_S *et* $VaR_\kappa(S)$.

Solution. On a $F_{X_i}(x_i) = 1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x}\right)^\alpha$, $i = 1, ..., n$ et donc

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(1-y)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_i \\ &= \frac{\lambda^*}{(1-y)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda^*, \end{aligned}$$

où $\lambda^* = \lambda_1 + ... + \lambda_n$ et $y \in (0,1)$. Sachant que $F_S(x) = \phi^{-1}(x)$, on pose $\phi(y) = x$ et on isole y. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^*}{(1-y)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda^* &= x \\ \left(\frac{1}{(1-y)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right) &= \frac{x}{\lambda^*} \\ \frac{1}{(1-y)^{\frac{1}{\alpha}}} &= 1 + \frac{x}{\lambda^*} \\ \frac{1}{1-y} &= \left(1 + \frac{x}{\lambda^*}\right)^\alpha \\ y &= 1 - \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^* + x}\right)^\alpha \end{aligned}$$

d'où

$$F_S(x) = \phi^{-1}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^* + x}\right)^\alpha.$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi de Pareto. Alors, $S \sim Pareto\left(\alpha, \lambda^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$ et $VaR_\kappa(S) = \frac{\lambda^*}{(1-\kappa)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda^*$. ■

Exemple 7.15 *Soit un vecteur de variables aléatoires comonotones* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_5)$ *où* $X_1 \sim Exp(\beta_1)$, $X_2 \sim Pareto(\alpha_2, \lambda_2)$, $X_3 \sim U(0, b_3)$, $X_4 \sim LN(\mu_4, \sigma_4)$ *et* $X_5 \sim Weibull(\tau_5, \beta_5)$. *Trouver* $VaR_\kappa(S)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= 1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} \\ F_{X_2}(x_2) &= 1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + x_2}\right)^{\alpha_2} \\ F_{X_3}(x_3) &= \frac{x_3}{b_3} \\ F_{X_4}(x_4) &= \Phi\left(\frac{\ln x_4 - \mu_4}{\sigma_4}\right) \\ F_{X_5}(x_5) &= 1 - \mathrm{e}^{-(\beta_5 x_5)^{\tau_5}}. \end{aligned}$$

Selon les expressions des VaR données en annexe dans le livre de Marceau (2013), on obtient

$$\begin{aligned} VaR_{\kappa}(S) &= \sum_{i=1}^{5} VaR_{\kappa}(X_i) \\ &= \frac{-1}{\beta_1}\ln(1-\kappa) + \lambda_2\left(\frac{1}{(1-\kappa)^{\frac{1}{\alpha_2}}} - 1\right) + \kappa b_3 + \mathrm{e}^{\mu_4+\sigma_4\Phi^{-1}(\kappa)} + \left(\frac{-1}{\beta_5}\right)(\ln(1-\kappa))^{\frac{1}{\tau_5}}. \end{aligned}$$

■

Exemple 7.16 *Soit un vecteur de variables aléatoires* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où les composantes sont comonotones et identiquement distribuées. Soit* $X_i \sim X$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *Alors, on a*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} X_i = F_X^{-1}(U) + ... + F_X^{-1}(U) \\ &= nF_X^{-1}(U) = nX. \end{aligned}$$

Si les variables aléatoires X_i *sont comonotones et identiquement distribuées, cela revient à dire qu'elles prennent toutes la même valeur.*

Exemple 7.17 *Soit un vecteur de variables aléatoires comonotones* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ *où* $X_i \sim U(a_i, b_i)$, $i = 1, ..., n$. *Identifier la loi de* S.

Solution. Les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont comonotones alors $X_i = \phi_i(U)$, où ϕ_i est une fonction croissante pour $i = 1, ..., n$. Pour $\phi_i = F_{X_i}^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} X_i &= a_i + (b_i - a_i)U, \ i = 1, ..., n \\ &= \phi_i(U) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + (b_i - a_i)U \\ &= a_S + (b_S - a_S)U \end{aligned}$$

où $a_S = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $b_S = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Donc, $S \sim U(a_S, b_S)$. ■

7.4 Antimonotonocité

Le concept d'antimonotonocité est une notion de dépendance qui s'applique uniquement à une paire de variables aléatoires (X_1, X_2). Il correspond à la dépendance négative parfaite.

Définition 7.18 *Soit une paire de variables aléatoires* $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. *Les composantes du vecteur* $\mathbf{X}$ *sont dites antimonotones, si et seulement si, il existe une fonction monotone croissante ("non-decreasing")* ϕ_1, *une fonction monotone décroissante* ϕ_2 *et une variable aléatoire* Z *telles que*

$$(X_1, X_2) \sim (\phi_1(Z), \phi_2(Z)),$$

c'est-à-dire $X_1 \sim \phi_1(Z)$ *et* $X_2 \sim \phi_2(Z)$.

Selon la définition d'antimotonocité, si la variable aléatoire Z augmente (diminue), alors X_1 augmente (diminue) mais X_2 diminue (augmente).

On peut aussi définir une paire de variables aléatoires antimonotones de la façon suivante: soit une paire de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ avec fonctions de répartition F_{X_1} et F_{X_2} et fonctions quantiles correspondantes $F_{X_1}^{-1}$ et $F_{X_2}^{-1}$. Soit une variable aléatoire $U \sim Unif\,(0,1)$. Si les composantes de la paire de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ sont données par

$$\begin{aligned} X_1 &= F_{X_1}^{-1}(U) \\ X_2 &= F_{X_2}^{-1}(1-U), \end{aligned}$$

alors les variables aléatoires X_1 et X_2 sont antimonotones. Selon la définition de l'antimotonocité on a que $\phi_1(y) = F_{X_1}^{-1}(y)$, $\phi_2(y) = F_{X_2}^{-1}(1-y)$ et $Z = U$.

Proposition 7.19 *Le couple de variables aléatoires (X_1, X_2) possède des composantes antimonotones si, et seulement si, la fonction de répartition conjointe $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ est la borne inférieure de Fréchet F_{X_1,X_2}^{-}.*

Preuve. Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) tel que les composantes sont données par

$$\begin{aligned} X_1 &= F_{X_1}^{-1}(U) \\ X_2 &= F_{X_2}^{-1}(1-U), \end{aligned}$$

où U obéit à une loi uniforme sur $(0,1)$. Alors,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) \\ &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) \le x_1, F_{X_2}^{-1}(1-U) \le x_2\right) \\ &= \Pr(U \le F_{X_1}(x_1), 1-U \le F_{X_2}(x_2)) \\ &= \Pr(U \le F_{X_1}(x_1), U \ge 1-F_{X_2}(x_2)). \end{aligned}$$

On a deux cas possibles, soit le premier cas où $F_{X_1}(x_1) > 1 - F_{X_2}(x_2)$ et le deuxième cas où $F_{X_1}(x_1) < 1 - F_{X_2}(x_2)$. Si $F_{X_1}(x_1) > 1 - F_{X_2}(x_2)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(U \le F_{X_1}(x_1), U \ge 1-F_{X_2}(x_2)) &= \Pr(U \in (1-F_{X_2}(x_2), F_{X_1}(x_1)]) \\ &= F_{X_1}(x_1) - (1-F_{X_2}(x_2)) \\ &= F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1, \end{aligned}$$

où $(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1) \ge 0$. Si $F_{X_1}(x_1) < 1 - F_{X_2}(x_2)$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(U \le F_{X_1}(x_1), U \ge 1-F_{X_2}(x_2)) &= \Pr(U \in (0, F_{X_1}(x_1)] \cap (1-F_{X_2}(x_2), 1]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) \\ &= \Pr(U \le F_{X_1}(x_1), U \ge 1-F_{X_2}(x_2)) \\ &= \begin{cases} F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1, & si\ F_{X_1}(x_1) \ge 1-F_{X_2}(x_2) \\ 0, & si\ F_{X_1}(x_1) < 1-F_{X_2}(x_2) \end{cases} \\ &= \max(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1; 0). \end{aligned}$$

■

On examine maintenant l'algorithme de simulation de réalisations d'une paire de variables aléatoires antimonotones. Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ une paire de variables aléatoires antimonotones. On utilise la représentation des variables aléatoires antimonotones via $F_{X_1}^{-1}$ et $F_{X_2}^{-1}$ et la variable aléatoire $U \sim Unif\,(0,1)$ pour construire un algorithme simple de simulation.

Algorithme 7.20 ***Simulation des réalisations de*** (X_1, X_2)

1. *On simule une réalisation* $U^{(j)}$ *de* $U \sim U(0,1)$.
2. *On simule une réalisation* $\mathbf{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ *de* $\mathbf{X}$ *avec* $X_1^{(j)} = F_{X_1}^{-1}\left(U^{(j)}\right)$, $X_2^{(j)} = F_{X_2}^{-1}\left(1 - U^{(j)}\right)$.
3. *On répète pour* $j = 1, ..., nsimul$.

On veut examiner le comportement de $S = X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont des variables antimonotones. Dans ce cas, il n'existe pas de résutats équivalents à la Proposition 7.11. On doit procéder cas par cas. La dépendance négative parfaite (et la dépendance négative en général) n'a pas été autant investiguée dans la littérature que la dépendance positive parfaite (et la dépendance positive en général).

Soit la classe de Fréchet $\Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$. On désigne par $\left(X_1^+, X_2^+\right)$ un couple de variables aléatoires comonotones avec fonction de répartition conjointe $F_{X_1^+, X_2^+}(x_1, x_2) \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$, par $\left(X_1^-, X_2^-\right)$ un couple de variables aléatoires antimonotones avec fonction de répartition conjointe $F_{X_1^-, X_2^-}(x_1, x_2) \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ et par $\left(X_1^\perp, X_2^\perp\right)$ un couple de variable aléatoires indépendantes avec fonction de répartition conjointe $F_{X_1^\perp, X_2^\perp}(x_1, x_2) \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$.

Exemple 7.21 *Soit les variables aléatoires* $X_1 \sim Unif(0,1)$ *et* $X_2 \sim Unif(0,1)$. *Soit* $S = X_1 + X_2$. *Trouver* F_S *si les variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *sont comonotones, antimonotones et indépendantes.*
Solution. *On définit* $S^+ = X_1^+ + X_2^+$ *où les variables aléatoires* X_1^+ *et* X_2^+ *sont comonotones et* $X_1^+ \sim Unif(0,1)$ *et* $X_2^+ \sim Unif(0,1)$. *Alors, on a*

$$\begin{aligned} S^+ &= X_1^+ + X_2^+ \\ &= F_{X_1^+}^{-1}(U) + F_{X_2^+}^{-1}(U) \\ &= U + U \\ &= 2U. \end{aligned}$$

L'expression de $F_{S^+}(x)$ *est*

$$\begin{aligned} F_{S^+}(x) &= \Pr(2U \leq x) \\ &= \frac{x}{2},\ x \in (0,2), \end{aligned}$$

de laquelle on déduit que $S^+ \sim Unif(0,2)$. *On définit* $S^- = X_1^- + X_2^-$ *où les variables aléatoires* X_1^- *et* X_2^- *sont antimonotones et* $X_1^- \sim Unif(0,1)$ *et* $X_2^- \sim Unif(0,1)$. *Alors, on a*

$$\begin{aligned} S^- &= F_{X_1^-}^{-1}(U) + F_{X_2^-}^{-1}(1-U) \\ &= U + (1-U) \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a donc $\Pr(S^- = 1) = 1$. *Puisque les variables aléatoires* X_1^- *et* X_2^- *sont identiquement distribuées et que leurs fonctions de densités sont symétriques, les valeurs prises par les variables aléatoires antimonotones se compensent l'une et l'autre. On définit* $S^\perp = X_1^\perp + X_2^\perp$ *où les variables aléatoires* $X_1^\perp$ *et* $X_2^\perp$ *sont indépendantes et* $X_1^\perp \sim Unif(0,1)$ *et* $X_2^\perp \sim Unif(0,1)$. *Alors, le produit de convolution de* $X_1^\perp$ *et* $X_2^\perp$ *est*

$$F_{S^\perp}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2},\ 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1,\ 1 \leq x \leq 2 \\ 1,\ x > 2. \end{cases}$$

■

Exemple 7.22 *Soit les variables aléatoires* $X_1 \sim Unif(0,10)$ *et* $X_2 \sim Unif(0,6)$. *Soit* $S = X_1 + X_2$. *Trouver* F_S *si les variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *sont comonotones, antimonotones et indépendantes.*

Solution. Soit $S^{+}=X_1^{+}+X_2^{+}$ où les variables aléatoires X_1^{+} et X_2^{+} sont comonotones. Alors, on a

$$\begin{aligned} S^{+} &= F_{X_1^{+}}^{-1}(U)+F_{X_2^{+}}^{-1}(U) \\ &= 10U+6U \\ &= 16U \\ &= \phi(U). \end{aligned}$$

L'expression de $F_{S^{+}}$ est

$$\begin{aligned} F_S^{+}(x) &= \Pr(16U\leq x) \\ &= \frac{x}{16},\ x\in(0,16), \end{aligned}$$

de laquelle on déduit que $S^{+}\sim Unif(0,16)$. Soit $S^{-}=X_1^{-}+X_2^{-}$ où les variables aléatoires X_1^{-} et X_2^{-} sont antimonotones. Alors, on a

$$\begin{aligned} S^{-} &= F_{X_1^{-}}^{-1}(U)+F_{X_2^{-}}^{-1}(1-U) \\ &= 10U+6(1-U) \\ &= 4U+6 \\ &= \varphi^{-}(U). \end{aligned}$$

On observe que $\varphi^{-}(u)$ est une fonction de u pour $u\in(0,1)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} F_{S^{-}}(x) &= \Pr(4U+6\leq x) \\ &= \frac{x-6}{4},\ x\in(6,10), \end{aligned}$$

de laquelle on déduit que $S^{-}\sim U(6,10)$. On définit $S^{\perp}=X_1^{\perp}+X_2^{\perp}$ où les variables aléatoires $X_1^{\perp}$ et $X_2^{\perp}$ sont indépendantes et $X_1^{\perp}\sim Unif(0,10)$ et $X_2^{\perp}\sim Unif(0,6)$. Alors, le produit de convolution de $X_1^{\perp}$ et $X_2^{\perp}$ est

$$F_{S^{\perp}}(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{120},\ 0\leq x<6 \\ \frac{x-3}{10},\ 6\leq x<10 \\ \frac{-x^2+32x-136}{120},\ 10\leq x<16 \\ 1,\ x\geq 16. \end{cases}$$

■

On formalise le résultat pour les variables antimonotones de lois uniformes dans la proposition ci-dessous.

Proposition 7.23 *Soit un couple de variables aléatoires antimonotones* $\left(X_1^{-},X_2^{-}\right)$ *avec* $X_1^{-}\sim Unif(0,a)$ *et* $X_2^{-}\sim Unif(0,b)$*, avec* $a>b>0$*. Alors, pour* $S^{-}=X_1^{-}+X_2^{-}$*, on a*

$$F_{S^{-}}(x)=\frac{x-b}{(a-b)},\ x\in(b,a).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} S^{-} &= X_1^{-}+X_2^{-} \\ &= F_{X_1^{-}}^{-1}(U)+F_{X_2^{-}}^{-1}(1-U) \\ &= aU+b(1-U) \\ &= b+(a-b)U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{S^-}(x) &= \Pr(S \leq x) \\
&= \Pr(b + (a-b)U \leq x) \\
&= \Pr\left(U \leq \frac{x-b}{a-b}\right) \\
&= \frac{x-b}{(a-b)},\ x \in (b,a).
\end{aligned}$$

■

Exemple 7.24 *Soit* $\left(X_1^-, X_2^-\right)$ *un couple de variables aléatoires antimonotones avec* $X_1^- \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ *et* $X_2^- \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$*, avec* $\sigma_1 > \sigma_2$*. Soit* $S^- = X_1^- + X_2^-$*. Trouver* F_{S^-}*.*

Solution.

$$\begin{aligned}
S^- &= X_1^- + X_2^- \\
&= F_{X_1^-}^{-1}(U) + F_{X_2^-}^{-1}(1-U) \\
&= \mu_1 + \sigma_1 \Phi^{-1}(U) + \mu_2 + \sigma_2 \Phi^{-1}(1-U).
\end{aligned}$$

Étant donné que $\Phi^{-1}(U) = Z$ et que $\Phi^{-1}(1-U) = -Z$ où $Z \sim N(0,1)$, alors on déduit

$$\begin{aligned}
S^- &= \mu_1 + \sigma_1 Z + \mu_2 + \sigma_2(-Z) \\
&= \mu_1 + \sigma_1 Z + \mu_2 - \sigma_2 Z \\
&= \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) Z,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
F_{S^-}(x) &= \Pr\left(S^- \leq x\right) \\
&= \Pr(\mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) Z \leq x) \\
&= \Pr\left(Z \leq \frac{x - (\mu_1 + \mu_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x - (\mu_1 + \mu_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}\right),\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

À noter que si $\sigma_1 = \sigma_2$, on a

$$\begin{aligned}
S^- &= \mu_1 + \mu_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) Z \\
&= \mu_1 + \mu_2,
\end{aligned}$$

et donc la variable aléatoire S^- a une distribution dégénérée à $(\mu_1 + \mu_2)$, c'est-à-dire $\Pr(S^- = (\mu_1 + \mu_2)) = 1$. ■

On considère un contexte un peu plus général pour examiner le comportement de $S^- = X_1^- + X_2^-$. On suppose que les variables aléatoires X_1^- et X_2^- sont continues positives. De plus, on suppose qu'elles sont antimonotones et identiquement distribuées. On utilise la représentaion de X_1^- et X_2^- en fonction de $F_{X_1^-}^{-1}$, $F_{X_2^-}^{-1}$ et U, soit

$$\begin{aligned}
S^- &= F_{X_1^-}^{-1}(U) + F_{X_2^-}^{-1}(1-U) \\
&= \varphi^-(U).
\end{aligned}$$

Dans un premier temps, examinons la fonction $\varphi^-(u)$ pour $u \in (0,1)$. La fonction $\varphi^-(u)$ est positive étant donné qu'elle est la somme de 2 fonctions positives. En effet, X_1^- et X_2^- sont des variables aléatoires positives alors $F_{X_1^-}^{-1}$ et $F_{X_2^-}^{-1}$ produiront des valeurs positives. La fonction $\varphi^-(u)$ peut être de formes différentes. On considère ici le cas particulier où $\varphi^-(u)$ est convexe. Elle est ainsi symétrique par rapport à $u = 0.5$ tel que $\varphi^-(0.5) = x_0$, où x_0 est la valeur minimale de la fonction φ^-. On a

$$\begin{aligned} F_{S^-}(x) &= \Pr\left(S^- \leq x\right) \\ &= \Pr\left(\varphi^-(U) \leq x\right) \\ &= \Pr(U \in A(x)) \\ &= \Pr\left(U \in (u_1(x), u_2(x))\right) \\ &= \Pr\left(U \in (u_1, u_2)\right) \\ &= F_U(u_2) - F_U(u_1) \\ &= u_2 - u_1 \end{aligned}$$

où u_1 et u_2 sont les deux solutions de $\varphi^-(u) = x$. À noter que la fonction atteint son minimum à x_0 et donc

$$\begin{aligned} F_{S^-}(x_0) &= \Pr\left(S^- \leq x_0\right) \\ &= \Pr\left(\varphi^-(U) \leq x_0\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 7.25 *Soit un couple de variables aléatoires* $\left(X_1^-, X_2^-\right)$ *antimonotones où* $X_1^- \sim Exp(1)$ *et* $X_2^- \sim Exp(1)$. *Trouver* $F_{S^-}(x)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} F_{S^-}(x) &= \Pr\left(S^- \leq x\right) \\ &= \Pr\left(F_{X_1^-}^{-1}(U) + F_{X_2^-}^{-1}(1-U) \leq x\right) \\ &= \Pr\left(-\ln(1-U) - \ln(U) \leq x\right) \\ &= \Pr\left(\varphi^-(U) \leq x\right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi^-(U) &= -\ln(1-U) - \ln(U) \\ &= -\left(\ln(1-U) + \ln(U)\right) \\ &= -\ln\{(1-U)(U)\}. \end{aligned}$$

Le point minimal de la fonction $\varphi^-(u)$ est x_0 tel que $x_0 = \varphi^-(0.5)$, soit

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi^-(0.5) \\ &= -\ln(0.5) - \ln(1-0.5) \\ &= 2\ln(2) \\ &= 1.386. \end{aligned}$$

Ainsi, $S^- > x_0 = 1.386$. Ensuite, on doit trouver la solution de $\varphi^-(u) = x$, soit de

$$\varphi^-(u) = -\ln\{(1-u)u\} = x.$$

On a

$$\begin{aligned} -\left(\ln((1-u)(u))\right) &= x \\ \ln((1-u)(u)) &= -x \\ (1-u)(u) &= \mathrm{e}^{-x} \\ u - u^2 &= \mathrm{e}^{-x} \\ u^2 - u - \mathrm{e}^{-x} &= 0. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1-\sqrt{1+4\mathrm{e}^{-x}}}{2} \\ u_2 &= \frac{1+\sqrt{1+4\mathrm{e}^{-x}}}{2}. \end{aligned}$$

Alors, la fonction de répartition de S^- est donnée par

$$\begin{aligned} F_{S^-}(x) &= \frac{1+\sqrt{1+4\mathrm{e}^{-x}}}{2} - \frac{1-\sqrt{1+4\mathrm{e}^{-x}}}{2} \\ &= \sqrt{1+4\mathrm{e}^{-x}},\ x > 2\ln(2) = x_0. \end{aligned}$$

■

Exemple 7.26 *Soit les variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *où* $\Pr(X_i = k) = \frac{1}{3}$ *pour* $k = 0, 1, 2$. *On définit* $S = X_1 + X_2$.

(a) On suppose que les variables aléatoires X_1^+ et X_2^+ sont comonotones où $\Pr(X_i = k) = \frac{1}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$. Montrer que la fonction de masse de probabilité de $S^+ = X_1^+ + X_2^+$ est

$$\Pr\left(S^+ = k\right) = \begin{cases} \frac{1}{3},\ k = 0 \\ \frac{1}{3},\ k = 2 \\ \frac{1}{3},\ k = 4 \\ 0, \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

(b) On suppose que les variables aléatoires X_1^- et X_2^- sont antimonotones où $\Pr(X_i = k) = \frac{1}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$. Montrer que S^- est une variable aléatoire dégénérée à 2.

(c) On suppose que les variables aléatoires $X_1^\perp$ et $X_2^\perp$ sont indépendantes. Montrer que la fonction de masse de probabilité de $S^\perp$ est

$$\Pr\left(S^\perp = k\right) = \begin{cases} \frac{1}{9},\ k = 0 \\ \frac{2}{9},\ k = 1 \\ \frac{3}{9},\ k = 2 \\ \frac{2}{9},\ k = 3 \\ \frac{1}{9},\ k = 4 \\ 0, \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Solution. (a) On a

$$S^+ = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U)$$

où

$$\begin{aligned} F_{X_i}^{-1}(u) &= 0,\ u \in (0, \frac{1}{3}],\ i = 1, 2 \\ F_{X_i}^{-1}(u) &= 1,\ u \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}],\ i = 1, 2 \\ F_{X_i}^{-1}(u) &= 2,\ u \in (\frac{2}{3}, 1],\ i = 1, 2 \end{aligned}$$

Alors,

$$S^+ = \begin{cases} 0,\ u \in (0, \frac{1}{3}] \\ 2,\ u \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 4,\ u \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

et

$$\Pr\left(S^+ = k\right) = \begin{cases} \Pr\left(U \in (0, \frac{1}{3}]\right) = \frac{1}{3},\ k = 0 \\ \Pr\left(U \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\right) = \frac{1}{3},\ k = 2 \\ \Pr\left(U \in (\frac{2}{3}, 1]\right) = \frac{1}{3},\ k = 4 \end{cases}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} S^- &= X_1^- + X_2^- \\ &= F^{-1}_{X_1^-}(U) + F^{-1}_{X_2^-}(1-U) \end{aligned}$$

qui peut se représenter ainsi dans un tableau:

j	*Intervalle pour* U	$X_1^{(j)} = F^{-1}_{X_{-1}}(U)$	$X_2^{(j)} = F^{-1}_{X_2^-}(1-U)$	$S^{-(j)} = X_1^{-(j)} + X_2^{-(j)}$
1	$I^{(1)} = [0, \frac{1}{3}]$	0	2	2
2	$I^{(1)} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$	1	1	2
3	$I^{(3)} = (\frac{2}{3}, 1]$	2	0	2

Si $U \in I^{(1)} = [0, \frac{1}{3}]$, alors X_1 prend la valeur $X_1^{(1)} = 0$ et $X_2^{(1)} = 2$. Il en résulte que S prend la valeur $S^{(1)}$. De plus,

$$\begin{aligned} \Pr\left(S^- = S^{-(1)}\right) &= \Pr\left(X_1^- = X_1^{-(1)}, X_2 = X_2^{-(1)}\right) \\ &= \Pr\left(X_1^- = 0, X_2^- = 2\right) \\ &= \Pr\left(U \in [0, \frac{1}{3}]\right) \\ &= \frac{1}{3} - 0 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ensuite, si $U \in I^{(2)} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, alors X_1^- prend la valeur $X_1^{-(2)} = 1$ et $X_2^{-(2)} = 1$. Il en résulte que S^- prend la valeur $S^{-(2)}$. De plus,

$$\begin{aligned} \Pr\left(S^- = S^{-(2)}\right) &= \Pr\left(X_1 = X_1^{(2)}, X_2 = X_2^{(2)}\right) \\ &= \Pr\left(X_1 = 1, X_2 = 1\right) \\ &= \Pr\left(U \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Enfin, si $U \in I^{(3)} = (\frac{2}{3}, 1]$, alors X_1 prend la valeur $X_1^{(3)} = 2$ et $X_2^{(3)} = 0$. Il en résulte que S prend la valeur $S^{(3)}$. De plus,

$$\begin{aligned} \Pr\left(S = S^{(3)}\right) &= \Pr\left(X_1 = X_1^{(3)}, X_2 = X_2^{(3)}\right) \\ &= \Pr\left(X_1 = 2, X_2 = 0\right) \\ &= \Pr\left(U \in (\frac{2}{3}, 1]\right) \\ &= 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On a donc que la variable aléatoire S est dégénérée à 2. On associe donc les plus petites valeurs de X_1 aux plus grandes valeurs de X_2 conduisant ainsi à $\Pr(S=2)=1$. (c)

$$\begin{aligned}
\Pr(S=0) &= \Pr(X_1=0)\Pr(X_2=0) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9} \\
\Pr(S=1) &= \Pr(X_1=0)\Pr(X_2=1)+\Pr(X_1=1)\Pr(X_2=0) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9} \\
\Pr(S=2) &= \Pr(X_1=0)\Pr(X_2=2)+\Pr(X_1=1)\Pr(X_2=1)+\Pr(X_1=2)\Pr(X_2=0) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{9} \\
\Pr(S=3) &= \Pr(X_1=1)\Pr(X_2=2)+\Pr(X_1=2)\Pr(X_2=1) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9} \\
\Pr(S=4) &= \Pr(X_1=2)\Pr(X_2=2) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

■

Exemple 7.27 *Soit les variables aléatoires X_1 et X_2 où X_i représente la valeur accumulée de 1\$ versé à 0 après une période sur le titre financier i et définies telle que*

j	$X_1^{(j)}$	$\Pr\left(X_1=X_1^{(j)}\right)$	$X_2^{(j)}$	$\Pr\left(X_2=X_2^{(j)}\right)$
1	0.8	$\frac{1}{4}$	0.7	$\frac{1}{4}$
2	1	$\frac{1}{4}$	0.9	$\frac{1}{4}$
3	1.05	$\frac{1}{4}$	1.1	$\frac{1}{4}$
4	1.2	$\frac{1}{4}$	1.4	$\frac{1}{4}$

Soit $S=X_1+X_2$. Trouver $\Pr\left(S=S^{(j)}\right)$ pour $j=1,2,3,4,...$ sous les hypothèses de comonotonocié, d'antimonocité et d'indépendance.

Solution. (a) Supposons X_1 et X_2 des variables aléatoires comonotones. On a

$$\begin{aligned}
S^+ &= X_1^+ + X_2^+ \\
&= F_{X_1^+}^{-1}(U)+F_{X_2^+}^{-1}(U)
\end{aligned}$$

qui peut se représenter dans un tableau par

j	$I^{(j)}$	$X_1^{+(j)}$ *si* $U\in I^{(j)}$	$X_2^{+(j)}$ *si* $U\in I^{(j)}$	$S^{+(j)}$ *si* $U\in I^{(j)}$
1	$[0,\frac{1}{4}]$	0.8	0.7	1.5
2	$(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$	1	0.9	1.9
3	$(\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$	1.05	1.1	2.15
4	$(\frac{3}{4},1]$	1.2	1.4	2.6

On obtient donc la fonction de masse de probabilité suivante pour la variable aléatoire S

$$\Pr\left(S^+=k\right)=\left\{\begin{array}{c}
\Pr\left(U\in[0,\frac{1}{4}]\right)=\frac{1}{4},\ k=1.5 \\
\Pr\left(U\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\right)=\frac{1}{4},\ k=1.9 \\
\Pr\left(U\in(\frac{1}{2},\frac{3}{4}]\right)=\frac{1}{4},\ k=2.15 \\
\Pr\left(U\in(\frac{3}{4},1]\right)=\frac{1}{4},\ k=2.6
\end{array}\right.$$

(b) Supposons X_1^- et X_2^- des variables aléatoires antimonotones. On a

$$\begin{aligned} S^- &= X_1^- + X_2^- \\ &= F_{X_1^-}^{-1}(U) + F_{X_2^-}^{-1}(1-U) \end{aligned}$$

qui peut se représenter ainsi dans un tableau:

j	*Intervalle pour U*	$X_1^{-(j)} = F_{X_1^-}^{-1}(U)$	$X_2^{(j)} = F_{X_2^-}^{-1}(1-U)$	$S^{-(j)} = X_1^{-(j)} + X_2^{-(j)}$
1	$I^{(1)} = [0, \frac{1}{4}]$	0.8	1.4	2.2
2	$I^{(1)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$	1	1.1	2.1
3	$I^{(3)} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$	1.05	0.9	1.95
4	$I^{(4)} = (\frac{3}{4}, 1]$	1.2	0.7	1.9

On obtient donc

$$\Pr\left(S^- = k\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 1.9 \\ \frac{1}{4}, & k = 1.95 \\ \frac{1}{4}, & k = 2.1 \\ \frac{1}{4}, & k = 2.2 \end{cases}.$$

(c) Supposons $X_1^\perp$ et $X_2^\perp$ des variables aléatoires indépendantes.

$$\begin{aligned}
\Pr\left(S^\perp = 1.5\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 0.8\right)\Pr\left(X_2^\perp = 0.7\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 1.7\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 0.8\right)\Pr\left(X_2^\perp = 0.9\right) + \Pr\left(X_1^\perp = 1\right)\Pr\left(X_2^\perp = 0.7\right) = \frac{2}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 1.75\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 1.05\right)\Pr\left(X_2^\perp = 0.7\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 1.9\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 0.8\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.1\right) + \Pr\left(X_1^\perp = 1\right)\Pr\left(X_2^\perp = 0.9\right) + \Pr\left(X_1^\perp = 1.2\right)\Pr\left(X_2^\perp = 0.7\right) = \frac{3}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 1.95\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 1,05\right)\Pr\left(X_2^\perp = 0.9\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 2.1\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 1\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.1\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 2.15\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 1.05\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.1\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 2.2\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 0.8\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.4\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 2.3\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 0.8\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.4\right) + \Pr\left(X_1 = 1.2\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.1\right) = \frac{2}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 2.4\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 1\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.4\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 2.45\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 1.05\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.4\right) = \frac{1}{16} \\
\Pr\left(S^\perp = 2.6\right) &= \Pr\left(X_1^\perp = 1.2\right)\Pr\left(X_2^\perp = 1.4\right) = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

■

7.5 Approches générales pour l'agrégation de variables aléatoires

7.5.1 Variables aléatoires continues

Pour simplifier, on considère un couple de variable aléatoire continues positives (X_1, X_2) dont la fonction de densité conjointe est donnée par f_{X_1,X_2}. On veut examiner le comportement de $S = X_1 + X_2$, en évaluant notamment $f_S(s)$ et $F_S(s) = \Pr(X_1 + X_2 \leq s)$ pour $s \in \mathbb{R}^+$. Alors, la fonction de densité de S s'exprime en termes de f_{X_1,X_2} sous la forme suivante :

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_1,X_2}(x_1, s - x_1)\,\mathrm{d}x_1. \tag{7.3}$$

La généralisation de (7.3) pour $n > 2$ risques se fait comme suit. Soit le vecteur de variable aléatoire $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ avec fonction de densité $f_{\underline{X}}$. La fonction de densité de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est obtenue avec

$$f_S(s) = \int_0^s \int_0^{s-x_1} \ldots \int_0^{s-\sum_{i=1}^{n-2} x_i} f_{\underline{X}}\left(x_1, x_2, \ldots, s - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) \mathrm{d}x_{n-1}...\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1.$$

Dans certaines circonstances, on a recours à la fonction génératrice des moments multivariée de S (si elle existe), donnée par

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] && (7.4) \\ &= E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right] && (7.5) \\ &= M_{X_1,...,X_n}(t, ..., t), && (7.6) \end{aligned}$$

pour identifier la distribution de S.

