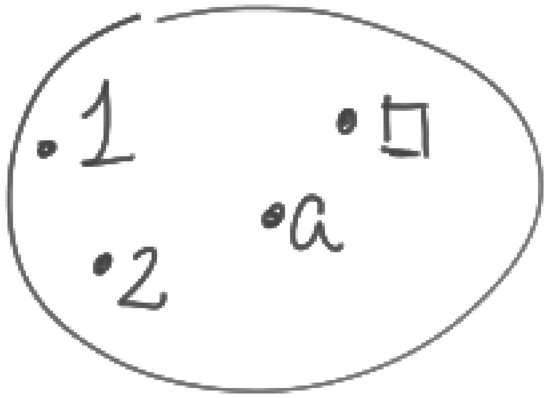
Que es un conjunto?

Un conjunto es una colección bien definida de objetos,dichos objetos pueden ser cualquier cosa

$$\underline{n} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

A=


$$A = \{1, 2, a, \square\}$$

Cardinalidad de un conjunto?

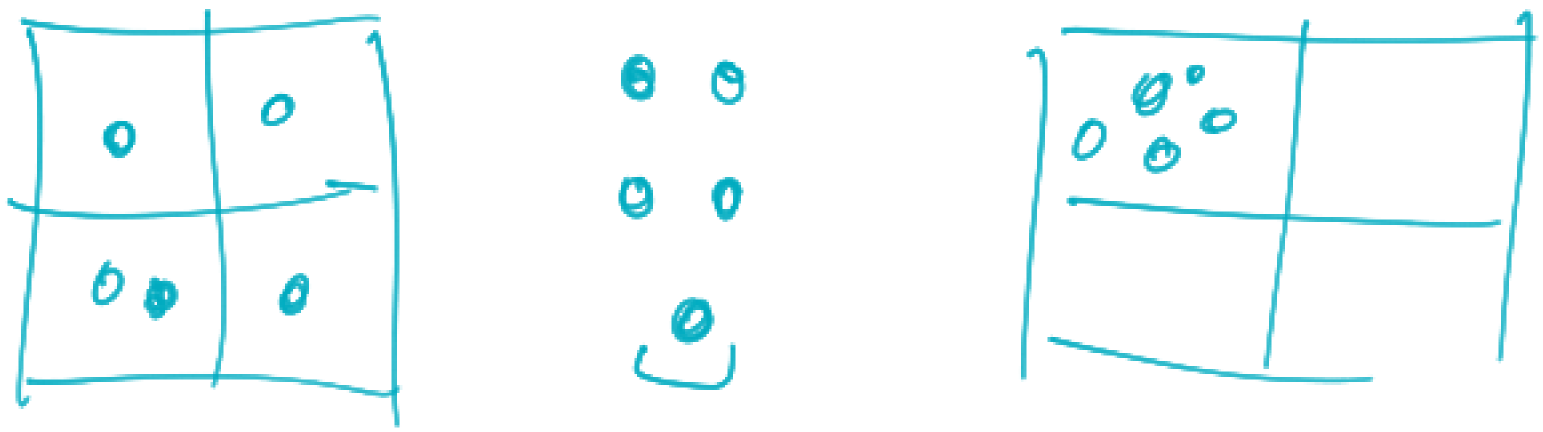
Si el conjunto es finito, su cardinalidad es la cantidad de elementos dentro del conjunto.

$$|A| = 4$$

$$B = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,4\}\} \quad |B| = 3$$

Pigeonhole principle

Si tengo n objetos, y m casillas donde meterlos. Si n>m, habra al menos una casilla con mas de un elemento.



Regla de la suma

Si una tarea se puede realizar de m formas posibles, otra tarea se puede realizar de n formas posibles, y ambas tareas son excluyentes, en el sentido que no pueden realizarse de manera simultánea, entonces hay m+n formas de elegir alguna de estas tareas.

