

Fra harmoni til kaos

Prosjektoppgave FYS2130 Vår 2018

Kandidat 15261

Institutt for fysikk
Universitetet i Oslo

Oppgave 1

For å finne tidsutviklingen til en fri harmonisk oscillator kan man benytte den numeriske integrasjonsteknikken Runge-Kutta 4 over en akselerasjon gitt ved

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \quad (1)$$

Her er x , m og ω henholdsvis posisjonen, massen og vinkelfrekvensen til det oscillerende legemet og k er systemets fjærkonstant. Akselerasjonen til en simpel harmonisk oscillator konstrueres av en konservativ, tilbakevirkende fjærkraft $F = -kx(t)$, her modelert med Hookes lov. Figur 1 er et plot av banen til oscillatoren i faserommet. Faserommet angis her ved legemets posisjon og hastighet og vil angis slik gjennom hele oppgaven. Alternativt kunne faserommet vært utspent av posisjon og bevegelsesmengde, som ville svart til en skalering av hastighets-aksen med massen m . All kode er vedlagt i eget appendix ved slutten av oppgaven.

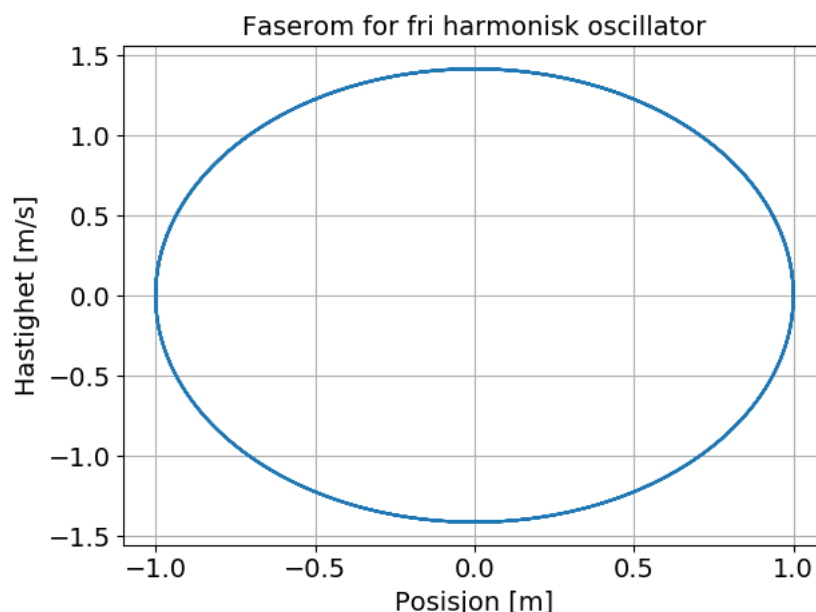


Figure 1: Bane i faserommet for fri harmonisk oscillator.

Parametere: $m = 500\text{g}$; $k = 1\text{ N/m}$; $x_0 = 1\text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0\text{ m/s}$; $t = 20\text{s}$; $\Delta t = 0.01$

Banens elliptiske form er som forventet i henhold til et konservativt kraftbilde. Konservative krefter bevarer mekanisk energi, og følgelig vil bevegelsen til oscillatoren være harmonisk og periodisk i henhold til kraftmodellen for enhver tid. At banen alltid vil ta form av en ellipse i faserommet kan da forstås med utgangspunkt i uttrykket for total energi. Ettersom det ikke er noen kilde til energitransport ut av systemet vil den totale energien til enhver tid kunne beskrives ved den konstante summen av potensiell og kinetisk energi. For en fri harmonisk oscillator svarer denne summen til uttrykkene

$$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

der \dot{x} er oscillatorens hastighet. Det observeres at uttrykket i likning 2 sammenfaller med likningen for en ellipse sentrert om origo, gitt ved

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (3)$$

der a og b er henholdsvis lille og store halvakse. Ved å betrakte likning 2 i lys av likning 3 og det faktum at energi er bevart forstås at banen alltid vil karakteriseres av disse aksene på følgende vis

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m}} \text{ og } b = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (4)$$

Da størrelsene E, m og k er konstanter for et gitt system vil følgelig aksene være konstante for et sett initialbetingelser. Systemets periodisitet er en følge av den harmoniske oscillatorens natur ved dempningsfrie svigninger om systemets likevektspunkt ved $x = 0$. Følgelig er det ikke mulig å generere en bane i faserommet som ikke er elliptisk ved å endre initialverdier for posisjon og hastighet. Det eneste som endres er systemets totale energi og følgelig banens utslag og eksentrisitet $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{a}{b}}$. Det eneste unntaket er den trivielle løsningen $x_0 = 0$ og $\dot{x}_0 = 0$ der $E = 0$ og systemet forblir i ro.

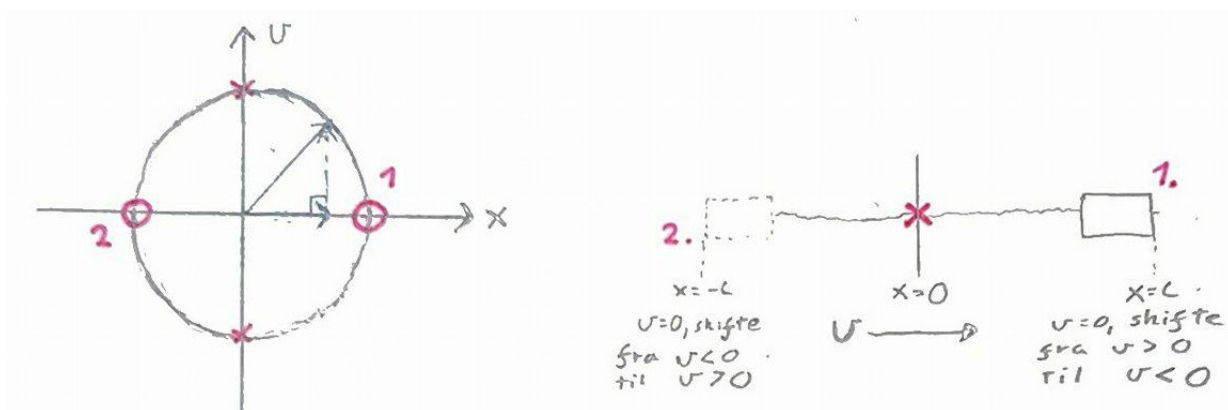


Figure 2: Figuren til høyere viser en fysisk tolkning av bevegelsen til en fri harmonisk oscillator. Figuren til venstre viser hvordan banen fra illustrasjonen til høyere sammenfaller med faserommet.

Figur 2 illustrerer den fysiske tolkningen av en fri harmonisk oscillator med likevektspunkt $x = 0$. Et fritt systemet har som vist en konstant periodisitet som svarer til konstante maximum ved $\pm x_{max}$ og $\pm \dot{x}_{max}$, som dikteres av initialbetingelsene x_0 og \dot{x}_0 i henhold til likning 2. I figur 2 er disse ekstremalpunktene belyst ved punkt 1 og 2 for maksimalt utslag og krysset langs banen indikerer fartsmaksima. Den fysiske tolkningen belyser faseforskyvningen mellom hastighet og posisjon for et harmonisk oscillerende system på 180° . I figuren til høyere fremgår at hastigheten er null når oscillatoren har maksimalt utslag i posisjon. Når klossen beveger seg mot

likevektspunktet etablerer akselerasjonen en hastighetsøkning, og når klossen beveger seg bort fra likevekt vil fjærkraften virke dempende på hastigheten. Følgelig etablerer akselerasjonens tilbakevirkende natur et hastighetsmaksima i likevektspunktet. Figuren til venstre i figur 2 viser hvordan disse maksimumspunktene utspiller seg i faserommet. På bakgrunn av ortogonaliteten i punktene $(x_{max}, 0)$ og $(0, \dot{x}_{max})$ er det derfor klart banen i faserommet alltid må stå vinkelrett på x- og y-aksen.