7.5.2 Variables aléatoires discrètes

Soit une paire de variables aléatoires discrètes (X_1, X_2) avec support arithmétique, c'est-à-dire où $X_i \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ avec un pas $h > 0$ et dont la fonction de masse de probabilité conjointe est donnée par $f_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h)$. La fonction de masse de probabilité de S est déterminée avec

$$f_S(kh) = \sum_{m_1=0}^{k} f_{X_1,X_2}(m_1h, kh - m_1h). \tag{7.7}$$

La version généralisée de (7.7) pour $n > 2$ risques est

$$f_{S_n}(kh) = \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{k_2=0}^{k_1} ... \sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} f_{\underline{X}}\left(k_1h, k_2h, ..., k_{n-1}h, \left(k - \sum_{j=1}^{n-1} k_j\right) h\right).$$

Dans le cas où la fonction génératrice des moments conjoints $M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n)$ de $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ existe, alors la fonction génératrice des moments de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] && (7.8) \\ &= E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right] && (7.9) \\ &= M_{X_1,...,X_n}(t, ..., t). && (7.10) \end{aligned}$$

Le résultat en (7.8) permet dans certains cas d'identifier la distribution de S.

Il existe une panoplie d'extensions bivariées et multivariées de distributions discrètes et continues univariées connues. La littérature sur les distributions multivariées est vaste et dans le prochain chapitre, on étudie quelques exemples de ces distributions.

Chapitre 8

Lois multivariées continues et discrètes

8.1 Lois continues bivariées et multivariées

8.1.1 Loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielles de paramètres β_1 et β_2 respectivement. On sait que

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= F_{X_1}(x_1)\,F_{X_2}(x_2) \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right). \end{aligned}$$

Gumbel et Eyraud ont proposé une nouvelle loi exponentielle bivariée pour (X_1, X_2).

Définition 8.1 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *avec fonction de répartition conjointe*

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)+\theta\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2},\ x_1>0,\ x_2>0$$

où $-1\leq\theta\leq 1$ *et* $\beta_i>0$, $i=1,2$. *Le vecteur* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *est dit obéir à une loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM).*

On observe que le premier terme est la fonction de répartition conjointe de (X_1, X_2) où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes alors que le deuxième terme est une perturbation de l'indépendance où θ est le paramètre de dépendance. Si $\theta = 0$, alors on retrouve le cas particulier d'indépendance.

Proposition 8.2 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *obéissant à une loi exponentielle bivariée FGM. La fonction de densité conjointe de* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *est donnée par*

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=g(x_1,\beta_1)\,g(x_2,\beta_2)(1+\theta)-g(x_1,2\beta_1)\,g(x_2,\beta_2)\,\theta-g(x_1,\beta_1)\,g(x_2,2\beta_2)\,\theta+g(x_1,2\beta_1)\,g(x_2,2\beta_2)\,\theta,$$

où $g(y,\gamma)=\gamma\mathrm{e}^{-\gamma y}$, $y>0$ *est la fonction de densité d'une loi exponentielle de paramètre* γ.

Preuve. En développant l'expression de la fonction de répartition de (X_1, X_2), on obtient

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)+\theta\left(\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}-\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}+\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ &= (1+\theta)\,\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}-\theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}-\theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2} \\ &\quad +\theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}. \end{aligned}$$

■

Proposition 8.3 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *obéissant à une loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern. Alors, les lois marginales de* X_i *sont exponentielles de paramètre* β_i, $i=1,2$.

Preuve. Prenons le cas de la marginale de X_1, celui de X_2 étant similaire.

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \int_0^\infty f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty (1+\theta)\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2x_2} - \theta2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2x_2} - \theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2x_2} + \theta2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2x_2}\mathrm{d}x_2 \\
&= (1+\theta)\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1x_1}\int_0^\infty \beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2x_2}\mathrm{d}x_2 - \theta2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1x_1}\int_0^\infty \beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2x_2}\mathrm{d}x_2 \\
&\quad -\theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1x_1}\int_0^\infty 2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2x_2}\mathrm{d}x_2 + \theta2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1x_1}\int_0^\infty 2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2x_2}\mathrm{d}x_2 \\
&= (1+\theta)\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1x_1} - \theta2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1x_1} - \theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1x_1} + \theta2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1x_1} \\
&= \beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1x_1}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 8.4 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *obéissant à une loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern. Alors, la transformée de Laplace-Stieltjes (TLS) de* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}
L_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= (1+\theta)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t_2}\right) \\
&\quad -\theta\left[\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1+t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t_2}\right)+\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2+t_2}\right)-\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1+t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2+t_2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
L_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= E\left[\mathrm{e}^{-t_1X_1}\mathrm{e}^{-t_2X_2}\right] \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1x_1}\mathrm{e}^{-t_2x_2}f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1x_1}\mathrm{e}^{-t_2x_2}(1+\theta)\,g(x_1,\beta_1)\,g(x_2,\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\quad -\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1x_1}\mathrm{e}^{-t_2x_2}\theta g(x_1,2\beta_1)\,g(x_2,\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\quad -\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1x_1}\mathrm{e}^{-t_2x_2}\theta g(x_1,\beta_1)\,g(x_2,2\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\quad +\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1x_1}\mathrm{e}^{-t_2x_2}\theta g(x_1,2\beta_1)\,g(x_2,2\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= (1+\theta)\,\phi(t_1,t_2,\beta_1,\beta_2) - \theta\phi(t_1,t_2,2\beta_1,\beta_2) - \theta\phi(t_1,t_2,\beta_1,2\beta_2) + \theta\phi(t_1,t_2,2\beta_1,2\beta_2)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\phi(t_1,t_2,\gamma_1,\gamma_2) &= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1x_1}\mathrm{e}^{-t_2x_2}g(x_1,\gamma_1)\,g(x_2,\gamma_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_1x_1}g(x_1,\gamma_1)\,\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t_2x_2}g(x_2,\gamma_2)\,\mathrm{d}x_2\right) \\
&= \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1+t_1}\right)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2+t_2}\right)
\end{aligned}$$

■

Proposition 8.5 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *obéissant à une loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern. Alors, la covariance entre* X_1 *et* X_2 *est donnée par*

$$Cov(X_1,X_2)=\frac{1}{4}\frac{\theta}{\beta_1\beta_2}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
E[X_1X_2] &= \int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= (1+\theta)\int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2g(x_1,\beta_1)\,g(x_2,\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\quad -\theta\int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2g(x_1,2\beta_1)\,g(x_2,\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\quad -\theta\int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2g(x_1,\beta_1)\,g(x_2,2\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&\quad +\theta\int_0^\infty\int_0^\infty x_1x_2g(x_1,2\beta_1)\,g(x_2,2\beta_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= (1+\theta)\left(\int_0^\infty x_1g(x_1,\beta_1)\,\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_0^\infty x_2g(x_2,\beta_2)\,\mathrm{d}x_2\right) \\
&\quad -\theta\left(\int_0^\infty x_1g(x_1,2\beta_1)\,\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_0^\infty x_2g(x_2,\beta_2)\,\mathrm{d}x_2\right) \\
&\quad -\theta\left(\int_0^\infty x_1g(x_1,\beta_1)\,\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_0^\infty x_2g(x_2,2\beta_2)\,\mathrm{d}x_2\right) \\
&\quad +\theta\left(\int_0^\infty x_1g(x_1,2\beta_1)\,\mathrm{d}x_1\right)\left(\int_0^\infty x_2g(x_2,2\beta_2)\,\mathrm{d}x_2\right).
\end{aligned}$$

Chacune des intégrales correspond à l'expression de l'espérance d'une loi exponentielle. Alors, on a

$$E[X_1X_2]=(1+\theta)\left(\frac{1}{\beta_1}\right)\left(\frac{1}{\beta_2}\right)-\theta\left(\frac{1}{2\beta_1}\right)\left(\frac{1}{\beta_2}\right)-\theta\left(\frac{1}{\beta_1}\right)\left(\frac{1}{2\beta_2}\right)+\theta\left(\frac{1}{2\beta_1}\right)\left(\frac{1}{2\beta_2}\right),$$

d'où l'expression suivante pour la covariance entre X_1 et X_2

$$\begin{aligned} Cov\left(X_1, X_2\right) &= E\left[X_1 X_2\right] - E\left[X_1\right] E\left[X_2\right] \\ &= E\left[X_1 X_2\right] - \left(\frac{1}{\beta_1}\right)\left(\frac{1}{\beta_2}\right) \\ &= \theta\left(\frac{1}{\beta_1}\right)\left(\frac{1}{\beta_2}\right)\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\theta}{\beta_1\beta_2}. \end{aligned}$$

■

Proposition 8.6 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires $\underline{X} = (X_1, X_2)$ obéissant à une loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern. Alors, le coefficient de corrélation de Pearson est donné par*

$$\rho_P\left(X_1, X_2\right) = \frac{\theta}{4}, \ -1 < \theta < 1.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \rho_P\left(X_1, X_2\right) &= \frac{Cov\left(X_1, X_2\right)}{\sqrt{Var\left(X_1\right) Var\left(X_2\right)}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\frac{\theta}{\beta_1\beta_2}}{\sqrt{\frac{1}{\beta_1^2}\frac{1}{\beta_2^2}}} \\ &= \frac{\theta}{4}. \end{aligned}$$

■

Remarque 8.7 *Si $\theta = 0$, alors $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$ et donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. Comment peut-on déduire ceci? Peut-on le faire à l'aide de l'expression du coefficient de corrélation de Pearson $\rho_P(X_1, X_2)$ de la loi exponentielle bivariée FGM? Non...on peut le déduire à partir de l'expression de la fonction de répartition conjointe F_{X_1,X_2} ou de la transformée de Laplace-Stieltjes L_{X_1,X_2} c'est-à-dire si $\theta = 0$, alors*

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right) = F_{X_1}\left(x_1\right) F_{X_2}\left(x_2\right) \\ L_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) &= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t_2}\right) = L_{X_1}\left(x_1\right) L_{X_2}\left(x_2\right). \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la simulation d'une réalisation de (X_1, X_2). La méthode de simulation requiert la fonction de répartition conditionnelle

$$\begin{aligned} F_{X_2|X_1=x_1}\left(x_2\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right)}{f_{X_1}\left(x_1\right)} \\ &= (1+\theta)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad -\theta 2\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad -\theta\left(1 - \mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad +\theta 2\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}\right). \end{aligned}$$

On suppose que la valeur de x_1 est connue. On isole x_2. Avec $v_1 = \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}$, $v_2 = \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}$, $u_2 = F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$, on a

$$\begin{aligned} u_2 &= (1+\theta)(1 - v_2) - 2\theta v_1 (1 - v_2) - \theta\left(1 - v_2^2\right) + 2\theta v_1\left(1 - v_2^2\right) \\ &= 1 + \theta - (1+\theta) v_2 - 2\theta v_1 + 2\theta v_1 v_2 - \theta + \theta v_2^2 + 2\theta v_1 - 2\theta v_1 v_2^2 \\ &= 1 - (1+\theta) v_2 + 2\theta v_1 v_2 + \theta v_2^2 + 2\theta v_1 - 2\theta v_1 v_2^2 \\ &= (\theta - 2\theta v_1) v_2^2 + (2\theta v_1 - (1+\theta)) v_2 + 1 \end{aligned}$$

On constate que

$$c_2 v_2^2 + c_1 v_2 + c_0 = 0$$

avec

$$\begin{aligned} c_0 &= u_2 - 1 \\ c_1 &= (1+\theta) - 2\theta v_1 \\ c_2 &= (2\theta v_1 - \theta) \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2c_0}}{2c_2},\ v_2 > 0 \\ &= \frac{-\left((1+\theta) - 2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right) + \sqrt{\left((1+\theta) - 2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)^2 - 4\left(2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} - \theta\right)(u_2 - 1)}}{2\left(2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} - \theta\right)}. \end{aligned}$$

Enfin, étant donné que $v_2 = \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}$, on obtient

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{\beta_2} \ln(v_2) \\ &= -\frac{1}{\beta_2} \ln\left(\frac{-\left((1+\theta) - 2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right) + \sqrt{\left((1+\theta) - 2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)^2 - 4\left(2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} - \theta\right)(u_2 - 1)}}{2\left(2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} - \theta\right)}\right). \end{aligned} \tag{8.1}$$

L'idée de l'algorithme est de simuler une réalisation de X_1. Ensuite, on utilise (8.1) pour produire une réalisation de X_2.

Algorithme 8.8 ***Algorithme de simulation pour la loi exponentielle bivariée FGM.***

1. *Produire les réalisations $U_1^{(j)}$ et $U_2^{(j)}$ des variables aléatoires indépendantes $U_1 \sim U_2 \sim Unif(0,1)$.*
2. *On simule une réalisation $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de (X_1, X_2) avec*

$$X_1^{(j)} = -\frac{1}{\beta_1} \ln\left(1 - U_1^{(j)}\right)$$

et

$$\begin{aligned} X_2^{(j)} &= -\frac{1}{\beta_2} \ln\left(\frac{-\left((1+\theta) - 2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 X_1^{(j)}}\right) + \sqrt{\left((1+\theta) - 2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 X_1^{(j)}}\right)^2 - 4\left(2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 X_1^{(j)}} - \theta\right)\left(U_2^{(j)} - 1\right)}}{2\left(2\theta \mathrm{e}^{-\beta_1 X_1^{(j)}} - \theta\right)}\right) \\ &= -\frac{1}{\beta_2} \ln\left(\frac{-\left((1+\theta) - 2\theta\left(1 - U_1^{(j)}\right)\right) + \sqrt{\left((1+\theta) - 2\theta\left(1 - U_1^{(j)}\right)\right)^2 - 4\left(2\theta\left(1 - U_1^{(j)}\right) - \theta\right)\left(U_2^{(j)} - 1\right)}}{2\left(2\theta\left(1 - U_1^{(j)}\right) - \theta\right)}\right). \end{aligned}$$

3. *On répète pour $j = 1, ..., nsimul$.*

Soit une variable aléatoire $S = X_1 + X_2$. On investigue le comportement de celle-ci. La loi exponentielle bivariée FGM permet de trouver une expression pour F_S et L_S. Pour nous aider à obtenir celle-ci, on rappelle la proposition ci-dessous.

Proposition 8.9 *Soit des variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2 telles que $Y_1 \sim Exp(\gamma_1)$ et $Y_2 \sim Exp(\gamma_2)$. On définit $T = Y_1 + Y_2$.*

- Si $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, alors $T \sim Erlang\,(2, \gamma)$ avec

$$\begin{aligned} F_T(x) &= H(x; 2, \gamma) = 1 - \sum_{j=0}^{1} \frac{(\gamma x)^j \,\mathrm{e}^{-\gamma x}}{j!} \\ L_T(t) &= \left(\frac{\gamma}{\gamma + t}\right)^2. \end{aligned}$$

- Si $\gamma_1 \neq \gamma_2$, alors $T \sim$ *Erlang Généralisée* avec

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \zeta(x; \gamma_1, \gamma_2) = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma_1 x}\right) + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma_2 x}\right),\ x > 0 \\ L_T(t) &= \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + t}\right)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + t}\right). \end{aligned}$$

On utilise la transformée de Laplace-Stieltjes de (X_1, X_2) pour identifier la loi de S.

Proposition 8.10 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *obéissant à une loi exponentielle bivariée (Eyraud) Farlie-Gumbel-Morgenstern et* $S = X_1 + X_2$. *Alors,*

$$F_S(x) = (1+\theta)\,\zeta(x; \beta_1, \beta_2) - \theta\zeta(x; 2\beta_1, \beta_2) - \theta\zeta(x; \beta_1, 2\beta_2) + \theta\zeta(x; 2\beta_1, 2\beta_2),$$

où

$$\zeta(x; \gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\gamma x} \sum_{j=0}^{1} \frac{(\gamma x)^j}{j!}, & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \sum_{i=1}^{2} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{2} \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \gamma_i} \right) \left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma_i x}\right), & \gamma_1 \neq \gamma_2 \end{cases}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} L_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tS}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-t(X_1+X_2)}\right] \\ &= L_{X_1,X_2}(t, t) \\ &= (1+\theta)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) \\ &\quad - \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 + t}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 + t}\right) \\ &\quad - \theta\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + t}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 + t}\right) \\ &\quad + \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1 + t}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2 + t}\right). \end{aligned}$$

On remarque que l'expression obtenue pour $L_S(t)$ correspond à une combinaison linéaire de 4 termes dont chacun des termes correspond à la transformée de Laplace-Stieltjes de la loi Erlang ou de la loi Erlang généralisée. On déduit donc l'expression désirée de F_S à partir de L_S. ■

Remarque 8.11 *La loi de S est appelée une combinaison linéaire de lois Erlang/Erlang Généralisées. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont positifs et négatifs et la somme de ceux-ci est égale à 1.*

Remarque 8.12 *La loi Erlang généralisée, de paramètres $\beta_1, ..., \beta_n$, est une combinaison convexe de lois exponentielles.*

En conclusion, la loi exponentielle bivariée FGM admet une relation de dépendance modérée, positive ($\theta > 0$) ou négative ($\theta < 0$) étant donné $-\frac{1}{4} < \rho_P(X_1, X_2) < \frac{1}{4}$. Cette loi ne contient pas toutefois les bornes supérieur et inférieur de Fréchet comme cas particulier.

8.1.2 Loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin

On considère trois variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $Y_i \sim Exp(\lambda_i)$ pour $i = 0, 1, 2$. On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 par $X_i = \min(Y_i; Y_0)$ pour $i = 1, 2$. Pour $i = 1, 2$, on observe que

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_i}(x_i) &= \Pr(X_i > x_i) \\
&= \Pr(\min(Y_i; Y_0) > x_i) \\
&= \Pr(Y_i > x_i, Y_0 > x_i) \\
&= \Pr(Y_i > x_i)\Pr(Y_0 > x_i) \\
&= \overline{F}_{Y_i}(x_i)\overline{F}_{Y_0}(x_i) \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_i+\lambda_0)x_i},
\end{aligned}$$

ce qui implique $X_i \sim Exp(\lambda_i + \lambda_0)$, $i = 1, 2$.

Proposition 8.13 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires $\underline{X} = (X_1, X_2)$ où $X_i = \min(Y_i; Y_0)$ et $Y_i \sim Exp(\lambda_i)$. Alors, la fonction de survie conjointe de $\underline{X} = (X_1, X_2)$ est donnée par*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)},$$

où $\beta_i = \lambda_i + \lambda_0$ ($i = 1, 2$) et $0 \leq \lambda_0 \leq \min(\beta_1; \beta_2)$. Le vecteur $\underline{X} = (X_1, X_2)$ est dit obéir à une loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= \Pr(\min(Y_1, Y_0) > x_1, \min(Y_2, Y_0) > x_2) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1, Y_0 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > x_2) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1)\Pr(Y_2 > x_2)\Pr(Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x_2}\mathrm{e}^{-\lambda_0 \max(x_1;x_2)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x_2}\mathrm{e}^{-\lambda_0(x_1+x_2-\min(x_1;x_2))} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0)x_1}\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0)x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} \\
&= \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}
\end{aligned}$$

où $\beta_i = \lambda_i + \lambda_0$ ($i = 1, 2$) et $0 \leq \lambda_0 \leq \min(\beta_1; \beta_2)$. ■

L'expression de la fonction de survie de (X_1, X_2) peut également s'écrire

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)} \\
&= \overline{F}_{X_1}(x_1)\overline{F}_{X_2}(x_2)\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)},
\end{aligned}$$

ce qui permet de déduire que la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin est une forme de perturbation de la loi exponentielle bivariée supposant l'indépendance.

Proposition 8.14 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires $\underline{X} = (X_1, X_2)$ obéissant à une loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin. Alors, la fonction de densité conjointe de $\underline{X} = (X_1, X_2)$ est donnée par*

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}(\beta_2 - \lambda_0)\mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0)x_2}, & x_1 > x_2, \\ (\beta_1 - \lambda_0)\mathrm{e}^{-(\beta_1-\lambda_0)x_1}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, & x_1 < x_2, \\ \lambda_0 \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\mathrm{e}^{-\beta_2 x}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, & x_1 = x_2 = x. \end{cases}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}
\end{aligned}$$

Si $x_1 > x_2$, on a

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} \mathrm{e}^{\lambda_0 x_2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} \mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0) x_2} \\
&= \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} (\beta_2 - \lambda_0) \mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0) x_2}.
\end{aligned}$$

Si $x_1 < x_2$, on a

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} \mathrm{e}^{\lambda_0 x_1} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \mathrm{e}^{-(\beta_1-\lambda_0) x_1} \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} \\
&= (\beta_1 - \lambda_0) \mathrm{e}^{-(\beta_1-\lambda_0) x_1} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}.
\end{aligned}$$

Si $x_1 = x_2 = x$, c'est parce que le choc commun s'est produit. On a donc

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x,x)(dx) &= \Pr(x < X_1 \leq x + \mathrm{d}x, x < X_2 \leq x + \mathrm{d}x) \\
&= \Pr(x < Y_0 \leq x + \mathrm{d}x, Y_1 > x, Y_2 > x) \\
&= (f_{Y_0}(x)\,\mathrm{d}x) \Pr(Y_1 > x) \Pr(Y_2 > x) \\
&= \left(\lambda_0 \mathrm{e}^{-\lambda_0}\right) \left(\mathrm{e}^{-(\beta_1-\lambda_0)}\right) \left(\mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0)}\right) \\
&= \lambda_0 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} \mathrm{e}^{-\beta_2 x} \mathrm{e}^{\lambda_0 x}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 8.15 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) qui obéit à une loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin. Alors, le coefficient de corrélation de Pearson entre X_1 et X_2 est donné par*

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\lambda_0}{\beta_1 + \beta_2 - \lambda_0}$$

et les valeurs possibles sont

$$0 \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq \frac{\min(\beta_1; \beta_2)}{\beta_1 + \beta_2 - \min(\beta_1; \beta_2)} = \min\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}; \frac{\beta_2}{\beta_1}\right).$$

Remarque 8.16 *La loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin permet une relation de dépendance positive seulement.*

La méthode utilisée pour construire la loi bivariée exponentielle Marshall-Olkin est appelée la méthode *choc commun* et elle s'adapte aisément afin de construire des lois exponentielles multivariées.

La représentation de (X_1, X_2) fournit un algorithme de simulation simple pour générer des réalisations de (X_1, X_2).

Algorithme 8.17 ***Algorithme de simulation pour la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin.***

1. *On simule des réalisations $Y_1^{(j)}$,$Y_2^{(j)}$, $Y_0^{(j)}$ des variables indépendantes Y_1, Y_2, Y_0 où $Y_0 \sim Exp(\lambda_0)$, $Y_1 \sim Exp(\beta_1 - \lambda_0)$ et $Y_2 \sim Exp(\beta_2 - \lambda_0)$.*

2. *On simule une réalisation $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de (X_1, X_2) avec $X_i^{(j)} = \min\left(Y_0^{(j)}; Y_i^{(j)}\right)$, pour $i = 1, 2$.*

3. *On répète pour $j = 1, ..., nsimul$.*

Proposition 8.18 *Soit un vecteur de deux variables aléatoires* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *obéissant à une loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin et* $S = X_1 + X_2$*. Alors, pour* $0 < x < \infty$*, on a*

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \frac{(\beta_1 - \lambda_0)\beta_2}{\beta_2 - (\beta_1 - \lambda_0)} x\mathrm{e}^{-\beta_2 x}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\beta_2 - (\beta_1 - \lambda_0))x} - 1\right) \\ &\quad + \frac{(\beta_2 - \lambda_0)\beta_1}{(\beta_2 - \lambda_0) - \beta_1} x\mathrm{e}^{-\beta_1 x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)((\beta_2 - \lambda_0) - \beta_1)x}\right) \\ &\quad + \lambda_0 x\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)((\beta_1 - \lambda_0) + \beta_2)x}. \end{aligned}$$

Preuve. Soit le couple $(U, V) = \left(X_1 + X_2, \frac{X_1}{X_1 + X_2}\right) = (g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2))$. La fonction de densité conjointe de (U, V) est obtenue comme suit

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X_1,X_2}(h_1(u, v), h_2(u, v))\,|J(x_1, x_2)|^{-1}$$

où $x_i = h_i(u, v)$ pour $i = 1, 2$ et

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

On a $x_1 = h_1(u, v) = uv$ et $x_2 = h_2(u, v) = u(1 - v)$. Pour le Jacobien de la transformation, on obtient

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x_2}{(x_1 + x_2)^2} & -\frac{x_1}{(x_1 + x_2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x_1 + x_2)}$$

qui peut s'écrire $-\frac{1}{u}$. On a donc

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X_1,X_2}(h_1(u, v), h_2(u, v))\left|J(x_1, x_2)\big|_{(u,v)}\right|^{-1} \\ &= \begin{cases} \beta_1(\beta_2 - \lambda_0)u\mathrm{e}^{-\beta_1 uv}\mathrm{e}^{-(\beta_2 - \lambda_0)u(1-v)}, & \frac{1}{2} < v < 1, \\ (\beta_1 - \lambda_0)\beta_2 u\mathrm{e}^{-(\beta_1 - \lambda_0)uv}\mathrm{e}^{-\beta_2 u(1-v)}, & 0 < v < \frac{1}{2}, \\ \lambda_0 u\mathrm{e}^{-(\beta_1 + \beta_2 - \lambda_0)u(1-v)}, & v = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction de densité de $U = X_1 + X_2$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\beta_1 - \lambda_0)\beta_2 u\mathrm{e}^{-(\beta_1 - \lambda_0)uv}\mathrm{e}^{-\beta_2 u(1-v)}\mathrm{d}v \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \beta_1(\beta_2 - \lambda_0)u\mathrm{e}^{-\beta_1 uv}\mathrm{e}^{-(\beta_2 - \lambda_0)u(1-v)}\mathrm{d}v \\ &\quad + \lambda_0 u\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1 + \beta_2 - \lambda_0)u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= (\beta_1 - \lambda_0)\beta_2 u\mathrm{e}^{-\beta_2 u}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-(\beta_1 - \lambda_0 - \beta_2)uv}\mathrm{d}v \\ &\quad + \beta_1(\beta_2 - \lambda_0)u\mathrm{e}^{-(\beta_2 - \lambda_0)u}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\beta_1 - \beta_2 + \lambda_0)uv}\mathrm{d}v \\ &\quad + \lambda_0 u\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1 + \beta_2 - \lambda_0)u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= (\beta_1-\lambda_0)\,\beta_2 u \mathrm{e}^{-\beta_2 u} \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{(\beta_2-(\beta_1-\lambda_0))uv}\mathrm{d}v \\ &\quad +\beta_1(\beta_2-\lambda_0)\,u\mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0)u}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{e}^{-(\beta_1-(\beta_2-\lambda_0))uv}\mathrm{d}v \\ &\quad +\lambda_0 u \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1+\beta_2-\lambda_0)u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= (\beta_1-\lambda_0)\,\beta_2 u\mathrm{e}^{-\beta_2 u}\frac{\mathrm{e}^{(\beta_2-(\beta_1-\lambda_0))uv}}{(\beta_2-(\beta_1-\lambda_0))\,u}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +\beta_1(\beta_2-\lambda_0)\,u\mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0)u}\frac{\mathrm{e}^{-(\beta_1-(\beta_2-\lambda_0))uv}}{(\beta_1-(\beta_2-\lambda_0))\,u}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &\quad +\lambda_0 u\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1+\beta_2-\lambda_0)u} \\ &= (\beta_1-\lambda_0)\,\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 u}\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\beta_2-(\beta_1-\lambda_0))u}-1\right)}{(\beta_2-(\beta_1-\lambda_0))} \\ &\quad +\beta_1(\beta_2-\lambda_0)\,\mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0)u}\frac{\left(\mathrm{e}^{-(\beta_1-(\beta_2-\lambda_0))u}-\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1-(\beta_2-\lambda_0))u}\right)}{((\beta_2-\lambda_0)-\beta_1)} \\ &\quad +\lambda_0 u\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1+\beta_2-\lambda_0)u} \\ &= \frac{(\beta_1-\lambda_0)\,\beta_2}{\beta_2-(\beta_1-\lambda_0)}\mathrm{e}^{-\beta_2 u}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\beta_2-(\beta_1-\lambda_0))u}-1\right) \\ &\quad +\frac{\beta_1(\beta_2-\lambda_0)}{((\beta_2-\lambda_0)-\beta_1)}\left(\mathrm{e}^{-\beta_1 u}-\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1+\beta_2-\lambda_0)u}\right) \\ &\quad +\lambda_0 u\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1+\beta_2-\lambda_0)u} \\ &= \frac{(\beta_1-\lambda_0)\,\beta_2}{\beta_2-(\beta_1-\lambda_0)}\mathrm{e}^{-\beta_2 u}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\beta_2-(\beta_1-\lambda_0))u}-1\right) \\ &\quad +\frac{\beta_1(\beta_2-\lambda_0)}{((\beta_2-\lambda_0)-\beta_1)}\mathrm{e}^{-\beta_1 u}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)((\beta_2-\lambda_0)-\beta_1)u}\right) \\ &\quad +\lambda_0 u\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\right)(\beta_1+\beta_2-\lambda_0)u} \end{aligned}$$

■

8.1.3 Loi gamma bivariée Cheriyan-Ramabhadran-Mathai-Moschopoulos (CRMM)

On utilise la méthode de construction avec choc commun pour obtenir la loi gamma bivariée CRMM. Avant de faire cette construction, on rappelle quelques propriétés de la loi gamma.

Proposition 8.19 *Soit un couple de variables aléatoires indépendantes* (X_1, X_2) *tel que* $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2$ *et* $S = X_1 + X_2$. *Alors,*

$$S \sim Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} L_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tS}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-t(X_1+X_2)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-tX_1}\right]E\left[\mathrm{e}^{-tX_2}\right] \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\alpha_2} \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

Par identification de la transformée de Laplace-Stieltjes, on obtient le résultat désiré. ■

Proposition 8.20 *Soit une variable aléatoire $X \sim Gamma(\alpha, 1)$. Alors,*

$$\begin{aligned} (Y = bX) &\sim Gamma\left(\alpha, \frac{1}{b}\right) \\ \left(Y = \frac{X}{\beta}\right) &\sim Gamma(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Preuve.

$$L_Y(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tY}\right] = E\left[\mathrm{e}^{-(tb)X}\right] = \left(\frac{1}{1+bt}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}+t}\right)^{\alpha}$$

$$L_Y(t) = E\left[\mathrm{e}^{-tY}\right] = E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta}X}\right] = \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\alpha}$$

et donc, par identification des fonctions génératrices des moments, on obtient les résultats désirés. ■

Définition 8.21 *Soit les variables aléatoires indépendantes Y_0, Y_1 et Y_2 telles que*

$$Y_0 \sim Gamma(\gamma_0, 1), Y_1 \sim Gamma(\gamma_1, 1), Y_2 \sim Gamma(\gamma_2, 1)$$

et soit les variables aléatoires

$$X_1 = \frac{1}{\beta_1}(Y_1 + Y_0) \text{ et } X_2 = \frac{1}{\beta_2}(Y_2 + Y_0).$$

Alors, le couple $\underline{X} = (X_1, X_2)$ obéit à une loi gamma bivariée CRMM de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ_0 où $\alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_0, \alpha_2 = \gamma_2 + \gamma_0$, $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$ et $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$.

Vérifions que la construction conduit bien à $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$. On doit vérifier que la relation suivante est satisfaite

$$L_{X_i}(t) = \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + t}\right)^{\alpha_i}, i = 1, 2.$$

On a

$$\begin{aligned}
L_{X_i}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tX_i}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-t\left(\frac{1}{\beta_i}(Y_i+Y_0)\right)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta_i}(Y_i+Y_0)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta_i}(Y_i)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta_i}(Y_0)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta_i}(Y_i)}\right]E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta_i}(Y_0)}\right] \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_i}}\right)^{\gamma_i}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_i}}\right)^{\gamma_0} \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_i}}\right)^{\alpha_i-\gamma_0}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\beta_i}}\right)^{\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_i}{\beta_i+t}\right)^{\alpha_i},
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la transformée de Laplace-Stieltjes de la loi gamma de paramètres α_i et β_i.

Soit les variables aléatoires X_i, $i = 1, 2$, qui représentent les coûts pour la ligne d'affaires i. Selon la construction de la loi gamma bivariée CRMM, ceux-ci correspondent aux coûts spécifiques à la ligne d'affaires i et des coûts communs à la fois de la ligne no.1 et de la ligne no.2.

Proposition 8.22 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) qui obéit à une loi gamma bivariée CRMM de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ_0 où $\alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_0, \alpha_2 = \gamma_2 + \gamma_0$, $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Alors, la covariance entre X_1 et X_2 est donnée par*

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{\gamma_0}{\beta_1\beta_2}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= Cov\left(\frac{1}{\beta_1}(Y_1+Y_0), \frac{1}{\beta_2}(Y_2+Y_0)\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}Cov(Y_1+Y_0, Y_2+Y_0) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}Cov(Y_0, Y_0) \\
&= \frac{1}{\beta_1\beta_2}Var(Y_0) \\
&= \frac{\gamma_0}{\beta_1\beta_2}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 8.23 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) qui obéit à une loi gamma bivariée CRMM de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ_0 où $\alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_0, \alpha_2 = \gamma_2 + \gamma_0$, $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Alors, le coefficient de corrélation de Pearson entre X_1 et X_2 est donné par*

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}},$$

et les valeurs possibles sont $0 < \rho_P(X_1, X_2) < \frac{\min(\alpha_1,\alpha_2)}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}$.