A, B - conjuntos $(A \cap B = \emptyset)$

$|A \cup B| = |A| + |B|$

$X = \{1, 2, 3\}$

$Y = \{5, 6, 8\}$

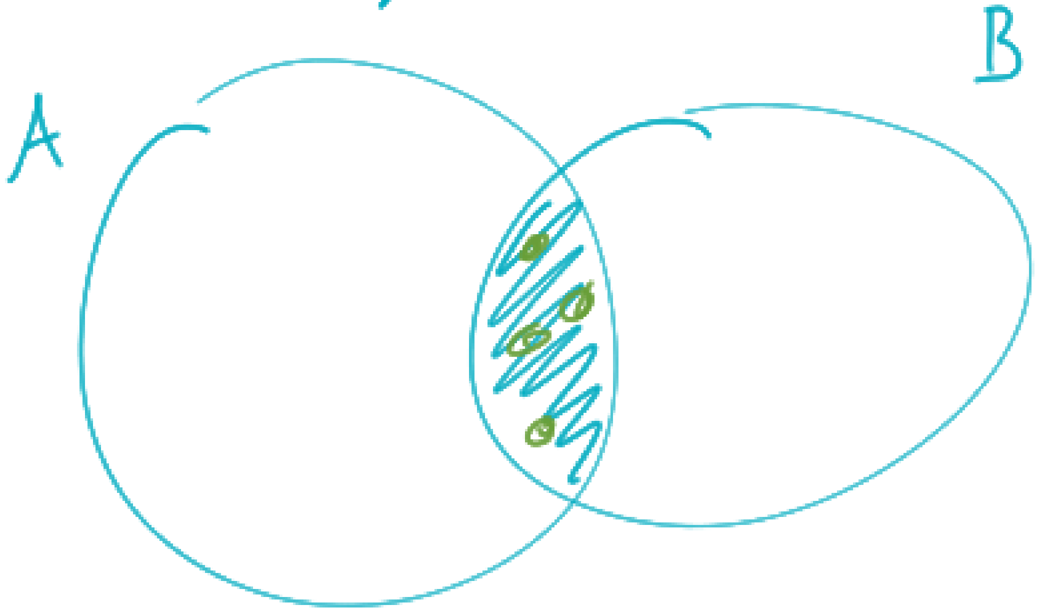
$> \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$

$|X \cup Y| = |X| + |Y|$

$\{4, 8\} \to$ mult de 4

$\{3, 6, 9\} \to$ mult de 3

$A \cap B \neq \emptyset$



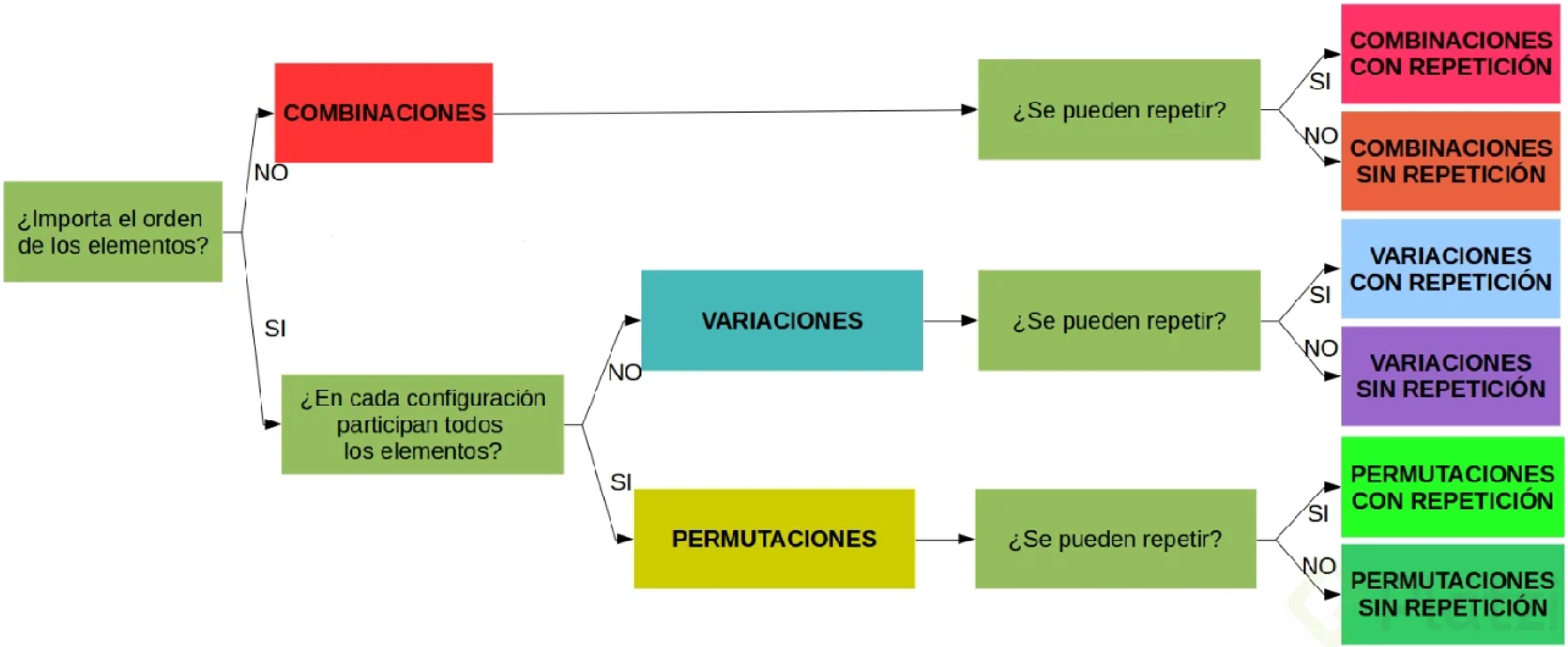
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Regla del producto

