

# Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas

Aboubacar Mahamane Mahamadou M  
Choukri Houda

14 Avril 2022

# Plan

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

## 1 Introduction

- Motivation

- Objectif global, spécifique et contribution

## 2 Copule

- Utilité des copules
- Théorème de Sklar

## 3 Estimation de la copule

- L'approche paramétrique
- L'approche semi-paramétrique
- L'approche non paramétrique

## 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique

- Résumé de la comparaison
- Simulation

## 5 Conclusion

- conclusion
- Bibliographie

# Introduction

## Motivation

On s'intéresse de plus en plus à la modélisation d'observations multivariées à l'aide de formes fonctionnelles flexibles pour les fonctions de distribution et à l'estimation des paramètres qui capturent la dépendance entre les différentes composantes. L'une des principales raisons de cet intérêt est que l'approche traditionnelle basée sur la distribution normale multivariée n'est pas assez flexible car elle n'est capable de représenter qu'une gamme très limitée de formes de distribution. Par conséquent, il a été largement reconnu qu'il existe un réel besoin d'autres méthodes de modélisation des données multivariées. En réponse, les méthodes basées sur la copule ont fait l'objet d'études approfondies dans la littérature récente.

## 1 Introduction

- Motivation
- Objectif global, spécifique et contribution

## 2 Copule

- Utilité des copules
- Théorème de Sklar

## 3 Estimation de la copule

- L'approche paramétrique
- L'approche semi-paramétrique
- L'approche non paramétrique

## 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique

- Résumé de la comparaison
- Simulation

## 5 Conclusion

- conclusion
- Bibliographie

# Introduction

## Objectif global, spécifique et contribution

L'objectif global de cet article est l'estimation de  $\theta$  par plusieurs méthodes d'estimations et l'objectif spécifique est de mettre en évidence certains des avantages importants d'une approche semi-paramétrique par rapport aux approches paramétriques bien connues dans ce domaine.

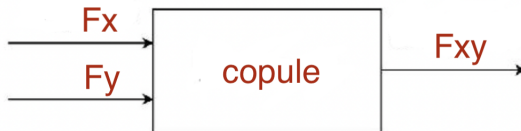
En effet, le plus de cet article est qu'il fait des comparaisons qui sont basées sur une étude de simulation car la comparaison théorique des estimateurs ML et IFM avec PMLE est difficile. On arrive même à la conclusion que la PML est meilleure que les méthodes IFM et ML lorsque les distributions marginales sont inconnues.

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - **Utilité des copules**
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# Utilité des copules

## Copules, avantages et domaines d'applications

La copule, c'est comme une machine dans laquelle tu mets comme input les marginales et tu as comme output la fonction de répartition conjointe.



La magie de cette machine est qu'on peut mettre n'importe quelles lois comme marginales on aura toujours la fonction de répartition conjointe.

Les copules sont utilisées dans l'hydraulique, la finance, l'assurance. . .



# Plan

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# Définition mathématique

## Théorème de Sklar

Soit  $\underline{X} = (X_1, X_2)$  un vecteur de 2 variables aléatoires continues avec  $F_{X_i}$  les fonction de répartition marginale et avec comme fonction de répartition conjointe  $F_{\underline{X}}$ .

D'après le théorème de Sklar, nous pouvons écrire que :

$$F_{\underline{X}}(x) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

et

$$f_{\underline{X}}(x) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

Avec :

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

# Estimation de la copule

## Pourquoi estimer la copule ?

Malgré que la copule ait l'avantage de modéliser la dépendance entre les variables, la fonction copule reste inconnue en pratique ainsi que ces paramètres, d'où le besoin de les estimer. Nous allons présenter quelques méthodes d'estimation de copules. Il existe plusieurs approches bien connues pour l'estimation d'une copule. Elles sont divisées en approches paramétriques, semi paramétriques et non paramétriques.

# Estimation de la copule

Qu'entendons nous par estimation de la copule ?

Nous entendons par estimation de la copule, l'estimation du paramètre de la copule.

## Exemples

Il s'agit d'estimer les  $\theta$  pour chacune des 2 copules suivantes (FGM et Clayton) :

$$1. C(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1 - u_1)(1 - u_2)$$

$$2. C(u_1, u_2) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}}$$

# Plan

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# L'approche paramétrique

## Définition

L'approche paramétrique impose un modèle spécifique pour la copule et les distributions marginales à la fois. Autrement dit, on impose un modèle paramétrique pour la copule et pour les distributions marginales. Nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance (ML) pour obtenir des estimateurs des paramètres. Cependant, il y a une seconde méthode appelée IFM qui serait préférable dans certains cas au ML. Nous verrons pourquoi dans la suite.