Preuve.

$$\begin{aligned}\rho_P(X_1,X_2) &= \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} \\ &= \frac{\frac{\gamma_0}{\beta_1\beta_2}}{\left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1^2}\frac{\alpha_2}{\beta_2^2}}\right)} \\ &= \frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}},\end{aligned}$$

où $\gamma_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. ■

Quelques remarques au sujet de la loi gamma CRMM:

- Cette loi bivariée est très connue et fort utilisée en pratique.
- Elle introduit une relation de dépendance positive seulement.
- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ et $\gamma_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha$, alors $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ et la représentation de (X_1, X_2) devient

  $$X_1 = \frac{1}{\beta_1}Y_0,\ X_2 = \frac{1}{\beta_2}Y_0$$

  et donc $X_1 \sim Gamma(\alpha, \beta_1)$ et $X_2 \sim Gamma(\alpha, \beta_2)$. On déduit aussi 2que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont comonotones.
- À noter que pour $X \sim Gamma(\alpha, 1)$, si $\alpha = 0$ alors

  $$\begin{aligned}L_X(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tX}\right] \\ &= \left(\frac{1}{1+t}\right)^0 \\ &= 1,\end{aligned}$$

  ce qui revient à $\Pr(X = 0) = 1$.
- Si $\alpha_1 < \alpha_2$ et $\gamma_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1$, alors $\gamma_1 = 0$ et $\gamma_2 = \alpha_2 - \gamma_0$ et la représentation de (X_1, X_2) devient

  $$X_1 = \frac{1}{\beta_1}Y_0,\ X_2 = \frac{1}{\beta_2}(Y_2 + Y_0)$$

  car $Y_1 = 0$ avec probabilité 1. Ainsi, $X_1 \sim Gamma(\alpha_1 = \gamma_0, \beta_1)$ et $X_2 \sim Gamma(\alpha_2 = \gamma_2 + \gamma_0, \beta_2)$. On déduit que les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas comonotones car le comportement de la variable aléatoire X_2 est expliqué à la fois par le comportement de Y_2 et de Y_0.

Proposition 8.24 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) qui obéit à une loi gamma bivariée CRMM de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ_0 où $\alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_0, \alpha_2 = \gamma_2 + \gamma_0$, $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Alors, la transformée de Laplace-Stieltjes de $\underline{X} = (X_1, X_2)$ est donnée par*

$$L_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t_1}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t_2}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
L_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= E\left[\mathrm{e}^{-t_1X_1}\mathrm{e}^{-t_2X_2}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-t_1\left(\frac{1}{\beta_1}(Y_1+Y_0)\right)}\mathrm{e}^{-t_2\left(\frac{1}{\beta_2}(Y_2+Y_0)\right)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)Y_1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)Y_2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)Y_0}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)Y_1}\right]E\left[\mathrm{e}^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)Y_2}\right]E\left[\mathrm{e}^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)Y_0}\right] \\
&= \left(\frac{1}{1+\frac{t_1}{\beta_1}}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{1}{1+\frac{t_2}{\beta_2}}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t_1}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t_2}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{t_1}{\beta_1}+\frac{t_2}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 8.25 *À noter que si $\gamma_0 = 0$ ($\gamma_i = 0$), alors Y_0 (Y_i) disparaît de la représentation de (X_1, X_2).*

On s'intéresse maintenant au comportement de la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$.

Proposition 8.26 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) qui obéit à une loi gamma bivariée CRMM de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ_0 où $\alpha_1 = \gamma_1 + \gamma_0, \alpha_2 = \gamma_2 + \gamma_0$, $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Soit $S = X_1 + X_2$. Alors, la transformée de Laplace-Stieltjes de S est donnée par*

$$L_S(t) = \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1\beta_2+t}\right)^{\gamma_0}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
L_S(t) &= L_{X_1,X_2}(t,t) \\
&= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\beta_1}+\frac{t}{\beta_2}\right)}\right)^{\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\beta_2+\beta_1}{\beta_1\beta_2}\right)t}\right)^{\gamma_0} \\
&= \left(\frac{\beta_1}{\beta_1+t}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_2+t}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2+\beta_1}\right)}{\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_2+\beta_1}\right)+t}\right)^{\gamma_0}.
\end{aligned}$$

■

On peut donc écrire $L_S(t)$ comme suit

$$L_S(t) = L_{Z_1}(t)\,L_{Z_2}(t)\,L_{Z_0}(t),$$

où $Z_1 \sim Gamma(\gamma_1, \beta_1)$, $Z_2 \sim Gamma(\gamma_2, \beta_2)$, $Z_0 \sim Gamma\left(\gamma_0, \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2} = \frac{1}{\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}}\right)$. Ceci correpond à la transformée de Laplace-Stieltjes de la somme de 3 variables aléatoires indépendantes de loi gamma dont les paramètres d'échelle sont différents. Ainsi, la variable aléatoire $S = Z_1 + Z_2 + Z_0$ n'obéit pas à une loi gamma mais plutôt à un mélange de lois gamma.

Proposition 8.27 *Soit n variables aléatoires indépendantes $X_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, ..., n$ et $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors, la loi de S est un mélange de lois gammas avec*

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k h(x; \alpha + k; \beta), \\ F_S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x; \alpha + k, \beta), \end{aligned}$$

où $p_k = \sigma \xi_k$ pour $k \in N$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ et

$$\begin{aligned} \beta &= \max(\beta_1, ..., \beta_n), \ \sigma = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i}, \\ \zeta_k &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{k} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^k, \ (k = 1, 2, ...), \\ \xi_0 &= 1, \ \xi_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i \zeta_i \xi_{k-i}, \ (k = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

La représentation de (X_1, X_2) fournit un algorithme de simulation simple pour générer des réalisations de (X_1, X_2).

Algorithme 8.28 ***Algorithme de simulation pour la loi gamma bivariée CRMM.***

1. *On simule des réalisations $Y_1^{(j)}$,$Y_2^{(j)}$, $Y_0^{(j)}$ des variables indépendantes Y_1, Y_2, Y_0.*
2. *On simule une réalisation $\underline{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de $\underline{X}$ avec $X_i^{(j)} = \frac{1}{\beta_i}(Y_i + Y_0)$, $j = 1, 2$.*
3. *On répète pour $j = 1, ..., nsimul$.*

Il est possible d'adapter la construction de (X_1, X_2) à $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ à l'aide des étapes suivantes:

(1) Soit des variables aléatoires indépendantes $Y_0, ..., Y_n$ avec $Y_i \sim Gamma(\gamma_i, 1)$, $i = 0, 1, ..., n$.

(2) On fixe γ_0 où $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

(3) On fixe $\gamma_i = \alpha_i - \gamma_0$, $i = 1, ..., n$.

(4) On définit $X_i = \frac{1}{\beta_i}(Y_i + Y_0)$, $i = 1, ..., n$.

Cette construction pour un portefeuille de n risques nous permet d'analyser le comportement de la part par contrat pour un portefeuille **homogène.** Soit W_n la part allouée à un contrat suite à la mise en commun des risques définie par $W_n = \frac{S_n}{n}$, où $S_n = X_1 + ... + X_n$.

Proposition 8.29 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) qui obéit à une loi gamma bivariée CRMM de paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ_0 où $\gamma_1 = \alpha_1 - \gamma_0$, $\gamma_2 = \alpha_2 - \gamma_0$, $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$. On **suppose** $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = 1$, $i = 1, ..., n$, et on fixe le paramètre γ_0 tel que $0 < \gamma_0 < \alpha$. Soit $W_n = \frac{S_n}{n}$, où $S_n = X_1 + ... + X_n$. Alors, la transformée de Laplace-Stieltjes de W_n est donnée par*

$$L_{W_n}(t) = \left(\frac{n}{n+t}\right)^{n(\alpha - \gamma_0)} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\gamma_0}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{S_n}{n} \\ &= \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) \\ &= \frac{1}{n}((Y_1 + Y_0) + ... + (Y_n + Y_0)) \\ &= \frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n) + Y_0 \\ &= \frac{1}{n}T_n + Y_0 \\ &= V_n + Y_0, \end{aligned}$$

où V_n et Y_0 sont des variables aléatoires indépendantes et $T_n = Y_1 + ... + Y_n$ est une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. De plus,

$$\begin{aligned} L_{W_n}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tW_n}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-t(V_n+Y_0)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-tV_n}\mathrm{e}^{-tY_0}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-tV_n}\right]E\left[\mathrm{e}^{-tY_0}\right] \\ &= L_{V_n}(t)\,L_{Y_0}(t), \end{aligned}$$

où $L_{Y_0}(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\gamma_0}$. On doit maintenant trouver la transformée de Laplace-Stieltjes de la variable aléatoire V_n. On a

$$\begin{aligned} L_{V_n}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tV_n}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-t\frac{T_n}{n}}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}(Y_1+...+Y_n)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}Y_1}...\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}Y_n}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}Y_1}\right]...E\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}Y_n}\right] \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}}\right)^{\alpha-\gamma_0}...\left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}}\right)^{\alpha-\gamma_0} \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}}\right)^{n(\alpha-\gamma_0)}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que $V_n \sim Gamma\left(n\left(\alpha-\gamma_0\right), n\right)$ et d'obtenir le résultat désiré. ■

Tentons maintenant d'interpréter que la part allouée W_n s'écrit comme la somme $V_n + Y_0$. Supposons que la variable aléatoire X_i, $i = 1, ..., n$, représente les coûts associés au contrat i en assurance habitation. Supposons également que les unités protégées par les contrats se trouvent sur la côte sud-est américaine. L'exposition aux différents périls est identique pour tous les contrats. Soit Y_i les coûts liés aux périls "diversifiables" comme le feu, vol, dégâts d'eau, etc et Y_0 les coûts associés aux périls "ouragans" (catastrophes naturelles). Ainsi, on décompose W_n en deux sources, soit V_n la source diversifiable et Y_0 la source non-diversifiable. Il existe un théorème en probabilité disant que si l'on parvient à démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} L_{W_n}(t) = L_Z(t),$$

alors on peut en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(x) = F_Z(x), \text{ pour tout } x \in R.$$

On doit donc investiguer le comportement asymptotique de $L_{W_n}(t)$, soit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L_{W_n}(t) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+t}\right)^{n(\alpha-\gamma_0)}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\gamma_0} \\ &= \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\gamma_0}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}}\right)^{n(\alpha-\gamma_0)}.\end{aligned}$$

Sachant que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{n}}\right)^{n} = \mathrm{e}^{-t}$, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} L_{W_n}(t) &= \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\gamma_0}\mathrm{e}^{-(\alpha-\gamma_0)t} \\ &= L_Z(t),\end{aligned}$$

où $Z = Y_0 + b$ et $b = E[Y_i] = \frac{\gamma_i}{1} = \alpha_i - \gamma_0 = \alpha - \gamma_0$. Asymptotiquement la transformée de Laplace-Stieltjes de W_n est ainsi le produit des transformées de Laplace-Stieltjes de 2 variables aléatoires, soit Y_0 et une variable aléatoire dégénérée à $\alpha - \gamma_0$. En effet, on a

$$L_Z(t) = L_{Y_0}(t)\,L_U(t),$$

où $L_{Y_0}(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\gamma_0}$ et $L_U(t) = \mathrm{e}^{-(\alpha-\gamma_0)t}$ où $\Pr(U = (\alpha-\gamma_0)) = 1$. On peut donc conclure que W_n converge en distribution vers Z et ainsi approximer W_n par Z lorsque n est très très élevé.. On peut aussi utiliser ce résultat pour en déduire

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} VaR_\kappa(W_n) &= VaR_\kappa(Z) = b + VaR_\kappa(Y_0) \\ \lim_{n\to\infty} TVaR_\kappa(W_n) &= TVaR_\kappa(Z) = b + TVaR_\kappa(Y_0).\end{aligned}$$

Ce dernier résultat permet également de mettre en évidence qu'il n'est pas possible de diversifier le risque associé au péril ouragan. On doit recourir à d'autres méthodes de gestion quantitative pour "gérer" ce risque, comme la réassurance, des produits structurés ou des fonds nationaux financés par les gouvernements et/ou les compagnies d'assurance.

8.2 Lois discrètes bivariées et multivariées

Il existe un grand nombre de versions bivariées et multivariées des lois discrètes univariées telles les lois de Poisson, binomiale ou binomiale négative. Dans cette section, on traite de quelques exemples pouvant être pertinents en actuariat.

8.2.1 Loi de Poisson bivariée Teicher

Plusieurs versions bivariées de la loi de Poisson ont été proposées pour un couple de variables aléatoires (M_1, M_2). Nous étudierons ici une des versions les plus simples avec des marginales de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2, soit celle proposée par H. Teicher. Elle est construite comme suit.

Soit un couple de variables aléatoires $\underline{M} = (M_1, M_2)$ obéissant à la loi Poisson bivariée Teicher de paramètres λ_1, λ_2 et γ_0. Cette loi bivariée est construite à l'aide de la méthode de chocs communs comme suit. Soit les variables aléatoires indépendantes K_0, K_1 et K_2 telles que $K_i \sim Poisson(\lambda_i - \gamma_0)$, $i = 1, 2$ et $K_0 \sim Poisson(\gamma_0)$ où $0 \leq_0 \gamma_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$. On définit les variables aléatoires M_1 et M_2 telles que

$$\begin{aligned}M_1 &= K_1 + K_0 \\ M_2 &= K_2 + K_0.\end{aligned}$$

Vérifions à l'aide de la transformée de Laplace-Stieltjes que $M_i \sim Poisson\,(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. On a

$$
\begin{aligned}
L_{M_i}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tM_i}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-t(K_i+K_0)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-tK_i}\mathrm{e}^{-t_iK_0}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-tK_i}\right]E\left[\mathrm{e}^{-t_iK_0}\right] \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_i-\gamma_0)\left(\mathrm{e}^t-1\right)}\mathrm{e}^{\gamma_0\left(\mathrm{e}^t-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_i\left(\mathrm{e}^t-1\right)},\ i = 1, 2,
\end{aligned}
$$

qui correspond bien à la transformée de Laplace-Stieltjes de la loi de Poisson. Les lois marginales de M_1 et M_2 sont donc Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.

Le paramètre γ_0 joue le rôle d'un paramètre de dépendance. L'intensité de la dépendance augmente évidemment avec le paramètre γ_0. Si $\gamma_0 = 0$, alors les variables aléatoires M_1 et M_2 sont indépendantes obéissant à une loi de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement.

On peut interpréter les variables aléatoires M_i, $i = 1, 2$, comme le nombre de sinistre de la ligne d'affaires i. Le comportement de ces variables aléatoires est expliqué par 2 sources, soit une source spécifique à la ligne d'affaires i (K_i) et une source commune aux deux lignes d'affaires (K_0). Ainsi, selon cette construction, le nombre de sinistres pour la ligne d'affaires no.1 correspond à la somme des sinistres affectant uniquement la ligne d'affaires no.1 (K_1) et des sinistres affectant à la fois la ligne d'affaires no.1 et no.2 (K_0).

Proposition 8.30 *Soit un couple de variables aléatoires (M_1, M_2) obéissant à une loi de Poisson bivariée Teicher. La fonction de masse de probabilité conjointe de (M_1, M_2) est donnée par*

$$
\Pr\left(M_1 = m_1, M_2 = m_2\right) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\gamma_0}\sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)}\frac{\gamma_0^j}{j!}\frac{\left(\lambda_1-\gamma_0\right)^{m_1-j}}{(m_1-j)!}\frac{\left(\lambda_2-\gamma_0\right)^{m_2-j}}{(m_2-j)!}.
$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(M_1 = 0, M_2 = 0\right) &= \Pr\left(M_1 = 0, M_2 = 0\,|K_0 = 0\right)\Pr\left(K_0 = 0\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\Pr\left(M_1 = 0, M_2 = 0\,|K_0 = j\right)\Pr\left(K_0 = j\right) \\
&= \Pr\left(M_1 = 0, M_2 = 0\,|K_0 = 0\right)\Pr\left(K_0 = 0\right) \\
&= \Pr\left(K_1 = 0\right)\Pr\left(K_2 = 0\right)\Pr\left(K_0 = 0\right) \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1-\gamma_0)}\mathrm{e}^{-(\lambda_2-\gamma_0)}\mathrm{e}^{-\gamma_0} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\gamma_0}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2) &= \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \Pr(M_1 = m_1, M_2 = m_2 \,| K_0 = j) \Pr(K_0 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \Pr(K_1 = m_1 - j, K_2 = m_2 - j) \Pr(K_0 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \Pr(K_1 = m_1 - j) \Pr(K_2 = m_2 - j) \Pr(K_0 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{(\lambda_1 - \gamma_0)^{m_1 - j} \mathrm{e}^{-(\lambda_1 - \gamma_0)}}{(m_1 - j)!} \frac{(\lambda_2 - \gamma_0)^{m_2 - j} \mathrm{e}^{-(\lambda_2 - \gamma_0)}}{(m_2 - j)!} \frac{\gamma_0^j \mathrm{e}^{-\gamma_0}}{j!} \\
&= \mathrm{e}^{-((\lambda_1 - \gamma_0) + (\lambda_2 - \gamma_0) + \gamma_0)} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{(\lambda_1 - \gamma_0)^{m_1 - j}}{(m_1 - j)!} \frac{(\lambda_2 - \gamma_0)^{m_2 - j}}{(m_2 - j)!} \frac{\gamma_0^j}{j!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 - \lambda_2 + \gamma_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{\gamma_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \gamma_0)^{m_1 - j}}{(m_1 - j)!} \frac{(\lambda_2 - \gamma_0)^{m_2 - j}}{(m_2 - j)!}
\end{aligned}$$

■

Proposition 8.31 *Soit un couple de variables aléatoires (M_1, M_2) obéissant à une loi de Poisson bivariée Teicher. La fonction génératrice des probabilités conjointe de (M_1, M_2) est donnée par*

$$P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = \mathrm{e}^{(\lambda_1 - \gamma_0)(t_1 - 1)} \mathrm{e}^{(\lambda_2 - \gamma_0)(t_2 - 1)} \mathrm{e}^{\gamma_0 (t_1 t_2 - 1)}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) &= E\left[t_1^{M_1} t_2^{M_2}\right] \\
&= E\left[t_1^{(K_1 + K_0)} t_2^{(K_2 + K_0)}\right] \\
&= E\left[t_1^{K_1} t_2^{K_2} (t_1 t_2)^{K_0}\right] \\
&= E\left[t_1^{K_1}\right] E\left[t_2^{K_2}\right] E\left[(t_1 t_2)^{K_0}\right] \\
&= P_{K_1}(t_1) P_{K_2}(t_2) P_{K_0}(t_1 t_2) \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1 - \gamma_0)(t_1 - 1)} \mathrm{e}^{(\lambda_2 - \gamma_0)(t_2 - 1)} \mathrm{e}^{\gamma_0 (t_1 t_2 - 1)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 8.32 *Soit un couple de variables aléatoires (M_1, M_2) obéissant à une loi de Poisson bivariée Teicher. La covariance entre les variables aléatoires M_1 et M_2 est donnée par*

$$Cov(M_1, M_2) = \gamma_0$$

et le coefficent de corrélation de Pearson est compris entre les bornes suivantes

$$0 \leq \rho_P(M_1, M_2) \leq \frac{\min(\lambda_1; \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
Cov(M_1, M_2) &= Cov(K_1 + K_0, K_2 + K_0) \\
&= Cov(K_1, K_2) + Cov(K_1, K_0) + Cov(K_0, K_2) + Cov(K_0, K_0) \\
&= Var(K_0) \\
&= \gamma_0.
\end{aligned}$$

Étant donné que $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{0}{\sqrt{Var(M_1)}\sqrt{Var(M_1)}} &\leq \rho_P(M_1, M_2) \leq \frac{\min(\lambda_1; \lambda_2)}{\sqrt{Var(M_1)}\sqrt{Var(M_1)}} \\
0 &\leq \rho_P(M_1, M_2) \leq \frac{\min(\lambda_1; \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 8.33 *La loi de Poisson bivariée Teicher permet d'introduire uniquement une structure de dépendance positive.*

La représentation de (M_1, M_2) fournit un algorithme de simulation simple pour générer des réalisations de (M_1, M_2).

Algorithme 8.34 ***Algorithme de simulation pour la loi Poisson bivariée Teicher.***

1. *On simule les réalisations $K_0^{(j)}$, $K_1^{(j)}$ et $K_2^{(j)}$ de K_0, K_1 et K_2 où $K_0 \sim Pois(\gamma_0)$, $K_1 \sim Pois(\lambda_1 - \gamma_0)$ et $K_2 \sim Pois(\lambda_2 - \gamma_0)$.*
2. *On simule la réalisation $\left(M_1^{(j)}, M_2^{(j)}\right)$ de (M_1, M_2) avec $M_i^{(j)} = K_0^{(j)} + K_i^{(j)}$, pour $i = 1, 2$.*
3. *On répète pour $j = 1, ..., nsimul$.*

On s'intéresse maintenant à l'agrégation des nombres de sinistre. On a recours à la fonction génératrice des probabilités pour trouver la loi de $S = M_1 + M_2$.

Proposition 8.35 *Soit $S = M_1 + M_2$ où (M_1, M_2) obéit à une loi de Poisson bivariée Teicher. La variable aléatoire $S \sim PoisComp(\lambda_S; F_B)$ où $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_0$ et*

$$\Pr(B = k) = \begin{cases} \frac{\lambda_1+\lambda_2-2\gamma_0}{\lambda_S}, \ k = 1 \\ \frac{\gamma_0}{\lambda_S}, \ k = 2 \\ 0, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \end{cases}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
P_S(t) &= E\left[t^S\right] \\
&= E\left[t^{M_1+M_2}\right] \\
&= E\left[t^{M_1} t^{M_2}\right] \\
&= P_{M_1,M_2}(t, t) \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_0)(t-1)} \mathrm{e}^{(\lambda_2-\gamma_0)(t-1)} \mathrm{e}^{\gamma_0\left(t^2-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\gamma_0 t^2 + (\lambda_1-\gamma_0+\lambda_2-\gamma_0)t - (\lambda_1-\gamma_0+\lambda_2-\gamma_0+\gamma_0)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_S\left(\frac{\gamma_0}{\lambda_S} t^2 + \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2-2\gamma_0}{\lambda_S}\right)t - 1\right)}, \ \lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_0 \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_S(P_B(t)-1)},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
P_B(t) &= E\left[t^B\right] \\
&= \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\gamma_0}{\lambda_S}\right) t + \frac{\gamma_0}{\lambda_S} t^2 \\
&= t^1 \Pr(B = 1) + t^2 \Pr(B = 2).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $B \in \{1,2\}$ avec $\Pr(B=1) = \frac{\lambda_1+\lambda_2-2\gamma_0}{\lambda_S}$ et $\Pr(B=2) = \frac{\gamma_0}{\lambda_S}$. En conclusion, S obéit à une Poisson Composée de paramètres λ_S et F_B. A noter que ceci nous permet de représenter S sous la forme suivante

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} B_k, \ N > 0 \\ 0, \ N = 0, \end{cases}$$

où la variable aléatoire N est telle que $P_S(t) = P_N(P_B(t))$ et $P_N(t) = \mathrm{e}^{\lambda_S(t-1)}$ avec $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_0$. ■

Proposition 8.36 *Soit $S = a_1M_1 + a_2M_2$ où (M_1, M_2) obéit à une loi de Poisson bivariée Teicher. Alors, $S \sim PoisComp(\lambda_S, F_B)$ où $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 - \gamma_0$ et*

$$\Pr(B=k) = \begin{cases} \frac{\lambda_1-\gamma_0}{\lambda_S}, \ k = a_1 \\ \frac{\lambda_2-\gamma_0}{\lambda_S}, \ k = a_2 \\ \frac{\gamma_0}{\lambda_S}, \ k = a_1+a_2 \\ 0, \ k \in N \setminus \{a_1, a_2, a_1+a_2\} \end{cases}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P_S(t) &= E\left[t^S\right] \\ &= E\left[t^{a_1M_1+a_2M_2}\right] \\ &= E\left[t^{a_1M_1}t^{a_2M_2}\right] \\ &= E\left[t^{a_1(K_1+K_0)}t^{a_2(K_2+K_0)}\right] \\ &= E\left[t^{a_1K_1}\right]E\left[t^{a_2K_2}\right]E\left[t^{(a_1+a_2)K_0}\right] \\ &= \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_0)(t^{a_1}-1)}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\gamma_0)(t^{a_2}-1)}\mathrm{e}^{\gamma_0\left(t^{a_1+a_2}-1\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\left((\lambda_1-\gamma_0)t^{a_1}+(\lambda_2-\gamma_0)t^{a_2}+\gamma_0t^{a_1+a_2}-(\lambda_1-\gamma_0+\lambda_2-\gamma_0+\gamma_0)\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda_S\left(\left(\frac{\lambda_1-\gamma_0}{\lambda_S}\right)t^{a_1}+\left(\frac{\lambda_2-\gamma_0}{\lambda_S}\right)t^{a_2}+\left(\frac{\gamma_0}{\lambda_S}\right)t^{a_1+a_2}-1\right)}, \ \lambda_S = \lambda_1+\lambda_2+\gamma_0 \\ &= \mathrm{e}^{\lambda_S(P_B(t)-1)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} P_B(t) &= E\left[t^B\right] \\ &= \frac{\lambda_1-\gamma_0}{\lambda_S}t^{a_1} + \frac{\lambda_2-\gamma_0}{\lambda_S}t^{a_2} + \frac{\lambda_0}{\lambda_S}t^{a_1+a_2} \\ &= t^{a_1}\Pr(B=a_1) + t^{a_2}\Pr(B=a_2) + t^{a_1+a_2}\Pr(B=a_1+a_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $B \in \{a_1, a_2, a_1+a_2\}$ avec

$$\Pr(B=k) = \begin{cases} \frac{\lambda_1-\gamma_0}{\lambda_S}, \ k = a_1 \\ \frac{\lambda_2-\gamma_0}{\lambda_S}, \ k = a_2 \\ \frac{\lambda_0}{\lambda_S}, \ k = a_1+a_2 \\ 0, \ k \in \mathbb{N} \setminus \{a_1, a_2, a_1+a_2\} \end{cases}$$

■

Remarque 8.37 *On évalue la fonction de masse de probabilité de S à l'aide de l'algorithme de Panjer ou FFT.*

Remarque 8.38 *Une autre approche peut être utilisée pour trouver la fonction de masse de probabilité de* $S = M_1 + M_2$*, soit*

$$\begin{aligned} \Pr(S = n) &= \Pr(M_1 + M_2 = n) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \Pr(M_1 = j, M_2 = n - j) \end{aligned}$$

où la fonction de masse de probabilité conjointe du couple (M_1, M_2) *est donnée à la Proposition 8.30. Cette façon de faire prendrait évidemment plus de temps.*

8.3 Lois composées multivariées

L'utilisation des sommes aléatoires est au coeur de la modélisation des risques en actuariat. On présente dans cette section une extension multivariée de cette modélisation. On présente la loi Poisson composée bivariée définie à partir de la loi Poisson bivariée de Teicher.

Soit un couple de variables aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ tel que

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{cases} \sum_{k_1=1}^{M_1} B_{1,k_1}, \ M_1 > 0 \\ 0, \ M_1 = 0 \end{cases} \\ X_2 &= \begin{cases} \sum_{k_2=1}^{M_2} B_{2,k_2}, \ M_2 > 0 \\ 0, \ M_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les variables aléatoires B_{i,k_i} $(i = 1, 2)$ représentent les coûts du k_i*ème* sinistre pour le risque i et M_i $(i = 1, 2)$ représente le nombre de sinistres pour le risque i. On fait les hypothèses de base suivantes:

(1) $\underline{B}_i = \{B_{i,k\,i}, \ k_i \in N^+\}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées où $B_{i,k_i} \sim B_i$, $i = 1, 2$.

(2) $\underline{B}_1$, $\underline{B}_2$ et $\underline{M}$ sont indépendants.

(3) $(M_1, M_2) \sim$ *Poisson bivariée Teicher*

À noter que les hypothèses (1) et (2) sont standards pour toute loi bivariée composée. On fait l'hypothèse additionnelle ici que $\underline{M} = (M_1, M_2)$ obéit à une loi de Poisson bivariée de Teicher. Ainsi, la dépendance entre X_1 et X_2 est induite via le couple (M_1, M_2).

Supposons que l'on considère un contrat d'assurance auto avec deux couvertures et soit S l'ensemble des coûts pour un contrat d'assurance auto avec les 2 couvertures.Traditionnellement en assurance IARD, on a recours à la loi de Tweedie pour modéliser S, soit $S \sim PoisComp(\lambda_C, C)$ où $C \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Pourquoi la loi Tweedie est-elle utilisée? Elle est utilisée car il est possible de représenter la loi Poisson composée avec sinistre de loi gamma sous la forme d'un modèle linéaire généralisé. Ainsi, les outils développés pour estimer les paramètres d'un modèle GLM peuvent être utilisés. Cette approche ignore toutefois une éventuelle dépendance entre les deux couvertures. Une approche à l'aide d'une loi composée bivariée permettrait toutefois d'examiner le comportement des coûts conjoints pour les deux couvertures. Regardons un exemple d'application en assurance IARD. Plusieurs assurés prennent leur assurance auto et habitation chez le même assureur. Dans ce cas, pour un assuré, la variable aléatoire X_1 pourrait représenter les coûts pour le contrat d'assurance auto pour un assuré et X_2 les coûts pour le contrat d'assurance habitation de cet assuré. Il peut être fort intéressant pour une compagnie d'assurance de faire une tarification conjointe des deux contrats simultanément.

Proposition 8.39 *Soit un couple de variables aléatoires* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *obéissant à un loi de Poisson composée bivariée basée sur la loi Poisson bivariée de Teicher. La fonction de répartition conjointe de* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(M_1=0,M_2=0) \\
&+ \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(B_{2,1}+...+B_{2,k_2} \leq x_2) \Pr(M_1=0,M_2=k_2) \\
&+ \sum_{k_1=1}^{\infty} \Pr(B_{1,1}+...+B_{1,k_1} \leq x_1) \Pr(M_1=k_1,M_2=0) \\
&+ \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(B_{1,1}+...+B_{1,k_1} \leq x_1) \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(B_{2,1}+...+B_{2,k_2} \leq x_2) \Pr(M_1=k_1,M_2=k_2)
\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\
&= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \,|M_1=k_1,M_2=k_2) \Pr(M_1=k_1,M_2=k_2) \\
&= \Pr(M_1=0,M_2=0) \\
&\quad + \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \,|M_1=0,M_2=k_2) \Pr(M_1=0,M_2=k_2) \\
&\quad + \sum_{k_1=1}^{\infty} \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \,|M_1=k_1,M_2=0) \Pr(M_1=k_1,M_2=0) \\
&\quad + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 \,|M_1=k_1,M_2=k_2) \Pr(M_1=k_1,M_2=k_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(M_1=0,M_2=0) \\
&+ \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(B_{2,1}+...+B_{2,k_2} \leq x_2) \Pr(M_1=0,M_2=k_2) \\
&+ \sum_{k_1=1}^{\infty} \Pr(B_{1,1}+...+B_{1,k_1} \leq x_1) \Pr(M_1=k_1,M_2=0) \\
&+ \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(B_{1,1}+...+B_{1,k_1} \leq x_1) \sum_{k_2=1}^{\infty} \Pr(B_{2,1}+...+B_{2,k_2} \leq x_2) \Pr(M_1=k_1,M_2=k_2)
\end{aligned}$$

■

Remarque 8.40 *On note* $\left(X_1^{(\gamma_0)}, X_2^{(\gamma_0)}\right)$ *les couples de variables aléatoires obéissant à une loi Poisson composée bivariée basée sur la loi Poisson bivariée de Teicher de paramètres* $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_0, F_{B_1}, F_{B_2}$ *où* $\gamma_0 \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$ *est le paramètre de dépendance.*

Remarque 8.41 *Les marginales sont notées* $F_{X_1^{(\gamma_0)}} = F_1$ *et* $F_{X_2^{(\gamma_0)}} = F_2$ *pour tout* $\gamma_0 \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$. *Le paramètre de dépendance n'a donc aucune incidence sur les lois marginales.*

Remarque 8.42 *Pour toute valeur de* γ_0, $F_{X_1^{(\gamma_0)}, X_2^{(\gamma_0)}} \in \Gamma(F_1, F_2)$ *avec*

$$F^-_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \leq F_{X_1^{(\gamma_0)}, X_2^{(\gamma_0)}}(x_1,x_2) \leq F^+_{X_1,X_2}(x_1,x_2).$$

Remarque 8.43 $F_{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}}(x_1,x_2) = F_{X_1^{\perp}, X_2^{\perp}}(x_1,x_2) = F_{X_1^{\perp}}(x_1) F_{X_2^{\perp}}(x_2)$.