Ved å betrakte systemet for ulike tidsforløp blir det klart at banen i faserommet utvikler seg med klokken retning. For et gitt aksesystem må det nødvendigvis alltid være tilfellet at banen for alle sett av initialverdier beveger seg i samme retning. For vårt aksesystem svarer dette til at systemet vil bevege seg med klokken, og at det ikke er mulig å generere en bane som går mot klokken kun ved å endre initialverdiene x_0 og \dot{x}_0 . Dette forstås basert på at hastigheten alltid skifter fra negativt til positivt fortegn når legemet har positivt maksimalt utslag, og fra positivt til negativt fortegn ved negativt maksimalt utslag. Denne absolutte fysiske betingelsen legger grenser på systemet, og en endring av initiell posisjon og hastighet endrer kun hvor beregningene av banen begynner i faserommet. Det vil være ufysisk å ha et posisjonsmaksima i et punkt der hastigheten er forskjellig fra null og fortsetter å trekke systemet videre i samme retning.

Oppgave 2

For å simulere en dempet harmonisk oscillator kan man implementere et hastighet-savhengig dempningsledd i differensiallikning 1, slik at akselerasjonen nå er gitt ved

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} \quad (5)$$

der b er en dempningskonstant. Banen med dempning er plottet i faserommet i figur 3 for $b = 0.1$ kg/s. Fra plottet observeres at legemet ikke lenger beveger seg i en konstant elliptisk bane, men spiralerer inn mot $x = 0$ og $\dot{x} = 0$. Dette er en effekt av at for hver iterasjon trekkes litt energi ut av det simulerte systemet gjennom dempningsleddet, som fører til at maksimalutslaget, maksimalhastighet og totalenergi avtar med tiden. Denne effekten kan for eksempel være en representasjon for friksjonskraft fra en overflate oscillatoren sklir over eller luftmotstand som demper en pendel som omdanner systemets energi til termisk energi i omgivelsene.

Det kan både observeres fra plot 3 og ved en forståelse for kreftene at banen fortsatt står vinkelrett på posisjonsaksen, men ikke nødvendigvis på hastighetsaksen. Når systemet taper energi per propagasjon vil det fremgå en konstant innsnevring av posisjons- og hastighetsmaksima. I denne konstante endringen av posisjonsutslag er det ikke lenger å forvente at den maksimale hastigheten skal ligge ved $x = 0$, men heller noe i forkant av denne posisjonen. Ortogonaliteten av banen på posisjonsaksen vil derimot alltid være null ved posisjonsmaksima per definisjon og av den fysiske tolkning som er bundet til at hastigheten er null.

Punktet $x = 0$ og $\dot{x} = 0$ betegnes som en attraktor da systemets bane uavhengig

av initielle verdier trekkes inn mot origo. Endringer av initiell hastighet og posisjon endrer kun initiell energi og følgelig hvor langt ut banen starter. Denne bevegelsen er en konsekvens av den implementerte dempningskraften og at systemets kontinuerlig tappes for energi. Ettersom origo er et punkt, det vil si ikke har noen fysisk utstrekning langs dimensjonsaksene, så vil dimensjonen til attraktoren være null.

Kurven fra oppgave 1 er derimot ikke en attraktor, da undermengden av faserommet den elliptiske banen stabiliserer seg i ikke er den samme for forskjellige initielle verdier. Både halvaksene a og b samt banens eksentrisitet vil endres når initiell posisjon og hastighet endres. Dersom energien over tid derimot hadde stabilisert seg i den samme undermengden ville man kunne snakke om en endimensjonal attraktor, dette er derimot ikke tilfellet for systemer av harmoniske oscillatorer.

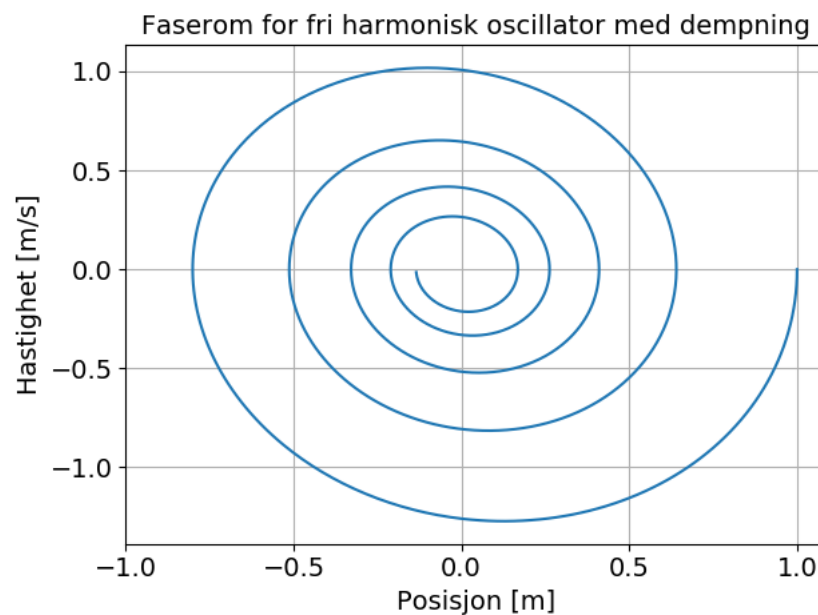


Figure 3: Bane i faserommet for dempet harmonisk oscillator.

Parametere: $m = 500\text{g}$; $k = 1\text{ N/m}$; $x_0 = 1\text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0\text{ m/s}$; $t = 20\text{s}$; $\Delta t = 0.01$

Oppgave 3

Differensiallikningen

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (6)$$

er en annenordens, inhomogen differensiallikning som beskriver en harmonisk oscillator uten demping subjekt til en eksternt påtrykt kraft $F(t)$. Den eksterne kraften er her gitt av $F(t) = F_D \cos(\omega_D t)$ der F_D er amplituden til kraften og ω_D er kraftens svingefrekvens. Denne typen ligninger har løsninger på formen

$$x = x_p + x_h \quad (7)$$

der x_p og x_h er henholdsvis den homogene og den partikulære løsningen av differensiallikningen. Den homogene løsningen utledes fra likningen

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (8)$$

og kategoriseres som en annen-ordens, lineær differensiallikning med konstante koeffisienter. Man kan derav slutte med at likning 8 løses ved å benytte den karakteristiske likningen. Likning 8 skrives derfor om til likning 1 og omformuleres i lys av den karakteristiske likningen til

$$D^2 x + \omega^2 x = 0 \text{ der } D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

Ved bruk av andregradslikningen finner man at denne likningen har røttene $\pm \omega i$. Når den karakteristiske likningen har to komplekskonjugerte røtter der realdelen er null følger det at den generelle løsningen av differensiallikningen er

$$x = C \sin \omega x + D \cos \omega x$$

Der C og D er vilkårlige konstanter betinget av initialverdiene. Deretter beregnes den partikulære løsningen der det må ta hensyn til den påtvungene oscillasjonen fra den eksterne kraftkilden. Dette gjøres ved å bruke ukjente koeffisienters metode, som er mulig da formen til løsningen er kjent i egenskap av å være en oscillator. På bakgrunn av at $F(t) = F_d \cos(\omega_f t)$ gjettes på en løsning på formen $x_p = A \sin(\omega_f t) + B \cos(\omega_f t)$. Det forsøkes derfor å sette denne løsningen inn i venstre side av den opprinnelige differensiallikningen.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) &= \\ (-A\omega_D^2 \sin(\omega_D t) + B\omega_D^2 \cos(\omega_D t)) + \frac{k}{m}(A \sin(\omega_D t) + B \cos(\omega_D t)) \\ &= A(\frac{k}{m} - \omega_D^2) \sin(\omega_D t) + B(\frac{k}{m} - \omega_D^2) \cos(\omega_D t) \end{aligned}$$

Når dette skal være lik $\frac{F_D}{m} \cos(\omega_D t)$ så anskueliggjøres det ved sammenlikning at koeffisientene må svare til

$$A\left(\frac{k}{m} - \omega_D^2\right) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$B\left(\frac{k}{m} - \omega_D^2\right) = \frac{F_D}{m} \rightarrow B = \frac{F_D}{k - m\omega_D^2}$$