# La méthode du maximum de vraisemblance (ML)

## Méthode

En général, l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) serait la première option préférée pour estimer compte tenu de ses propriétés d'optimalité bien connues.

## ML

Soit  $F_k(x, \alpha_k)$  et  $f_k(x, \alpha_k)$  la fonctions de répartition et de densité de  $X_k$ .

Soit  $H(x_1, x_2; \xi)$  et  $h(x_1, x_2; \xi)$  la fonction de répartition conjointe et de densité conjointe de  $(X_1, X_2)$

Il est important de noter que :  $\xi = (\alpha'_1, \alpha'_2, \theta')'$

On sait que :  $h(x_1, x_2; \xi) = c(F_1(x_1; \alpha_1), F_2(x_2; \alpha_2))f_1(x_1; \alpha_1)f_2(x_2; \alpha_2)$

Ainsi la fonction à optimiser s'écrit comme suit :

$$L(\xi) = \sum_{i=1}^n \log[c(F_1(x_{1i}; \alpha_1), F_2(x_{2i}; \alpha_2); \theta)f_1(x_{1i}; \alpha_1)f_2(x_{2i}; \alpha_2)]$$

Avec :  $\sqrt{n}(\xi^{**} - \xi_0) \sim N(0, I(\theta_0))$

# La méthode du maximum de vraisemblance (ML)

## Inconvénients du ML

Cette méthode présente des inconvénients :

- Temps de calcul très longs dans le cas d'une grande dimension
- Calculs intensifs et parfois le problème d'optimisation est difficile à résoudre
- Sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales



# La méthode IFM (Inference function for margins)

## Méthode

La différence avec le ML est que les estimations se font en 2 étapes. Dans un premier temps on estime les paramètres des distributions marginales puis dans un second temps l'estimation du vecteur des paramètres de la copule, compte tenu des estimations de l'étape précédente.

D'où son nom [the two stage estimation](#)

Ainsi on a :

1. Estimations des paramètres des marginales

$$\hat{\alpha}_i = \underset{\alpha_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{k=1}^n \log f(x_k, \alpha_i)$$

2. Estimation du vecteur des paramètres de la copule

On maximise  $\sum_{i=1}^n \log[c(F_1(x_{1i}; \hat{\alpha}_1), F_2(x_{2i}; \hat{\alpha}_2); \theta)]$

# La méthode IFM (Inference function for margins)

## Convergence asymptotique IFM

Joe [1997] a montré que sous des conditions de régularité, l'estimateur IFM vérifie la propriété de la normalité asymptotique :  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \sim N(0, g(\theta_0))$

Avec  $g(\theta_0)$  la matrice d'information de Godambe.

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\theta_0) = D^{-1}M(D^{-1})^T \\ D = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(g(\theta))^T\right] \\ M = [g(\theta)^T g(\theta)] \\ g(\theta) = \left(\frac{\partial l_1}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial l_2}{\partial \alpha_2}\right) \\ l_i = \sum_{k=1}^n \log f(x_k, \alpha_i) \end{array} \right.$$

# La méthode IFM (Inference function for margins)

## Avantages et inconvénients

L'avantage de cette méthode est qu'elle repose sur des calculs plus légers comparativement à la méthode du ML. Néanmoins, la détermination de la matrice de Godambe risque d'être compliquée. De plus cette méthode aussi est sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales car elles interviennent dans le calcul de la log-vraisemblance.

The two stage estimation (IFM) est intéressant pour la comparaison de différentes copules avec le même ensemble de marginales univariées. Ce type de comparaison est important en pratique pour une analyse de sensibilité des inférences au modèle multivarié.

# Méthode paramétrique

## Comparaison entre ML et IFM

La différence entre ses 2 méthodes se fait plus sentir quand on a une forte dépendance.

En effet,

### 1. Forte dépendance positive (borne supérieure de Fréchet)

Si les 2 variables sont comonotones alors la méthode IFM est inefficace par rapport à ML.

Sinon la méthode IFM **peut donner** les mêmes estimations que ML.