Proposition 8.44 *Soit un couple de variables aléatoires* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *obéissant à un loi de Poisson composée bivariée basée sur la loi Poisson bivariée de Teicher. La transformée de Laplace-Stieltjes de* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *est donnée par*

$$L_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_0)\left(L_{B_1}(t_1)-1\right)} \mathrm{e}^{(\lambda_2-\gamma_0)\left(L_{B_2}(t_2)-1\right)} \mathrm{e}^{\gamma_0\left(L_{B_1}(t_1)L_{B_2}(t_2)-1\right)}.$$

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
L_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= E\left[\mathrm{e}^{-t_1X_1}\mathrm{e}^{-t_2X_2}\right] \\
&= E\left[E\left[\mathrm{e}^{-t_1X_1}\mathrm{e}^{-t_2X_2}\,|M_1,M_2\right]\right] \\
&= E\left[E\left[\mathrm{e}^{-t_1\left(B_{1,1}+\ldots+B_{1,M_1}\right)}\mathrm{e}^{-t_2\left(B_{2,1}+\ldots+B_{2,M_2}\right)}\,|M_1,M_2\right]\right] \\
&= E\left[E\left[\mathrm{e}^{-t_1\left(B_{1,1}+\ldots+B_{1,M_1}\right)}\,|M_1\right]E\left[\mathrm{e}^{-t_2\left(B_{2,1}+\ldots+B_{2,M_2}\right)}\,|M_2\right]\right] \\
&= E\left[E\left[\left(\mathrm{e}^{-t_1B_1}\right)^{M_1}\right]E\left[\left(\mathrm{e}^{-t_2B_2}\right)^{M_2}\right]\right] \\
&= E\left[\left(L_{B_1}(t_1)\right)^{M_1}\left(L_{B_2}(t_2)\right)^{M_2}\right] \\
&= P_{M_1,M_2}\left(L_{B_1}(t_1),L_{B_2}(t_2)\right) \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_0)\left(L_{B_1}(t_1)-1\right)}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\gamma_0)\left(L_{B_2}(t_2)-1\right)}\mathrm{e}^{\gamma_0\left(L_{B_1}(t_1)L_{B_2}(t_2)-1\right)}
\end{aligned}
$$

■

Proposition 8.45 *Soit un couple de variables aléatoires* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *obéissant à un loi de Poisson composée bivariée basée sur la loi Poisson bivariée de Teicher. La covariance entre* X_1 *et* X_2 *est donnée par*

$$
Cov(X_1,X_2)=\gamma_0E[B_1]E[B_2].
$$

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
Cov(X_1,X_2) &= E[Cov(X_1,X_2\,|M_1,M_2)]+Cov(E[X_1\,|M_1],E[X_2\,|M_2]) \\
&= Cov(E[X_1\,|M_1],E[X_2\,|M_2]) \\
&= Cov(M_1E[B_1],M_2E[B_2]) \\
&= E[B_1]E[B_2]\,Cov(M_1,M_2) \\
&= \gamma_0E[B_1]E[B_2].
\end{aligned}
$$

■

Proposition 8.46 *Soit un couple de variables aléatoires* $\underline{X}=(X_1,X_2)$ *obéissant à un loi de Poisson composée bivariée basée sur la loi Poisson bivariée de Teicher. Soit* $S=X_1+X_2$. *Alors,* S *obéit à une loi Poisson composée* (λ_S,F_C) *où*

$$
\lambda_S=\lambda_1+\lambda_2-\gamma_0 \text{ et } F_C(x)=\frac{\lambda_1-\gamma_0}{\lambda_S}F_{B_1}(x)+\frac{\lambda_2-\gamma_0}{\lambda_S}F_{B_2}(x)+\frac{\gamma_0}{\lambda_S}F_{B_1+B_2}(x).
$$

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
L_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{-tS}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-t(X_1+X_2)}\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-tX_1}\mathrm{e}^{-tX_2}\right] \\
&= L_{X_1,X_2}(t,t) \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_0)\left(L_{B_1}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{(\lambda_2-\gamma_0)\left(L_{B_2}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\gamma_0\left(L_{B_1}(t)L_{B_2}(t)-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{(\lambda_1-\gamma_0)L_{B_1}(t)+(\lambda_2-\gamma_0)L_{B_2}(t)+\gamma_0L_{B_1}(t)L_{B_2}(t)-((\lambda_1-\gamma_0)+(\lambda_2-\gamma_0)+\gamma_0)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_S\left(\frac{(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S}L_{B_1}(t)+\frac{(\lambda_2-\gamma_0)}{\lambda_S}L_{B_2}(t)+\frac{\gamma_0}{\lambda_S}L_{B_1}(t)L_{B_2}(t)-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_S\left(\frac{(\lambda_1-\gamma_0)}{\lambda_S}L_{B_1}(t)+\frac{(\lambda_2-\gamma_0)}{\lambda_S}L_{B_2}(t)+\frac{\gamma_0}{\lambda_S}L_{B_1}(t)L_{B_2}(t)-1\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_S(L_C(t)-1)}
\end{aligned}
$$

Par identification, on a

$$F_C(x) = \frac{(\lambda_1 - \gamma_0)}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \frac{(\lambda_2 - \gamma_0)}{\lambda_S} F_{B_2}(x) + \frac{\gamma_0}{\lambda_S} F_{B_1+B_2}(x).$$

■

Remarque 8.47 *Si les variables aléatoires B_1 et B_2 sont discrètes sur $\{0,1,2,...\}$ alors on peut utiliser l'algorithme de Panjer pour évaluer $f_S(kh)$, $k \in \mathbb{N}$.*

Remarque 8.48 *Autre exemple d'application: assurance IARD auto en Ontario où X_1 correspondent aux coûts reliés aux dommages matériels et X_2 aux coûts reliés aux dommages à autrui.*

Remarque 8.49 *Il est aussi possible d'introduire une relation de dépendance entre B_1 et B_2.*

8.3.1 Lois multivariées construites par mélange commun

Soit un vecteur de variables aléatoires $(X_1,...,X_n)$ et une variable aléatoire Θ positive, continue ou discrète, représentant un facteur commun. On désigne la fonction de répartition et la fonction génératrice des moments de Θ par F_Θ et M_Θ respectivement. On suppose que la fonction génératrice des moments M_Θ existe et que les variables aléatoires $(X_1|\Theta=\theta),...,(X_n|\Theta=\theta)$ sont conditonnellement indépendantes.

Différentes approches peuvent être utilisées pour introduire une structure de dépendance entre les variables aléatoires $X_1,...,X_n$ via la variable aléatoire Θ. Nous utiliserons celle proposée par Marshall-Olkin (1988).

Soit la fonction de survie des variables aléatoires $(X_i|\Theta=\theta)$, $i=1,...,n$ définie par

$$\overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) = \Pr(X_i > x_i|\Theta=\theta) = \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta, \ i=1,...,n,$$

où $Y_1,...,Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes. Étant donné que les variables aléatoires $(X_1|\Theta=\theta),...,(X_n|\Theta=\theta)$ sont supposées conditonnellement indépendantes, on déduit

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n|\Theta=\theta}(x_1,...,x_n) = \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^\theta.$$

Remarque 8.50 *On observe que si $\theta_1 < \theta_2$, alors*

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta_1}(x_i) & = & \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^{\theta_1} \\ & \geq & \\ \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta_2}(x_i) & = & \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^{\theta_2}. \end{array}$$

et

$$\overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta_1}(x_1,x_2) \geq \overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta_2}(x_1,x_2).$$

Proposition 8.51 *Soit les variables aléatoires $(X_1|\Theta=\theta),...,(X_n|\Theta=\theta)$ et la variable aléatoire positive Θ définies plus haut. Si la variable aléatoire mélange Θ est discrète et $\Theta \in \{1,2,3,...\}$, on a*

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = P_\Theta\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right) = M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right), \ i=1,...,n.$$

Si la variable aléatoire mélange Θ est continue positive, on a

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right), \ i=1,...,n.$$

Preuve. Soit Θ une variable aléatoire discrète et $\Theta \in \{1, 2, 3, ...\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_i}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \overline{F}_{X_i|\Theta=j}(x_i) f_\Theta(j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^j f_\Theta(j) \\
&= E\left[\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\Theta\right] \\
&= P_\Theta\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right) \\
&= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right).
\end{aligned}$$

Soit Θ une variable aléatoire continue positive. Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_i}(x_i) &= \int_0^{\infty} \overline{F}_{X_i|\Theta=j}(x_i) f_\Theta(j)\, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\infty} \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta f_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\
&= E\left[\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\Theta\right] \\
&= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right).
\end{aligned}$$

■

Proposition 8.52 *Soit les variables aléatoires $(X_1 |\Theta = \theta), ..., (X_n |\Theta = \theta)$ et la variable aléatoire positive Θ définies plus haut. Si la variable aléatoire mélange Θ est discrète et $\Theta \in \{1, 2, 3, ...\}$, on a*

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1..., x_n) &= P_\Theta\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right) \\
&= M_\Theta\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right).
\end{aligned}$$

Si la variable aléatoire mélange Θ est continue, on a

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = M_\Theta\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right).$$

Preuve. Soit Θ une variable aléatoire discrète et $\Theta \in \{1, 2, 3, ...\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \overline{F}_{X_1,...,X_n|\Theta=j}(x_1, ..., x_n) f_\Theta(j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \overline{F}_{X_1|\Theta=j}(x_1)...\overline{F}_{X_n|\Theta=j}(x_n) f_\Theta(j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^j f_\Theta(j) \\
&= E\left[\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^\Theta\right] \\
&= P_\Theta\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right) \\
&= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)\right) \\
&= M_\Theta\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right).
\end{aligned}$$

Si la variable aléatoire mélange Θ est continue, on a

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x) &= \int_0^\infty \overline{F}_{X_1,...,X_n|\Theta=j}(x_1,...,x_n) f_\Theta(j)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\infty \overline{F}_{X_1|\Theta=j}(x_1)...\overline{F}_{X_n|\Theta=j}(x_n) f_\Theta(j)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\infty \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^j f_\Theta(j)\,\mathrm{d}\theta \\
&= E\left[\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^\Theta\right] \\
&= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)\right) \\
&= M_\Theta\left(\sum_{i=1}^n \ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right).
\end{aligned}$$

■

Exemple 8.53 *Soit les variables aléatoires* $(X_1|\Theta=\theta),...,(X_n|\Theta=\theta)$ *et la variable aléatoire positive* Θ *définies plus haut. De plus, supposons* $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$*. Alors,*

$$\overline{F}(x_i) = M_\Theta\left(\frac{-x_i}{\lambda_i}\right),\ i=1,...,n,$$

et

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = M_\Theta\left(\sum_{i=1}^n \frac{-x_i}{\lambda_i}\right).$$

Solution. On a $\overline{F}_{Y_i}(x_i) = \mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\lambda_i}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_i}(x_i) &= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right) \\
&= M_\Theta\left(\frac{-x_i}{\lambda_i}\right) \\
\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) &= M_\Theta\left(\sum_{i=1}^n \ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right) \\
&= M_\Theta\left(\sum_{i=1}^n \frac{-x_i}{\lambda_i}\right).
\end{aligned}$$

■

Exemple 8.54 *Soit les variables aléatoires* $(X_1|\Theta=\theta)$ *et* $(X_2|\Theta=\theta)$ *et la variable aléatoire positive* Θ *définies plus haut. De plus, supposons* $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$ *et* $\Theta \sim Gamma(\alpha,1)$*. Alors,* (X_1,X_2) *obéit à une loi de Pareto bivariée avec fonction de survie bivariée.*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\right)^\alpha$$

Solution. On a $\overline{F}_{Y_i}(x_i) = \mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\lambda_i}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_i}(x_i) &= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right)\\ &= M_\Theta\left(\frac{-x_i}{\lambda_i}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= M_\Theta\left(\sum_{i=1}^{2}\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right)\\ &= M_\Theta\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{-x_i}{\lambda_i}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{-x_i}{\lambda_i}}\right)^{\alpha}\\ &= \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\right)^{\alpha}\end{aligned}$$

■

Proposition 8.55 *Soit les variables aléatoires* $(X_1\,|\Theta=\theta)$ *et* $(X_2\,|\Theta=\theta)$ *et la variable aléatoire positive* Θ *définies plus haut. De plus, supposons* $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$ *et* $\Theta \sim Gamma(\alpha,1)$*. Alors,* (X_1,X_2) *obéit à une loi de Pareto bivariée avec fonction de densité bivariée.*

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\right)^{\alpha+2},\ x_1,x_2>0.$$

Solution.

$$\begin{aligned}f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1}\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\right)^{\alpha+2}\right)\\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}\right)^{\alpha+2}.\end{aligned}$$

■

Remarque 8.56 *On note que pour les lois marginales que* $X_i \sim Pareto(\alpha,\lambda_i)$, $i=1,2$.

Remarque 8.57 *En posant*

$$\frac{x_i}{\lambda_i} = \overline{F}_{X_i}(x_i)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1$$

on peut écrire la fonction de survie de (X_1,X_2) *en termes des fonctions de survie marginales de* X_1 *et* X_2 *comme suit*

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \left(1+\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)\right)^{-\alpha}\\ &= \left(\overline{F}_{X_1}(x_1)^{-\frac{1}{\alpha}}+\overline{F}_{X_2}(x_2)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{-\alpha}.\end{aligned}$$

On note que la loi Pareto bivariée ne possède pas de paramètre de dépendance. On verra au chapitre suivant l'importance de la loi Pareto bivariée dans le cadre de l''expression de la copule de Clayton.

Proposition 8.58 *Soit les variables aléatoires* $(X_1 |\Theta = \theta)$ *et* $(X_2 |\Theta = \theta)$ *et la variable aléatoire positive* Θ *définies plus haut. De plus, supposons* $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$ *et* $\Theta \sim Gamma(\alpha, 1)$*. Alors,* (X_1, X_2) *à une loi de Pareto bivariée dont covariance est donnée par*

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha - 1}\right).$$

Proposition 8.59 *Soit les variables aléatoires* $(X_1 |\Theta = \theta)$ *et* $(X_2 |\Theta = \theta)$ *et la variable aléatoire positive* Θ *définies plus haut. De plus, supposons* $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$ *et* $\Theta \sim Gamma(\alpha, 1)$*. Le couple* (X_1, X_2) *obéit ainsi à une loi de Pareto bivariée. Soit* $S = X_1 + X_2$*. Alors,*

$$f_S(x) = \frac{\alpha}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha+1}\right)$$

et

$$F_S(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha}\right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha}\right)$$

Définition 8.60 *Soit un vecteur de variables aléatoires* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$*. On dit que ces variables aléatoires sont échangeables si toute permutation du vecteur* $\underline{X}$ *possède la même distribution.*

Remarque 8.61 *Soit le vecteur* $\underline{X} = (X_1, ..., X_4)$*. On dit que les variables aléatoires de ce vecteur sont échangeables si*

$$\begin{aligned}
(X_1, X_2) &\sim (X_1, X_3) \sim (X_1, X_4) \sim (X_2, X_3) \sim (X_2, X_4) \sim (X_3, X_4) \\
(X_1, X_2, X_3) &\sim (X_1, X_2, X_4) \sim (X_1, X_3, X_4) \sim (X_2, X_3, X_4) \\
X_1 &\sim X_2 \sim X_3 \sim X_4
\end{aligned}$$

Exemple 8.62 *Soit un vecteur de variables aléatoires échangeables* $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ *et une variable aléatoire continue positive* $\Theta \in]0, 1[$*. On suppose que les variables aléatoires* $(I_1 |\Theta = \theta), ..., (I_n |\Theta = \theta)$ *sont conditionnellement indépendantes et* $(I_i |\Theta = \theta) \sim Bern(\theta)$ *pour* $i = 1, ..., n$*. (a) Trouver la loi de* I_i*,* $i = 1, ..., n$*. (b) Trouver la covariance entre* I_i *et* I_j*, pour* $i \neq j$*. (c) Trouver la fonction de masse de probabilité conjointe de* $(I_1, ..., I_n)$*. (d) Dans un contexte de risque de crédit, la variable aléatoire* I_i *correspond à l'occurence d'un défaut du titre* i*. On définit la variable aléatoire* $N_{PTF} = \sum\limits_{i=1}^{n} I_i$ *le nombre de défauts au sein du portefeuille. Trouver la loi de* N_{PTF}*.*

Solution. (a)

$$\begin{aligned}
\Pr(I_i = 1) &= \int\limits_0^1 \Pr(I_i = 1 |\Theta = \theta) g_\Theta(\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int\limits_0^1 \theta g_\Theta(\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
&= E[\Theta].
\end{aligned}$$

Donc, $I_i \sim Bern\left(q^* = E\left[\Theta\right]\right)$ et $E\left[I_i\right] = E\left[\Theta\right]$, $i = 1, ..., n$. (b) Pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} Cov\left(I_i, I_j\right) &= E\left[I_i I_j\right] - E\left[I_i\right] E\left[I_j\right] \\ &= \int_0^1 E\left[I_i I_j \left|\Theta = \theta\right.\right] g_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta - \left(E\left[\Theta\right]\right)^2 \\ &= \int_0^1 E\left[I_i \left|\Theta = \theta\right.\right] E\left[I_j \left|\Theta = \theta\right.\right] g_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta - \left(E\left[\Theta\right]\right)^2 \\ &= \int_0^1 \theta^2 f_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta - \left(E\left[\Theta\right]\right)^2 \\ &= E\left[\Theta^2\right] - \left(E\left[\Theta\right]\right)^2 \\ &= Var\left(\Theta\right). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f_{I_1,...,I_n|\Theta=\theta}\left(i_1, ..., i_n\right) &= \prod_{i=1}^n f_{I_i|\Theta=\theta}\left(i_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \theta^{i_i}\left(1-\theta\right)^{1-i_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{I_1,...,I_n}\left(i_1, ..., i_n\right) &= \int_0^1 f_{I_1,...,I_n|\Theta=\theta}\left(i_1, ..., i_n\right) g_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n \theta^{i_i}\left(1-\theta\right)^{1-i_i} g_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} M_{N_{PTF}|\Theta=\theta}\left(t\right) &= E\left[\mathrm{e}^{t\left(N_{PTF}\left|\Theta=\theta\right.\right)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t\left(I_1+...+I_n\left|\Theta=\theta\right.\right)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t\left(I_1\left|\Theta=\theta\right.\right)}\right] ... E\left[\mathrm{e}^{t\left(I_n\left|\Theta=\theta\right.\right)}\right] \\ &= \left(\theta \mathrm{e}^t + 1 - \theta\right)^n. \end{aligned}$$

On a donc que $\left(N_{PTF}\left|\Theta = \theta\right.\right) \sim Bin\left(n, \theta\right)$ et par conséquent

$$\Pr\left(N_{PTF} = k\left|\Theta = \theta\right.\right) = \binom{n}{k}\theta^k\left(1-\theta\right)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, ..., n.$$

On déduit donc

$$\begin{aligned} \Pr\left(N_{PTF} = k\right) &= \int_0^1 \Pr\left(N_{PTF} = k\left|\Theta = \theta\right.\right) g_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \binom{n}{k}\theta^k\left(1-\theta\right)^{n-k} g_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

On a donc que N_{PTF} obéit à une loi binomiale mélange. ■

Exemple 8.63 *Refaire l'exemple 8.62 en supposant* $\Theta \sim Beta(\alpha, \beta)$.

Solution. (a)

$$\begin{aligned}\Pr(I_i = 1) &= E[\Theta] \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Donc, $I_i \sim Bern\left(q^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$ et $E[I_i] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $i = 1, ..., n$. (b) Pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned}Cov(I_i, I_j) &= Var(\Theta) \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}f_{I_1,...,I_n|\Theta=\theta}(i_1, ..., i_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{I_i|\Theta=\theta}(i_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \theta^{i_i}(1-\theta)^{1-i_i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{I_1,...,I_n}(i_1, ..., i_n) &= \int_0^1 f_{I_1,...,I_n|\Theta=\theta}(i_1, ..., i_n)\, g_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^{n} \theta^{i_i}(1-\theta)^{1-i_i} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \theta^{(\alpha+i_1+...+i_n)-1}(1-\theta)^{(n+\beta-i_1-...-i_n)-1}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+i_1+...+i_n)\Gamma(n+\beta-i_1-...-i_n)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)}\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+n+\beta)}{\Gamma(\alpha+i_1+...+i_n)\Gamma(n+\beta-i_1-...-i_n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+i_1+...+i_n)\Gamma(n+\beta-i_1-...-i_n)}{\Gamma(\alpha+n+\beta)} \\ &= \frac{B(\alpha+i_1+...+i_n, n+\beta-i_1-...-i_n)}{B(\alpha,\beta)}\end{aligned}$$

où $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. (d)

$$\begin{aligned}M_{N_{PTF}|\Theta=\theta}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{t(N_{PTF}|\Theta=\theta)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t(I_1+...+I_n|\Theta=\theta)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t(I_1|\Theta=\theta)}\right]...E\left[\mathrm{e}^{t(I_n|\Theta=\theta)}\right] \\ &= \left(\theta\mathrm{e}^t + 1 - \theta\right)^n.\end{aligned}$$

On a donc que $(N_{PTF}|\Theta=\theta) \sim Bin(n,\theta)$ et par conséquent

$$\Pr(N_{PTF} = k|\Theta=\theta) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k},\ k = 0, 1, 2, ..., n.$$

On déduit donc

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(N_{PTF}=k\right) &= \int_0^1 \Pr\left(N_{PTF}=k\,|\Theta=\theta\,\right) g_\Theta\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 \binom{n}{k} \theta^k \left(1-\theta\right)^{n-k} \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} \theta^{\alpha-1}\left(1-\theta\right)^{\beta-1} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} \binom{n}{k} \int_0^1 \theta^{(\alpha+k)-1}\left(1-\theta\right)^{(\beta+n-k)-1} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} \binom{n}{k} \frac{\Gamma\left(\alpha+k\right)\Gamma\left(\beta+n-k\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+n\right)} \int_0^1 \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+n\right)}{\Gamma\left(\alpha+k\right)\Gamma\left(\beta+n-k\right)} \theta^{(\alpha+k)-1}\left(1-\theta\right)^{(\beta+n-k)-1} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} \binom{n}{k} \frac{\Gamma\left(\alpha+k\right)\Gamma\left(\beta+n-k\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+n\right)} \\
&= \binom{n}{k} \frac{B\left(\alpha+k,\beta+n-k\right)}{B\left(\alpha,\beta\right)}.
\end{aligned}
$$

■

Chapitre 9

Théorie des copules

9.1 Introduction

La théorie des copules a été introduite par Abe Sklar en 1959. Elle fut d'abord étudiée par un nombre restraint de chercheurs en mathématiques, théorie des probabilités et statistiques. Elle a été introduite en actuariat au milieu des années 1990 et plutôt dans les années 2000 dans le contexte de la finance quantitative. La théorie des copules intéresse maintenant des chercheurs de divers domaines (actuariat, finance, hydrologie, physique, etc) et est devenue un thème de recherche important.

La théorie des copules est un thème incontournable dans la modélisation des risques en actuariat et en gestion quantitative des risques. Elle permet d'analyser les relations de dépendance entre les variables aléatoires et de construire une grande variété de modèles multivariés incorporant des relations de dépendance spécifiques. En actuariat, on retrouve notamment les applications des copules suivantes:

- Tarification des produits de vente sur 2 têtes (ou plus).
- Tarification des contrats d'assurance IARD avec plusieurs couvertures: en assurance auto en Ontario notamment, les contrats d'assurance comportent des couvertures pour les dommages matériels, les blessures corporelles (conducteur et passagers) et les blessures à autrui.
- Modélisation stochastique des réserves en assurance IARD
- Modélisation des coûts pour différentes lignes d'affaires
- Modélisation des composantes d'un générateur de scénarios économiques

En finance quantitative, on peut notamment utiliser les copules pour modéliser les risques de défaut sur un portefeuille de titres de crédit ou modéliser conjointement les rendements sur différents titres financiers.

L'utilisation de la théorie des copules dans la modélisation comporte différents avantages. Elle facilite les différentes étapes de la modélisation et permet de distinguer la structure de dépendance et les distributions marginales dans la distribution multivariée d'un vecteur de variables aléatoires $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. La procédure d'estimation peut être décomposée en deux étapes, soit celle où l'on identifie la copule et celle où l'on identifie les marginales. À l'aide de la théorie des copules, on peut également créer plusieurs distributions multivariées à partir d'une copule et de distributions univariées. La théorie des copules repose sur un résultat fondamental appelé le théorème de Sklar. On en discutera dans ce qui suit.

Soit une fonction de répartition bivariée F avec fonctions de répartition marginales F_1 et F_2. On peut associer 3 nombres pour chaque paire de nombres réels (x_1, x_2) : $F_1(x_1), F_2(x_2)$ et $F(x_1, x_2)$. Ces 3 nombres appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$. En d'autres mots, chaque paire de nombres réels (x_1, x_2) conduit à un point (F_1, F_2) dans le carré unité et cette paire correspond aussi à un nombre F dans $[0, 1]$. Cette correspondance qui assigne la valeur de la fonction de répartition conjointe à chaque paire de valeurs des fonctions de répartition marginales est une fonction que l'on nomme "copule".

9.2 Définitions et théorème de Sklar

Soit un vecteur de variables aléatoires $\underline{U} = (U_1, ..., U_n)$ où $U_i \sim Unif\,(0,1)$, $i = 1, ..., n$, dont la fonction de répartition est $F_{\underline{U}}$. Une copule est une fonction multivariée $[0,1]^n \to [0,1]$ satisfaisant les propriétés d'une fonction de répartition multivariée de $\underline{U}$. Elle correspond donc à une fonction de répartiton multivariée $F_{\underline{U}}$ pour un vecteur de variables aléatoires $\underline{U}$. On la désigne par $C(u_1, ..., u_n)$.

Une copule mutlivariée C est donc essentiellement une fonction de répartition conjointe sur $[0,1]^n$ d'un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ dont chaque composante U_i $(i = 1, ..., n)$ est de loi uniforme sur $(0,1)$.

Définition 9.1 *Une copule bivariée C est une fonction $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ non-décroissante et continue à droite satisfaisant les propriétés suivantes:*

(1) $C(u_1, u_2)$ est non décroissante sur $[0,1]^2$;

(2) $C(u_1, u_2)$ est continue à droite sur $[0,1]^2$;

(3) $\lim_{u_i \to 0} C(u_1, u_2) = 0$ pour $i = 1, 2$.

(4) $\lim_{u_1 \to 1} C(u_1, u_2) = u_2$ et $\lim_{u_2 \to 1} C(u_1, u_2) = u_1$.

(5) Pour tout rectangle $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \in [0,1]^2$, où $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$, on a

$$\Pr(U_1 \in (a_1, b_1], U_2 \in (a_2, b_2]) = C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2).$$

Voici trois exemples simples de copules C:

1. Copule indépendance:
$$C(u_1, ..., u_n) = u_1 \times ... \times u_n,\ \underline{u} \in [0,1]^n.$$

2. Copule borne supérieure de Fréchet:
$$C(u_1, ..., u_n) = \min(u_1, ..., u_n),\ \underline{u} \in [0,1]^n.$$

3. Copule borne inférieure de Fréchet:
$$C(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0),\ \underline{u} \in [0,1]^2.$$

Le résultat fondamental de la théorie des copules est le théorème de Sklar énoncé ci-dessous. Ce théorème comporte deux parties: l'identification de la copule C à partir de $F_{\underline{X}}$ et $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ et la construction de $F_{\underline{X}}$ à partir de C et $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$.

Théorème 9.2 *1) Soit un vecteur de variables aléatoires $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ avec fonction de répartition conjointe $F_{\underline{X}}$ et marginales univariées $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$. Alors, il existe une copule C qui permet de représenter $F_{\underline{X}}$ en fonction de C et des marginales $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$, i.e.*

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)).$$

Cette copule est unique si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont continues. 2) Soit une copule C et des marginales $F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)$. Alors,

$$C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)) = F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n),$$

i.e. la fonction multivariée $C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n))$ correspond à une fonction de répartition multivariée notée $F_{\underline{X}}$ qui appartient à la classe de Fréchet $\Gamma(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n))$. Cette construction est valide peu importe que les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ soient continues ou discrètes.

Preuve. On suppose $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ où $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires continues. 1) Soit $F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$. On doit montrer qu'il existe une copule $C = F_{\underline{U}}$ telle que

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)).$$

Soit $F_{X_i}(X_i) = U_i \sim Unif(0,1)$, $i = 1, ..., n$. Alors,

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \\ &= \Pr(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), ..., U_n \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= F_{\underline{U}}(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)). \end{aligned}$$

2) Soit $\underline{U} = (U_1, ..., U_n)$ tel que $F_{\underline{U}}(u_1, ..., u_n) = C(u_1, ..., u_n)$, $\underline{U} \in [0,1]^n$. Soit $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1), ..., X_n = F_{X_n}^{-1}(U_n)$. On doit montrer que la fonction de répartition conjointe $F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n)$ est donnée par

$$F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) = C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)).$$

On a

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \\ &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U_1) \leq x_1, ..., F_{X_n}^{-1}(U_n) \leq x_n\right) \\ &= \Pr\left(F_{X_1}\left(F_{X_1}^{-1}(U_1)\right) \leq F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}\left(F_{X_n}^{-1}(U_n)\right) \leq F_{X_n}(x_n)\right) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_{X_1}(x_1), ..., U_n \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &= F_{\underline{U}}(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)) \end{aligned}$$

■

Remarque 9.3 *Une copule permet donc de joindre différentes lois marginales pour créer une loi multivariée. La copule décrit la relation de dépendance entre les lois marginales alors que les marginales décrivent le comportement de chacune des variables aléatoires. En d'autres mots, la copule "couple" les fonctions de répartition marginales conduisant ainsi à la fonction de répartition multivariée du vecteur $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. La structure de dépendance est entièrement décrite par la copule C et dissociée des fonctions de répartition marginales $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$.*

9.3 Construction d'une copule ou extraire une copule à partir de $F_{\underline{X}}$

Les copules peuvent être construites à l'aide de différentes méthodes. Dans la présente section, on traite brièvement de la méthode d'inversion qui est basée sur le théorème de Sklar. Selon cette méthode, on génère la copule à partir d'une distribution multivariée continue donnée.

Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) avec fonction de répartition conjointe F_{X_1,X_2} et fonction de répartition marginales F_{X_1} et F_{X_2}. L'unique copule C telle que $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ est obtenue à l'aide de la transformation inverse $x_1 = F_{X_1}^{-1}(u_1)$ et $x_2 = F_{X_2}^{-1}(u_2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) &= \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= C(u_1, u_2), \end{aligned}$$

où (U_1, U_2) est un couple de variables aléatoires uniformes standard dont la fonction de répartition conjointe définie sur $[0,1] \times [0,1]$ est la copule C. On peut construire une copule de survie de façon similaire.

Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) avec fonction de survie conjointe $\overline{F}_{X_1,X_2}$ et fonction de survie marginales $\overline{F}_{X_1}$ et $\overline{F}_{X_2}$. L'unique copule de survie $\widehat{C}$ telle que $\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1), \overline{F}_{X_2}(x_2)\right)$ est obtenue à l'aide de la transformation inverse $x_1 = \overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1)$ et $x_2 = \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\widehat{C}(u_1, u_2) &= \overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)\right) \\ &= \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2),\end{aligned}$$

où (U_1, U_2) est un couple de variables aléatoires uniformes standard dont la fonction de répartition conjointe définie sur $[0,1] \times [0,1]$ est la copule de survie $\widehat{C}$.

Proposition 9.4 *Soit $F_{\underline{X}} \in \Gamma(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$ où $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ est un vecteur de variables aléatoires continues. Alors la copule C associée à $F_{\underline{X}}$ est donnée par*

$$C(u_1, ..., u_n) = F_{\underline{X}}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), ..., F_{X_n}^{-1}(u_n)\right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}C(u_1, ..., u_n) &= F_{\underline{U}}(u_1, ..., u_n) \\ &= \Pr(U_1 \leq u_1, ..., U_n \leq u_n) \\ &= \Pr(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, ..., F_{X_n}(X_n) \leq u_n) \\ &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(F_{X_1}(X_1)) \leq F_{X_1}^{-1}(u_1), ..., F_{X_n}^{-1}(F_{X_n}(X_n)) \leq F_{X_n}^{-1}(u_n)\right) \\ &= \Pr\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u_1), ..., X_n \leq F_{X_n}^{-1}(u_n)\right) \\ &= F_{\underline{X}}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), ..., F_{X_n}^{-1}(u_n)\right)\end{aligned}$$

■

Exemple 9.5 *Soit la fonction de répartition de la loi exponentielle bivariée EFGM donnée par*

$$\begin{aligned}F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad +\theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2},\end{aligned} \tag{9.1}$$

avec paramètre de dépendance $-1 \leq \theta \leq 1$ et avec $\beta_i > 0$. Trouver la copule C qui lui est associée.

Solution. On sait que $F_{X_i}(x_i) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x_i}$ et $F_{X_i}^{-1}(u_i) = -\frac{1}{\beta_i}\ln(1 - u_i)$ $(i = 1, 2)$. En insérant cette dernière expression dans (9.1), on déduit

$$\begin{aligned}F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1\left(-\frac{\ln(1-u_1)}{\beta_1}\right)}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2\left(-\frac{\ln(1-u_2)}{\beta_2}\right)}\right) \\ &\quad +\theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1\left(-\frac{\ln(1-u_1)}{\beta_1}\right)}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2\left(-\frac{\ln(1-u_2)}{\beta_2}\right)}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1\left(-\frac{\ln(1-u_1)}{\beta_1}\right)}\mathrm{e}^{-\beta_2\left(-\frac{\ln(1-u_2)}{\beta_2}\right)} \\ &= (1 - (1 - u_1))(1 - (1 - u_2)) \\ &\quad +\theta(1 - (1 - u_1))(1 - (1 - u_2))(1 - u_1)(1 - u_2) \\ &= u_1 u_2 + \theta u_1 u_2(1 - u_1)(1 - u_2) \\ &= C(u_1, u_2),\end{aligned}$$

pour $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$. ■

Exemple 9.6 *Soit la fonction de survie conjointe de la loi bivariée Pareto donnée par*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha}, \ x_1, x_2 \geq 0. \tag{9.2}$$

Trouver la copule de survie $\widehat{C}$ qui lui est associée.