Følgelig er den partikulære løsningen gitt ved

$$x_p = \frac{F_D}{k - m\omega_D^2} \cos(\omega_D t) \quad (9)$$

Den generelle løsningen er derfor gitt ved

$$x(t) = x_h + x_p = C \sin \omega x + D \cos \omega x + \frac{F_D}{k - m\omega_D^2} \cos(\omega_D t)$$

Finner koeffisienten C og D gitt initialbetingelsen $x_0 = 2$ m og $\dot{x}_0 = 0$ m/s.

$$x_0 = D + \frac{F_D}{k - m\omega_D^2} = 2 \rightarrow D = 2 - \frac{F_D}{k - m\omega_D^2}$$

Ved derivasjon av likningen og innsettning av $\dot{x}_0 = 0$ m/s fremgår

$$\dot{x}_0 = C\omega = 0 \rightarrow C = 0$$

Dernest kan den generelle løsningen omformuleres til

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(2 - \frac{F_D}{k - m\omega_D^2}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{F_D}{k - m\omega_D^2} \cos(\omega_D t) \\ &= 2 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_D}{k - m\omega_D^2} (\cos(\omega_D t) - \cos(\omega_0 t)) \end{aligned} \quad (10)$$

Skriver deretter om løsningen ved bruk av den trigonometriske identiteten

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (11)$$

slik at løsningen for $x(t)$ kan beskrives delvis-1.00,-0.5,-0.0,0.50,1.0], som et produkt av to sinusfunksjoner

$$2 \cos(\omega_0 t) - \frac{2F_D}{k - m\omega_D^2} \sin\left(\frac{\omega_D + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_D - \omega_0}{2} t\right) \quad (12)$$

Ved å skrive om løsningen til formen angitt i likning 12 anskueliggjøres hvordan superponeringen av cosinusfunksjonene underbygger fenomenet svingning, som opptrer når to bølgekilder med relativt like frekvenser intererer. Superposisjonen av to oscillerende cosinusfunksjoner gir et resultat der bølgen er ekvivalent med en bølge

$\cos \frac{\omega_D + \omega_F}{2} t$ modulert med en amplitude fra bølgen gitt ved $\cos \frac{\omega_D - \omega_F}{2} t$. Med andre ord en bølge med frekvens lik snittet av komponentfrekvensene som ligger tett opptil bølgen fra begge kildene, og en amplitudedefunksjon hvis frekvens er lik halvparten av differansen mellom komponentfrekvensene $\Delta\omega = \omega_D - \omega_0$. $\Delta\omega$ vil derfor være relativt liten sammenliknet med den snittede frekvensen, og komponentene vil til sammen utgjøre en strømning av bølgepakker som bygger opp raskere oscillasjoner. Produktet av superponeringen er illustrert i figur 4. Det er disse bølgepakkene som er kjent som svingningen, og som opptrer ved denne spesielle formen for interferens. Konsekvensen er at når de to frekvensene ω_0 og ω_D er relativt i fase vil produktet forsterkes, og når faseforskjellen øker vil produktet avta. Følgelig kan løsningen i likning 12 beskrives ved en høyfrekvent sinuskurve svært lik de to utgangspunktene, men som endrer størrelse i korrespondans med en puls ved frekvensen $\frac{1}{2}\Delta\omega$.

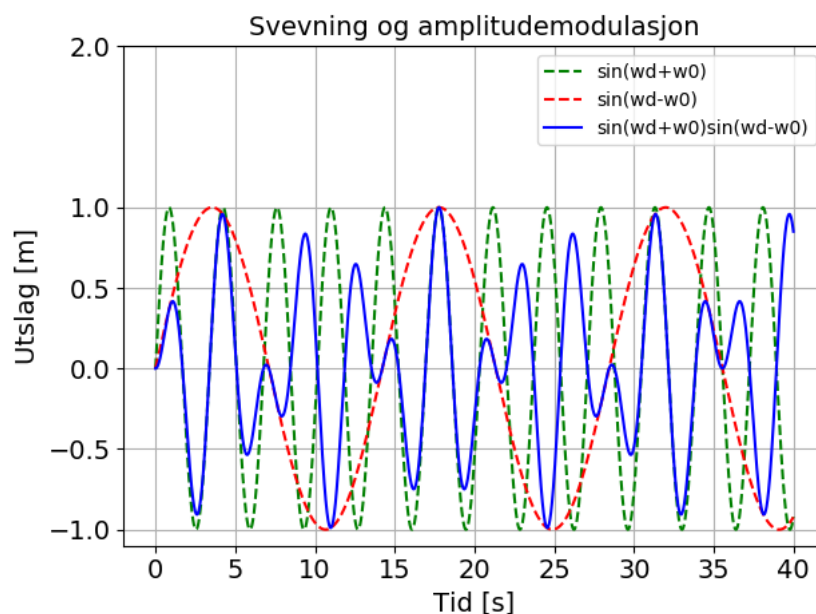


Figure 4: Produktet av to sinusfunksjoner med relativt lik frekvens som danner grunnlaget for svingning.

Parametere: $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$; $\omega_D = 13.8\omega_0$; $t = 20s$; $dt = 0.01s$

Oppgave 4

Se appendix for numerisk løsning av differensiallikning for tvungen harmonisk oscillator. Når numerisk og analytisk løsning fra oppgave 3 plottes i tidrommet observeres at løsningene sammenfaller som indikerer korrekt implementering. Banen i faserommet ved frekvensen $\omega_{D1} = 13/8\omega_0$ er plottet i figur 5a og frekvensen $\omega_{D2} = 2/(\sqrt{5} - 1)$ i figur 5b på bakgrunn av den numeriske løsningen. I begge plottene er banen beregnet over en tid på 200s. Bevegelsen i plot 5a er periodisk da raten mellom påtrykt frekvens

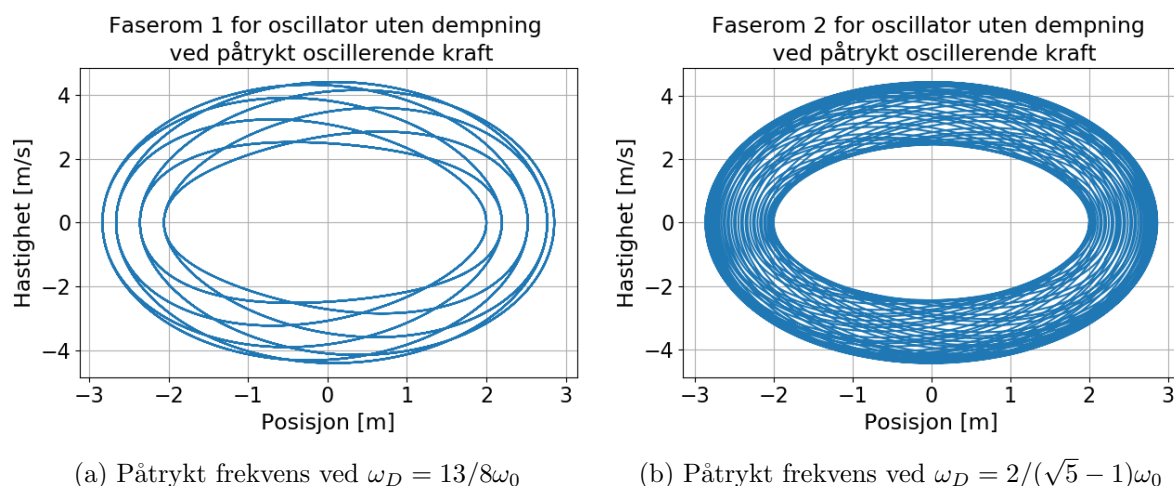


Figure 5: Bane i faserommet for tuvgngen harmonisk oscillerende masse $m = 500\text{g}$ uten demping med fjærkonstant $k = 1\text{ N/m}$. Initialposisjon $x_0 = 2.0\text{m}$ og initialhastighet $v_0 = 0.0\text{m/s}$ studert over 200s.

og systemets egenfrekvens er et rasjonalt tall, $\omega_D/\omega_0 = 13/8$. At dette er tilfellet for alle superponerte oscillatorer der frekvensraten mellom oscillatorene er rasjonale tall kan påvises ved et perioditetskriterie, som definerer en periodisk funksjon ved

$$f(x + p) = f(x) \quad (13)$$

Gitt to funksjoner hvis minste periode betegnes med p og q , slik at $f(x) = f(x + p)$ og $g(x) = g(x + q)$, vil det for alle naturlige tall a og b være slik at $f(x) = f(x + ap)$ og $g(x) = g(x + bq)$. Når q/p er et rasjonalt tall vil man kunne skrive forholdet som $q/p = a/b \rightarrow bq = ap$ for de to naturlige tallene. Derav følger det at $f(x + ap) + g(x + bq) = f(x + ap) + g(x + ap) = f(x) + g(x)$. Dette viser at summen er periodisk med en periode $ap = bq$ så lenge q/p er et rasjonalt tall.