### 2. Forte dépendance négative (borne inférieure de Fréchet)

En général, les 2 variables seront anticomonotones et dans ce cas la méthode IFM est inefficace par rapport à ML sinon on **peut avoir** les mêmes estimations que ML.

### 3. Indépendance

Quand il y a indépendance, on a les mêmes estimations.

# Méthode paramétrique

## Résumé de la comparaison entre ML et IFM

1. Il existe un compromis computationnel - efficacité . (surtout lorsqu'il y a une dépendance forte)
2. L'IFM donne généralement une bonne efficacité sauf peut-être pour une dépendance extrême près des bornes de Fréchet.
3. L'IFM est beaucoup plus facile lorsque le nombre total de paramètres à estimer est grand
4. Lorsque ML est faisable par calcul, on peut utiliser l'IFM pour trouver des bons points de départ.

# Méthode paramétrique

## Une alternative aux 2 méthodes

Lorsqu'on ne peut pas appliquer IFM et qu'on juge que le ML va nous prendre beaucoup de temps on peut appliquer **le maximum de vraisemblance composite**.

Cette méthode, introduite par Lindsay[1988] ressemble un peu au ML et converge asymptotiquement.

# Plan

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# L'approche semi-paramétrique

## Pourquoi les approches semi-paramétriques ?

Les méthodes paramétriques supposent qu'on connaît les distributions marginales. On a vu récemment dans les inconvénients de IFM et ML que ces 2 méthodes sont sensible à une erreur de spécification des distributions. Or on ne connaît pas toujours les distributions marginales.

Que se passe-t-il lorsqu'on ne connaît pas ces marginales ? Alors que l'application des méthodes paramétriques est inappropriée.

C'est ce qui nous amène à étudier les méthodes semi-paramétriques.



# L'approche semi-paramétrique

## Définition

L'approche semi-paramétrique suppose un modèle paramétrique pour la copule et non-paramétrique pour les distributions marginales. On veut dire par là qu'on impose un modèle paramétrique pour la copule et un modèle non paramétrique pour les distributions marginales.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer les paramètres de la copule.

# L'inversion du tau de Kendall

## Définition du tau de Kendall

Le tau de Kendall est une mesure d'association qui quantifie la concordance et la discordance entre deux variables aléatoires continues.

Soit deux paires indépendantes de variables aléatoires continues  $(X_1, X_2)$  et  $(X'_1, X'_2)$ .

On définit le Tau de Kendall par :

$$\tau = Pr((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0) - Pr((X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0)$$

# L'inversion du tau de Kendall

## Méthode

### Définition de la méthode

La méthode d'inversion du tau de Kendall consiste à faire coïncider sa valeur théorique et sa valeur empirique.

Cette idée est dans la même optique que la méthode des moments.

# L'inversion du tau de Kendall

## Méthode

### Valeur théorique

Soit deux paires indépendantes de variables aléatoires continues  $(X_1, X_2)$  et  $(X'_1, X'_2)$ .  
On définit le Tau de Kendall par :

$$\tau = 4Pr(U_1 < U'_1, U_2 < U'_2) - 1$$

et que :  $Pr(U_1 < U'_1, U_2 < U'_2) = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) c(u_1, u_2) du_1 du_2$

### Valeur empirique

Soit deux paires indépendantes de variables aléatoires continues  $(X_1, X_2)$  et  $(X'_1, X'_2)$ .  
On définit le Tau de Kendall empirique par :

$$\hat{\tau} = \frac{\text{nbre de couple concordant} - \text{nbre de couple discordant}}{\text{nbre de couple concordant} + \text{nbre de couple discordant}}$$

# L'inversion du tau de Kendall

## Exemple

### Exemples

Soit l'échantillon suivant :

j	$(X_{1j}, X_{2j})$
1	(5,7)
2	(2,3)
3	(1,4)
4	(4,9)

Calculer la valeur empirique du tau de Kendall et estimer le paramètre de la copule EFGM

# L'inversion du tau de Kendall

## Exemple

### Solution

couple 1	couple 2	concordance	discordance
(5,7)	(2,3)	oui	non
(5,7)	(1,4)	oui	non
(5,7)	(4,9)	non	oui
(2,3)	(1,4)	non	oui
(2,3)	(4,9)	oui	non
(1,4)	(4,9)	oui	non

Ainsi :

$$\hat{\tau} = \frac{4 - 2}{4 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\tau = \frac{2\theta}{9}$$

Donc

$$\hat{\tau} = \tau \rightarrow \theta = \frac{9\hat{\tau}}{2} = \frac{3}{2}$$

**NB** : Ceci n'est pas vraiment un bon exemple car  $\theta$  est compris entre -1 et 1 pour la EFGM, le but de l'exemple c'est juste de montrer comment on applique cette méthode

# L'inversion du rho de Spearman

## Définition du rho de Spearman

Le rho de Spearman est aussi une mesure d'association.