Solution. Les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 sont de Pareto et donc avec fonctions de survie marginales données par

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_i}(x_i) &= \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x}\right)^{\alpha} \\ &= \left(1 + \frac{x_i}{\lambda_i}\right)^{-\alpha},\ i = 1, 2.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\overline{F}_{X_i}^{-1}(u_i) = \lambda_i \left(u_i^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)\right) &= \left(1 + \frac{\lambda_1\left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2\left(u_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} \\ &= \left(1 + \left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) + \left(u_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)\right)^{-\alpha} \\ &= \left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}} + u_2^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha} \\ &= \widehat{C}(u_1, u_2),\end{aligned}$$

où $\widehat{C}$ est dite la copule de Clayton de paramètre $\alpha^* = \frac{1}{\alpha}$. On déduit l'expression de la fonction de répartition bivariée avec la relation

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1, x_2), x_1, x_2 \geq 0$$

d'où

$$\begin{aligned}F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) + F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1,\ x_1, x_2 \geq 0 \\ &= \left(1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} + 1 - \left(1 + \frac{x_1}{\lambda_1}\right)^{-\alpha} + 1 - \left(1 + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} - 1 \\ &= 1 - \left(1 + \frac{x_1}{\lambda_1}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha}.\end{aligned}$$

On sait que $F_{X_i}(x_i) = 1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x_i}\right)^{\alpha} = 1 - \left(1 + \frac{x_i}{\lambda_i}\right)^{-\alpha}$ et $F_{X_i}^{-1}(u_i) = \lambda_i \left\{\frac{1}{(1-u_i)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right\}$. On déduit la copule suivante:

$$\begin{aligned}F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) &= 1 - \left(1 + \frac{F_{X_1}^{-1}(u_1)}{\lambda_1}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{F_{X_2}^{-1}(u_2)}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{F_{X_1}^{-1}(u_1)}{\lambda_1} + \frac{F_{X_2}^{-1}(u_2)}{\lambda_2}\right)^{-\alpha},\ x_1, x_2 \geq 0 \\ &= 1 - \left(1 + \frac{\lambda_1\left\{\frac{1}{(1-u_1)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right\}}{\lambda_1}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\lambda_2\left\{\frac{1}{(1-u_2)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right\}}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{\lambda_1\left\{\frac{1}{(1-u_1)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right\}}{\lambda_1} + \cdots \right. \\ &= 1 - \left\{\frac{1}{(1-u_1)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\alpha} - \left\{\frac{1}{(1-u_2)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}^{-\alpha} + \left\{\frac{1}{(1-u_1)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{1}{(1-u_2)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right\}^{-\alpha} \\ &= 1 - (1-u_1) - (1-u_2) + \left\{(1-u_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + (1-u_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right\}^{-\alpha} \\ &= u_1 + u_2 - 1 + \left\{(1-u_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + (1-u_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right\}^{-\alpha}\end{aligned}$$

On peut remplacer α par $\frac{1}{\theta}$ et on a

$$C(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \left((1-u_1)^{-\theta} + (1-u_2)^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

■

Exemple 9.7 *Soit la fonction de survie conjointe de la loi de exponentielle bivariée de Marshall-Olkin donnée par*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0)x_1}\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0)x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1;x_2)}.$$

Trouver la copule de survie $\widehat{C}$ qui lui est associée.

Solution. Les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 sont exponentielles de paramètre $(\lambda_1+\lambda_0)$ et $(\lambda_2+\lambda_0)$ respectivement et donc avec fonctions de survie marginales données par

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = \mathrm{e}^{-(\lambda_i+\lambda_0)x_i},\ i = 1,2.$$

Ainsi, on a $\overline{F}_{X_i}^{-1}(u_i) = -\frac{\ln(u_i)}{\lambda_i+\lambda_0}$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(x_1), \overline{F}_{X_2}^{-1}(x_2)\right) &= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0)\left(-\frac{\ln(u_1)}{\lambda_1+\lambda_0}\right)}\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0)\left(-\frac{\ln(u_2)}{\lambda_2+\lambda_0}\right)} \min\left(\mathrm{e}^{\lambda_0\left(-\frac{\ln(u_1)}{\lambda_1+\lambda_0}\right)}; \mathrm{e}^{\lambda_0\left(-\frac{\ln(u_2)}{\lambda_2+\lambda_0}\right)}\right) \\
&= \mathrm{u}_1\mathrm{u}_2 \min\left(u_1^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}}; u_2^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_2+\lambda_0}}\right) \\
&= \mathrm{u}_1\mathrm{u}_2 \min\left(u_1^{-\alpha}; u_2^{-\beta}\right), \quad \textit{où } \alpha = \frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}, \beta = \frac{\lambda_0}{\lambda_2+\lambda_0} \\
&= \min\left(u_1^{1-\alpha}u_2; u_1u_2^{1-\beta}\right) \\
&= \begin{cases} u_1^{1-\alpha}u_2;\ u_1^{\alpha} \geq u_2^{\beta} \\ u_1u_2^{1-\beta};\ u_1^{\alpha} \leq u_2^{\beta} \end{cases} \\
&= \widehat{C}(u_1,u_2),
\end{aligned}$$

où $\widehat{C}$ est dite la copule de Marshall-Olkin de paramètres α et β. ■

9.4 Comment créer une distribution bivariée avec Sklar

En se basant sur la seconde partie du théorème de Sklar, une copule permet de jumeler différentes lois marginales afin de créer une loi bivariée. La copule $C(u_1,u_2)$ décrit la relation de dépendance entre les deux variables aléatoires X_1 et X_2 alors que les marginales décrivent le comportement de chacune des deux variables aléatoires.

Dans le cas de variables aléatoires continues, la copule contient toute l'information relative à la relation de dépendance entre les deux variables aléatoires. On peut dès lors étudier les marginales et la copule séparément. Le cas de marginales discrètes est traité dans une section ultérieure.

9.5 Propriétés

Proposition 9.8 *(Bornes de Fréchet) Soit C une copule définie sur $[0,1]^2$. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée pour toute copule bivariée C*

$$C^-(u_1,u_2) \leq C(u_1,u_2) \leq C^+(u_1,u_2),$$

où $C^-(u_1,u_2) = \max(u_1+u_2-1;0)$ et $C^+(u_1,u_2) = \min(u_1,u_2)$ correspondent respectivement aux copules borne inférieure et borne supérieure de Fréchet.

La borne supérieure de Fréchet est atteinte avec le vecteur (U,U), soit $C^+(u_1,u_2) = \Pr(U \leq u_1, U \leq u_2) = \min(u_1,u_2)$. Dans ce cas, on dit que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont comonotones. La borne inférieure de Fréchet est atteinte avec le vecteur $(U,1-U)$, soit $C^-(u_1,u_2) = \Pr(U \leq u_1, 1-U \leq u_2) = \max(u_1+u_2-1;0)$. À noter qu'en dimension supérieure à 2, la fonction C^- n'est pas une copule.

Un des intérêts de l'utilisation des copules découle de la propriété d'invariance énoncée dans la proposition ci-dessous.

Proposition 9.9 *Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires continues dont la structure de dépendance est définie avec une copule C. Soit ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions continues monotones. On a les propriétés suivantes:*

1. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non décroissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule C.
2. Si ϕ_1 est non décroissante et ϕ_2 est non croissante, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $u_1 - C(u_1, 1-u_2)$.
3. Si ϕ_1 est non croissante et ϕ_2 est non décroissante, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $u_2 - C(1-u_1, u_2)$.
4. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non croissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $\widehat{C}$.

Proposition 9.10 *Soit C une copule définie sur $[0,1]^2$. La fonction de densité associée à la copule C est donnée par*

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2).$$

Pour une paire de variables aléatoires continues X_1 et X_2 telles que

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)),$$

la fonction de densité de (X_1, X_2) est donnée par

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\ &= c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2). \end{aligned}$$

On observe que la fonction de densité conjointe de (X_1, X_2) est égale à la fonction de densité conjointe du couple (X_1, X_2) dans le cas où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes multipliée par le facteur $c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$. Ce facteur altère l'indépendance pour induire la structure de dépendance. Ainsi, la fonction de densité conjointe de (X_1, X_2) est repondérée par $c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$. Dans le cas où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes, alors $c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) = 1$ et donc la fonction de densité conjointe de (X_1, X_2) n'est que le produit des fonctions de densité marginales.

Soit $C(u_1, u_2)$ une copule définie sur $[0,1]^2$. On a vu précédemment dans le cadre d'un exemple, qu'il est possible de définir une copule, désignée $\widehat{C}(u_1, u_2)$, qui est associée à la copule initiale $C(u_1, u_2)$ et qui relie les fonctions de survie marginales $\overline{F}_{X_1}$et $\overline{F}_{X_2}$ de X_1 et X_2 selon la relation

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1), \overline{F}_{X_2}(x_2)\right).$$

En effet, on a

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$$

qui devient

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= 1 - \left(1 - \overline{F}_{X_1}(x_1)\right) - \left(1 - \overline{F}_{X_2}(x_2)\right) + C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\ &= \overline{F}_{X_1}(x_1) + \overline{F}_{X_2}(x_2) - 1 + C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\ &= \overline{F}_{X_1}(x_1) + \overline{F}_{X_2}(x_2) - 1 + C\left(1 - \overline{F}_{X_1}(x_1), 1 - \overline{F}_{X_2}(x_2)\right). \qquad (9.3) \end{aligned}$$

Étant donné que $\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1), \overline{F}_{X_2}(x_2)\right)$, on déduit de (9.3) l'expression de la copule de survie $\widehat{C}(u_1, u_2)$ associée à la copule $C(u_1, u_2)$:

$$\widehat{C}(u_1, u_2) = C(1-u_1, 1-u_2) + u_1 + u_2 - 1.$$

On peut vérifier que $\widehat{C}(u_1, u_2)$ est elle-même une copule et on a

$$C^-(u_1, u_2) \le \widehat{C}(u_1, u_2) \le C^+(u_1, u_2),$$

pour tout $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$.

Remarque 9.11 *On peut définir une fonction de répartition à partir de $\widehat{C}$, soit*

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\widehat{C}\left(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)\right).$$

Remarque 9.12 *Il ne faut pas confondre copule de survie et la fonction de survie du vecteur (X_1,X_2):*

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(X_1>x_1,X_2>x_2)\\ &= 1-F_{X_1}(x_1)-F_{X_2}(x_2)+C\left(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)\right)\\ &\neq \widehat{C}\left(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)\right).\end{aligned}$$

On a plutôt

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \Pr(X_1>x_1,X_2>x_2)\\ &= \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1),\overline{F}_{X_2}(x_2)\right)\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\Pr(X_1>x_1,X_2>x_2) &= 1-F_{X_1}(x_1)-F_{X_2}(x_2)+C\left(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)\right)\\ &= 1-(1-(1-F_{X_1}(x_1)))-(1-(1-F_{X_2}(x_2)))+C\left(1-(1-F_{X_1}(x_1)),1-(1-F_{X_2}(x_2))\right)\\ &= 1-\left(1-\overline{F}_{X_1}(x_1)\right)-\left(1-\overline{F}_{X_2}(x_2)\right)+C\left(1-\overline{F}_{X_1}(x_1),1-\overline{F}_{X_2}(x_2)\right)\\ &= C\left(1-\overline{F}_{X_1}(x_1),1-\overline{F}_{X_2}(x_2)\right)+\overline{F}_{X_1}(x_1)+\overline{F}_{X_2}(x_2)-1\\ &= \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1),\overline{F}_{X_2}(x_2)\right).\end{aligned}$$

Proposition 9.13 *Soit la copule C pour laquelle les dérivées partielles par rapport à u_1 et u_2*

$$C_{2|1}(u_2|u_1)=\frac{\partial}{\partial u_1}C(u_1,u_2)\ \text{ et } C_{1|2}(u_1|u_2)=\frac{\partial}{\partial u_2}C(u_1,u_2)$$

existent. Ainsi, les expressions des fonctions de répartition conditionnelles de $X_2|X_1=x_1$ et de $X_1|X_2=x_2$ pour un couple de variables aléatoires continues (X_1,X_2) sont données par

$$F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)=\frac{C_{2|1}\left(F_{X_2}(x_2)\,|F_{X_1}(x_1)\right)}{f_{X_1}(x_1)},$$

et

$$F_{X_1|X_2=x_2}(x_1)=\frac{C_{1|2}\left(F_{X_1}(x_1)\,|F_{X_2}(x_2)\right)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

Preuve. Soit le couple (U_1,U_2) tel que $F_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=C(u_1,u_2)$ et

$$F_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=\int_0^{u_2}\int_0^{u_1}f_{U_1,U_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_1}F_{U_1,U_2}(u_1,u_2) &= \frac{\partial}{\partial u_1}\int_0^{u_2}\int_0^{u_1}f_{U_1,U_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= \int_0^{u_2}f_{U_1,U_2}(u_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\\ &= \int_0^{u_2}f_{U_2|U_1=u_1}(x_2\,|u_1)\,f_{U_1}(u_1)\,\mathrm{d}x_2\\ &= \int_0^{u_2}f_{U_2|U_1=u_1}(x_2\,|u_1)\,\mathrm{d}x_2\\ &= F_{U_2|U_1=u_1}(u_2\,|u_1)\end{aligned}$$

Soit le couple (X_1, X_2) tel que $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ et

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(u, v)\, \mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(u, v)\, \mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(x_1, v)\, \mathrm{d}v \\
&= \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_2|X_1=x_1}(v\,|x_1)\, f_{X_1}(x_1)\, \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
F_{X_2|X_1=x_1}(x_2\,|x_1) &= \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_2|X_1=x_1}(v\,|x_1)\, \mathrm{d}v \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1} C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))}{f_{X_1}(x_1)} \\
&= \frac{C_{2|1}(F_{X_2}(x_2)\,|F_{X_1}(x_1))}{f_{X_1}(x_1)}.
\end{aligned}$$

■

9.6 Familles de copules

Les principales familles de copules sont les suivantes:

(1) Copules de base: copule indépendance, copule borne inférieure de Fréchet, copule borne supérieure de Fréchet

(2) Copules archimédiennes: copule Clayton, copule Frank, copule Gumbel, copule AMH

(3) Copules elliptiques: copule gaussienne, copule de Student

(4) Copules avec composantes singulières: copule de Fréchet.

On définit ci-dessous les différentes copules de base.

Définition 9.14 *La copule indépendance (ou copule produit) est définie par*

$$C^{\perp}(u_1, u_2) = u_1 u_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= C^{\perp}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\
&= F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2).
\end{aligned}$$

Définition 9.15 *La copule borne supérieure de Fréchet est défnie par*

$$C^{+}(u_1, u_2) = \min(u_1; u_2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= C^{+}(F_{X_1}(x_1); F_{X_2}(x_2)) \\ &= \min(F_{X_1}(x_1); F_{X_2}(x_2)). \end{aligned}$$

Définition 9.16 *La copule borne inférieure de Fréchet est définie par*

$$C^{-}(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= C^{-}(F_{X_1}(x_1); F_{X_2}(x_2)) \\ &= \max(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1; 0). \end{aligned}$$

Remarque 9.17 *À partir des copules de base, on obtient la copule de Fréchet définie par*

$$C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \alpha C^{+}(u_1, u_2) + \beta C^{-}(u_1, u_2) + (1 - \alpha - \beta) C^{\perp}(u_1, u_2), \ \alpha, \beta \in [0, 1], \ \alpha + \beta \leq 1.$$

Ainsi, la copule de Fréchet est une combinaision convexe des copules borne inférieure de Fréchet, borne supérieure de Fréchet et indépendance. Cette copule est dite *complète* car elle inclut comme cas particulier la copule borne inférieure de Fréchet, la borne supérieure de Fréchet et l'indépendance.

Étant donné l'importance des copules archimédiennes, on consacrera la prochaine section à cette famille de copules.

9.7 Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes constituent une famille importante de copules incluant notamment les copules de Clayton, de Frank, de Gumbel. Ces copules ne sont pas construites à partir du théorème de Sklar à l'aide de distributions multivariées connues. Elles sont plutôt construites à partir d'un générateur pour lequel on doit vérifier les propriétés pour obtenir une copule bien définie. Cette approche permet d'obtenir des copules ayant une forme explicite, ce qui est l'avantage premier des copules appartenant à cette classe. Un autre avantage des copules archimédiennes est leur grande flexibilité permettant de modéliser plusieurs types de dépendance. La famille de copules archimédiennes est fréquemment utilisée en pratique (actuariat, hydrologie, finance, statistiques, etc). Elles sont utilisées notamment pour la construction de modèles internes de compagnies d'assurance, de réassurance et de banques.

9.7.1 Définition

Définition 9.18 *Une copule archimédienne est représentée par le biais d'une fonction ψ de la façon suivante:*

$$C(u_1, ..., u_n) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + ... + \psi^{-1}(u_n)\right), \tag{9.4}$$

où ψ^{-1} est la fonction inverse de ψ, ψ est une fonction monotone décroissante, $\psi(0) = 1$ et $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. La fonction (9.4) est une copule pour tout $n = 2, 3, ...$ à la condition que la fonction ψ soit complètement monotone. La fonction ψ est appelée le générateur de la copule C.

Définition 9.19 *Une fonction ψ est dite complètement monotone si*

$$\frac{d^k}{dt^k}\psi(t) \leq 0 \ \textit{pour} \ k = 1, 3, 5, ...$$

et si

$$\frac{d^k}{dt^k}\psi(t) \geq 0 \text{ pour } k = 2, 4, 6, ...$$

Feller (1968) a montré qu'une fonction ψ est complètement monotone si et seulement si

$$\psi(t) = L_\Theta(t),$$

*où $L_\Theta(t)$ correspond à la transformée de Laplace-Stieltjes d'une variable aléatoire Θ **strictement** positive.*

On observe que pour la fonction $L_\Theta(t) = E\left[\mathrm{e}^{-t\Theta}\right]$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_\Theta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E\left[\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] = E\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] = E\left[-\Theta\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] \leq 0,\ t \geq 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L_\Theta(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}E\left[\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] = E\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] = E\left[\Theta^2\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] \geq 0,\ t \geq 0$$

et ainsi

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}L_\Theta(t) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}E\left[\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] = E\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] = E\left[(-1)^k\,\Theta^k\mathrm{e}^{-t\Theta}\right] \to \left\{\begin{array}{l} \leq 0 \text{ pour } k = 1, 3, 5, ...,\ t \geq 0 \\ \geq 0 \text{ pour } k = 2, 4, 6, ...,\ t \geq 0 \end{array}\right.$$

Dans cette section, on s'intéresse aux copules archimédiennes définies par $\psi(t) = L_\Theta(t)$.

9.7.2 Construction d'une copule archimédienne

On a recours à l'approche proposée par Marshall-Olkin (1988). Cette approche comporte les deux étapes suivantes:

(1) On définit la fonction de survie d'un vecteur de variables aléatoires obéissant à une loi exponentielle mélange multivariée.

(2) On applique la partie 1 du théorème de Sklar pour identifier la copule C.

Soit une variable aléatoire strictement positive Θ (continue, discrète ou mixte) avec transformée de Laplace-Stieltjes L_Θ. Soit un vecteur de variables aléatoires $\underline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$ dont le comportement conjoint est influencé par la variable aléatoire Θ tel que $(Y_i\,|\Theta = \theta) \sim Exp(\theta)$ avec $\overline{F}_{Y_i}(x_i) = \mathrm{e}^{-\theta x_i}$. On suppose également $(Y_1\,|\Theta = \theta), ..., (Y_n\,|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes. Cette approche est appelée une méthode de construction de loi conjointe par facteur commun aléatoire.

Examinons la fonction de survie marginale de Y_i, soit F_{Y_i}. On a

$$\begin{aligned} \overline{F}_{Y_i}(x_i) &= \int_0^\infty \overline{F}_{Y_i|\Theta=\theta}(x_i)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta x_i}\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-\Theta x_i}\right] \\ &= L_\Theta(x_i). \end{aligned}$$

On a donc que la transformée de Laplace-Stieljes de Θ, soit L_Θ, est la fonction de survie d'une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle mélange. On a évidemment $\overline{F}_{Y_i}^{-1}(u_i) = L_\Theta^{-1}$ pour $u_i \in [0,1]$. Maintenant, passons à la fonction de survie conjointe du vecteur $\underline{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$, soit $\overline{F}_{\underline{Y}}$. On a

$$\overline{F}_{\underline{Y}}(x_1, ..., x_n) = \int_0^\infty \overline{F}_{\underline{Y}|\Theta=\theta}(x_1, ..., x_n)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta).$$

Étant donné que $(Y_1 |\Theta = \theta), ..., (Y_n |\Theta = \theta)$ sont supposées conditionnellement indépendantes, on a

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{\underline{Y}}(x_1, ..., x_n) &= \int_0^\infty \overline{F}_{Y_1|\Theta=\theta}(x_1) ... \overline{F}_{Y_n|\Theta=\theta}(x_n) \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta x_1} ... \mathrm{e}^{-\theta x_n} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta(x_1+...+x_n)} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= E\left[\mathrm{e}^{-\Theta(x_1+...+x_n)}\right] \\
&= L_\Theta(x_1 + ... + x_n).
\end{aligned}$$

On peut maintenant identifier la copule associée à $\overline{F}_{\underline{Y}}$. Selon la partie 1 du théorème de Sklar, on a

$$C(u_1, ..., u_n) = \overline{F}_{\underline{Y}}\left(\overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1), ..., \overline{F}_{Y_n}^{-1}(u_n)\right),$$

où $\overline{F}_{Y_i}^{-1}$ est l'inverse de la fonction de survie $\overline{F}_{Y_i}$. On obtient

$$\begin{aligned}
C(u_1, ..., u_n) &= L_\Theta\left(\overline{F}_{Y_1}^{-1}(u_1) + ... + \overline{F}_{Y_n}^{-1}(u_n)\right) \\
&= L_\Theta\left(L_\Theta^{-1}(u_1) + ... + L_\Theta^{-1}(u_n)\right),\ u_i \in [0,1],\ i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Si l'on pose $\psi = L_\Theta$ et $\psi^{-1} = L_\Theta^{-1}$, on retrouve l'expression (9.4), soit

$$C(u_1, ..., u_n) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + ... + \psi^{-1}(u_n)\right).$$

On remarque que la copule est définie uniquement par la transformée de Laplace-Stieltjes L_Θ. Le choix de la copule est donc intimement lié à la distribution de Θ.

Remarque 9.20 *Copules et loi de Θ sous-jacente:*

Copule	***Loi de Θ***
Clayton	*Gamma (Θ_ continue)*
Frank	*Logarithmique (Θ_ discrète)*
Gumbel	*Stable positive (Θ_ continue)*
AMH	*Géométrique translatée (Θ_ discrète)*

Remarque 9.21 *On ne peut générer une copule archimédienne directement à partir de la loi de Poisson car $F_\Theta(0) > 0$ alors que Feller a montré qu'une fonction ψ est complètement monotone si et seulement si*

$$\psi(t) = L_\Theta(t),$$

où $L_\Theta(t)$ correspond à la transformée de Laplace-Stieltjes d'une variable aléatoire Θ ***strictement*** *positive.*

La méthode de construction d'une copule archimédienne fournit un algorithme simple de simulation. Soit $\underline{U} = (U_1, ..., U_n)$ où $F_{\underline{U}} = C$ et C est une copule archimédienne et $U_1 \sim ...U_n \sim U \sim Unif(0,1)$.

Algorithme 9.22 *Algorithme de simulation des réalisations $\underline{U}^{(j)}$ de $\underline{U}$.*

1. Simuler une réalisation $\Theta^{(j)}$ de Θ
2. Simuler une réalisation $\underline{Y}^{(j)}$ de $\underline{Y}$ où $(Y_i |\Theta = \theta) \sim Exp(\theta)$ et $(Y_1 |\Theta = \theta), ..., (Y_n |\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes:
$$Y_i^{(j)} = -\frac{1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_i^{(j)}\right)$$
où $V_i^{(j)}$ est une réalisation de $V_i \sim Unif(0,1)$, $i = 1, ..., n$ et $V_1, ..., V_n$ sont indépendantes.

3. Simuler la réalisation de $\underline{U}^{(j)}$ de $\underline{U}$:

$$U_i^{(j)} = \overline{F}_{Y_i} = L_\Theta\left(Y_i^{(j)}\right), \ i = 1, ..., n.$$

4. Répéter pour $j = 2, ..., nsimul$.

9.7.3 Copule de Clayton

Soit $\Theta \sim Gamma\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ avec $L_\Theta(t) = \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{\alpha}}}$. Examinons la copule archimédienne obtenue avec cette variable aléatoire mélange sachant que

$$C(u_1, ..., u_n) = L_\Theta\left(L_\Theta^{-1}(u_1) + ... + L_\Theta^{-1}(u_n)\right).$$

On doit trouver l'inverse de la transformée de Laplace-Stieltjes L_Θ, c'est-à-dire on doit trouver x tel que $L_\Theta(x) = u$, $u \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{\alpha}}} &= u \\ 1 + x &= u^{-\alpha} \\ x &= u^{-\alpha} - 1 \end{aligned}$$

et donc $L_\Theta^{-1}(u) = u^{-\alpha} - 1$, $u \in [0,1]$. L'expression de la copule est donc

$$\begin{aligned} C(u_1, ..., u_n) &= L_\Theta\left(L_\Theta^{-1}(u_1) + ... + L_\Theta^{-1}(u_n)\right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \left(L_\Theta^{-1}(u_1) + ... + L_\Theta^{-1}(u_n)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \\ &= \left(1 + \left(L_\Theta^{-1}(u_1) + ... + L_\Theta^{-1}(u_n)\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(1 + \left(u_1^{-\alpha} - 1 + ... + u_n^{-\alpha} - 1\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(u_1^{-\alpha} + ... + u_n^{-\alpha} - (n-1)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Définition 9.23 *La copule de Clayton est définie par*

$$C(u_1, ..., u_n) = \left(u_1^{-\alpha} + ... + u_n^{-\alpha} - (n-1)\right)^{\frac{-1}{\alpha}},$$

où $u_1, ..., u_n \in [0,1]$ *et* $\alpha > 0$.

À noter que la copule de Clayton introduit une relation de dépendance positive ($\alpha > 0$).

Proposition 9.24 *Les cas limites de la copule de Clayton sont*

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to 0} C_\alpha(u_1, ..., u_n) &= u_1 ... u_n = C^\perp(u_1, ..., u_n) \\ \lim_{\alpha \to \infty} C_\alpha(u_1, ..., u_n) &= \min(u_1, ..., u_n) = C^+(u_1, ..., u_n). \end{aligned}$$

Exemple 9.25 *Soit un couple de variables aléatoires* (X_1, X_2) *tel que* $X_1 \sim Exp(\beta = 1)$ *et* $X_2 \sim Beta(3,1)$ *et dont la structure de dépendance est définie par une copule de Clayton avec* $\alpha = 6$. *Calculer* $\Pr(X_1 \leq 1.7, X_2 \leq 0.8)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= 1 - e^{-x_1}, \ x_1 > 0. \\ F_{X_2}(x_2) &= x_2^2, \ 0 < x_2 < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) \\
&= \left(F_{X_1}(x_1)^{-\alpha} + F_{X_2}(x_2)^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \\
&= \left(\left(1-\mathrm{e}^{-x_1}\right)^{-\alpha} + \left(x_2^2\right)^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(1.7, 0.8) &= C\left(F_{X_1}(1.7), F_{X_2}(0.8)\right) \\
&= \left(\left(1-\mathrm{e}^{-1.7}\right)^{-6} + \left(0.8^2\right)^{-6} - 1\right)^{\frac{-1}{6}} \\
&= 0.624.
\end{aligned}$$

■

Proposition 9.26 *La copule conditionnelle de Clayton $C_{2|1}(u_2 \,|u_1)$ est donnée par*

$$C_{2|1}(u_2 \,|u_1) = \left(1 + u_1^{\alpha}\left(u_2^{-\alpha} - 1\right)\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
C_{2|1}(u_2 \,|u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C_\alpha(u_1,u_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}} \\
&= \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}-1}(-\alpha)\, u_1^{-\alpha-1} \\
&= \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{\alpha}-1} u_1^{-\alpha-1} \\
&= \frac{1}{\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{1}{\alpha}+1}} \frac{1}{(u_1)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{1}{\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}} \frac{1}{\left(u_1^{\alpha}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \\
&= \frac{1}{\left(u_1^{-\alpha}u_1^{\alpha} + u_2^{-\alpha}u_1^{\alpha} - u_1^{\alpha}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}} \\
&= \left(1 + u_2^{-\alpha}u_1^{\alpha}\left(u_2^{-\alpha} - 1\right)\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 9.27 *La fonction de densité associée à la copule de Clayton est donnée par*

$$c_\alpha(u_1,u_2) = \frac{1+\alpha}{(u_1u_2)^{\alpha+1}}\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
c_\alpha(u_1,u_2) &= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1,u_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2}\left(u_1^{-\alpha}+u_2^{-\theta}-1\right)^{\frac{-1}{\theta}} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(-\frac{1}{\theta}\right)\left(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1\right)^{\frac{-1}{\theta}-1}(-\theta)\,u_2^{-\theta-1} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} u_2^{-\theta-1}\left(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1\right)^{\frac{-1}{\theta}-1} \\
&= u_2^{-\theta-1}\left(\frac{-1}{\theta}-1\right)\left(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1\right)^{\frac{-1}{\theta}-2}(-\theta)\,u_1^{-\theta-1} \\
&= (u_1u_2)^{-\theta-1}(1+\theta)\left(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1\right)^{\frac{-1}{\theta}-2}.
\end{aligned}
$$

■

Algorithme 9.28 *Algorithme de simulation de réalisations* $\underline{U}^{(j)}$ *de* $\underline{U}$.

1. Simuler des réalisations $V_0^{(j)}, V_1^{(j)}, ..., V_n^{(j)}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $V_0, V_1, ..., V_n$ où $V_i \sim Unif\,(0,1)$.

2. Avec $V_0^{(j)}$, simuler une réalisation $\Theta^{(j)}$ où $\Theta^{(j)} = F_\Theta^{-1}\left(V_0^{(j)}\right)$.

3. Avec $V_1^{(j)}, ..., V_n^{(j)}$, simuler des réalisations $Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}$ avec
$$Y_i^{(j)} = \frac{-1}{\Theta^{(j)}} \ln\left(1 - V_i^{(j)}\right),\ i = 1, ..., n.$$

4. Avec $Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}$, simuler des réalisations $U_1^{(j)}, ..., U_n^{(j)}$ avec
$$U_i^{(j)} = L_\Theta\left(Y_i^{(j)}\right) = \frac{1}{\left(1+Y_i^{(j)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}},\ i = 1, ..., n.$$

5. Répéter pour $j = 2, ..., nsimul$.

À l'aide d'un graphique de nuage de points $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$, on fait les observations suivantes pour la copule de Clayton:

(1) La copule de Clayton n'est pas symétrique.

(2) Très forte concentration des couples $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ ayant des valeurs très faibles.

(3) Très forte dispersion des couples $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ ayant des valeurs très élevées.

(4) La copule de Clayton peut être adéquate pour modéliser les rendements sur des titres financiers.

(5) La copule de Clayton est moins adéquate pour modéliser les coûts de lignes d'affaires en assurance dommage car intuitivement, on croit que les coûts élevés sont fortement dépendants.

9.7.4 Copule de Frank

Définition 9.29 *La copule de Frank est définie par*

$$C_\theta(u_1,u_2)=\frac{-1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)}\right),\ \theta\in(-\infty,\infty)\setminus\{0\}.$$

À noter que la copule de Frank introduit une relation de dépendance positive ($\theta>0$) ou négative ($\theta<0$).

Proposition 9.30 *Les cas limites de la copule de Frank sont*

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0}C_\theta(u_1,u_2)&=C^\perp(u_1,u_2)\\ \lim_{\theta\to\infty}C_\theta(u_1,u_2)&=C^+(u_1,u_2)\\ \lim_{\theta\to-\infty}C_\theta(u_1,u_2)&=C^-(u_1,u_2).\end{aligned}$$

Ainsi, la copule de Frank est une copule complète.