Bevegelsen plottet i figur 5b er på den andre siden ikke periodisk, da raten mellom ω_D og ω_0 er et irrasjonalt tall. Når øvrige logikk benyttes på den analytiske løsningen i likning 12 fremgår det eksplisitt av periodekriteriet ved likning 13 at frekvensforholdene må være et rasjonalt tall.

$$(2 - \alpha) \cos(\omega_0 t) + \alpha \cos(\omega_D t) = (2 - \alpha) \cos(\omega_0 t + np) + \alpha \cos(\omega_D t + mq) \quad (14)$$

Her er n og m naturlige tall og p og q henholdsvis periodene til systemets egne svingefrekvens og den påtrykte frekvensen. Likningen skrives dernest om ved bruk av identiteten

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (15)$$

som leder til at

$$\begin{aligned} & (2 - \alpha) \cos(\omega_0 t + np) + \alpha \cos(\omega_D t + mq) \\ &= (2 - \alpha) [\cos(\omega_0 t) \cos(np) - \sin(\omega_0 t) \sin(np)] + \\ & \quad \alpha [\cos(\omega_D t) \cos(mq) - \sin(\omega_D t) \sin(mq)] \end{aligned} \quad (16)$$

Det observeres at hvis denne likheten skal holde så må

$$\cos(\omega_D t) \cos(mq) - \sin(\omega_D t) \sin(mq) = \cos(\omega_D t) \cos(\omega_0 t) \cos(np) - \sin(\omega_D t) \sin(\omega_0 t) \sin(np) = \cos(\omega_0 t) \quad (17)$$

Dette er kun tilfellet dersom

$$\begin{aligned} \cos(np) &= \cos(mq) = 1 \\ \sin(np) &= \sin(mq) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Følgelig ved definisjonen av en periode $P = 2\pi/\omega$ så må

$$np = mq \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\omega_0}{\omega_D} \quad (19)$$

Det fremgår altså at frekvensraten må være et heltall for at periodekriteriet skal være overholdt. Figur 5 antyder grafisk at dette stemmer. I figur 5a er banen bundet til den avbildede formen, uavhengig av integrasjonstiden t . Perioditeten lar seg også raskt observere ved plotting av banen i tidrommet, der det tilsynelatende er en periodetid på omtrentlig 70 sekunder. For banen i figur 5b vil banen derimot se en liten forskyvning i periodetiden som gjør at banen vil fylle større og større andeler av faserommet innenfor anviste ytterkanter desto lengre integrasjonstiden er.

Oppgave 5

Plot 6 er fremstilt fra likning 6 der et dempningsledd har blitt implementert som i likning 5.

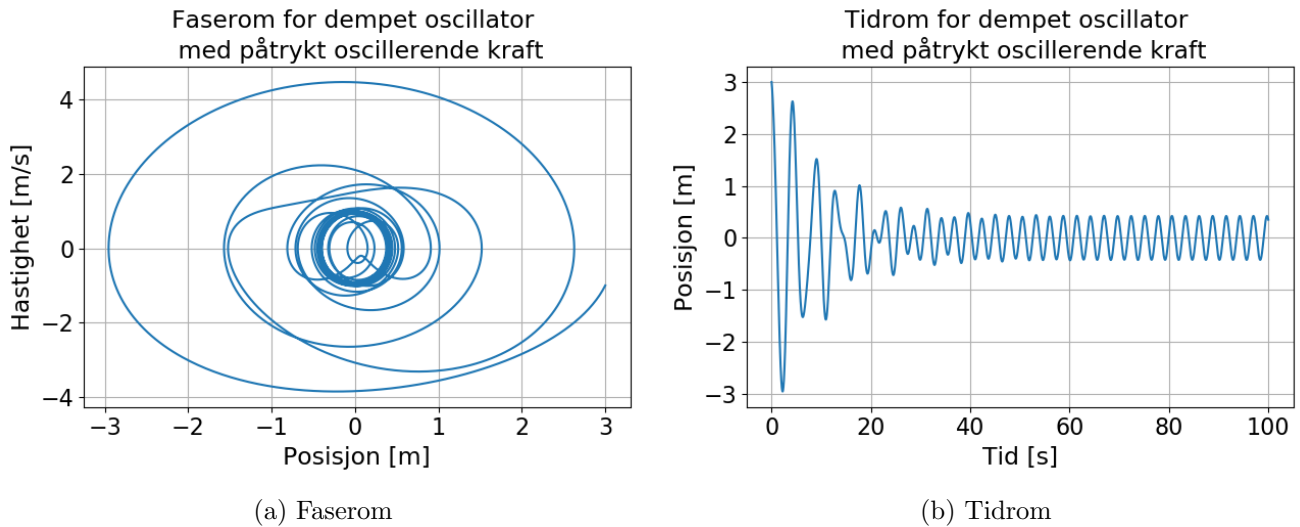


Figure 6: Bane i fase- og tidrom for tvungen harmonisk oscillator med påtrykt oscillerende kraft ved frekvens $\omega_D = 13/8\omega_0$.

Parametere: $m = 500\text{g}$; $b = 0.1\text{ kg/s}$; $k = 1\text{ N/m}$; $x_0 = 3.0\text{ m}$; $v_0 = -1.0\text{m/s}$; $t = 100\text{s}$; $dt = 1\text{e-}2\text{ s}$

Fra plottene i figur 6 fremgår det at systemet generelt har tre hovedfaser. Den første fasen karakteriseres av at systemet kan tilnærmes som en dempet harmonisk oscillator, da energien i systemet er såpass stor at fjærkraft og dempningskraft dominerer og gjør den eksterne kraften neglisjerbar. Når systemet med tiden har tapt tilstrekkelig mengde energi gjennom dempningskraften går systemet over i en mer variasjonspreget fase, der superposisjonen av bølgene fører til et mer komplisert uttrykk. Etter en liten periode vil systemet gå over i sin siste fase der oscillatoren stabiliserer seg i en bane tilsvarende den av en fri harmonisk oscillator. Det vil si at netto endring i energi er null og energien svarer til $E \approx 0.14J$. Det bemerkes at systemet kun ser den første fasen dersom den initielle energien er tilstrekkelig stor til at posisjonsavhengig fjærkraft dominerer den påtrykte kraften. Den samme tendensen er synlig for alle de initielle verdiene som ble utprøvd, og er følgelig en indikator på at systemet har stabilisert seg i en grensesykel som opererer som en endimensjonal attraktor. At ellipsen er tilnærmet den samme hver gang kan raskt sjekkes ved å benytte likningene 4 og 2 ved de siste integrasjonsverdiene når systemet har stabilisert seg. Det kan slik sjekkes at aksene og total energi er de samme mot slutfasen uansett initialbetingelser. Beregninger er vedlagt for tre forskjellige initielle verdier for å eksemplifisere spennet av attraktortendensene i tabell 1 Algoritmen er vedlagt i appendixet sammen med den numeriske integrasjonen over differensiallikningen. De tre banene presentert i figur 3, 5 og 6 har utartet seg basert

x_0 [m]	\dot{x}_0 [m/s]	E_0 [J]	$a_{sluttphase}$ [m]	$b_{sluttphase}$ [m]	$E_{sluttphase}$ [J]
0.0	0.0	0.0	0.52	0.73	0.14
3.0	-1.0	4.75	0.52	0.73	0.14
100.0	-20.0	5025.0	0.52	0.73	0.14