Si una tarea se realiza en dos etapas, donde la primera se puede realizar de m formas posibles y, si para cada una de ellos la segunda etapa se puede realizar de n distintas formas, entonces la tarea completa se puede hacer de m*n formas posibles.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ $\qquad |A \times B| = |A| \cdot |B|$

$A \times B \; \{1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b\}$


¿Importa el orden de los elementos?
NO
COMBINACIONES
¿Se pueden repetir?
SI
COMBINACIONES CON REPETICIÓN
NO
COMBINACIONES SIN REPETICIÓN
SI
¿En cada configuración participan todos los elementos?
NO
VARIACIONES
¿Se pueden repetir?
SI
VARIACIONES CON REPETICIÓN
NO
VARIACIONES SIN REPETICIÓN
SI
PERMUTACIONES
¿Se pueden repetir?
SI
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN
NO
PERMUTACIONES SIN REPETICIÓN

Permutaciones

* Una permutacion de un conjunto, es un mapeo de el conjunto a si mismo.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$$

* El numero de permutaciones distintas de un conjunto de cardinalidad igual a n es n!

$$\underbrace{\underset{n}{\boxed{}} \cdot \underset{n-1}{\boxed{}} \cdot \cdots \underset{1}{\boxed{}}}$$

$$n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$$

$$|A_n| = \cancel{\{1, 2, \dots, n\}}\ n$$

$$|A_{n-1}| = n-1$$

$$\vdots$$

$a\,b_1 b_2 \rightarrow |3| \quad 3! = 6$

$\{\underbrace{1,1,1}_{p_1}\ \underbrace{2\,2\,2\ldots}_{p_2} \ \ldots\}$

$\underbrace{a\,b_1 b_2}$

$a\,b_1 b_2$

$b_1 a\, b_2$

$b_1 b_2\, a$

$\cancel{b_2 b_1 a}$

$\cancel{b_2 a\, b_1}$

$\cancel{a\, b_2 b_1}$

$$n! = (\#\text{Perm. sin rep}) \cdot p_1! \cdot p_2! \, p_3!$$

$$\#\text{perm. sin. rep} = \frac{n!}{p_1! \cdot p_2! \ldots p_m!}$$

$$\#\text{perm } abb = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$$

abcbcaa

$$\#\text{perm} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

$$= \boxed{\quad}$$

Variaciones(?)