### Valeur théorique

Soit un couple de variables aléatoires  $(X_1, X_2)$

On définit le rho de spearman par :

$$\rho_s(X_1, X_2) = \rho_p(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)) = \rho_p(U_1, U_2)$$

### Valeur empirique

Soit un couple de variables aléatoires  $(X_1, X_2)$

On définit le rho de spearman par :

$$\hat{\rho}_s(X_1, X_2) = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\text{rank}(x_{1j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\text{rank}(x_{2j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right)}{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\text{rank}(x_{1j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right)^2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{\text{rank}(x_{2j})}{n+1} - \frac{1}{2} \right)^2}$$

# L'inversion du rho de Spearman

## Méthode

### Définition de la méthode

La méthode d'inversion du rho de Spearman consiste à faire coïncider sa valeur théorique et sa valeur empirique.

Cette idée est dans la même optique que la méthode des moments.



# L'inversion du rho de Spearman

## Exemple

### Exemples

Soit l'échantillon suivant :

j	$X_{1j}$	$X_{2j}$
1	5	7
2	2	4
3	1	3
4	4	9

Calculer la valeur empirique du rho de Spearman et estimer le paramètre de la copule EFGM

# L'inversion du rho de Spearman

## Exemple

### Solutions

j	$X_{1j}$	$X_{2j}$	$\text{rank}(x_{1j})$	$\text{rank}(x_{2j})$
1	5	7	4	3
2	2	4	2	2
3	1	3	1	1
4	4	9	3	4

Puis on applique la formule empirique du  $\rho_s$  et on l'égalise avec  $\frac{\theta}{3}$

# Problème avec ses 2 méthodes d'inversion

## Inconvénients et solutions

Le principal problème avec ses 2 méthodes est que les expressions du tau de Kendall ou le rho de Spearman ne sont pas toujours simple. On ne peut pas toujours les inverser, c'est à dire qu'on ne peut pas toujours écrire  $\theta = g^{-1}(\tau)$  ou  $\theta = g^{-1}(\rho_s)$ .

On pourra utiliser des algorithmes comme Newton-Raphson pour approximer  $\tau - \hat{\tau} = 0$  ( $\rho_s - \hat{\rho}_s = 0$ ).

# Pseudo maximum likelihood (PML)

## Méthode

Cette méthode se fait en 2 étapes :

Dans un premier temps, on estime la fonction de répartition en calculant la fonction de répartition empirique :

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{x_j \leq x}$$

Des fois aussi, on utilise

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n 1_{x_j \leq x}$$

C'est pour éviter le problème d'absence de limites de la fonction de densité de la copule.

# Pseudo maximum likelihood (PML)

## Méthode

Puis dans un second temps, on estime le paramètre de la copule en utilisant la fonction eempirique calculée précédemment.

Ainsi on maximise  $\sum_{i=1}^n \log[c(\tilde{F}_1(x_{1i}), \tilde{F}_2(x_{2i}); \theta)]$ .

Les temps de calculs sont raisonnables et le paramètre de la copule est estimé indépendamment de la spécification des lois marginales.

Nous allons noter cette estimation  $\tilde{\theta}$  et on trouve que  $\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \theta_0)$  converge asymptotiquement vers  $N(0, \nu^2)$

# Pseudo maximum likelihood (PML)

## Méthode

Genest et al., (1995) nous donne l'expression de  $\nu$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu^2 = \frac{\sigma^2}{\beta^2} \\ \sigma^2 = \text{var}[l_\alpha + W_1(X_1) + W_2(X_2)] \\ l_\alpha = \frac{\partial \log[c_\alpha(u_1, u_2)]}{\partial \alpha} \\ W_i(X_i) = \int 1_{[F_i(X_i) \leq u_i]} c_\alpha(u_1, u_2) l_{\alpha i} \\ l_{\alpha i} = \frac{\partial \log[c_\alpha(u_1, u_2)]}{\partial \alpha \partial u_i} \\ \beta = \text{var}[l_\alpha] \end{array} \right.$$