Table 1: Illustrerer hvordan ulike initialbetingelser korresponderer i samme sluttstadium for banen

på tre forskjellige differensiallikninger og vil følgelig besitte ulike egenskaper. I den følgende har jeg benyttet den rasjonale frekvensen $\omega_D = 13/8\omega_0$ som utgangspunkt for sammenlikningen. Den fundamentale forskjellen mellom figur 3 og 6 er at figur 6 også er subjekt til en påtrykt ekstern kraft. For den gitte harmoniske eksterne kraften er det slik at de to figurene likner hverandre når energien i system 3 er betraktelig større enn energien i bindingssykelen. En egenskap som sammenfaller med at den eksterne kraften blir neglisjerbar som bemerket i forrige avsnitt. Følgelig kan systemet i denne perioden tilnærmes med differensiallikningen som ligger til grunn for 6, for eksempel for en energi gitt initialveridene $x_0 = 100$ m og $\dot{x}_0 = -20$ m/s. Det er først når energien i system 6 begynner å nærme seg størrelsen på bindingssykelens energi at den eksterne påtrykte kraften gis en vektning i superposisjonen, og figurenes atferd ikke lenger likner hverandre. I denne regionen forårsaker superponering av de tre kreftene at system 6 får en mer komplisert atferd distinktiv fra system 3 med en faktor som tilsynelatende avhenger av initialbetingelsene til system 6. Når figur 6 så stabiliserer seg i bindingssykelen fremgår det tilsynelatende en likhet ved at begge figurene har attraktorer. Forskjellen blir da at figur 3 besitter en nulldimensjonal attraktor, mens figur 6 har en endimensjonal attraktor som følge av den eksterne kraften. Likevel er det videre slik at figur 6 etter at banen har gått inn i denne stabile fasen vil være en periodisk funksjon, og vil følgelig kunne tilnærmes med harmoniske funksjoner. Dette vil aldri være tilfellet for figur 3 som vil ha en kontinuerlig minkende periode som vil tilnærme seg null når tiden går mot uendelig.

Forholdet mellom figur 6 og 5 har også flere likheter når system 6 er i sin slutfase. Den fundamentale forskjellen mellom systemene er nå etablert av at system 6 er subjekt også til en dempningskraft som system 5 ikke innehar. Gitt det rasjonale frekvensforholdet mellom oscillatorene som utgjør system 5 vil systemet være vedvarende periodisk. Det tar derimot en viss tid avhengig av initialbetingelsene før system 6 oppnår periodisitet og også kan beskrives ved harmoniske funksjoner. En annen primær distinksjon mellom systemene er at system 5 ikke har noen attraktor. System 5 bindes tilsynelatende aldri til en bestemt bane på tvers av de initielle betingelse. Strukturen i system 5 er også mer kompleks sammenliknet med den av bindingssykelen i system 6. Det er ikke tilstrekkelig å tilnærme system 5 med kun en enkelt harmonisk funksjon, da det kreves en superposisjon av flere harmoniske funksjoner med et varierende spenn av frekvenser for å utforme banen.

Oppgave 6

For å modellere en dråpe i en vannkran kan man benytte et kraftbilde bestående av overflatespenningen fra vannet, friksjon mellom kranen og vannet og gravitasjonskraften. Når kranen lekker og tilfører en konstant masse til vanddråpen kan situasjonen modelleres med følgende differensiallikningssystem

$$\dot{m}(t) = \psi \quad (20)$$

$$\ddot{x} = -g - \frac{b + \psi}{m} \dot{x}(t) - \frac{k}{m} x(t) \quad (21)$$

Systemet er plottet for en periode på 3s i figur 7. Tidrommet for dråpen viser hvordan samspillet mellom den tilbakeførende kraften, friksjonskraften mellom kranen og vannet og gravitasjonskraften på vannet danner grunnlaget for oscillasjonene. I den første delen av bevegelsen trekker gravitasjonskraften massen nedover inntil posisjon og hastighet er tilstrekkelig stor til at friksjon og tilbakeførende kraft dominerer og vanddråpen bremses opp og til slutt begynner å bevege seg oppover mot gravitasjonskraften. Etterhvert som utslaget blir mindre og den tilbakeførende kraften mister sin betydning samt at dråpens hastighet avtar begynner gravitasjonen igjen å dominere og systemet oscillerer. Hadde det ikke vært for den kontinuerlige masseøkningen ville systemet ha oppført seg som om det eksisterte en nulldimensjonal attraktor på bakgrunn av dempningen. Ettersom massen kontinuerlig øker så vil betydningen av den tilbakeførende kraften og friksjonskraften som begge deles over massen avta med tiden. Til slutt vil de to kreftene være totalt neglisjerbare og gå mot null og $\ddot{x} \approx -g$. I denne simuleringen behandles dråpen som en punktpartikkel og er ikke veldig representativ for den fysiske prosessen. Oscillasjonene i begynnelsen er å forvente i henhold til kraftdynamikken og likner den observerte fysiske prosessen i en kran. Likevel har modellen en svært forenklet natur og de resterende delene av modellen svært lite realistiske. Modellen predikerer at punktet som representerer vannoverflaten strekker seg lenger og lenger nedover, og posisjonen til vannoverflaten går følgelig mot uendeligheten mens tiden går. Modellen totalt neglisjerer simuleringen av at dråpen faller av fra vannoverflaten, og hvordan vannoverflaten så må sprette tilbake, oscillerer for så å miste en ny dråpe. Videre er den kontinuerlige tilførselen av masse urealistisk i henhold til kraftbildet og samvirke mellom overflatespenning og gravitasjonskraft. Når vannoverflaten uavhengig simuleres som en punktpartikkel er det klart at store deler av kompleksiteten og dynamikken i fenomenet går tapt.

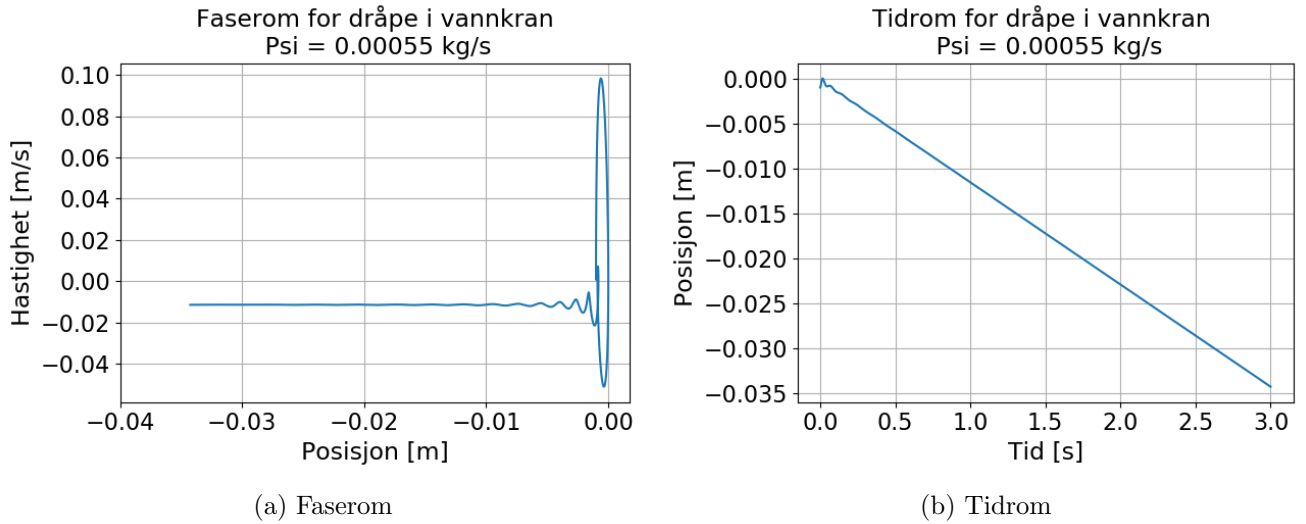


Figure 7: Bane i fase- og tidrom for dråpe i vannkran

Parametere: $m_0 = 0.00001$ kg; $b = 0.001$ kg/s ; $k = 0.475$ N/m; $x_0 = 0.001$ m; $\dot{x}_0 = 0.001$ m/s; $t = 3$ s; $\Psi = 0.00055$ kg/s; $dt = 1e-4$ s