La k-variacion de un conjunto de n elementos distintos es una seleccion ORDENADA de k de sus elementos

$$(3,2,1) \neq (1,2,3)$$

$$\underset{n}{\square} \cdot \underset{n-1}{\square} \cdots \underset{n-k+1}{\square} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\underbrace{\underset{n}{\square} \cdot \underset{n}{\square} \cdots \underset{n}{\square}}_{k \text{ veces}} = n^{k}$$

$$\frac{\boxed{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \cdot (n-k)\;(n-k-1)\cdots 1}}{\boxed{(n-k)\;(\cdots\;1}}$$

Combinaciones

Una 'combinacion' de un conjunto de n elementos, es la seleccion NO ORDENADA de k de sus elementos

$(3, 2, 1) = (1, 2, 3)$

$\{1, 2, 3\}$ — 312, 213, 132, 231, $\{3, 2, 1\}$

$$A_k^n = C_k^n \cdot k!$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = C_k^n \cdot k!$$

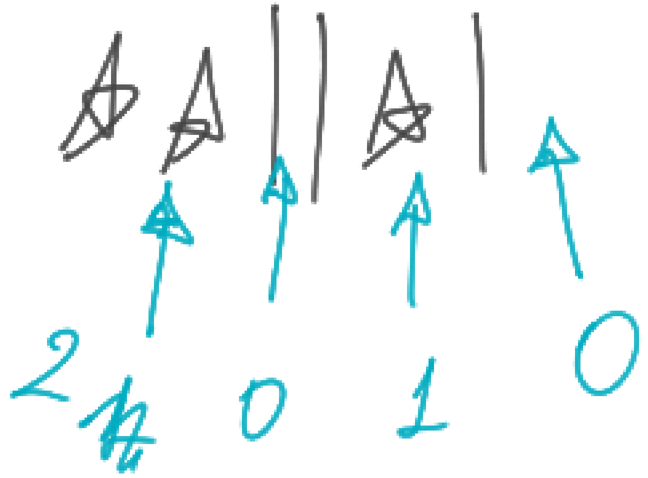
$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \longrightarrow \binom{n}{k}$$

n elementos

Quiero elegir k repitiendo

$n=4 \quad k=3$

$\star\star\star\,|||$



$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$$

$$\boxed{\tilde{C}^{n}_{k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

Coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad , \quad (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$k\text{th term} \rightarrow \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Propiedades interesantes

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ✓

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ✓

3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ ✓

4) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \dots (-1)^n \binom{n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \end{cases}$

5) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

$$\frac{(n-1)!\,k}{(k-1)!\,(n-k)!\,k} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k-1)!\cdot(n-k)}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,k!}(\cancel{k}+n-\cancel{k})$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

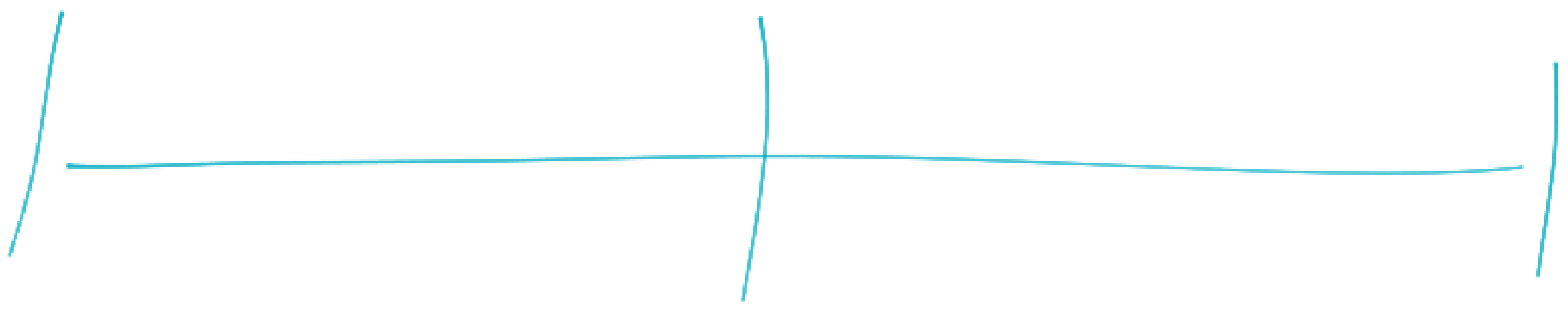
$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1 \dots$$