Proposition 9.31 *La copule conditionnelle de Frank $C_{2|1}(u_2\,|u_1)$ est donnée par*

$$C_{2|1}(u_2\,|u_1)=\frac{\mathrm{e}^{-(\theta u_2)}-\mathrm{e}^{-(\theta(u_1+u_2))}}{1-\mathrm{e}^{-(\theta)}-\left(1-\mathrm{e}^{-(\theta u_1)}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-(\theta u_2)}\right)}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}C_{2|1}(u_2\,|u_1)&=\frac{\partial}{\partial u_1}C_\theta(u_1,u_2)\\ &=\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{-1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)}\right)\\ &=\frac{-1}{\theta}\frac{1}{\left(1+\frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)}\right)}\frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)}\mathrm{e}^{-\theta u_1}(-\theta)\\ &=\frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}\frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)}\mathrm{e}^{-\theta u_1}\\ &=\frac{\mathrm{e}^{-\theta u_1}\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}.\end{aligned}$$

■

Proposition 9.32 *La fonction de densité associée à la copule de Frank est donnée par*

$$c_\theta(u_1,u_2)=\frac{\theta\mathrm{e}^{-\theta u_1}\mathrm{e}^{-\theta u_2}\left(1-\mathrm{e}^{-\theta}\right)}{\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)\right)^2}$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
c_\theta(u_1,u_2) &= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_\theta(u_1,u_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{-1}{\theta} \ln\left(1+\frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\mathrm{e}^{-\theta u_2}}{\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\theta u_2}\mathrm{e}^{-\theta u_1}(-\theta)\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)\right)-\mathrm{e}^{-\theta u_2}\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)\mathrm{e}^{-\theta u_1}(-\theta)\right)}{\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)\right)^2} \\
&= \frac{(-\theta)\,\mathrm{e}^{-\theta u_1}\mathrm{e}^{-\theta u_2}\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)-\theta\mathrm{e}^{-\theta u_1}\mathrm{e}^{-\theta u_2}\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)+\theta\mathrm{e}^{-\theta u_1}\mathrm{e}^{-\theta u_2}\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)}{\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)\right)^2} \\
&= \frac{\theta\mathrm{e}^{-\theta u_1}\mathrm{e}^{-\theta u_2}\left(1-\mathrm{e}^{-\theta}\right)}{\left(\left(\mathrm{e}^{-\theta}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{-\theta u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\theta u_2}-1\right)\right)^2}.
\end{aligned}
$$

■

Remarque 9.33 *La copule de Frank est symétrique. À l'aide d'un nuage de points, on observe qu'elle présente une plus forte concentration de points aux coins* $(0,0)$ *et* $(1,1)$ *comparativement au reste du nuage où l'étalement des points est plus prononcé.*

9.7.5 Copule de Gumbel

Définition 9.34 *La copule de Gumbel est définie par*

$$C_\theta(u_1,u_2) = \mathrm{e}^{-\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}},\ \theta \geq 1.$$

Proposition 9.35 *Les cas limites de la copule de Gumbel sont*

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 1} C_\theta(u_1,u_2) &= C^\perp(u_1,u_2) \\
\lim_{\theta\to\infty} C_\theta(u_1,u_2) &= C^+(u_1,u_2)
\end{aligned}
$$

Proposition 9.36 *La copule conditionnelle de Gumbel* $C_{2|1}(u_2\,|u_1)$ *est donnée par*

$$C_{2|1}(u_2\,|u_1) = C_\theta(u_1,u_2)\,\frac{(-\ln u_1)^{\theta-1}}{u_1}\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
C_{2|1}(u_2\,|u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C_\theta(u_1,u_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} \mathrm{e}^{-\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}} \\
&= \mathrm{e}^{-\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}} \left(\frac{-1}{\theta}\right)\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-1}(\theta)\,(-\ln u_1)^{\theta-1}\left(\frac{1}{u_1}\right) \\
&= C_\theta(u_1,u_2)\,\frac{(-\ln u_1)^{\theta-1}}{u_1}\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-1}
\end{aligned}
$$

■

Proposition 9.37 *La fonction de densité associée à la copule de Gumbel est donnée par*

$$c_\theta(u_1,u_2) = C_\theta(u_1,u_2)\,\frac{(-\ln u_1)^{\theta-1}(-\ln u_2)^{\theta-1}}{u_1 u_2}\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-2}\left(\theta - 1 + \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right).$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
c_\theta(u_1,u_2) &= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_\theta(u_1,u_2) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \mathrm{e}^{-\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1} C_\theta(u_1,u_2) \frac{(-\ln u_2)^{\theta-1}}{u_2} \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-1} \\
&= \frac{(-\ln u_2)^{\theta-1}}{u_2} C_\theta(u_1,u_2) \frac{(-\ln u_1)^{\theta-1}}{u_1} \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-1} \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-1} \\
&\quad + \frac{(-\ln u_2)^{\theta-1}}{u_2} C_\theta(u_1,u_2) \left(\frac{1}{\theta}-1\right) \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-2} \theta \frac{(-\ln u_1)^{\theta-1}}{-u_1} \\
&= C_\theta(u_1,u_2) \frac{(-\ln u_1)^{\theta-1}}{u_1} \frac{(-\ln u_2)^{\theta-1}}{u_2} \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-2} \left(\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta} - \left(\frac{1}{\theta}-1\right)\right. \\
&= C_\theta(u_1,u_2) \frac{(-\ln u_1)^{\theta-1}}{u_1} \frac{(-\ln u_2)^{\theta-1}}{u_2} \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta-2} \left(\theta - 1 + \left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right).
\end{aligned}
$$

■

9.8 Mesures d'association

Il existe différentes mesures pour quantifier la relation de dépendance ou l'association entre deux variables aléatoires. Cette section porte sur les mesures d'association définies pour des variables aléatoires continues seulement. Avant de donner les définitions de certaines de ces mesures, on énumère dans la proposition ci-dessous des propriétés souhaitables pour ces mesures de dépendance.

Proposition 9.38 *Des propriétés désirables pour une mesure de dépendance $\eta(X_1,X_2)$ sont les suivantes:*

1. *Symétrie: $\eta(X_1,X_2) = \eta(X_2,X_1)$.*
2. *Normalisation: $-1 \le \eta(X_1,X_2) \le 1$.*
3. *Comonotonocité: Soit un couple de variables aléatoires continues X_1 et X_2. Si X_1 et X_2 sont comonotones, alors*
$$\eta(X_1,X_2) = 1.$$
4. *Antimonotonocité: Soit un couple de variables aléatoires continues X_1 et X_2. Si X_1 et X_2 sont antimonotones, alors*
$$\eta(X_1,X_2) = -1.$$
5. *Invariance: Soit des fonctions monotones φ_1 et φ_2. Alors,*
$$\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = \eta(X_1,X_2).$$
   (a) *Si φ_1 et φ_2 sont monotones croissantes, alors $\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = \eta(X_1,X_2)$.*
   (b) *Si φ_1 et φ_2 sont monotones décroissantes, alors $\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = \eta(X_1,X_2)$.*
   (c) *Si φ_1 est monotone croissante (décroissante) et φ_2 monotone décroissante (croissante), alors*
$$\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = -\eta(X_1,X_2).$$

Remarque 9.39 *La propriété d'invariance est cruciale et permet de quantifier uniquement la force de la relation de dépendance associée à une structure de dépendance.*

Remarque 9.40 *Il est souhaitable que la mesure η ne soit pas affectée par les lois marginales de X_1 et X_2.*

Remarque 9.41 *Il est souhaitable que la mesure η associée à la comonotonocié soit égale à 1 et égale à -1 lorsqu'elle est associée à l'antimotonocité.*

Dans le cadre de la loi normale multivariée, on est habitué de travailler avec le coefficient de corrélation de Pearson. On peut se demander si ce dernier satisfait les propriétés désirables énumérées ci-dessus.

Définition 9.42 *Soit des variables aléatoires X_1 et X_2. Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson, désigné par $\rho_P(X_1, X_2)$, est défini par*

$$\begin{aligned} \rho_P(X_1, X_2) &= Cov\left(\frac{(X_1 - E[X_1])}{\sqrt{Var(X_1)}}, \frac{(X_2 - E[X_2])}{\sqrt{Var(X_2)}}\right) \\ &= \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)\, Var(X_2)}}. \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation de Pearson satisfait la propriété de symétrie

$$\rho_P(X_1, X_2) = \rho_P(X_2, X_1).$$

Il satisfait également la propriété de normalisation, soit $-1 \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq 1$ tel qu'indiqué dans la proposition ci-dessous.

Proposition 9.43 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) tel que $E[X_i] < \infty$ et $Var(X_i) < \infty$, $i = 1, 2$. Alors,*

$$-1 \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq 1.$$

Preuve. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires telles que $Var(X_i) = \sigma^2_{X_i}$, $i = 1, 2$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &\leq Var\left(\frac{X_1}{\sigma_{X_1}} + \frac{X_2}{\sigma_{X_2}}\right) = \frac{Var(X_1)}{\sigma^2_{X_1}} + \frac{Var(X_2)}{\sigma^2_{X_2}} + \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\ &\Rightarrow 2 + \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = 2\left(1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}\right) \geq 0 \\ &\Rightarrow 1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \geq 0 \\ &\Rightarrow \rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \geq -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq Var\left(\frac{X_1}{\sigma_{X_1}} - \frac{X_2}{\sigma_{X_2}}\right) = \frac{Var(X_1)}{\sigma^2_{X_1}} + \frac{Var(X_2)}{\sigma^2_{X_2}} - \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\ &\Rightarrow 2 - \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = 2\left(1 - \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}\right) \geq 0 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \geq 0 \\ &\Rightarrow \rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \leq 1 \end{aligned}$$

■

Le coefficient de corrélation de Pearson ne satisfait pas toutefois la propriété #3, i.e que l'on peut observer plusieurs exemples où $\rho_P(X_1, X_2) < 1$ pour un couple de variables aléatoires comonotones. Il en va de même pour la propriété #4. On retrouve plusieurs exemples où $\rho_P(X_1, X_2) > -1$ pour un couple de variables aléatoires antimonotones. Ceci est illustré dans les exemples ci-dessous.

Exemple 9.44 *Soit un couple de variables aléatoires* (X_1, X_2) *telles que* $X_1 \sim Exp(1)$ *et* $X_2 \sim Unif(0,1)$. *(a) Supposons que les variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *sont comonotones telles que* $X_1 = -\ln(1-U)$ *et* $X_2 = U$. *Trouver* $\rho_P(X_1, X_2)$. *(b) Supposons que les variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *sont antimonotones telles que* $X_1 = -\ln(U)$ *et* $X_2 = U$. *Trouver* $\rho_P(X_1, X_2)$.

Solution. (a)

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= E[-\ln(1-U)U] \\ &= \int_0^1 -x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \ln(1-x) - x\ln(1-x) - \ln(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1-x)\ln(1-x) - \ln(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1-x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La première intégrale s'effectue par parties. Dans un premier temps, posons $y = 1-x$ et $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$. Ainsi, on a maintenant l'intégrale suivante $\int_0^1 y\ln y\mathrm{d}y$. On pose $u = \ln y$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{y}$, $\mathrm{d}v = y\mathrm{d}y$ et $v = \frac{y^2}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 y\ln y\mathrm{d}y &= \frac{y^2}{2}\ln y\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{2}\mathrm{d}y \\ &= 0 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\,\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, on pose à nouveau $y = 1-x$ et $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$, d'où

$$\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln y\mathrm{d}y$$

que l'on doit également intégrer par parties avec $u = \ln y$, $du = \frac{1}{y}$, $dv = dy$ et $v = y$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln y\mathrm{d}y &= y\ln y\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{d}y \\ &= -y\,\Big|_0^1 \\ &= -1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E[X_1X_2] &= -\frac{1}{4} - (-1) \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

De plus, $E[X_1]=1$, $Var(X_1)=1$ et $E[X_2]=\frac{1}{2}$, $Var(X_2)=\frac{1}{12}$. Alors,

$$\begin{aligned}\rho_P(X_1,X_2) &= \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}\\ &= \frac{\frac{3}{4}-(1)\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(1)\left(\frac{1}{12}\right)}}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{12}\\ &= 0.866.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}E[X_1X_2] &= E[-\ln(U)U]\\ &= \int_0^1 -x\ln x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On effectue cette intégrale par paties en posant $u=\ln x$, $\mathrm{d}u=\frac{1}{x}$, $dv=x\mathrm{d}x$ et $v=\frac{x^2}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ln x\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln x\,|_0^1-\int_0^1\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\ &= 0-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\,|_0^1\\ &= -\frac{1}{4},\end{aligned}$$

d'où $E[X_1X_2]=\frac{1}{4}$. De plus, $E[X_1]=1$, $Var(X_1)=1$ et $E[X_2]=\frac{1}{2}$, $Var(X_2)=\frac{1}{12}$. Alors,

$$\begin{aligned}\rho_P(X_1,X_2) &= \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}\\ &= \frac{\frac{1}{4}-(1)\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(1)\left(\frac{1}{12}\right)}}\\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{12}\\ &= -0.866.\end{aligned}$$

■

Exemple 9.45 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1,X_2) telles que $X_1\sim Lognorm(\mu_1,\sigma_1)$ et $X_2\sim Lognorm(\mu_2,\sigma_2)$. (a) Supposons que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont comonotones telles que $X_1=\mathrm{e}^{\mu_1+\sigma_1Z}$ et $X_2=\mathrm{e}^{\mu_2+\sigma_2Z}$, où $Z\sim N(0,1)$. Trouver $\rho_P(X_1,X_2)$. (b) Supposons que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont antimonotones telles que $X_1=\mathrm{e}^{\mu_1+\sigma_1Z}$ et $X_2=\mathrm{e}^{\mu_2+\sigma_2(-Z)}$, où $Z\sim N(0,1)$. Trouver $\rho_P(X_1,X_2)$.*

Solution. (a)

$$\begin{aligned}E[X_1X_2] &= E\left[\mathrm{e}^{\mu_1+\sigma_1Z}\mathrm{e}^{\mu_2+\sigma_2Z}\right]\\ &= E\left[\mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)+(\sigma_1+\sigma_2)Z}\right]\\ &= \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)}E\left[\mathrm{e}^{(\sigma_1+\sigma_2)Z}\right]\\ &= \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)}M_Z(\sigma_1+\sigma_2)\\ &= \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)+\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X_i] &= E\left[e^{\mu_i+\sigma_i Z}\right] \\
&= e^{\mu_i} E\left[e^{\sigma_i Z}\right] \\
&= e^{\mu_i} M_Z(\sigma_i) \\
&= e^{\mu_i+\frac{\sigma_i^2}{2}},\ i=1,2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X_i) &= E\left[X_i^2\right] - E^2[X_i] \\
&= E\left[e^{2\mu_i+2\sigma_i Z}\right] - E^2\left[e^{\mu_i+\sigma_i Z}\right] \\
&= e^{2\mu_i} E\left[e^{2\sigma_i Z}\right] - \left(e^{\mu_i} e^{\frac{\sigma_i^2}{2}}\right)^2 \\
&= e^{2\mu_i} M_Z(2\sigma_i) - e^{2\mu_i+\sigma_i^2} \\
&= e^{2\mu_i+2\sigma_i^2} - e^{2\mu_i+\sigma_i^2} \\
&= e^{2\mu_i+\sigma_i^2}\left(e^{\sigma_i^2}-1\right),\ i=1,2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_P(X_1,X_2) &= \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)\,Var(X_2)}} \\
&= \frac{e^{(\mu_1+\mu_2)+\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2}} - e^{\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}} e^{\mu_2+\frac{\sigma_2^2}{2}}}{\sqrt{e^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(e^{\sigma_1^2}-1\right) e^{2\mu_2+\sigma_2^2}\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&= \frac{e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2}{2}\right)} - e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2}{2}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)}}{e^{\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}} e^{\mu_2+\frac{\sigma_2^2}{2}} \sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&= \frac{e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)} \left(e^{\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)} \sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&= \frac{\left(e^{\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{\sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&< 1
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
E[X_1X_2] &= E\left[e^{\mu_1+\sigma_1 Z} e^{\mu_2-\sigma_2 Z}\right] \\
&= E\left[e^{(\mu_1+\mu_2)+(\sigma_1-\sigma_2)Z}\right] \\
&= e^{(\mu_1+\mu_2)} E\left[e^{(\sigma_1-\sigma_2)Z}\right] \\
&= e^{(\mu_1+\mu_2)} M_Z(\sigma_1-\sigma_2) \\
&= e^{(\mu_1+\mu_2)+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[X_1] &= E\left[e^{\mu_1+\sigma_1 Z}\right] \\
&= e^{\mu_1} E\left[e^{\sigma_1 Z}\right] \\
&= e^{\mu_1} M_Z(\sigma_1) \\
&= e^{\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X_2\right] &= E\left[\mathrm{e}^{\mu_2-\sigma_2 Z}\right] \\
&= \mathrm{e}^{\mu_2} E\left[\mathrm{e}^{-\sigma_2 Z}\right] \\
&= \mathrm{e}^{\mu_2} M_Z\left(-\sigma_2\right) \\
&= \mathrm{e}^{\mu_2+\frac{\sigma_2^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left(X_1\right) &= E\left[X_1^2\right]-E^2\left[X_1\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{2\mu_1+2\sigma_1 Z}\right]-E^2\left[\mathrm{e}^{\mu_1+\sigma_1 Z}\right] \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1} E\left[\mathrm{e}^{2\sigma_1 Z}\right]-\left(\mathrm{e}^{\mu_1}\mathrm{e}^{\frac{\sigma_1^2}{2}}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1} M_Z\left(2\sigma_1\right)-\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2} \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1+2\sigma_1^2}-\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2} \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left(X_2\right) &= E\left[X_1^2\right]-E^2\left[X_1\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{2\mu_1+2\sigma_1 Z}\right]-E^2\left[\mathrm{e}^{\mu_1+\sigma_1 Z}\right] \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1} E\left[\mathrm{e}^{2\sigma_1 Z}\right]-\left(\mathrm{e}^{\mu_1}\mathrm{e}^{\frac{\sigma_1^2}{2}}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1} M_Z\left(2\sigma_1\right)-\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2} \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1+2\sigma_1^2}-\mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2} \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_1^2}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left(X_2\right) &= E\left[X_2^2\right]-E^2\left[X_2\right] \\
&= E\left[\mathrm{e}^{2\mu_2-2\sigma_2 Z}\right]-E^2\left[\mathrm{e}^{\mu_2-\sigma_2 Z}\right] \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_2} E\left[\mathrm{e}^{-2\sigma_2 Z}\right]-\left(\mathrm{e}^{\mu_2}\mathrm{e}^{\frac{\sigma_2^2}{2}}\right)^2 \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_2} M_Z\left(-2\sigma_2\right)-\mathrm{e}^{2\mu_2+\sigma_2^2} \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_2+2\sigma_2^2}-\mathrm{e}^{2\mu_2+\sigma_2^2} \\
&= \mathrm{e}^{2\mu_2+\sigma_2^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma_2^2}-1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_P(X_1, X_2) &= \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1) Var(X_2)}} \\
&= \frac{e^{(\mu_1+\mu_2)+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2}{2}} - e^{\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}} e^{\mu_2+\frac{\sigma_2^2}{2}}}{\sqrt{e^{2\mu_1+\sigma_1^2}\left(e^{\sigma_1^2}-1\right) e^{2\mu_2+\sigma_2^2}\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&= \frac{e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2}{2}\right)} - e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2}{2}+\frac{\sigma_2^2}{2}\right)}}{e^{\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}} e^{\mu_2+\frac{\sigma_2^2}{2}} \sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&= \frac{e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)} \left(e^{-\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{e^{(\mu_1+\mu_2)} e^{\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\right)} \sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&= \frac{\left(e^{-\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{\sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}} \\
&> -1
\end{aligned}$$

Soit les deux cas exemples suivants: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$ ainsi que $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$. On obtient

	$\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$	$\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$
$\rho_P^+(X_1, X_2)$	0.6107	0.99745
$\rho_P^-(X_1, X_2)$	0.0015	-0.93936

■

Exemple 9.46 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) telles que $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_2 \sim Exp(1)$. (a) Supposons que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont comonotones telles que $X_1 = X$ et $X_2 = X$ où $X \sim Exp(1)$. Trouver $\rho_P(X_1, X_2)$. (b) Supposons que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont antimonotones telles que $X_1 = -\ln(1-U)$ et $X_2 = -\ln U$. Trouver $\rho_P(X_1, X_2)$...*

Le coefficient de corrélation de Pearson ne respecte pas non plus la propriété d'invariance. Il est uniquement invariant aux transformations linéaires tel qu'indiqué dans la prochaine proposition.

Proposition 9.47 *Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson $\rho_P(X_1, X_2)$ est invariant par rapport aux transformations linéaires.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\rho_P(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) &= \frac{Cov(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2)}{\sqrt{Var(a_1 + b_1X_1) Var(a_2 + b_2X_2)}} \\
&= \frac{Cov(b_1X_1, b_2X_2)}{\sqrt{b_1^2 Var(X_1) b_2^2 Var(X_2)}} \\
&= \frac{b_1 b_2 Cov(X_1, X_2)}{b_1 b_2 \sqrt{Var(X_1) Var(X_2)}} \\
&= \rho_P(X_1, X_2).
\end{aligned}$$

■

En conclusion, le coefficient de corrélation de Pearson n'est pas une mesure d'association adéquate.

Regardons maintenant les mesures d'association dans un contexte de copules. Soit un couple de variables aléatoires (U_1, U_2) où $F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$, où $(u_1, u_2) \in [0,1] \times [0,1]$. Soit η une mesure d'association satisfaisant les 5 propriétés souhaitables.

Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) où

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

- Si $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$, alors, $\eta(X_1, X_2) = \eta(U_1, U_2)$.
- Si $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1 - U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - U_2)$, alors, $\eta(X_1, X_2) = \eta(U_1, U_2)$.
- Si $X_1 = F_{X_1}^{-1}(1 - U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(U_2)$, alors, $\eta(X_1, X_2) = -\eta(U_1, U_2)$.
- Si $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U_1)$ et $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - U_2)$, alors, $\eta(X_1, X_2) = -\eta(U_1, U_2)$.

Soit un couple de variables aléatoires (U_1', U_2').

- Si $U_1' = 1 - U_1$ et $U_2' = 1 - U_2$, alors $\eta(U_1', U_2') = \eta(U_1, U_2)$.
- Si $U_1' = 1 - U_1$ et $U_2' = U_2$, alors $\eta(U_1', U_2') = -\eta(U_1, U_2)$.
- Si $U_1' = U_1$ et $U_2' = 1 - U_2$, alors $\eta(U_1', U_2') = -\eta(U_1, U_2)$.

Ces relations sont importantes pour justifier l'utilisation des copules. Elles seront à la base de la procédure d'estimation des copules.

On examine dans ce qui suit deux mesures d'association, soit le rho de Spearman et le tau de Kendall. Ces deux mesures sont dites des mesures de rang.

9.8.1 Rho de Spearman

Cette mesure a été proposée par Spearman à la même époque où Pearson proposa le coefficient de corrélation linéaire de Pearson.

Définition 9.48 *Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) avec fonction de répartition conjointe F_{X_1,X_2} et fonctions de répartition marginales F_{X_1} et F_{X_2}. Alors, le rho de Spearman est défini par*

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)).$$

Examinons de plus près la définition du rho de Spearman. Soit $F_{X_1}(X_1) = U_1$ et $F_{X_2}(X_2) = U_2$ où $U_i \sim U(0,1)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\rho_S(X_1, X_2) &= \rho_P(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)) \\
&= \rho_P(U_1, U_2) \\
&= \frac{Cov(U_1, U_2)}{\sqrt{Var(U_1)\,Var(U_2)}} \\
&= \frac{E[U_1U_2] - E[U_1]\,E[U_2]}{\sqrt{Var(U_1)\,Var(U_2)}} \\
&= \frac{E[U_1U_2] - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{12}\right)}} \\
&= 12E[U_1U_2] - 3.
\end{aligned}$$

On sait que $F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$ où C est une copule telle que

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
E[U_1U_2] &= \int_0^1\int_0^1 u_1u_2 f_{U_1,U_2}(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\
&= \int_0^1\int_0^1 u_1u_2 c(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2,
\end{aligned}$$

où $c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$ est la fonction de densité de la copule C.

Il est important de noter que $\rho_S(U_1, U_2) = \rho_P(U_1, U_2)$ car

$$\begin{aligned} \rho_S(U_1, U_2) &= \rho_P\left(F_{U_1}(U_1), F_{U_2}(U_2)\right) \\ &= \rho_P(U_1, U_2) \end{aligned}$$

et donc

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(U_1, U_2) = \rho_S(U_1, U_2).$$

Remarque 9.49 *Soit un couple de variables aléatoires indépendantes (U_1, U_2) où $U_1 \sim Unif(0,1)$ et $U_2 \sim Unif(0,1)$. Alors,*

$$\begin{aligned} \rho_S(U_1, U_2) &= \rho_P(U_1, U_2) \\ &= \frac{E[U_1 U_2] - E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{Var(U_1)Var(U_2)}} \\ &= \frac{E[U_1]E[U_2] - E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{Var(U_1)Var(U_2)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Examinons maintenant les propriétés du rho de Spearman. Plus spécifiquement, on vérifie si les propriétés souhaitables pour une mesure de quantification de la dépendance sont bien vérifiées par cette mesure.

Proposition 9.50 *Soit le rho de Spearman ρ_S et le couple de variables aléatoires (U_1, U_2). Cette mesure d'association satisfait les propriétés suivantes:*

1. *Symétrie: $\rho_S(U_1, U_2) = \rho_S(U_2, U_1)$.*
2. *Normalisation: $-1 \leq \rho_S(U_1, U_2) \leq 1$.*
3. *Comonotonocité: Si U_1 et U_2 sont comonotones, alors*
$$\rho_S(U_1, U_2) = 1.$$
4. *Antimonotonocité: Si U_1 et U_2 sont antimonotones, alors*
$$\rho_S(U_1, U_2) = -1.$$
5. *Invariance: Soit les fonctions monotones φ_1 et φ_2.*
   (a) *Si φ_1 et φ_2 sont monotones croissantes, alors $\rho_S(\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)) = \rho_S(U_1, U_2)$.*
   (b) *Si φ_1 et φ_2 sont monotones décroissantes, alors $\rho_S(\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)) = \rho_S(U_1, U_2)$.*
   (c) *Si φ_1 est monotone croissant (décroissante) et φ_2 monotone décroissante (croissante), alors*
   $$\rho_S(\varphi_1(U_1), \varphi_2(U_2)) = -\rho_S(U_1, U_2).$$

Preuve. Propriété #1: Puisque le coefficient de corrélation de Pearson est symétrique, alors le rho de Spearman l'est aussi. **Propriété #3:** Soit un couple de variables aléatoires comonotones (U_1, U_2) où $U_i \sim Unif(0,1)$, $i = 1, 2$. Cela signifie que

$$F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$$

et que $U_1 = U$ et $U_2 = U$, où $U \sim Unif(0,1)$. Alors,

$$E[U_1 U_2] = E\left[U^2\right] = Var(U) + E^2[U].$$

On déduit

$$\begin{aligned}\rho_S(U_1,U_2) &= \frac{E[U_1U_2]-E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{Var(U_1)Var(U_2)}}\\ &= \frac{Var(U)+E^2[U]-E^2[U]}{Var(U)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Propriété #4: Soit un couple de variables aléatoires antimonotones (U_1,U_2) où $U_i \sim Unif(0,1)$, $i=1,2$. Cela signifie que

$$F_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = C^-(u_1,u_2) = \max(u_1+u_2-1;0)$$

et que $U_1 = U$ et $U_2 = 1-U$, où $U \sim Unif(0,1)$. Alors,

$$E[U_1U_2] = E[U(1-U)] = E[U] - E\left[U^2\right].$$

On déduit

$$\begin{aligned}\rho_S(U_1,U_2) &= \frac{E[U_1U_2]-E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{Var(U_1)Var(U_2)}}\\ &= \frac{E[U]-E\left[U^2\right]-E^2[U]}{Var(U)}\\ &= \frac{E[U]-\left(Var(U)+E^2[U]\right)-E^2[U]}{Var(U)}\\ &= \frac{E[U]-Var(U)-2E^2[U]}{Var(U)}\\ &= -1,\end{aligned}$$

car $E[U] = \frac{1}{2} = 2E^2[U]$. **Propriété #5:** Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1,X_2) avec fonction de répartition conjointe

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)\right), \tag{9.5}$$

où C est une copule. On sait que

$$\rho_S(X_1,X_2) = \rho_S(U_1,U_2)$$

correspond au rho de Spearman associé à la copule C et (U_1,U_2) est tel que $F_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = C(u_1,u_2)$. Soit un couple de variables aléatoires (W_1,W_2) où $W_1 = \varphi_1(X_1)$ et $W_2 = \varphi_2(X_2)$. Par la propriété d'invariance de la copule C (voir 9.9), on a

$$F_{W_1,W_2}(x_1,x_2) = C\left(F_{W_1}(x_1),F_{W_2}(x_2)\right),$$

où C correspond à la copule définie en (9.5). La structure de dépendance définissant la loi conjointe de (W_1,W_2) est la même que celle définissant la loi conjointe de (X_1,X_2). On conclut que

$$\rho_S(W_1,W_2) = \rho_P(U_1,U_2) = \rho_S(U_1,U_2) = \rho_S(X_1,X_2).$$

Propriété #2: Soit un couple de variables aléatoires (U_1,U_2) où $F_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = C(u_1,u_2) \in \Gamma(F_{U_1},F_{U_2})$ et $U_1 \sim Unif(0,1)$ et $U_2 \sim Unif(0,1)$. On a déjà montré (voir exercice no.1 ACT-3000 Exercices supplémentaires),

$$\rho_P\left(U_1^-,U_2^-\right) \leq \rho_P(U_1,U_2) \leq \rho_P\left(U_1^+,U_2^+\right),$$

où $\left(U_1^-,U_2^-\right)$ est un couple de variables aléatoires antimonotones de loi uniforme standard et $\left(U_1^+,U_2^+\right)$ est un couple de variables aléatoires comonotones de loi uniforme standard. On vient de montrer (propriété #3) que

$$\begin{aligned}\rho_P\left(U_1^-,U_2^-\right) &= \rho_S\left(U_1^-,U_2^-\right) = -1\\ \rho_P\left(U_1^+,U_2^+\right) &= \rho_S\left(U_1^+,U_2^2\right) = 1.\end{aligned}$$

Alors, on peut déduire que

$$-1 \leq \rho_S(U_1, U_2) = \rho_P(U_1, U_2) \leq 1.$$

Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) tel que

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)),$$

où C est une copule et $C(u_1, u_2) = F_{U_1,U_2}(u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in [0, 1]$. Alors, on conclut

$$-1 \leq \rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(U_1, U_2) \leq 1.$$

Le rho de Spearman satisfait ainsi les 5 propriétés désirables d'une mesure d'association. ■

Exemple 9.51 *Soit la copule EFGM définie par*

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= u_1u_2 + \theta u_1u_2(1 - u_1)(1 - u_2) \\ &= u_1u_2 + \theta\left(u_1u_2 - u_1^2u_2 - u_1u_2^2 + u_1^2u_2^2\right), \; u_1, u_2 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Trouver le rho de Spearman associé à cette copule.

Solution.

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2) &= \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2) \\ &= 1 + \theta(1 - 2u_1 - 2u_2 + (2u_1)(2u_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[U_1U_2] &= \int_0^1\int_0^1 u_1u_2c(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\ &= \int_0^1\int_0^1 u_1u_2(1 + \theta(1 - 2u_1 - 2u_2 + (2u_1)(2u_2)))\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\ &= (1+\theta)\left(\int_0^1 u_1\mathrm{d}u_1\right)\left(\int_0^1 u_2\mathrm{d}u_2\right) \\ &\quad -\theta\left(\int_0^1 2u_1^2\mathrm{d}u_1\right)\left(\int_0^1 u_2\mathrm{d}u_2\right) \\ &\quad -\theta\left(\int_0^1 u_1\mathrm{d}u_1\right)\left(\int_0^1 2u_2^2\mathrm{d}u_2\right) \\ &\quad +\theta\left(\int_0^1 2u_1^2\mathrm{d}u_1\right)\left(\int_0^1 2u_2^2\mathrm{d}u_2\right) \\ &= (1+\theta)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \theta\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \theta\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \theta\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \rho_S(U_1, U_2) &= \frac{E[U_1U_2] - E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{Var(U_1)Var(U_2)}} \\ &= \frac{(1+\theta)\left(\frac{1}{4}\right) - \theta\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} - \theta\left(\frac{1}{3}\right)\frac{2}{3} + \theta\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} \\ &= \frac{\theta}{3}, \end{aligned}$$

Étant donné que $-1 \leq \theta \leq 1$, on a $\frac{-1}{3} \leq \rho_S(U_1, U_2) \leq \frac{1}{3}$. ■

Remarque 9.52 *Puisque $\rho_S(U_1, U_2) = 1$ quand U_1 et U_2 sont comonotones, on observe que la copule EFGM ne permet pas de modéliser des couples dont la structure de dépendance s'approche de la comonotonocité.*

Remarque 9.53 *On sait que $\rho_S(U_1, U_2) = 0$ si U_1 et U_2 sont des variables aléatoires indépendantes. On doit donc avoir ceci pour toute copule. Pour la copule EFGM, si $\theta = 0$, on a le cas particulier de la copule indépendance. On doit donc obtenir $\rho_S(U_1, U_2) = 0$ dans ce cas. En effet, $\rho_S(U_1, U_2) = \frac{\theta}{3} = \frac{0}{3} = 0$.*

Remarque 9.54 *Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) tel que $\rho_S(X_1, X_2) = 0$. On ne peut déduire que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes en se basant uniquement sur cette information.*

Une question inévitable: comment estimer le rho de Spearman à partir d'un échantillon? On dispose d'une suite de n vecteurs d'observations $\{(x_{1,j}, x_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$ de la suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués $\{(X_{1,j}, X_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$. On note $\underline{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j})$ et $\underline{X}_j = (X_{1,j}, X_{2,j})$. Le rang d'une observation $x_{i,j}$, noté $rank(x_{i,j})$, correspond à la position ("rang") dans les observations $\{x_{i,1}, ..., x_{i,n}\}$ pour $i = 1, 2$.