Oppgave 7

Dersom man videreutvikler differensiallikningssystemet ved likning 20 og 21 til å omfatte massetap og korresponderende endringer i dråpens posisjon kan man gjøre modellen mer realistisk. Hver gang dråpen beveger seg forbi en kritisk avstand $x_c = 0.0025$ m fjernes nå en mengde av massen lik

$$\Delta m = \beta m(t_x) \dot{x}(t_c) \quad (22)$$

der $\beta = 50$ s/m og t_c er tidspunktet når posisjonen passerer x_c . Når denne massen trekkes fra korrigeres posisjonen til den simulerte dråpen med en reduksjon på

$$\Delta x = \sqrt[3]{\frac{3(\Delta m)^4}{4\pi\rho m(t_c)^3}} \quad (23)$$

der ρ er massetettheten til vann satt lik $\rho = 1000$ kg/m³.

Systemets tidsutvikling er plottet i tid- og faserom i figur 8. I tidrommet kan det observeres at systemet initielt oppfører seg likt systemet under oppgave 6, men en innledende fase der systemet oscillerer med dempninger. Når posisjonen når den kritiske grensen x_c observeres derimot konsekvensene av den implementerte masse- og posisjonsendringen. Dråpen feller en masse og det simulerte vannpunktet spretter tilbake opp igjen og faller ned mot den kritiske distansen på ny uten markante oscillasjoner langs veien. Etter en viss tid stabiliserer systemet seg i harmoniske oscillasjoner. Den samme tendensen til å stabilisere seg er følgelig også fremtredende i faseromsplottet. Her kommer samspillet mellom hastighet- og posisjonsendringer klarere

frem og gjenspeiler oscillasjonene, som en følge av dempningen. Den avtakende sirkulære tendensen i startsfasen belyser dempningen, og forflyttningen av banen langs x-aksen gjenspeiler hvordan dråpen faller lenger nedover.

Periodetiden lar seg effektivt sjekke ved å lagre tidsverdiene når hver dråpe simuleres å falle av, og så trekke differansen mellom disse tidene. Algoritmen er vedlagt i appendix. Naturligvis er ikke periodetiden initielt konstant mellom to dråper, da det tar tid for systemet å oppnå stabilitet. Etter at systemet derimot har stabilisert seg liknende en harmonisk oscillator vil periodetiden nå være konstant med en periode på $T = 0.1267$ s.

Når man endrer initialbetingelser blir det raskt klart at det er en endimensjonal attraktor i systemet. Uavhengig av de initielle verdiene, ihvertfall for alle $x, \dot{x} < 100$, vil systemet svinge inn mot oscillasjonene mellom omtrent -0.001 m og -0.0025 m som illustrert i tidromsplottet. Følgelig gjelder at periodetiden mellom to dråper initielt ikke er konstant, men etterhvert som systemet stabiliserer seg i attraktoren vil periodetiden uavhengig av initialbetingelsene svare til $T = 0.1267$. En endring i initialbetingelser viser seg å kun påvirke innsvingningsfasens bane og tiden det tar for systemet å stabilisere seg.

Sammenliknet med faserommet til system 3 likner system 8 pirmært i startsfasen. Dette er en naturlig følge av de dominerende dempede oscillasjonene før systemet stabiliserer seg. Det er likevel markant at tillegget av gravitasjonskraften supplerer en konstant faktor til akselerasjonen, som danner grunnlaget for en vedvarende, konstant forflyttning langs posisjonsaksen. Følgelig vil ikke faseromsplottet initielt spiralere inn mot et punkt som i 3 men ha en kontinuerlig forflyttning nedover. Dempningsleddet vil også ha en mer markant effekt på hastighetsutviklingen da den ved tillegget av ψ får økt vektning. Etter at dråpen har nådd den kritiske grensen x_c første gang har ikke lenger plottene så mye til felles.

Sammenliknet med 5 har plottene derimot mer til felles etter at system 8 har stabilisert seg. I denne fasen har begge systemer en etablert periodisitet, til tross for at strukturene på banene i faserommet uspiller seg svært forskjellig. Det er tilsynelatende en balanse i begge systemene som opprettholder harmoniske oscillasjoner. For system 8 betyr dette at dempning, overflatespenning og gravitasjon har utjevnet hverandre og i samspill avgjør samme effekt som et system subjekt til en eksternt påtrykket kraft.

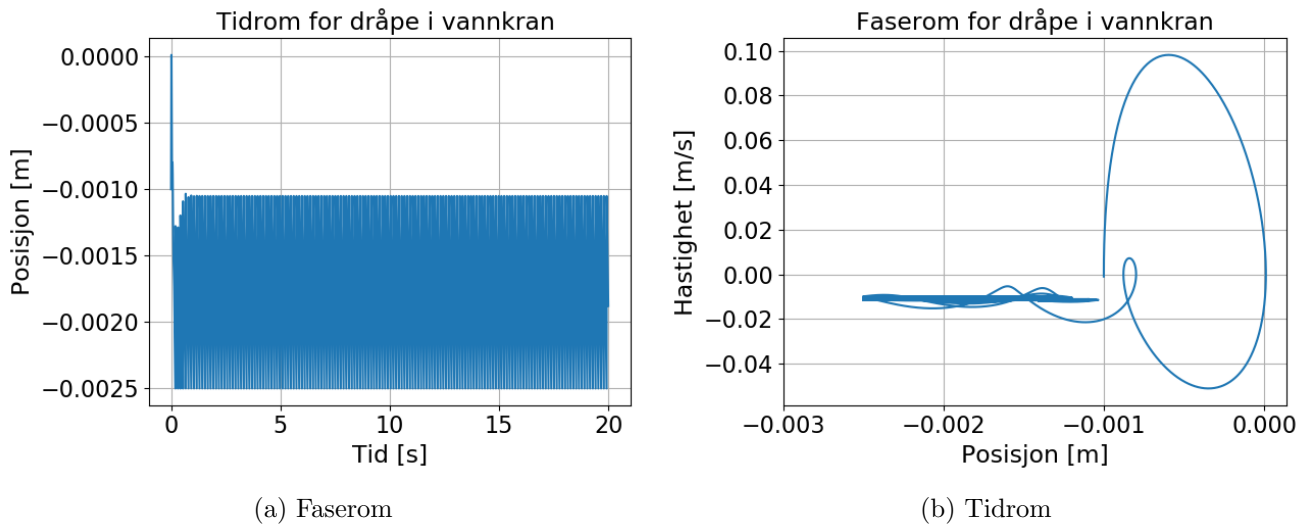


Figure 8: Bane i fase- og tidrom for dråpe i vannkran med korreksjoner for massetap og posisjonsendring som følge av massetap

Parametere: $m_0 = 0.00001$ kg; $b = 0.001$ kg/s ; $k = 0.475$ N/m; $x_0 = 0.001$ m; $\dot{x}_0 = 0.001$ m/s; $t = 20$ s; $\Psi = 0.00055$ kg/s; $dt = 1e-4$ s; $\rho = 1000$ kg/m³