2^n

$$(1+(-1))^n = 0 = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1)^1$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$$

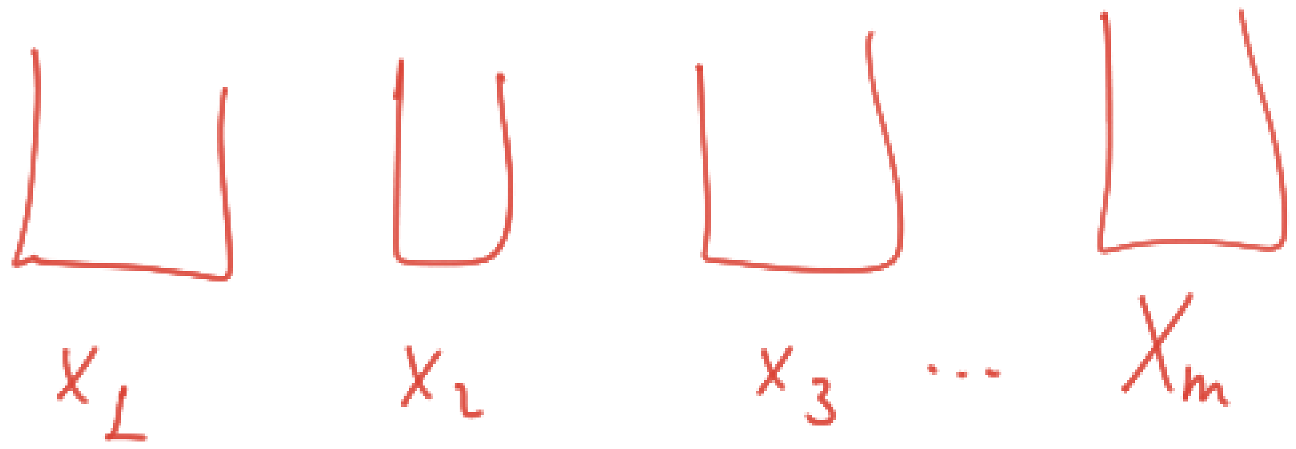


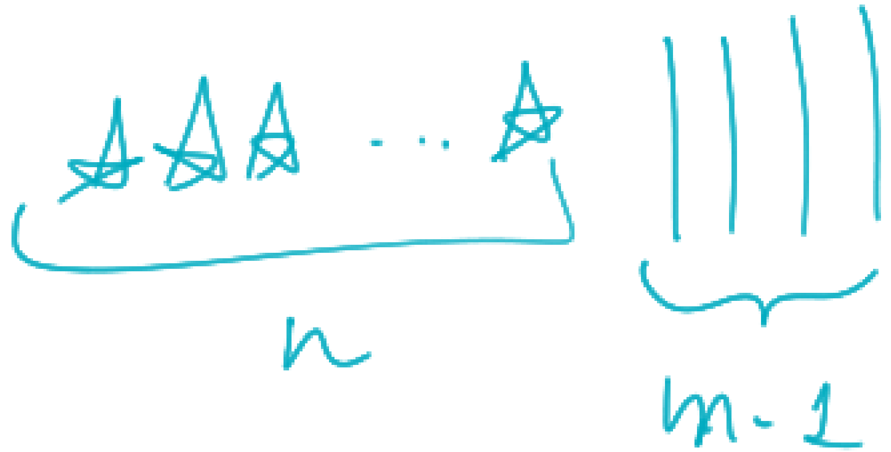
$2n$

Soluciones a: x1+x2+...+xm = n

Stars and bars!