Pour la composante j de la suite, on calcule les valeurs des fonctions de répartition empiriques $\left\{\left(\widehat{F}_{1,n}(x_{1,j}), \widehat{F}_{2,n}(x_{2,j})\right), j\right.$ où

$$\widehat{F}_{1,n}(x_{1,j}) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n} 1_{\{x_{1,l} \leq x_{1,j}\}} = \frac{rank(x_{1,j})}{n+1}$$

et

$$\widehat{F}_{2,n}(x_{2,j}) = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n} 1_{\{x_{2,l} \leq x_{2,j}\}} = \frac{rank(x_{2,j})}{n+1}.$$

Pour $i = 1, 2$, les moyennes empiriques sont

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} F_{1,n}(x_{1,j}) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}(1 + ... + n) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\frac{(n \times (n+1))}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_2 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} F_{2,n}(x_{2,j}) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{n+1}\frac{(n \times (n+1))}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Étant donné que $\rho_S(X_1, X_2) = \rho_P(U_1, U_2) = \rho_S(U_1, U_2)$, l'estimateur empirique du rho de Spearman est l'estimateur empirique du coefficient de corrélation de Pearson suivant

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_S(X_1, X_2) &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\widehat{F}_{1,n}(x_{1,j}) - \widetilde{F}_1\right)\left(\widehat{F}_{2,n}(x_{2,j}) - \widetilde{F}_2\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\widehat{F}_{1,n}(x_{1,j}) - \widetilde{F}_1\right)^2 \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\widehat{F}_{2,n}(x_{2,j}) - \widetilde{F}_2\right)^2}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\widehat{F}_{1,n}(x_{1,j}) - \frac{1}{2}\right)\left(\widehat{F}_{2,n}(x_{2,j}) - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\widehat{F}_{1,n}(x_{1,j}) - \frac{1}{2}\right)^2 \sum_{j=1}^{n}\left(\widehat{F}_{2,n}(x_{2,j}) - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{rank(x_{1,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{rank(x_{2,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{rank(x_{1,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{rank(x_{2,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2}}.
\end{aligned}$$

Exemple 9.55 *Soit l'échantillon suivant d'observations*

j	$X_{1,j}$	$X_{2,j}$
1	*23*	*107*
2	*3*	*105*
3	*49*	*21*
4	*15*	*84*

Estimer le rho de Spearman de (X_1, X_2).

Solution. On a

j	$X_{1,j}$	$X_{2,j}$	$rank\left(X_{1,j}\right)$	$rank\left(X_{2,j}\right)$	$\widehat{F}^{(n+1)}\left(X_{1,j}\right) = \frac{rank(X_{1,j})}{n+1}$	$\widehat{F}^{(n+1)}\left(X_{2,j}\right) = \frac{rank(X_{2,j})}{n+1}$
1	23	107	3	4	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
2	3	105	1	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
3	49	21	4	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
4	15	84	2	2	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_S\left(X_1, X_2\right) &= \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{rank(x_{1,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{rank(x_{2,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{rank(x_{1,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{rank(x_{2,j})}{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2\right)}} \\
&= -\frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

■

9.8.2 Tau de Kendall

Le tau de Kendall est une mesure d'association qui quantifie la concordance et la discordance entre deux variables aléatoires continues.

Définition 9.56 *Soit deux paires indépendantes de variables aléatoires continues* (X_1, X_2) *et* (X_1', X_2') *dont les fonctions de répartition conjointes sont* $F_{X_1,X_2} = F_{X_1',X_2'}$. *Puisque les variables aléatoires sont continues, on sait, par le théorème de Sklar, que*

$$F_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right) = F_{X_1',X_2'}\left(x_1, x_2\right) = C\left(F_{X_1}\left(x_1\right), F_{X_2}\left(x_2\right)\right),$$

où $F_{X_i} = F_{X_i'} = F_i$, $i = 1, 2$. *Le tau de Kendall pour le couple* (X_1, X_2) *est défini par*

$$\tau\left(X_1, X_2\right) = \Pr\left(\left(X_1 - X_1'\right)\left(X_2 - X_2'\right) > 0\right) - \Pr\left(\left(X_1 - X_1'\right)\left(X_2 - X_2'\right) < 0\right).$$

Ainsi, le tau de Kendall est la différence entre la probabilité de concordance et de discordance. Examinons les cas particuliers de variables aléatoires comonotones et antimonotones.

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires comonotones. On a donc que les variables aléatoires du couple (X_1', X_2') sont également comonotones. Soit les variables aléatoires indépendantes $U \sim Unif\,(0,1)$ et $U' \sim Unif\,(0,1)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\left(X_1, X_2\right) &= \left(F_1^{-1}\left(U\right), F_2^{-1}\left(U\right)\right) \\
\left(X_1', X_2'\right) &= \left(F_1^{-1}\left(U'\right), F_2^{-1}\left(U'\right)\right).
\end{aligned}$$

On a ainsi deux cas possibles: $U < U'$ et $U > U'$. Pour le premier cas, on a

$$\begin{aligned} U &< U' \Leftrightarrow X_1 < X_1' \\ U &< U' \Leftrightarrow X_2 < X_2'. \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\underbrace{(X_1 - X_1')}_{<0}\underbrace{(X_2 - X_2')}_{<0} > 0$$

et $\{(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0\}$ est un événement impossible. Pour le deuxième cas, on a

$$\begin{aligned} U &> U' \Leftrightarrow X_1 > X_1' \\ U &> U' \Leftrightarrow X_2 > X_2'. \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\underbrace{(X_1 - X_1')}_{>0}\underbrace{(X_2 - X_2')}_{>0} > 0$$

et $\{(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0\}$ est un événement impossible. Alors,

$$\begin{aligned} \tau(X_1, X_2) &= \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Maintenant, soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires antimonotones. On a donc que les variables aléatoires du couple (X_1', X_2') sont également antimonotones. Soit les variables aléatoires indépendantes $U \sim Unif(0,1)$ et $U' \sim Unif(0,1)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} (X_1, X_2) &= \left(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)\right) \\ (X_1', X_2') &= \left(F_1^{-1}(U'), F_2^{-1}(1-U')\right). \end{aligned}$$

Il y a aussi deux cas possibles: $U < U'$ et $U > U'$. Pour le premier cas, on a

$$\begin{aligned} U &< U' \Leftrightarrow X_1 = F_1^{-1}(U) < X_1' = F_1^{-1}(U') \\ U &< U' \Leftrightarrow X_2 = F_2^{-1}(1-U) > X_2' = F_2^{-1}(1-U') \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\underbrace{(X_1 - X_1')}_{<0}\underbrace{(X_2 - X_2')}_{>0} < 0$$

et $\{(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0\}$ est un événement impossible. Pour le deuxième cas, on a

$$\begin{aligned} U &> U' \Leftrightarrow X_1 = F_1^{-1}(U) > X_1' = F_1^{-1}(U') \\ U &> U' \Leftrightarrow X_2 = F_2^{-1}(1-U) < X_2' = F_2^{-1}(1-U') \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\underbrace{(X_1 - X_1')}_{>0}\underbrace{(X_2 - X_2')}_{<0} < 0$$

et $\{(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0\}$ est un événement impossible. Alors,

$$\begin{aligned}
\tau(X_1, X_2) &= \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0) \\
&= 0 - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Examinons de plus près la définition du tau de Kendall. Étant donné que les événements $\{(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0\}$ et $\{(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0\}$ sont mutuellement exclusifs et que

$$\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') = 0) = 0$$

car les variables aléatoires X_1, X_2, X_1', X_2' sont continues, on a

$$\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) + \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0) = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tau(X_1, X_2) &= \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0) \\
&= \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - (1 - \Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0)) \\
&= 2\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - 1.
\end{aligned}$$

Étant donné que les variables aléatoires X_1 et X_2 (X_1' et X_2' par le fait même) sont continues, on a

$$\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) = \Pr((U_1 - U_1')(U_2 - U_2') > 0),$$

où $F_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$ et $F_{U_1',U_2'}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2)$. On décompose cette probabilité comme suit:

$$\Pr((U_1 - U_1')(U_2 - U_2') > 0) = \Pr(U_1 > U_1', U_2 > U_2') + \Pr(U_1 \leq U_1', U_2 \leq U_2'),$$

où $\Pr(U_1 > U_1', U_2 > U_2') = \Pr(U_1 < U_1', U_2 < U_2')$ car $(U_1, U_2) \sim (U_1', U_2')$. On a donc

$$\begin{aligned}
\tau(X_1, X_2) &= 2\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - 1 \\
&= 2(2\Pr(U_1 < U_1', U_2 < U_2')) - 1 \\
&= 4\Pr(U_1 < U_1', U_2 < U_2') - 1,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Pr(U_1 \leq U_1', U_2 \leq U_2') &= \int_0^1\int_0^1 \Pr(U_1 \leq U_1', U_2 \leq U_2' | U_1' = u_1, U_2' = u_2) f_{U_1',U_2'}(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\
&= \int_0^1\int_0^1 \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) f_{U_1,U_2}(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \quad (f_{U_1',U_2'} = f_{U_1,U_2}) \\
&= \int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)\, c(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2.
\end{aligned}$$

Exemple 9.57 *Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires indépendantes. Trouver le tau de Kendall pour le couple (X_1, X_2).*

Solution. On a $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$ et $c(u_1, u_2) = 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Pr(U_1 \leq U_1', U_2 \leq U_2') &= \int_0^1\int_0^1 u_1 u_2\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 \\
&= \left(\int_0^1 u_1\,\mathrm{d}u_1\right)\left(\int_0^1 u_2\,\mathrm{d}u_2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\tau(X_1, X_2) &= 4\Pr(U_1 < U_1', U_2 < U_2') - 1 \\ &= 4\left(\frac{1}{4}\right) - 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Exercice 9.58 *Développer l'expression du tau de Kendall associé à la copule EFGM.*

Solution. Réponse: $\tau(X_1, X_2) = \frac{2\theta}{9}$. ■

Une question inévitable: comment estimer le tau de Kendall à partir d'un échantillon? On dispose d'une suite de n vecteurs d'observations $\{(x_{1,j}, x_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$ de la suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués $\{(X_{1,j}, X_{2,j}), j = 1, 2, ..., n\}$. On note $\underline{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j})$ et $\underline{X}_j = (X_{1,j}, X_{2,j})$. On estime le tau de Kendall par

$$\widehat{\tau}^{(n)}(X_1, X_2) = \frac{\#\ \textit{couples concordants} - \#\ \textit{couples disconcordants}}{\#\ \textit{couples comparés}}.$$

Exemple 9.59 *Soit l'échantillon suivant d'observations*

j	$X_{1,j}$	$X_{2,j}$
1	*27*	*44*
2	*75*	*98*
3	*149*	*31*
4	*241*	*55*

Estimer le tau de Kendall de (X_1, X_2).

Solution. On doit comparer tous les couples. Ici, on fera ainsi 6 comparaisons.

Couple #1	*Couple #2*	*Concordance*	*Discordance*
$(27, 44)$	$(75, 98)$	1	0
$(27, 44)$	$(149, 31)$	0	1
$(27, 44)$	$(241, 55)$	1	0
$(75, 98)$	$(149, 31)$	0	1
$(75, 98)$	$(241, 55)$	0	1
$(149, 31)$	$(241, 55)$	1	0

$$\widehat{\tau}^{(4)} = \frac{3 - 3}{6} = 0.$$

Attention...cela ne signifie pas que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. ■

Copules elliptiques

9.8.3 Copule normale (Gaussienne)

Définition 9.60 *La copule normale (ou Gaussienne) est définie par*

$$C_\theta(u_1,u_2)=\Phi_{\Sigma_\theta}\left(\Phi^{-1}(u_1),\Phi^{-1}(u_2)\right),\ \theta\in[-1,1],$$

où Φ_{Σ_θ} correspond à la fonction de répartition conjointe d'un couple de variables aléatoires obéissant à une loi normale bivariée de moyenne 0 et de matrice variance covariance

$$\Sigma_\theta=\begin{pmatrix}1&\theta\\\theta&1\end{pmatrix}$$

et Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale unidimensionnelle standard. Ainsi, on a

$$C_\theta(u_1,u_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)}\mathrm{e}^{\frac{-\left(y_1^2-2\theta y_1y_2+y_2^2\right)}{2(1-\theta^2)}}\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1.$$

Remarque 9.61 *Soit un couple (X_1,X_2) de variables aléatoires obéissant à une loi normale bivariée avec fonction de densité conjointe*

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})},$$

où $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)$ et Σ est la matrice variance covariance. Dans le cas de la copule normale, on a

$$\Sigma=\Sigma_\theta=\begin{pmatrix}1&\theta\\\theta&1\end{pmatrix}.$$

Pour trouver la fonciton de répartition conjointe donnée dans la proposition ci-dessus, on doit trouver $\det(\Sigma_\theta)$ *et* Σ_θ^{-1}*. On obtient*

$$\det(\Sigma_\theta)=1-\theta^2$$

et

$$\Sigma_\theta^{-1}=\frac{1}{1-\theta^2}\begin{pmatrix}1&-\theta\\-\theta&1\end{pmatrix}.$$

On obtient donc l'exposant suivant de la fonction de densité conjointe

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) &= \begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\theta^2}&\frac{-\theta}{1-\theta^2}\\\frac{-\theta}{1-\theta^2}&\frac{1}{1-\theta^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{x_1}{1-\theta^2}+\frac{-\theta x_2}{1-\theta^2}&\frac{-\theta x_1}{1-\theta^2}+\frac{x_2}{1-\theta^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\ &= \frac{x_1^2}{1-\theta^2}-\frac{\theta x_1x_2}{1-\theta^2}-\frac{\theta x_1x_2}{1-\theta^2}+\frac{x_2^2}{1-\theta^2}\\ &= \frac{1}{1-\theta^2}\left(x_1^2-2\theta x_1x_2+x_2^2\right)\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour la fonction de densité conjointe

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\theta^2)}\left(x_1^2-2\theta x_1x_2+x_2^2\right)},$$

d'où la copule normale

$$\begin{aligned} C_\theta(u_1,u_2) &= C_\theta(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \\ &= F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \mathrm{e}^{\frac{-\left(y_1^2-2\theta y_1 y_2+y_2^2\right)}{2(1-\theta^2)}} \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_1. \end{aligned}$$

La copule normale décrit la structure de dépendance induite par la loi normale bivariée. On peut définir celle-ci à l'aide d'une copule étant donné la décomposition du théorème de Sklar, soit $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C_\theta(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$, appliquée à un couple (X_1,X_2) de variables aléatoires obéissant à une loi normale standard avec matrice variance-covariance Σ_θ. Contrairement aux copules définies précédemment, la copule normale n'a pas de forme analytique.

Proposition 9.62 *Les cas particuliers de la copule normale sont*

$$\begin{aligned} C_0(u_1,u_2) &= C^\perp(u_1,u_2) \\ C_1(u_1,u_2) &= C^+(u_1,u_2) \\ C_{-1}(u_1,u_2) &= C^-(u_1,u_2). \end{aligned}$$

Proposition 9.63 *La copule normale conditionnelle $C_{2|1}(u_2\,|u_1)$ est donnée par*

$$C_{2|1}(u_2\,|u_1) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \theta\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\theta^2}}\right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} C_{2|1}(u_2\,|u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C_\theta(u_1,u_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \mathrm{e}^{\frac{-\left(y_1^2-2\theta y_1 y_2+y_2^2\right)}{2(1-\theta^2)}} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2\right) \\ &= \end{aligned}$$

■

Proposition 9.64 *La fonction de densité associée à la copule normale est donnée par*

$$c_\theta(u_1,u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \mathrm{e}^{\frac{-\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 - 2\theta\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2(1-\theta^2)}} \mathrm{e}^{\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2}}.$$

Preuve. On peut obtenir l'expression désirée en dérivant $C_\theta(u_1,u_2)$ à l'aide de Leibnitz, soit

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \mathrm{e}^{\frac{-\left(y_1^2-2\theta y_1 y_2+y_2^2\right)}{2(1-\theta^2)}} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2\right) \\ =\; & \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \mathrm{e}^{\frac{-\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 - 2\theta\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2(1-\theta^2)}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_1}\Phi^{-1}(u_1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u_2}\Phi^{-1}(u_2) \\ =\; & \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir l'expression de la densité de la copule normale avec la relation

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2).$$

On a

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\theta^2)}\left(x_1^2-2\theta x_1x_2+x_2^2\right)}$$

et

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2}{2}} \\ f_{X_2}(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x_2^2}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} c_\theta\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) &= \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\theta^2)}\left(x_1^2-2\theta x_1x_2+x_2^2\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x_2^2}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\theta^2)}\left(x_1^2-2\theta x_1x_2+x_2^2\right)}\mathrm{e}^{\frac{x_1^2}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x_2^2}{2}}. \end{aligned}$$

■

9.8.4 Copule de Student

Définition 9.65 *La copule de Student est définie par*

$$\begin{aligned} C_{\upsilon,\theta}(u_1,u_2) &= t_{\upsilon,\theta}\left(t_\upsilon^{-1}(u_1) + t_\upsilon^{-1}(u_1)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\left(1+\frac{y_1^2+y_2^2-2\theta y_1y_2}{\upsilon\left(1-\theta^2\right)}\right)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2, \end{aligned}$$

*où****$t_{\Sigma,\upsilon}$?????*

$$t_\upsilon(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}{\sqrt{\upsilon\pi}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}\mathrm{d}y$$

correspond à la fonction de répartition univariée d'une variable aléatoire obéissant à une loi de Student de υ degrés de liberté et

$$t_{\upsilon,\theta}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\left(1+\frac{y_1^2-2\theta y_1y_2+y_2^2}{\upsilon\left(1-\theta^2\right)}\right)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1$$

correspond à la fonction de répartition conjointe d'un couple (X_1, X_2) obéissant à une loi de Student bivariée standard avec matrice variance-covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 9.66 *Les cas limites de la copule de Student sont*

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to 1} C_{\upsilon,\theta}(u_1,u_2) &= C^+(u_1,u_2) \\ \lim_{\theta\to -1} C_{\upsilon,\theta}(u_1,u_2) &= C^-(u_1,u_2) \end{aligned}$$

Proposition 9.67 *La copule conditionnelle de Student $C_{2|1}(u_2\,|u_1)$ est donnée par*

$$C_{2|1}(u_2\,|u_1) = t_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\frac{\upsilon+1}{\upsilon+\left(t_\upsilon^{-1}(u_1)\right)^2}}\frac{t_\upsilon^{-1}(u_2)-\theta t_\upsilon^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\theta^2}}\right).$$

9.9 Mesures d'association

Il existe différentes mesures pour quantifier la relation de dépendance ou l'association entre deux variables aléatoires. Cette section porte sur les mesures d'association définies pour des variables aléatoires continues seulement.Avant de donner les définitions de certaines de ces mesures, on énumère dans la proposition ci-dessous des propriétés souhaitables pour ces mesures de dépendance.

Proposition 9.68 *Des propriétés désirables pour une mesure de dépendance $\eta(X_1, X_2)$ sont les suivantes:*

1. *Symétrie: $\eta(X_1, X_2) = \eta(X_2, X_1)$.*
2. *Normalisation: $-1 \leq \eta(X_1, X_2) \leq 1$.*
3. *Comonotonocité: Soit le couple de variables aléatoires continues X_1 et X_2. Si X_1 et X_2 sont comonotones, alors*
$$\eta(X_1, X_2) = 1.$$
4. *Antimonotonocité: Soit le couple de variables aléatoires continues X_1 et X_2. Si X_1 et X_2 sont anti-monotones, alors*
$$\eta(X_1, X_2) = -1.$$
5. *Invariance: Soit les fonctions monotones φ_1 et φ_2. Alors,*
$$\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = \eta(X_1, X_2).$$
   (a) *Si φ_1 et φ_2 sont monotones croissantes, alors $\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = \eta(X_1, X_2)$.*
   (b) *Si φ_1 et φ_2 sont monotones décroissantes, alors $\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = \eta(X_1, X_2)$.*
   (c) *Si φ_1 est monotone croissant (décroissante) et φ_2 monotone décroissante (croissante), alors*
$$\eta(\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2)) = -\eta(X_1, X_2).$$

Remarque 9.69 *La propriété d'invariance est cruciale et permet de quantifier uniquement la force de la relation de dépendance associée à une structure de dépendance.*

Remarque 9.70 *Il est souhaitable que la mesure η ne soit pas affectée par les lois marginales de X_1 et X_2.*

Remarque 9.71 *Il est souhaitable que la mesure η associée à la comonotonocié soit égale à 1 et égale à -1 lorsqu'elle est associée à l'antimotonocité.*

Dans le cadre de la loi normale multivariée, on est habitué de travailler avec le coefficient de corrélation de Pearson. On peut se demander si ce dernier satisfait les propriétés désirables énumérées ci-dessus.

Définition 9.72 *Soit les variables aléatoires X_1 et X_2. Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson, désigné par $\rho_P(X_1, X_2)$, est défini par*

$$\begin{aligned}\rho_P(X_1, X_2) &= Cov\left(\frac{(X_1 - E[X_1])}{\sqrt{Var(X_1)}}, \frac{(X_2 - E[X_2])}{\sqrt{Var(X_2)}}\right) \\ &= \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}\end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation de Pearson satisfait la propriété #1, i.e. il est symétrique

$$\rho_P(X_1, X_2) = \rho_P(X_2, X_1).$$

Il satisfait également la propriété de normalisation, soit $-1 \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq 1$ tel qu'indiqué dans la proposition ci-dessous.

Proposition 9.73 *Soit un couple de variables aléatoires* (X_1, X_2) *tel que* $E[X_i] < \infty$ *et* $Var(X_i) < \infty$, $i = 1, 2$. *Alors,*

$$-1 \leq \rho_P(X_1, X_2) \leq 1.$$

Preuve. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires telles que $Var(X_i) = \sigma^2_{X_i}$, $i = 1, 2$. Alors,

$$\begin{aligned}
0 &\leq Var\left(\frac{X_1}{\sigma_{X_1}} + \frac{X_2}{\sigma_{X_2}}\right) = \frac{Var(X_1)}{\sigma^2_{X_1}} + \frac{Var(X_2)}{\sigma^2_{X_2}} + \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\
&\Rightarrow 2 + \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = 2\left(1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}\right) \geq 0 \\
&\Rightarrow 1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \geq 0 \\
&\Rightarrow \rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \geq -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq Var\left(\frac{X_1}{\sigma_{X_1}} - \frac{X_2}{\sigma_{X_2}}\right) = \frac{Var(X_1)}{\sigma^2_{X_1}} + \frac{Var(X_2)}{\sigma^2_{X_2}} - \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\
&\Rightarrow 2 - \frac{2Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} = 2\left(1 - \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}\right) \geq 0 \\
&\Rightarrow 1 - \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \geq 0 \\
&\Rightarrow \rho_P(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \leq 1
\end{aligned}$$

■

Il ne satisfait pas toutefois la propriété #3, i.e que l'on peut observer plusieurs exemples où $\rho_P(X_1, X_2) < 1$ pour un couple de variables aléatoires comonotones. Il en va de même pour la propriété #4. On retrouve plusieurs exemples où $\rho_P(X_1, X_2) > 1$ pour un couple de variables aléatoires antimonotones. Ceci est illustré dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 9.74 *Soit les variables aléatoires* $X_1 \sim Lognorm(\mu_1, \sigma_1)$ *et* $X_2 \sim Lognorm(\mu_2, \sigma_2)$. *(a) Supposons que les variables aléatoires sont comonotones telles que* $X_1 = \mathrm{e}^{\mu_1 + \sigma_1 Z}$ *et* $X_2 = \mathrm{e}^{\mu_2 + \sigma_2 Z}$, *où* $Z \sim N(0, 1)$. *Trouver* $\rho_P(X_1, X_2)$. *(b) (a) Supposons que les variables aléatoires sont antimonotones telles que* $X_1 = \mathrm{e}^{\mu_1 + \sigma_1 Z}$ *et* $X_2 = \mathrm{e}^{\mu_2 + \sigma_2(-Z)}$, *où* $Z \sim N(0, 1)$. *Trouver* $\rho_P(X_1, X_2)$.

La coefficient de corrélation de Pearson ne respecte pas non plus la propriété d'invariance. Il est uniquement invariant aux transformations linéaires tel qu'indiqué dans la prochaine proposition.

Proposition 9.75 *Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson* $\rho_P(X_1, X_2)$ *est invariant par rapport aux transformations linéaires.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\rho_P(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) &= \frac{Cov(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2)}{\sqrt{Var(a_1 + b_1 X_1)\, Var(a_2 + b_2 X_2)}} \\
&= \frac{Cov(b_1 X_1, b_2 X_2)}{\sqrt{b_1^2 Var(X_1)\, b_2^2 Var(X_2)}} \\
&= \frac{b_1 b_2 Cov(X_1, X_2)}{b_1 b_2 \sqrt{Var(X_1)\, Var(X_2)}} \\
&= \rho_P(X_1, X_2).
\end{aligned}$$

■

En conclusion, le coefficient de corrélation de Pearson n'est pas une mesure d'association adéquate.

On examine dans la prochaine section deux mesures d'association, soit le rho de Spearman et le tau de Kendall. Ces deux mesures sont dites des mesures de rang.

9.9.1 Mesure d'association de rang

Les deux principales mesures d'association de rang sont le tau de Kendall et le rho de Spearman. Celles-ci "mesurent" une forme de dépendance appelée concordance. On les dit des mesures de rang car celles-ci ne tiennent pas compte de l'effet des lois marginales.

Définition 9.76 *Concordance...Soient "écrire en termes de v.a"*

Définition 9.77 *let (xi, yi) and (x j , y j) denote two observations from a vector*

Définition 9.78 *(X,Y) of continuous random variables. We say that (xi, yi) and (x j , y j)*

Définition 9.79 *are concordant if xi < x j and yi < y j , or if xi > x j and yi > y j . Similarly,*

Définition 9.80 *we say that (xi, yi) and (x j , y j) are discordant if xi < x j and*

Définition 9.81 *yi > y j or if xi > x j and yi < y j . Note the alternate formulation: (xi, yi)*

Définition 9.82 *and (x j , y j) are concordant if (xi - x j)(yi - y j) > 0 and discordant if*

Définition 9.83 *(xi - x j)(yi - y j) < 0*

Informellement, une paire de variables aléatoires (X_1, X_2) sont concordantes si de grandes valeurs de X_1 sont associées à de grandes de valeurs de X_2 et si de petites valeurs de X_1 sont associées à de petites valeurs de X_2.

Définition 9.84 *Discordance...*

Définition 9.85 *Le tau de Kendall associé au couple (X_1, X_2), que l'on désigne par $\tau(X_1, X_2)$, est défini par*

$$\tau(X_1, X_2) = \Pr\left((X_1 - X_1')(X_2 - X_2')\right) > 0 - \Pr\left((X_1 - X_1')(X_2 - X_2')\right) < 0,$$

où (X_1', X_2') est indépendant de (X_1, X_2) et possède les mêmes marginales que (X_1, X_2) ***ou même fonction conjointe??????.***

Le tau de Kendall correspond ainsi à la probabilité de concordance moins la probabilité de discordance.

Proposition 9.86 *Soit le couple (X_1, X_2) et le tau de Kendall $\tau(X_1, X_2)$ qui lui est associé. Alors,*

1. $-1 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 1$
2. Si X_1 et X_2 sont comonotones, alors $\tau(X_1, X_2) = 1$.
3. Si X_1 et X_2 sont antimonotones, alors $\tau(X_1, X_2) = -1$.
4. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $\tau(X_1, X_2) = 0$.
5. La valeur de $\tau(X_1, X_2)$ ne dépend pas des marginales de X_1 et X_2.

Définition 9.87 *Le rho de Spearman associé au couple (X_1, X_2), que l'on désigne par $\rho_S(X_1, X_2)$, est défini par*

$$\rho_S(X_1, X_2) = 3\Pr\left(\left(X_1 - X_1^{\perp}\right)\left(X_2 - X_2^{\perp}\right) > 0\right) - 3\Pr\left(\left(X_1 - X_1^{\perp}\right)\left(X_2 - X_2^{\perp}\right) < 0\right),$$

où $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ est indépendant de (X_1, X_2) et possède les même marginales que (X_1, X_2). De plus, les composantes du couple $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ sont indépendantes.

9.10 Construction de copules

Les copules peuvent être construites à partir de différentes méthodes. Dans la présente section, on traite brièvement de la méthode d'inversion.

La méthode d'inversion est basée sur le théorème de Sklar. Selon cette méthode, on génère la copule à partir d'une distribution continue donnée.

Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) avec fonction de répartition conjointe F_{X_1,X_2} et fonction de répartition marginales F_{X_1} et F_{X_2}. L'unique copule C telle que $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ est obtenue à l'aide de la transformation inverse $x_1 = F_{X_1}^{-1}(u_1)$ et $x_2 = F_{X_2}^{-1}(u_2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) &= \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) \\ &= C(u_1, u_2), \end{aligned}$$

où (U_1, U_2) est un couple de variables aléatoires uniformes standard dont la fonction de répartition conjointe définie sur $[0,1] \times [0,1]$ est la copule C. On peut construire une copule de survie de façon similaire.

Soit un couple de variables aléatoires continues (X_1, X_2) avec fonction de survie conjointe $\overline{F}_{X_1,X_2}$ et fonction de survie marginales $\overline{F}_{X_1}$ et $\overline{F}_{X_2}$. L'unique copule de survie $\widehat{C}$ telle que $\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1), \overline{F}_{X_2}(x_2)\right)$ est obtenue à l'aide de la transformation inverse $x_1 = \overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1)$ et $x_2 = \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u_1, u_2) &= \overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)\right) \\ &= \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2), \end{aligned}$$

où (U_1, U_2) est un couple de variables aléatoires uniformes standard dont la fonction de répartition conjointe définie sur $[0,1] \times [0,1]$ est la copule de survie $\widehat{C}$.

Exemple 9.88 *À l'aide de la méthode inverse, construire une copule à partir de la fonction de répartition conjointe de la loi exponentielle bivariée EFGM donnée par*

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) + \theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}.$$

Solution. Les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 sont exponentielles de paramètres β_1 et β_2 respectivement. Ainsi, on a $x_i = -\frac{\ln(1-u_i)}{\beta_i}$, $i = 1, 2$. Alors,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1\left(-\frac{\ln(1-u_1)}{\beta_1}\right)}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2\left(-\frac{\ln(1-u_2)}{\beta_2}\right)}\right) \\ &\quad +\theta\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1\left(-\frac{\ln(1-u_1)}{\beta_1}\right)}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2\left(-\frac{\ln(1-u_2)}{\beta_2}\right)}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1\left(-\frac{\ln(1-u_1)}{\beta_1}\right)}\mathrm{e}^{-\beta_2\left(-\frac{\ln(1-u_2)}{\beta_2}\right)} \\ &= (1 - (1 - u_1))(1 - (1 - u_2)) \\ &\quad +\theta(1 - (1 - u_1))(1 - (1 - u_2))(1 - u_1)(1 - u_2) \\ &= u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2) \\ &= C(u_1, u_2), \end{aligned}$$

où C est dite la copule EFGM.

Exemple 9.89 *À l'aide de la méthode inverse, construire une copule à partir de la fonction de répartition conjointe de la loi normale standard bivariée désignée par Φ_2.*

■

Solution. Les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 sont normales standard avec fonction de répartition désignée par Φ. Ainsi, on a $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$, $i = 1, 2$. Alors,

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) &= \Phi_2\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right) \\ &= C(u_1, u_2), \end{aligned}$$

où C est dite la copule normale. ■

Exemple 9.90 *À l'aide de la méthode inverse, construire une copule à partir de la fonction de répartition conjointe de la loi de Student bivariée désignée par ...*

Solution. Les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 sont ... ∎

Exemple 9.91 *À l'aide de la méthode inverse, construire une copule à partir de la fonction de survie conjointe de la loi de Pareto bivariée donnée par*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\left(1+\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha},x_1,x_2>0.$$

Solution. Les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 sont de Pareto et donc avec fonctions de survie marginales données par

$$\overline{F}_{X_i}(x_i)=\left(1+\frac{x_i}{\lambda_i}\right)^{-\alpha},\ i=1,2.$$

Ainsi, on a $x_i=\lambda_i\left(u_i^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(x_1),\overline{F}_{X_2}^{-1}(x_2)\right) &= \left(1+\frac{\lambda_1\left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)}{\lambda_1}+\frac{\lambda_2\left(u_2^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)}{\lambda_2}\right)^{-\alpha}\\ &= \left(1+\left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)+\left(u_2^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)\right)^{-\alpha}\\ &= \left(u_1^{-\frac{1}{\alpha}}+u_2^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{-\alpha}\\ &= \widehat{C}(u_1,u_2),\end{aligned}$$

où $\widehat{C}$ est dite la copule de Clayton de paramètre $\alpha^*=\frac{1}{\alpha}$. ∎

Exemple 9.92 *À l'aide de la méthode inverse, construire une copule à partir de la fonction de survie conjointe de la loi de exponentielle bivariée de Marshall-Olkin donnée par*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0)x_1}\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0)x_2}\mathrm{e}^{\lambda_0\min(x_1;x_2)}.$$

Solution. Les lois marginales des variables aléatoires X_1 et X_2 sont exponentielles de paramètre $(\lambda_1+\lambda_0)$ et $(\lambda_2+\lambda_0)$ respectivement et donc avec fonctions de survie marginales données par

$$\overline{F}_{X_i}(x_i)=\mathrm{e}^{-(\lambda_i+\lambda_0)x_1},\ i=1,2.$$

Ainsi, on a $x_i=-\frac{\ln(u_i)}{\lambda_i+\lambda_0}$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(x_1),\overline{F}_{X_2}^{-1}(x_2)\right) &= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0)\left(-\frac{\ln(u_1)}{\lambda_1+\lambda_0}\right)}\mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0)\left(-\frac{\ln(u_2)}{\lambda_2+\lambda_0}\right)}\min\left(\mathrm{e}^{\lambda_0\left(-\frac{\ln(u_1)}{\lambda_1+\lambda_0}\right)};\mathrm{e}^{\lambda_0\left(-\frac{\ln(u_2)}{\lambda_2+\lambda_0}\right)}\right)\\ &= \mathrm{u}_1\mathrm{u}_2\min\left(u_1^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}};u_1^{-\frac{\lambda_0}{\lambda_2+\lambda_0}}\right)\\ &= \mathrm{u}_1\mathrm{u}_2\min\left(u_1^{-\alpha};u_2^{-\beta}\right),\quad \textit{où } \alpha=\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0},\beta=\frac{\lambda_0}{\lambda_2+\lambda_0}\\ &= \min\left(u_1^{1-\alpha}u_2;u_1u_2^{1-\beta}\right)\\ &= \begin{cases}u_1^{1-\alpha}u_2;\ u_1^{\alpha}\geq u_2^{\beta}\\ u_1u_2^{-\beta};\ u_1^{\alpha}\leq u_2^{\beta}\end{cases}\\ &= \widehat{C}(u_1,u_2),\end{aligned}$$

où $\widehat{C}$ est dite la copule de Marshall-Olkin de paramètres α et β. ∎

9.11 Copules Archimédiennes

9.11.1 Introduction

Les copules archimédiennes constituent une famille importante de copules incluant notamment les copules de Clayton, de Frank, de Gumbel. Ces copules ne sont pas construites à partir du théorème de Sklar à l'aide de distributions multivariées connues. Elles sont plutôt construites à partir d'un générateur pour lequel on doit vérifier les propriétés pour obtenir une copule bien définie. Cette approche permet d'obtenir des copules ayant une forme explicite, ce qui est l'avantage premier des copules appartenant à cette classe. Un autre avantage des copules archimédiennes est leur grande flexibilité permettant de modéliser plusieurs types de dépendance.