Oppgave 8

Når man endrer på masseøkningssraten ψ påvirker det måten systemet stabiliserer seg på i etterkant av innsvingningsraten. For $\psi_1 = 0.00055$ Kg/s så er det en konstant periode, men når $\psi_2 = 0.00060$ Kg/s og $\psi_3 = 0.00063$ ser man at det opptrer henholdsvis 2 og 4 periodetider i den mer stabile fasen. Disse periode opptrer henholdsvis og repeterende, som foreksempel for ψ_2 der periodetidene varierer syklisk med $[0.1177, 0.1296, 0.1143, 0.1275, 0.1175, 0.1296, 0.1143, 0.1275, \dots]$. For $\psi_4 = 0.00063$ Kg/s er det tilsynelatende ikke noe åpenbart mønster i periodetidene, og de ser ut til å opptre vilkårlig. For $\psi_5 = 0.00065$ har systemet derimot gjennomgående kun en periodetid på $T = 0.1528$ s. Dersom man så integrerer bevegelsesligningene for 20s for 100 forskjellige verdier av $\psi \in [0.00055, 0.00075]$ og lagrer periodetidene for de 50 siste dråpene, det vil si når systemet burde ha beveget seg forbi innsvingningsgasen, kan man etablere en oversikt over utviklingen av periodetider per psi. Resultatene er fremstilt i figur 9. Her ser man hvordan man opptil en ψ -verdi noe før ψ_2 kun vil ha en periodetid, eller en attraktor, i systemet. For ψ -er fra denne grensen og noe opptil ψ_3 vil man derimot ha to attraktorer og to periodetider i systemet som oscillatoren veksler med å stabilisere seg om. Videre er det en økende spredning mellom disse periodetidene inntil systemet på nytt forgreiner seg i 4 periodetider, for så å forgreine seg i 16 periodetider osv. Det fremgår av plottet at tiden det tar mellom attraktorene å forgreine seg fra 1 til 2, fra 2 til 4, fra 4 til 16 osv avtar. I regionen rundt ψ_4 ser det ut til å herje kaos i systemet av periodetider. Det

virker som om det veksler med å være flere og færre periodetider og det fremgår ingen eksplisitt systematisk vekselvirkning mellom med hvilket tidsintervall de ulike dråpene faller. Mot slutten av beregningene for ψ -verdier tilnærmet ψ_5 har systemet likevel gjenfunnet harmoni og det er kun en periodetid i systemet, som gjenspeiler hva som initielt ble observert for de utprøvde ψ -verdiene. Denne regionen har tilsynelatende også en lineært avtakende verdi i periodetiden.

Figur 9 har en tendens til å dukke opp i den visuelle analysen av ikke-lineære dynamiske systemer, ofte assosiert med kaosteori og fraktale strukturer. Et kjent eksempel er befolkningsvekst basert på s-krue logistisk funksjon som illustrerer hvordan en befolkning vokser sakte, før den når et kritisk punkt der den vokser raskere, før den igjen når en økologiske bæreevne. Denne typen plott referers ofte til som bifurkasjonsdiagrammer for logistiske kart på bakgrunn av tendensen attrakter har til å forgreine seg over et gitt parameter i kaosteorien.

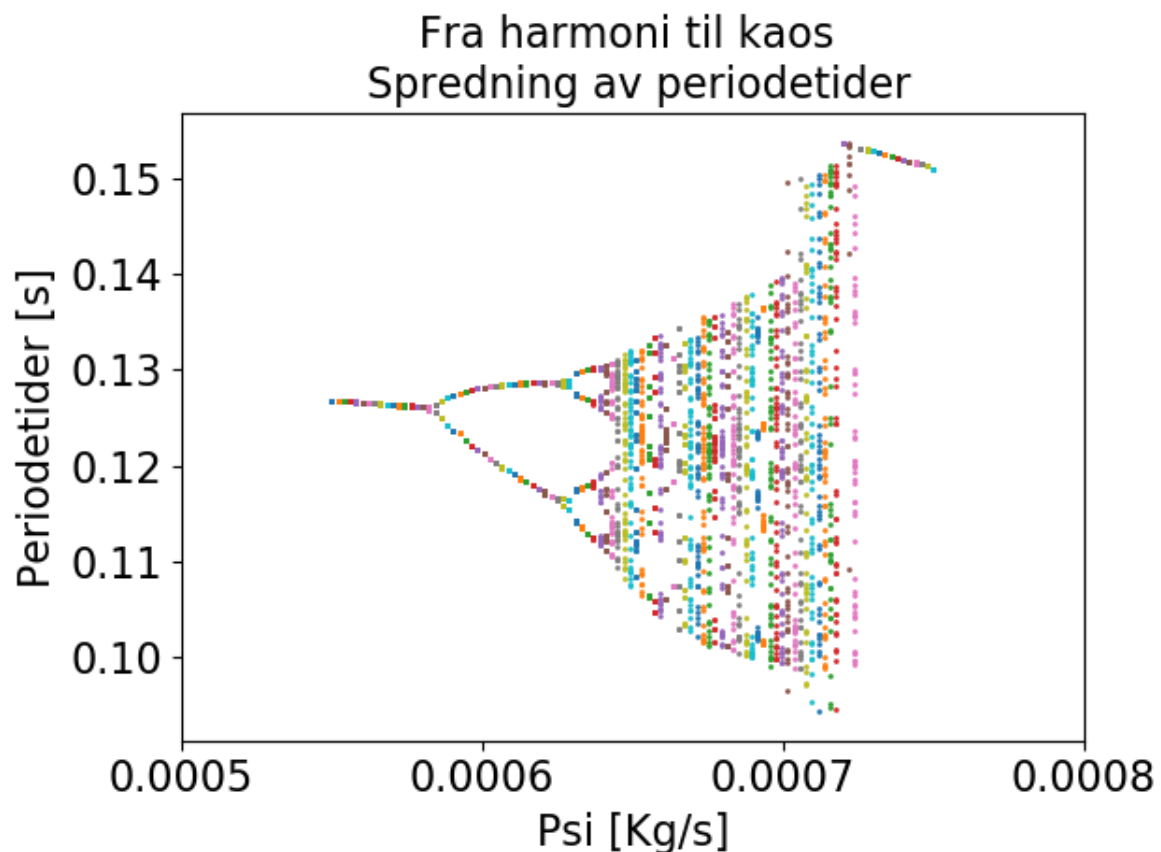


Figure 9: Spredningen av periode- n og attraktorer for 100ψ -verdier $\in [0.00055, 0.00075]$

Oppgave 9

Artiklene benyttet i denne sammenliknelsen var funnet i samarbeid med kandidat 15282 og 15226. I den øvrige modeleringen og simuleringen har det blitt observert forgreininger av periodetider, brede dynamiske spenn og overganger til kaotisk atferd. Resultater som gjentatt er blitt observert i simuleringer og eksperimenter av lekkende kraner.