Ainsi, on peut réécrire :

$$\sigma^2 = \beta + \text{var}[W_1(X_1) + W_2(X_2)]$$

Donc

$$\nu = \frac{\sigma^2}{\beta^2} = \frac{1}{\beta} + \frac{\text{var}[W_1(X_1) + W_2(X_2)]}{\beta^2} \leq \frac{1}{\beta}$$

# Plan

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# L'approche non paramétrique

## Pourquoi l'approches non paramétrique ?

La copule aussi peut être sujette à une mauvaise spécification donc l'approche paramétrique et semi- paramétrique ne sont plus adaptées dans ce cas car elles conduisent généralement à un mauvais ajustement aux données. Dans ce cas les méthodes d'estimation non paramétriques peuvent être une bonne alternative.



# L'approche non paramétrique

## Méthode

Ce qui différencie cette approche à la précédente c'est que la copule aussi doit être estimée.

En effet, on a plusieurs méthodes pour l'estimation des copules.

1. La copule empirique encore appelée fonction empirique de dépendance. Celle-ci se base sur le rang des observations pour extraire ensuite la structure de dépendance. Cette copule est introduite par Deheuvels [1979] et par la suite la convergence faible sur plusieurs espace a été montrée au fur et à mesure.

Le problème majeur de ce type de copule est qu'elle présente des discontinuités

2. L'estimation de la copule par la méthode du noyau

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique

1. Les méthodes IFM et ML ne sont pas robustes contre les erreurs de spécification des distributions marginales.
2. Dans la conception, IFM et PML se ressemblent puisque les 2 se font en 2 étapes. Cependant PML n'est pas sensible à une mauvaise spécification des distributions marginales contrairement à IFM
3. PML et IFM sont faciles à implémenter
4. PML ne fait pas d'hypothèses sur la distribution des marginales
5. L'estimateur de PML est meilleur que ceux de IFM et ML dans la plupart des situations pratiques

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# Simulation de la copule

## Algorithme de simulation

Voir code R

# MSE efficiency en %, par rapport à l'estimateur de IFM :

Bonne spécification des marginales

$\theta$	0.5	2.00	8.00
$\tau(\theta)$	0.2	0.5	0.8
BM	124.5	177.7	289.6
ML	96.9	96.2	85.7
PML	70.3	82.4	86.9

Figure – Copule Clayton

$\theta$	1.86	5.74	18.2
$\tau(\theta)$	0.2	0.5	0.8
BM	103	107	116
ML	102	97	102
PML	101	91	88

