

Determina el valor de todos los números reales  $\alpha$  tal que, para todo entero positivo  $n$ , se cumple que:

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \dots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

es un múltiplo de  $n$ . (Nota:  $\lfloor x \rfloor$  equivale al mayor entero menor o igual a  $x$ . Por ejemplo,  $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$  y  $\lfloor 7 \rfloor = 7$ .)  
(Nota: 0 es múltiplo de cualquier entero positivo.)

1. Demuestra que  $\alpha = 0$  es una solución.
2. Demuestra que  $\alpha = 1$  no es una solución.
3. Demuestra que  $\alpha = 2$  es una solución.
4. Demuestra que  $\alpha = 2k$ , para todo  $k$  entero, es una solución (es decir, que todo entero par es solución).
5. Demuestra que  $\alpha = 1/2$  no es una solución.
6. Demuestra que todo  $\alpha \in (0, 1)$  no es una solución.
7. Demuestra igualmente, que todo  $\alpha \in (-1, 0)$  no es una solución.
8. Para terminar, considera  $\alpha = 2k + \beta$ , donde  $k$  es un entero y  $\beta \in (-1, 1)$ , primero demuestra que todo número real es representable de esta forma.
9. Demuestra que  $\alpha = 2k + \beta$  nunca es solución, a menos que  $\beta = 0$ .