n pelotitas





Triángulo de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

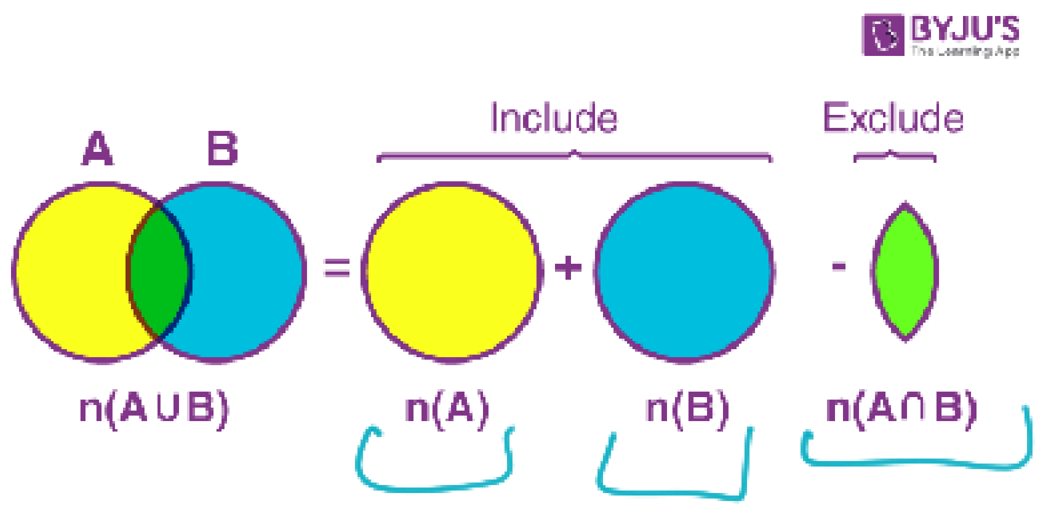
1 8 28 56 70 56 28 8 1

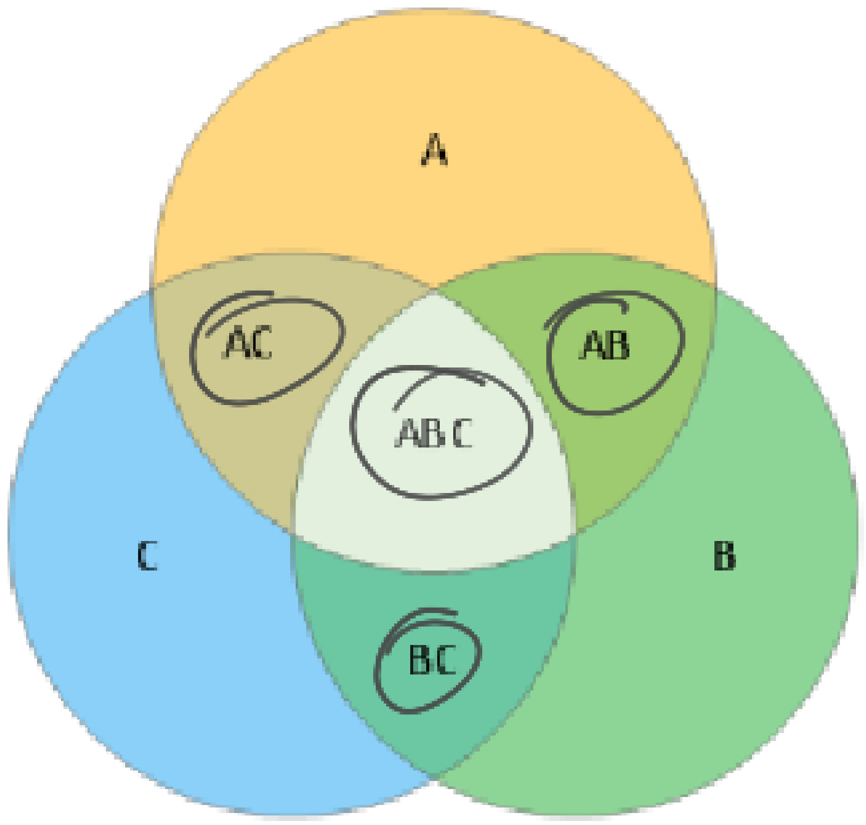
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1										
1	**1**									
1	**2**	**1**								
1	**3**	**3**	**1**							
1	**4**	**6**	**4**	**1**						
1	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**					
1	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**				
1	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**			
1	**8**	**28**	**56**	**70**	**56**	**28**	**8**	**1**		
1	**9**	**36**	**84**	**126**	**126**	**84**	**36**	**9**	**1**	
1	**10**	**45**	**120**	**210**	**252**	**210**	**120**	**45**	**10**	**1**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Principio de Inclusion-Exclusion