Figure – Copule Frank

# Le biais estimé du paramètre $\theta$ :

Mauvaise spécification des marginales

Pour la copule Clayton

$(T_3, T_3)$	MLE	IFM	PML
0.5	-0.11	-0.14	0.05
2.00	0.40	-0.06	0.05
8.00	0.81	-0.9	-0.31

$(T_3, X_2^2)$	MLE	IFM	PML
0.5	-0.005	-0.09	0.05
2.00	-0.25	-0.80	0.05
8.00	-4.06	-5.70	-0.31

# Le biais estimé du paramètre $\theta$ :

Mauvaise spécification des marginales

Pour la copule Frank

$(T_3, T_3)$	MLE	IFM	PML
1.86	0.78	0.65	0.01
5.74	1.66	1.06	0.02
18.2	1.72	-0.51	-0.36

$(T_3, X_2^2)$	MLE	IFM	PML
1.86	0.65	0.45	0.06
5.74	1.22	0.38	0.10
18.2	-1.99	-5.36	-0.31



# L'écart type estimé du paramètre de copule :

Mauvaise spécification des marginales

Pour la copule Clayton

$(T_3, T_3)$	MLE	IFM	PML
0.5	0.310	0.21	0.20
2.00	0.94	0.54	0.41
8.00	1.82	1.85	1.19

$(T_3, X_2^2)$	MLE	IFM	PML
0.5	0.43	0.31	0.20
2.00	0.75	0.56	0.41
8.00	1.29	0.95	1.19

# L'écart type estimé du paramètre de copule :

Mauvaise spécification des marginales

Pour la copule Frank

$(T_3, T_3)$	MLE	IFM	PML
1.86	0.98	0.88	0.65
5.74	1.39	1.01	0.81
18.2	2.05	2.27	1.74

$(T_3, X_2^2)$	MLE	IFM	PML
1.86	1.00	0.83	0.64
5.74	1.17	0.85	0.82
18.2	1.74	1.66	1.78

# Le MSE efficiency en (%) par rapport à l'estimateur IFM :

Mauvaise spécification des marginales

Pour la copule Clayton

MLE	$(T_3, T_3)$	$(T_3, X_2^2)$
0.5	61.78	58.83
2.00	29.08	155.44
8.00	31.01	183.78

PML	$(T_3, T_3)$	$(T_3, X_2^2)$
0.5	148.9	244.98
2.00	177.4	567.63
8.00	284.7	2210.66

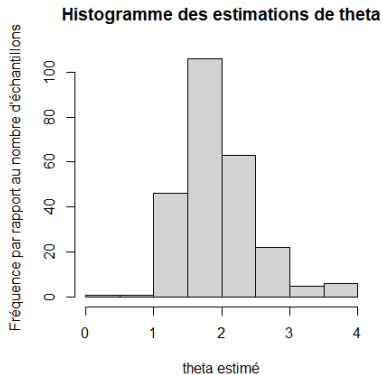


Figure – IFM- $(T_3, T_3)$

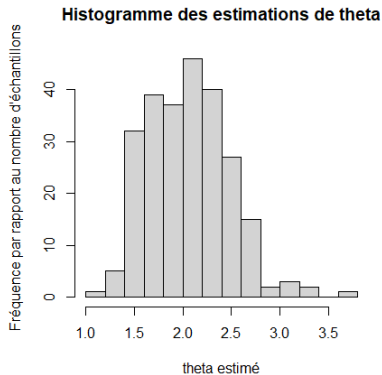


Figure – PML- $(T_3, T_3)$

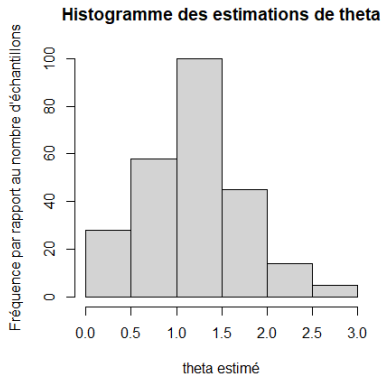


Figure – IFM- $(T_3, X_2^2)$

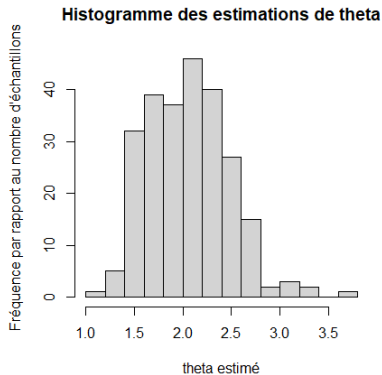


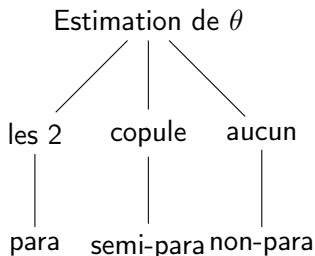
Figure – PML- $(T_3, X_2^2)$

# Plan

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie

# Conclusion

1. Rappel de l'histoire
2. Application des différentes méthodes



# Plan

- 1 Introduction
  - Motivation
  - Objectif global, spécifique et contribution
- 2 Copule
  - Utilité des copules
  - Théorème de Sklar
- 3 Estimation de la copule
  - L'approche paramétrique
  - L'approche semi-paramétrique
  - L'approche non paramétrique
- 4 Comparaison entre les méthodes paramétrique et semi-paramétrique
  - Résumé de la comparaison
  - Simulation
- 5 Conclusion
  - conclusion
  - Bibliographie



1. Kim, J.Silvapulle et P.Silvapulle [2007] Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas
2. Joe, H., 2005. Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. J. Multivariate Anal. 94, 401–419.
3. Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.-P., 1995. A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. Biometrika 82 (3), 543–552.
4. Mémoire de Nabil Kadi université de Sherbrooke : ESTIMATION NON-PARAMÉTRIQUE DE LA DISTRIBUTION ET DENSITÉ DE COPULES