Définition 9.93 *Le générateur d'une copule archimédienne est une fonction continue, décroissante* ψ : $[0,\infty] \to [0,1]$ *qui satisfait* $\psi(0) = 1$, $\psi(\infty) = \underset{t\to\infty}{lim}\,\psi(t) = 0$ *et qui est strictement décroissante sur* $[0, \inf\{t : \psi(t) = 0\}]$. *L'ensemble de telles fonctions* ψ *est désigné par* Ψ.

Définition 9.94 *Une copule bivariée* C *est dite archimédienne si celle-ci peut s'écrire sous la forme*

$$C(u_1, u_2; \psi) = \psi\left(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2)\right),$$

pour une fonction ψ *avec inverse* $\psi^{-1} : [0,1] \to [0,\infty]$, *où* $\psi^{-1}(0) = \inf\{t : \psi(t) = 0\}$.

Remarque 9.95 *Le copule normale et la copule de student ne font pas partie de la famille des copules archimédiennes mais plutôt dela famille des copules elliptiques. Cette famille ne fait pas l'objet de ce cours.*

9.11.2 Générateur et transformée de Laplace

Soit un vecteur de variables aléatoires $(X_1, ..., X_n)$ et une variable aléatoire Θ, $\Theta \in A_\Theta \in \mathbb{R}^+$ avec fonction de répartition F_Θ et $F_\Theta(0) = 0$. De plus, supposons $(X_i\,|\Theta = \theta)$, $i = 1, ..., n$ conditionnellement indépendantes. Soit $\overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}$ la fonction de survie de $(X_i\,|\Theta = \theta)$, $i = 1, ..., n$ définie par

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i\,|\theta) &= \Pr(X_i > x_i\,|\Theta = \theta) \\ &= \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta, \end{aligned}$$

où Y_i, $i = 1, ..., n$ sont des variables aléatoires indépendantes. Alors, la fonction de survie conditionnelle multivariée est donnée par

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,...,X_n|\Theta=\theta}(x_1, ..., x_n\,|\theta) &= \Pr(X_1 > x_1, ..., X_n > x_n\,|\Theta = \theta) \\ &= \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1) ... \overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^\theta. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_i}(x_i) &= \int\limits_{\theta\in A_\Theta} \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i\,|\theta)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int\limits_{\theta\in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int\limits_{\theta\in A_\Theta} \mathrm{e}^{\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \widetilde{f}_\Theta\left(-\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right), \end{aligned}$$

où $\widetilde{f}_\Theta$ correspond à la transformée de Laplace????. Similairement on obtient la fonction de survie multivariée

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) &= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \overline{F}_{X_1,...,X_n|\Theta=\theta}(x_1,...,x_n\,|\theta)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{\ln\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^\theta} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{\theta\ln\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \widetilde{f}_\Theta\left(-\ln\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)\right),
\end{aligned}$$

Supposons que les variables aléatoires $Y_i, i = 1,...,n$ obéissent à une loi exponentielle de moyenne 1. Alors, la fonction de survie multivariée est donnée par

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) &= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)...\overline{F}_{Y_n}(x_n)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \left(\mathrm{e}^{-x_1}...\mathrm{e}^{-x_n}\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-\theta x_i} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{-\theta(x_1+...+x_n)} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \widetilde{f}_\Theta(x_1+...+x_n) \qquad (9.6)
\end{aligned}$$

et les fonctions de survie marginales sont

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_i}(x_i) &= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i\,|\theta)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \int\limits_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{-\theta x_i} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\
&= \widetilde{f}_\Theta(x_i).
\end{aligned}$$

Si l'on insère $x_i = \widetilde{f}_\Theta^{-1}\left(\overline{F}_{X_i}(x_i)\right)$ dans (9.6), on obtient

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \widetilde{f}_\Theta\left(\widetilde{f}_\Theta^{-1}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1)\right) + ... + \widetilde{f}_\Theta^{-1}\left(\overline{F}_{X_n}(x_n)\right)\right).$$

9.12 Simulation

9.12.1 Méthode inverse

Soit un couple de variables aléatoires (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe F_{X_1,X_2} est définie par la copule C et les fonctions de répartition marginales F_{X_1} et F_{X_2}. On cherche à produire m réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right), ..., \left(X_1^{(m)}, X_2^{(m)}\right)$ du couple (X_1, X_2). Pour ce faire, il suffit de produire m réalisations $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right), ..., \left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}\right)$ du couple (U_1, U_2) dont la fonction de répartition conjointe est la copule C et d'appliquer la méthode inverse, soit $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2.$ et $j = 1, ..., m$.

Exemple 9.96 *Simulation de réalisations de* (X_1, X_2) *où* $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\theta(F_{X_1}, F_{X_2})$ *et* C_θ *est la copule borne supérieure de Fréchet:*

1. Simuler $V^{(j)}$ de la v.a $V \sim U(0,1)$.
2. Poser $U_i^{(j)} = V^{(j)}$, $i = 1, 2$.
3. Appliquer la méthode inverse $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2$.

Illustration...

Exemple 9.97 *Simulation de réalisations de* (X_1, X_2) *où* $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\theta(F_{X_1}, F_{X_2})$ *et* C_θ *est la copule borne inférieure de Fréchet:*

1. Simuler $V^{(j)}$ de la v.a $V \sim U(0,1)$.
2. Poser $U_1^{(j)} = V^{(j)}$ et $U_2^{(j)} = \left(1 - V^{(j)}\right)$.
3. Appliquer la méthode inverse $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2$.

Illustration...

9.12.2 Méthode conditionnelle

Une procédure pour produire une réalisation $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ à l'aide de la copule conditionnelle est basée sur le théorème suivant.

Théorème 9.98 *Soit les variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *avec fonction de répartition marginales* F_{X_1} *et* F_{X_2} *et fonction de répartition conjointe* F_{X_1,X_2}. *Soit les variables aléatoires uniformes indépendantes* $U_i \sim U(0,1)$, $i = 1, 2$. *Soit la fonction de répartition conditionnelle de* $(X_2 | X_1 = x_1)$ *désignée par* $F_{X_2|X_1}$. *Alors, le couple* $\left(F_{X_1}^{-1}(U_1), F_{X_2|X_1}(U_2 | X_1)\right) \sim (X_1, X_2)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U_1) \leq x_1, F_{X_2|X_1}(U_2 | X_1) \leq x_2\right) &= \Pr\left(X \leq x_1, U_2 \leq F_{X_2|X_1}^{-1}(x_2 | X_1)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \Pr\left(U_2 \leq F_{X_2|X_1}(x_2 | X_1 = y)\right) \mathrm{d}F_{X_1}(y) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} F_{X_2|X_1}(x_2 | y) \, \mathrm{d}F_{X_1}(y) \\
&= \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\
&= F_{X_1,X_2}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Étant donné le théorème ci-dessous, l'algorithme suivant peut être utilisé pour simuler un couple de variables aléatoires dépendantes telles que $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$. ∎

1. Simuler les réalisations $V_1^{(j)}$ et $V_2^{(j)}$ des variables aléatoires indépendantes V_1 et V_2, où $V_i \sim U(0,1)$ pour $i = 1, 2$.
2. Fixer $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. Calculer $U_2^{(j)} = C_{2|1}^{-1}\left(V_2^{(j)} \middle| U_1^{(j)}\right)$ où $C_{2|1}^{-1}(v | u_1)$ est la fonction inverse de $C_{2|1}(u_2 | u_1)$ obtenue en trouvant la solution de $C_{2|1}(u_2 | u_1) = v$.

4. $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2$
5. Répéter pour $j = 1, 2, ..., m$.

À noter que cette méthode de simulation ne fonctionne pas pour toutes les copules. Il peut s'avérer très difficile d'inverser la copule conditionnelle.

Exemple 9.99 *Soit le couple* (X_1, X_2) *tel que* $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\theta(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ *où*

$$C_\theta(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2), \ \theta \in [-1, 1]$$

est la copule FGM. Alors,

$$\begin{aligned} C_{2|1}(u_2 | u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C_\theta(u_1, u_2) \\ &= u_2 + \theta u_2 (1 - u_2)(1 - 2u_1). \end{aligned}$$

On peut réécrire la copule conditionnelle comme suit

$$C_{2|1}(u_2 | u_1) = u_2 A + [-(A - 1)] u_2^2$$

où $A = 1 + \theta(1 - 2u_1)$. *Ainsi,*

$$C_{2|1}^{-1}(v | u_1) = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4(A-1)v}}{2(A-1)}.$$

En multipliant et divisant par $A + \sqrt{A^2 - 4(A-1)v}$, *on obtient*

$$C_{2|1}^{-1}(v | u_1) = \frac{2v}{A + \sqrt{A^2 - 4(A-1)v}}.$$

Ainsi, on peut utiliser l'algorithme ci-dessous pour simuler des réalisations de couple de variables aléatoires liées par une copule FGM.

Algorithme 9.100 *Simulation de réalisations de* (X_1, X_2) *avec copule FGM*

1. Simuler les réalisations $V_1^{(j)}$ et $V_2^{(j)}$ de variable aléatoire indépendantes V_1 et V_2, où $V_i \sim U(0, 1)$ pour $i = 1, 2$.
2. Poser $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. Poser $U_2^{(j)} = \frac{2V_2^{(j)}}{A + \sqrt{A^2 - 4(A-1)V_2^{(j)}}}$, où $A = 1 + \theta\left(1 - 2V_1^{(j)}\right)$.
4. $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2$
5. Répéter pour $j = 1, 2, ..., m$.

Exemple 9.101 *Soit le couple* (X_1, X_2) *tel que* $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\theta(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ *où*

$$C_\theta(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}, \ \theta > 0$$

est la copule de Clayton. Alors,

$$\begin{aligned} C_{2|1}(u_2 | u_1) &= \frac{\partial}{\partial u_1} C_\theta(u_1, u_2) \\ &= u_1^{-(\theta+1)} \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$C_{2|1}^{-1}(v | u_1) = \left(\left(\frac{1}{u_1^{\theta+1} v}\right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} - u_1^{-\theta} + 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}.$$

Ainsi, on peut utiliser l'algorithme ci-dessous pour simuler des réalisations de couple de variables aléatoires liées par une copule de Clayton.

Algorithme 9.102 *Simulation de réalisations de* (U_1, U_2) *avec copule de Clayton*

1. Simuler les réalisations $V_1^{(j)}$ et $V_2^{(j)}$ de variable aléatoire indépendantes V_1 et V_2, où $V_i \sim U(0,1)$ pour $i = 1, 2$.
2. Poser $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. Poser $U_2^{(j)} = \left(\left(\frac{1}{\left(U_1^{(j)}\right)^{\theta+1} V_2^{(j)}} \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} - \left(U_1^{(j)}\right)^{-\theta} + 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}}$.
4. $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$, $i = 1, 2$
5. Répéter pour $j = 1, 2, ..., m$.

9.12.3 Méthode copules archimédiennes

On ...

Algorithme 9.103 *Simulation de réalisations de* $(U_1, ..., U_n)$ *avec copule Archimédienne*

1. Simuler une réalisation de la variable aléatoire $\Theta^{(j)}$ telle que le générateur ψ est la transformée de Laplace de Θ.
2. Simuler n réalisations indépendantes $V_1^{(j)}, ..., V_n^{(j)}$, où $V_i \sim U(0,1)$.
3. Poser $Y_i^{(j)} = -\frac{\ln V_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}$.
4. Poser $U_i^{(j)} = \psi\left(Y_i^{(j)}\right)$.

9.13 Agrégation de risques dépendants

Soit la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ où $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$. On cherche à évaluer F_S (et f_S) afin de connaître le comportement aléatoire de S, où

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x f_{X_1,X_2}(y, x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x c(F_{X_1}(y), F_{X_2}(x-y))\, f_{X_1}(y)\, f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Exemple 9.104 *Soit le couple* (X_1, X_2) *tel que* $X_1 \sim Beta(2,1)$, $X_2 \sim U(0,1)$ *et* $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C_\theta(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ *où* C *est la copule FGM. Trouver* $f_S(x)$.

Solution.

$$f_S(x) = \int_0^x c(F_{X_1}(y), F_{X_2}(x-y))\, f_{X_1}(y)\, f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y$$

où $f_{X_1}(x) = 2x$, $f_{X_2}(x) = 1$ et $c_\theta(u_1, u_2) = 1 + \theta(1 - 2u_1)(1 - 2u_2)$. Alors,

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x c(F_{X_1}(y), F_{X_2}(x-y)) f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \left(1 + \theta\left(1 - 2y^2\right)(1 - 2(x-y))\right)(2y)(1)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x 2y + \theta\left(2y - 4xy + 4y^2 - 4y^3 + 8xy^3 - 8y^4\right)\mathrm{d}y \\ &= x^2 + \theta\left(x^2 - 2x^3 + \frac{4x^3}{3} - x^4 + 2x^5 - \frac{8x^5}{5}\right). \end{aligned}$$

■

Il existe peu de cas où l'on peut identifier la distribution de S alors on a recours à des méthodes numériques ou des méthodes basées sur la simulation.

9.13.1 Méthode basée sur la discrétisation

Soit le couple (X_1, X_2) où $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$ et soit $S = X_1 + X_2$. On approxime (X_1, X_2) par $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$ où $\widetilde{X} \in \{0, h, 2h, ...\}$ sans changer la structure de dépendance entre les variables aléatoires X_1 et X_2. On utilise les méthodes de discrétisation "upper" et "lower" vues au Chapitre ?? pour approximer (X_1, X_2) par $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$.

Soit

$$F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) = C_\theta\left(F_{\widetilde{X}_1}(k_1 h), F_{\widetilde{X}_2}(k_2 h)\right),\ k_1, k_2 \in \mathbb{N},$$

où $F_{\widetilde{X}_i}$, $i = 1, 2$ sont obtenues avec la méthode "upper" ou "lower". Ainsi,

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, k_2 h) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, (k_2 - 1)h) + F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, (k_2 - 1)h).$$

En terminant, on obtient

$$f_{\widetilde{S}}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(jh, (k-j)h).$$

Très souvent, on est intéressé à connaître le comportement d'une fonction du couple (X_1, X_2). Soit $T = g(X_1, X_2)$. Alors, on approxime T par $\widetilde{T}$ où $\widetilde{T} = g\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$ et $E[T]$ par $E\left[\widetilde{T}\right]$ où

$$E\left[\widetilde{T}\right] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} g\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right) f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h).$$

9.13.2 Méthode des rectangles

Junk!

Loi de Poisson bivariée de Tacher: On peut adapter cette méthode de construction afin de construire des lois multivariées Poisson, comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 9.105 *On considère un portefeuille avec 10 lignes d'affaires. Le nombre de sinistres pour la ligne d'affaires i est défini par la variable aléatoire M_i ($i = 1, 2, ..., 10$). Le vecteur de variables aléatoires $\mathbf{M} = (M_1, M_2, ..., M_{10})$ obéit à une loi de Poisson multivariée dont les paramètres des marginales Poisson sont λ_1, ..., λ_{10} et dont la distribution conjointe est construite comme suit. Soit les variables aléatoires indépendantes*

$$\begin{aligned} K_1 &\sim P(\lambda_1 - \gamma_0), ..., K_{10} \sim P(\lambda_{10} - \gamma_0), \\ K_{11} &\sim P(\lambda_{11} - ??),\ K_{12} \sim P(\lambda_{12} - ??),\ K_{13} \sim P(\alpha_{13} - ??) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_{13} \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_{10}), \\ 0 &\leq \alpha_{11} \leq \min(\lambda_1 - \alpha_{13}; ...; \lambda_5 - \alpha_{13}), \\ 0 &\leq \alpha_{12} \leq \min(\lambda_6 - \alpha_{13}; ...; \lambda_{10} - \alpha_{13}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_1 - \alpha_{11} - \alpha_{13},\ ...,\ \alpha_5 = \lambda_5 - \alpha_{11} - \alpha_{13}, \\ \alpha_6 &= \lambda_6 - \alpha_{12} - \alpha_{13},\ ...,\ \alpha_{10} = \lambda_{10} - \alpha_{12} - \alpha_{13}. \end{aligned}$$

On définit les variables aléatoires M_1, ..., M_{10} par

$$\begin{aligned} M_i &= K_i + K_{11} + K_{13},\ i = 1, 2, ..., 5 \\ M_i &= K_i + K_{12} + K_{13},\ i = 6, 7, ..., 10. \end{aligned}$$

L'expression de la transformée de Laplace-Stieltjes de $\underline{M} = (M_1, ..., M_{10})$ est donnée par

$$\begin{aligned} L_{\underline{M}}(t_1, ..., t_{10}) &= E\left[\mathrm{e}^{-(t_1 M_1 + ... + t_{10} M_{10})}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{-(t_1(K_1+K_{11}+K_{13}) + ... + t_5(K_5+K_{11}+K_{13}) + t_6(K_6+K_{12}+K_{13}) + ... + t_{10}(K_{10}+K_{12}+K_{13}))}\right] \\ &= \mathrm{e}^{(\alpha_1+\alpha_{11}+\alpha_{13})(\mathrm{e}^{-t_1}-1)} ... \mathrm{e}^{(\alpha_5+\alpha_{11}+\alpha_{13})(\mathrm{e}^{-t_5}-1)} \mathrm{e}^{(\alpha_6+\alpha_{12}+\alpha_{13})(\mathrm{e}^{-t_6}-1)} ... \mathrm{e}^{(\alpha_{10}+\alpha_{12}+\alpha_{13})(\mathrm{e}^{-t_{10}}-1)} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_1(\mathrm{e}^{-t_1}-1)} ... \mathrm{e}^{\alpha_{10}(\mathrm{e}^{-t_{10}}-1)} \mathrm{e}^{\alpha_{11}(\mathrm{e}^{-t_1} ... \mathrm{e}^{-t_5}-1)} \mathrm{e}^{\alpha_{12}(\mathrm{e}^{-t_6} ... \mathrm{e}^{-t_{10}}-1)} \mathrm{e}^{\alpha_{13}(\mathrm{e}^{-t_1} ... \mathrm{e}^{-t_{10}}-1)} \\ &= \end{aligned}$$

nous permettant ainsi de déduire.. MAIS ON LE DONNE AU DÉBUT??

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11} + \alpha_{13},\ ...,\ \lambda_5 = \alpha_5 + \alpha_{11} + \alpha_{13}, \\ \lambda_6 &= \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_{13},\ ...,\ \lambda_{10} = \alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{13}. \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire $N = \sum_{i=1}^{10} M_i$. On a $N \sim PComp(\lambda, F_B)$ où

$$\lambda = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i - 4\alpha_{11} - 4\alpha_{12} - 9\alpha_{13}$$

et

$$\begin{aligned} f_B(1) &= \frac{\sum_{i=1}^{10} \lambda_i - 5\alpha_{11} - 5\alpha_{12} - 10\alpha_{13}}{\lambda}, \\ f_B(5) &= \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}}{\lambda}, \\ f_B(10) &= \frac{\alpha_{13}}{\lambda} \end{aligned}$$

t $f_B(k) = 0$, pour $k \in \mathbb{N} \backslash \{1, 5, 10\}$.

Pour des valeurs de $\lambda_1 = ... = \lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = ... = \lambda_{10} = 3$, $\alpha_{11} = 0.8$, $\alpha_{12} = 1$ et $\alpha_{13} = 0.4$, on obtient :

Exemple 9.106 • *On a* $E[N] = 25$ *et* $\mathrm{Var}(N) = 51$ *dont l'espérance et la variance sont*

$$E[N] = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i$$

et

$$\mathrm{Var}(N) = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i + 2 \times 5 \times \alpha_{11} + 2 \times 5 \times \alpha_{12} + 2 \times 10 \times \alpha_{13}.$$

$\mathbb{N}$, *on indique les valeurs exactes de* $f_N(k)$ *pour* $k = 10$, *20 et 30 qui ont été produites avec la FFT :* $f_N(10) = 0.01415874$, $f_N(20) = 0.04136522$ *et* $f_N(30) = 0.03032717$

Mesure CTE (Conditional Tail Expectation)

Définition 9.107 *Soit une variable aléatoire* X *avec fonction de répartition* F_X. *On définit la mesure de risque Conditional Tail Expectation de niveau* κ, *notée* CTE_κ, *par*

$$\begin{aligned} CTE_\kappa(X) &= E[X | X > VaR_\kappa(X)] \\ &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right]}{\Pr(X > VaR_\kappa(X))}, \end{aligned}$$

où $\kappa \in (0,1)$ *est un niveau de confiance fixé.*

Remarque 9.108 *Si* X *est une v.a continue, alors* $F_X(VaR_\kappa(X)) = \kappa$ *et donc* $TVaR_\kappa(X) = CTE_\kappa(X)$.

Remarque 9.109 *La mesure de risque* $CTE_\kappa(X)$ *est cohérente seulement si la variable aléatoire* X *est continue.*

Remarque 9.110 *Pour* $\kappa = 0$, *on a* $CTE_0(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_0(X)\}}\right]}{\Pr(X > VaR_0(X))} = E[X]$.

Exemple 9.111 *Soit l'Exemple 1.43 où* X *est une variable aléatoire discrète qui prend valeur dans* $\{0, 100, 200, 500, 1000\}$ *et définie comme suit*

x	$\Pr(X = x)$	$\Pr(X \leq x)$
0	*0.3*	*0.3*
100	*0.4*	*0.7*
200	*0.15*	*0.85*
500	*0.10*	*0.95*
1000	*0.05*	*1*

Trouver $CTE_{0.9}(X)$.

Solution. On sait que $VaR_{0.9}(X) = 500$. Alors,

$$\begin{aligned} CTE_{0.9}(X) &= E[X | X > 500] \\ &= \sum_{x > 500} x \Pr(X = x | X > 500) \\ &= \sum_{x > 500} x \frac{\Pr(X = x)}{\Pr(X > 500)} \\ &= \frac{(1000)(0.05)}{0.05} \\ &= 1000. \end{aligned}$$

Ce résultat est évidemment équivalent à $E[X | X > 500] = \frac{E\left[X \times 1_{\{X > 500\}}\right]}{\Pr(X > 500)}$. À noter que $TVaR_{0.9}(X) = 750$.

■

Exemple 9.112 *Soit X une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle de paramètre β avec $f_X(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$. Trouver $CTE_\kappa(X)$.*

Solution. On a

$$\begin{aligned} CTE_\kappa(X) &= E\left[X \,|X > VaR_\kappa(X)\right] \\ &= \int_0^\infty y f_{X|X>VaR_\kappa(X)}(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{VaR_\kappa(X)}^\infty y \frac{f_X(y)}{\Pr(X > VaR_\kappa(X))}\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Pr(X &> VaR_\kappa(X)) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)} \\ &= \mathrm{e}^{-\beta \times \frac{-1}{\beta}\ln(1-\kappa)} \\ &= 1-\kappa. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} CTE_\kappa(X) &= E\left[X \,|X > VaR_\kappa(X)\right] \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{VaR_\kappa(X)}^\infty y\beta \mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(-y\mathrm{e}^{-\beta y}\,|_{VaR_\kappa(X)}^{\infty} + \int_{VaR_\kappa(X)}^\infty \mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(VaR_\kappa(X)\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)} - \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta y}\,|_{VaR_\kappa(X)}^{\infty}\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)}\left(VaR_\kappa(X) + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(1 - F_X\left(VaR_\kappa(X)\right)\right)\left(VaR_\kappa(X) + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\left(1-\kappa\right)TVaR_\kappa(X) \\ &= TVaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

■

Remarque 9.113 *On a*

$$\begin{aligned} CTE_\kappa(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{\Pr(X > VaR_\kappa(X))} \\ &\geq TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\left\{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X\left(VaR_\kappa(X)\right) - \kappa\right)\right\} \\ &\geq VaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

Modèles avec mélange commun

Dans les modèles de risque avec mélange commun, la dépendance entre les risques est introduite via une ou plusieurs variables aléatoires communes représentant des conditions climatiques, des conditions économiques ou toute autre facteur externe commun. Ce mécanisme externe sera représenté ici par une variable aléatoire Θ positive, continue ou discrète dont la fonction de répartition est notée par G_Θ. On suppose que la fonction génératrice de Θ, que l'on désigne par M_Θ, existe.

Soit le vecteur $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$. On définit les variables aléatoires d'occurence pour une valeur donnée de Θ par

$$\begin{aligned} \Pr\left(I_i = 1 \left| \Theta = \theta \right.\right) &= 1 - r_i^\theta \\ \Pr\left(I_i = 0 \left| \Theta = \theta \right.\right) &= r_i^\theta, \end{aligned}$$

où $(I_i \left| \Theta = \theta \right.)$ pour $i = 1, ..., n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli et $r_i \in (0, 1)$ est le paramètre de base de la distribution conditionnelle de $(I_i \left| \Theta = \theta \right.)$. On peut également écrire la fonction de masse de probabilité conditionnelle sous la forme générale

$$\Pr\left(I_i = i_i \left| \Theta = \theta \right.\right) = r_i^{\theta(1-i_i)} \left(1 - r_i^\theta\right)^{i_i}.$$

On suppose également que les variables aléatoires $(I_i \left| \Theta = \theta \right.), ..., (I_n \left| \Theta = \theta \right.)$ sont conditionnellement indépendantes. On remarque selon cette structure que pour une valeur fixée du paramètre de base r_i, la probabilité de non-occurence diminue avec θ. Évidemment, on observe également que toutes les variables aléatoires I_i, $i = 1, ..., n$ sont influencées par la valeur θ attribuée à la variable Θ.

Proposition 9.114 *Soit le vecteur $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ et une variable aléatoire Θ tel que définis ci-dessus. La fonction de masse de probabilité de I_i est donnée par*

$$\begin{aligned} \Pr\left(I_i = 0\right) &= M_\Theta\left(\ln\left(r_i\right)\right) \\ \Pr\left(I_i = 1\right) &= 1 - M_\Theta\left(\ln\left(r_i\right)\right). \end{aligned}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \Pr\left(I_i = 0\right) &= \int_0^\infty r_i^\theta g_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{\ln\left(r_i^\theta\right)} g_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{\theta \ln(r_i)} g_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= M_\Theta\left(\ln\left(r_i\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr\left(I_i = 1\right) &= 1 - \Pr\left(I_i = 0\right) \\ &= 1 - M_\Theta\left(\ln\left(r_i\right)\right) \end{aligned}$$

■

Proposition 9.115 *Soit le vecteur $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ et une variable aléatoire Θ tel que définis ci-dessus. La fonction de masse de probabilité conjointe de $(I_1, ..., I_n)$ est donnée par*

$$f_{I_1,...,I_n}\left(i_1, ..., i_n\right) = E\left[\prod_{i=1}^n r_i^{\Theta(1-i_i)} \left(1 - r_i^\Theta\right)^{i_i}\right].$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} f_{I_1,...,I_n}(i_1,...,i_n) &= \int_0^\infty f_{I_1,...,I_n}(i_1,...,i_n\,|\Theta=\theta)\,\mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n f_{I_i}(i_i\,|\Theta=\theta)\,\mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n r_i^{\theta(1-i_i)}\left(1-r_i^\theta\right)^{i_i}\mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= E\left[\prod_{i=1}^n r_i^{\Theta(1-i_i)}\left(1-r_i^\Theta\right)^{i_i}\right]. \end{aligned}$$

■

Proposition 9.116 *Soit le vecteur* $\underline{I}=(I_1,...,I_n)$ *et une variable aléatoire* Θ *tel que définis ci-dessus. La fonction génératrice de probabilités conjointe de* $(I_1,...,I_n)$ *est donnée par*

$$P_{I_1,...,I_n}(t_1,...,t_n)=\int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(r_i^\theta+t_i\left(1-r_i^\theta\right)\right)\mathrm{d}G_\Theta(\theta).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} P_{I_1,...,I_n}(t_1,...,t_n) &= E\left[t_1^{I_1}...t_n^{I_n}\right] \\ &= E\left[E\left[t_1^{I_1}...t_n^{I_n}\,|\Theta\right]\right] \\ &= E\left[E\left[t_1^{I_1}\,|\Theta\right]...E\left[t_n^{I_n}\,|\Theta\right]\right] \\ &= E\left[\left(t_1\left(1-r_1^\Theta\right)+r_1^\Theta\right)...\left(t_n\left(1-r_n^\Theta\right)+r_n^\Theta\right)\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^n \left(r_i^\Theta+t_i\left(1-r_i^\Theta\right)\right)\right] \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(r_i^\theta+t_i\left(1-r_i^\theta\right)\right)\mathrm{d}G_\Theta(\theta). \end{aligned}$$

■

Proposition 9.117 *Soit le vecteur* $\underline{I}=(I_1,...,I_n)$ *et une variable aléatoire* Θ *tel que définis ci-dessus. La covariance entre* I_i *et* I_j*, pour* $i\neq j$*, est donnée par*

$$Cov(I_i,I_j)=\int_0^\infty \left(1-r_i^\theta\right)\left(1-r_j^\theta\right)\mathrm{d}G_\Theta(\theta)-(1-M_\Theta(\ln(r_i)))(1-M_\Theta(\ln(r_j))).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} Cov(I_i,I_j) &= E[I_iI_j]-E[I_i]E[I_j] \\ &= E[E[I_iI_j\,|\Theta]]-E[I_i]E[I_j] \\ &= E[E[I_i\,|\Theta]E[I_j\,|\Theta]]-E[I_i]E[I_j] \\ &= E\left[\left(1-r_i^\Theta\right)\left(1-r_j^\Theta\right)\right]-(1-M_\Theta(\ln(r_i)))(1-M_\Theta(\ln(r_j))) \\ &= \int_0^\infty \left(1-r_i^\theta\right)\left(1-r_j^\theta\right)\mathrm{d}G_\Theta(\theta)-(1-M_\Theta(\ln(r_i)))(1-M_\Theta(\ln(r_j))). \end{aligned}$$

∎

Remarque 9.118 *On peut aussi écrire la covariance entre I_i et I_j, pour $i \neq j$, comme suit:*

$$Cov\left(I_i, I_j\right) = 1 - M_\Theta\left(\ln\left(r_i\right)\right) - M_\Theta\left(\ln\left(r_j\right)\right) + M_\Theta\left(\ln\left(r_i\right) + \ln\left(r_j\right)\right) -$$

car

$$Cov\left(I_i, I_j\right) =$$

Exemple 9.119 *Soit le vecteur $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ et une variable aléatoire Θ tel que définis ci-dessus. De plus, on suppose que les variables aléatoires I_i, $i = 1, ..., n$, sont identiquement distribuées. Trouver la distribution de la variable aléatoire $N = I_1 + ... + I_n$.*

Solution. On a, pour $i = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned} \Pr\left(I_i = 1 \left| \Theta = \theta\right.\right) &= 1 - r^\theta \\ \Pr\left(I_i = 0 \left| \Theta = \theta\right.\right) &= r^\theta. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} M_{(N|\Theta=\theta)}(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tN} \left|\Theta = \theta\right.\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t(I_1+...+I_n)} \left|\Theta = \theta\right.\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{tI_1} \left|\Theta = \theta\right.\right] ...E\left[\mathrm{e}^{tI_n} \left|\Theta = \theta\right.\right] \\ &= \left(r^\theta + \left(1 - r^\theta\right)\mathrm{e}^t\right)^n \end{aligned}$$

et donc $(N\left|\Theta = \theta\right.) \sim Bin\left(n, q^* = \left(1 - r^\theta\right)\right)$

$$\begin{aligned} \Pr(N = k) &= \int_0^\infty \Pr\left(N = k \left|\Theta = \theta\right.\right) \mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty \binom{n}{k} \left(1 - r^\theta\right)^k \left(r^\theta\right)^{n-k} \mathrm{d}G_\Theta(\theta). \end{aligned}$$

Étant donné le théorème du binôme stipulant $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, on a

$$\begin{aligned} \Pr(N = k) &= \binom{n}{k} \int_0^\infty \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \left(r^\theta\right)^{k-j} \left(r^\theta\right)^{n-k} \mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \int_0^\infty \left(r^\theta\right)^{n-j} \mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \int_0^\infty \left(r^{n-j}\right)^\theta \mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \int_0^\infty \mathrm{e}^{\ln\left(r^{(n-j)}\right)^\theta} \mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \int_0^\infty \mathrm{e}^{\theta \ln\left(r^{(n-j)}\right)} \mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} M_\Theta\left(\ln\left(r^{(n-j)}\right)\right) \end{aligned}$$

∎