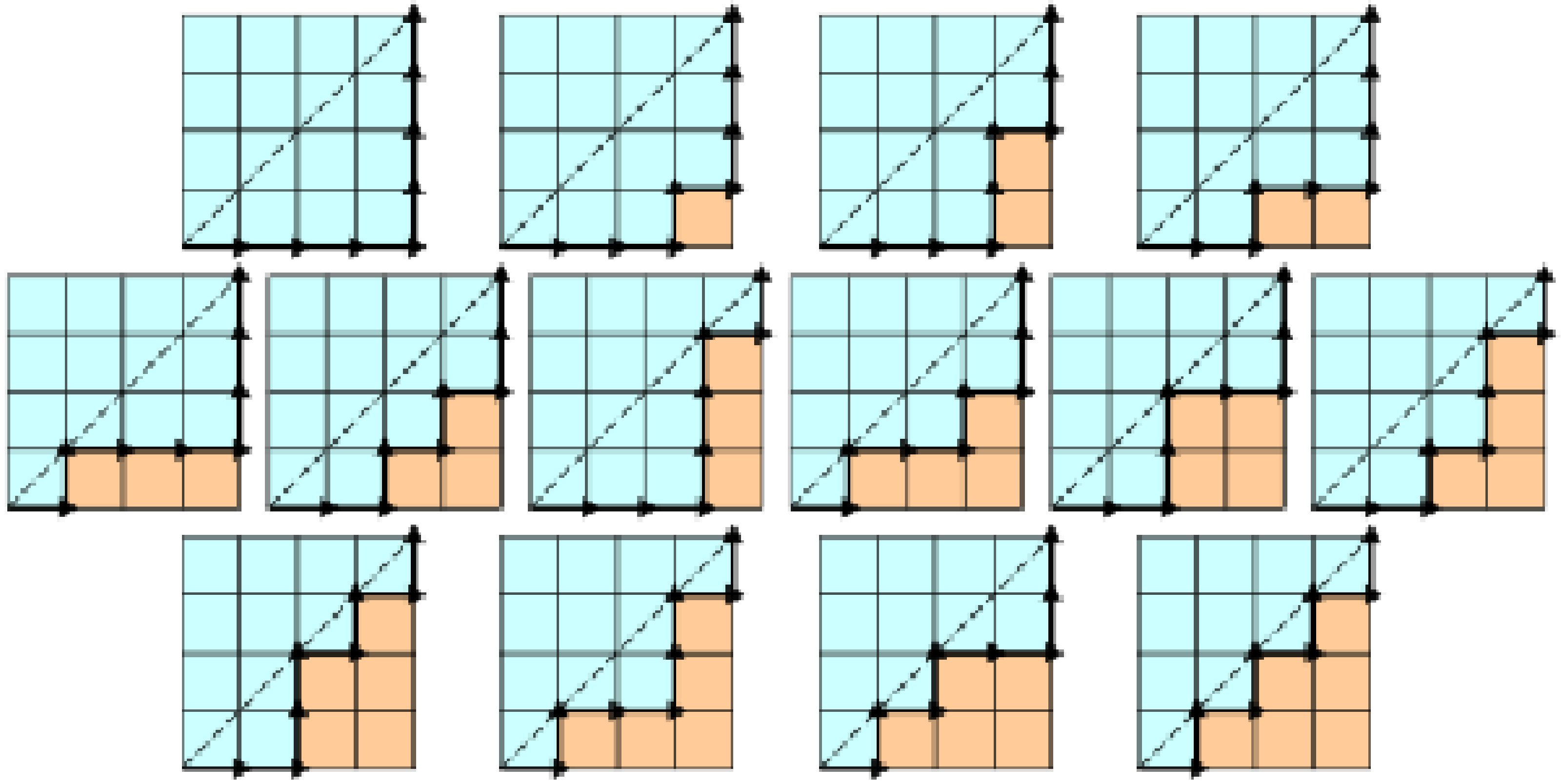


3-set Venn diagram

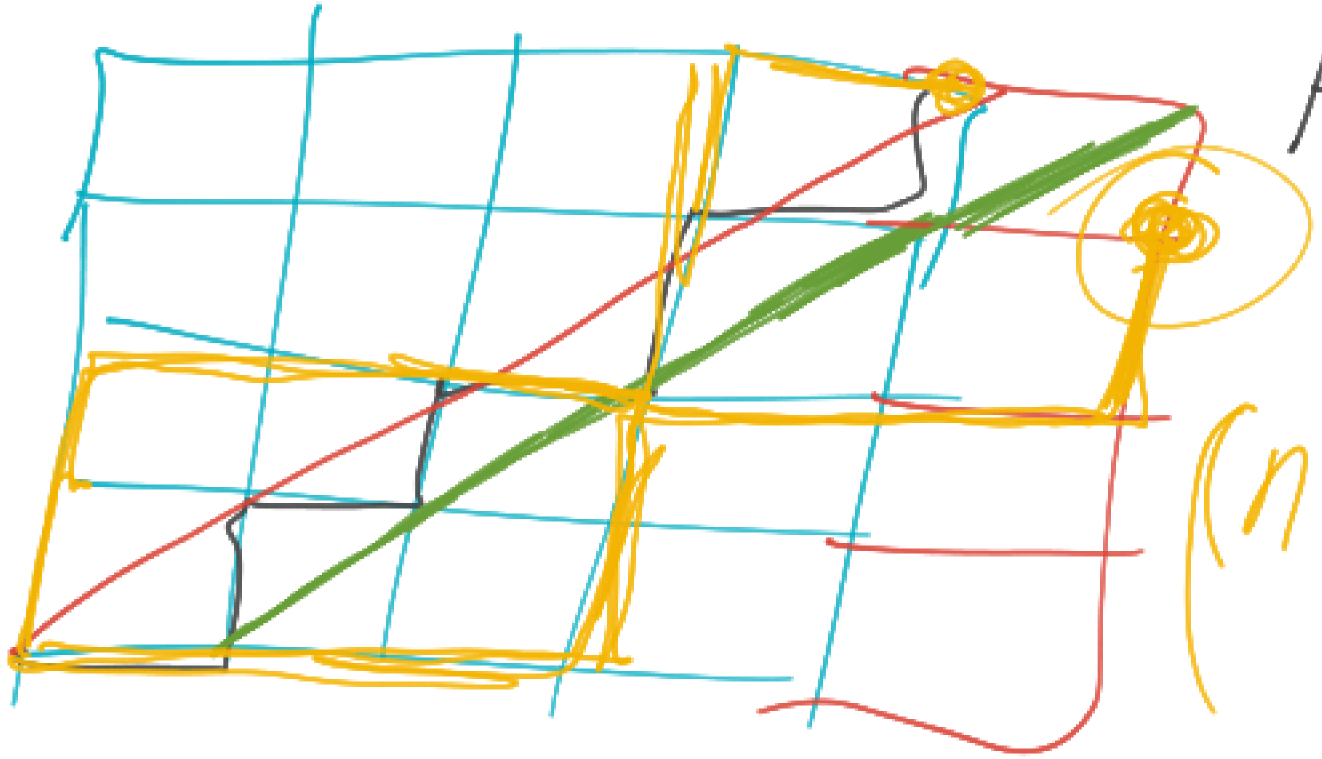
$$|A|+|B|+|C|-|A\cap C|-|A\cap B|-|B\cap C|$$

$$+|A\cap B\cap C|$$

Numeros catalanes



C_n es el número de caminos monotonos que se pueden trazar a través de las líneas de una malla de n × n celdas cuadradas, de forma que nunca se cruce la diagonal. Un camino monótono es aquel que empieza en la esquina inferior izquierda y termina en la esquina superior derecha, y consiste únicamente en tramos que apuntan hacia arriba o hacia la derecha



AAAADDDD

$$\binom{n+1+n-1}{n-1}$$

$$\boxed{C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}}$$