Ved D’Innocenzo og Rennas matematisk modell og simulering for en dryppende vannkran ble det vist til flere av de samme egenskapene som påvist i den øvrige oppgaven [D’Innocenzo and Renna, 1996]. Deriblant kaotiske overganger som opptrer ved variasjoner av masseendringsraten ψ . Modellen av D’Innocenzo og Renna tok utgangspunkt i differensiallikning 21 og benyttet de samme initielle veridene og parameterene som herover. I figur 2 [pp. 946] presenterer D’Innocenzo og Renna plottingen av simulerte periodetider mot masseendringsratene, tilsvarende figur 9 i den øvrige oppgaven. I deres plot observeres den samme utviklingen av dobbelte periodetider som ble observert også her. Ved lave strømningsrater fant de at dråpene falt med en konstant periode eller en med en periode som vekslet mellom to tider. De to første strukturene ble omtalt av D’Innocenzo og Renna som periode-1 og periode-2 typee attraktorer, og de trakk følgelig samme konklusjoner om bandebindelsene i systemene som gjort ovenfor. Når de deretter økte strømningsraten over en kritisk grense observerte også D’Innocenzo og Renna at det opptrådte kaos i det simulerte systemet. Deres systemer utviste i sin helhet også et bredt spekter av dynamisk atferd [pp. 950]. Resultatene fra begge forsøk viste til hvordan endringer i overflatespenningen dramatisk endret systemenes dynamikk. Figur 2 ved D’Innocenzo og Renna påviste til forskjell fra øvrige resultater en vidre kaotisk utvikling i regionen som i figur 9 viste å stabilisere seg på ny. Som både fastslått av D’Innocenzo og Renna [pp. 942] og som observert under utformingen av øvrige simulering vil måten endringen av masse trekkes fra på og implementeres i systemet ha kraftige innvirkninger på om systemet gjenvant harmoni eller ikke. I forkant av ferdigstillingen av figur 9 ble en figur av samme struktur som D’Innocenzo og Rennas figur 2 fremstilt ved å endre måten massen ble trukket fra systemet på. D’Innocenzo og Renna konkluderer med at differentiallikningene av typen likning 21 uten masseendringsrate ikke evnet å reproducere alle de karakteristiske mønstrene av den dryppende kranen [pp. 959]. Underveis i utformelsen av de øvrige simuleringene har det blitt trukket de samme konklusjonene. Ettersom modellen presentert i oppgave 7 fremgikk mest realistisk i henhold til observasjoner av det faktiske fysiske fenomenet.

Eksperimentelt sett har kaotisk atferd, periodedobbeling og forgreining ved bifraksjoner blitt observert i eksperimentelle studier av lekkende kraner utført av Martin *et al.* [Martien *et al.*, 1985], Wu and Schelly [Wu and Schelly, 1989] og Sartorelli, Goncalves og Pinto [Sartorelli *et al.*, 1994]. Sartorelli, Goncalves og Pinto presenterte blant annet eksperimentelt bevis for de plutselige endringene fra kaotiske til periodiske

regimene, som sammenfalt godt med resultatene presentert av D’Innocenzo og Renna [pp. 972]. Den eksperimentelle dataen påviste tilstedeværelsen av overgangen fra periode-2 til periode-4 type attraktorer ved endringer av masseendringsratene. Blant annet belyser figur 3 [pp. 3964] hvordan samplingsdata av dråpene som falt av var subjekt til markante grensesjikt mellom kaotisk og konstante tidsintervaller mellom fallene. Figur 5 [pp. 3966] viser overgangen fra kaotisk tilstand til en periode-1 type attraktor. Denne eksperimentelle påviste egenskapen likner den siste overgangen simulert i øvrige resultater, der det simulerte systemet i figur 9 går fra en kaotisk tilstand til en konstant, enkelt periode. Disse resultatene påviser med andre ord en eksperimentell bakgrunn for simuleringene gjort i de øvrige oppgavene, som antyder at modellen evner å beskrive egenskaper ved det faktiske fysiske situasjonen rundt en dryppende kran.

Bibliografi

- [D’Innocenzo and Renna, 1996] D’Innocenzo, A. and Renna, L. (1996). Dripping faucet. *International Journal of Theoretical Physics*, 35(5):941–973.
- [Martien et al., 1985] Martien, P., Pope, S., Scott, P., and Shaw, R. (1985). The chaotic behavior of the leaky faucet. *Physics Letters A*, 110(7):399 – 404.
- [Sartorelli et al., 1994] Sartorelli, J. C., Gonçalves, W. M., and Pinto, R. D. (1994). Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment. *Phys. Rev. E*, 49:3963–3975.
- [Wu and Schelly, 1989] Wu, X. and Schelly, Z. (1989). The effects of surface tension and temperature on the nonlinear dynamics of the dripping faucet. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 40(3):433 – 443.

Appendix

Generell kode som ligger til grunn for oppgave 1-5

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def RK4(x_init, v_init, t_init):
    """
    :param x0: initial position
    :param v0: initial velocity
    :param t0: initial time
    :return: Solution to diffEquation
    """
    a1 = diffEquation(x_init, v_init, t_init)
    v1 = v_init

    xHalf1 = x_init + v1 * dt/2.0
    vHalf1 = v_init + a1 * dt/2.0

    a2 = diffEquation(xHalf1, vHalf1, t_init+dt/2.0)
    v2 = vHalf1

    xHalf2 = x_init + v2 * dt/2.0
    vHalf2 = v_init + a2 * dt/2.0

    a3 = diffEquation(xHalf2, vHalf2, t_init+dt/2.0)
    v3 = vHalf2

    xEnd = x_init + v3 * dt
    vEnd = v_init + a3 * dt

    a4 = diffEquation(xEnd, vEnd, t_init + dt)
    v4 = vEnd

    aMiddle = 1.0/6.0 * (a1 + 2*a2 + 2*a3 + a4)
    vMiddle = 1.0/6.0 * (v1 + 2*v2 + 2*v3 + v4)

    xEnd = x_init + vMiddle * dt
    vEnd = v_init + aMiddle * dt
    return xEnd, vEnd
```

Kode oppgave 1

```
def diffEquation(x, v, t):
    """
    :param x: position
    :param v: velocity
    :param t: time
    :return: acceleration of HO
    """
    return -k/m*x
```

```

m = 0.5; k = 1                                # [kg], [N/m]
dt = 1e-2                                     # [s]
t = np.arange(0,20,dt)
x, v = np.zeros(len(t)), np.zeros(len(t))
x[0], v[0] = 1.0, 0.0                         # [m], [m/s]

for i in range(len(t)-1):
    x[i+1], v[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i])

plt.plot(x,v)
plt.grid()
plt.title("Faserom for fri harmonisk oscillator", fontsize = 14)
plt.xlabel("Posisjon [m]", fontsize = 14)
plt.ylabel("Hastighet [m/s]", fontsize = 14)
plt.yticks(fontsize = 14)
plt.xticks([-1.00,-0.5,-0.0,0.50,1.0],fontsize = 14)
plt.show()

```

Kode oppgave 2

```

def diffEquation(x,v,t):
    """
    :param x: position
    :param v: velocity
    :param t: time
    :return: acceleration of HO
    """
    return -k/m*x - b/m*v

dt = 1e-2                                     # [s]
t = np.arange(0,20,dt)
x, v = np.zeros(len(t)), np.zeros(len(t))
x[0], v[0] = 1.0, 0.0                         # [m] [m/s]
]
k = 1.0; m = 0.5; b = 0.1                     # [Kg], [N
/m], [kg/s]

for i in range(len(t)-1):
    x[i+1], v[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i])

plt.plot(x,v)
plt.grid()
plt.title("Faserom for fri harmonisk oscillator med dempning", fontsize =
14)
plt.xlabel("Posisjon [m]", fontsize = 14)
plt.ylabel("Hastighet [m/s]", fontsize = 14)
plt.yticks(fontsize = 14)
plt.xticks([-1.00,-0.5,-0.0,0.50,1.0],fontsize = 14)
plt.show()

```

Kode oppgave 4

```

def diffEquation(x,v,t):
    """
    :param x: position
    :param v: velocity
    :param t: time
    :return: acceleration of HO
    """
    return Fd/m*np.cos(wd*t)-k/m*x

dt = 1e-2 # [s]
t = np.arange(0,200,dt)
x, v = np.zeros(len(t)), np.zeros(len(t))
x[0], v[0] = 2., 0.0 # [m] [m/s]
k = 1.0; m = 0.5; b = 0.1 # [Kg], [N
    /m], [kg/s]
Fd = 0.7 # [N]
w0 = np.sqrt(k/m) # [1/s]
wd = 13. / 8 * np.sqrt(k / m) # [1/s]
#wd = 2/(np.sqrt(5)-1)*w0 # [1/s]

for i in range(len(t)-1):
    x[i+1], v[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i])

plt.plot(x,v)
plt.grid()
plt.title("Faserom 1 for oscillator uten demping \n ved patrykt
    oscillerende kraft", fontsize = 17)
plt.xlabel("Posisjon [m]", fontsize = 17)
plt.ylabel("Hastighet [m/s]", fontsize = 17)
plt.yticks(fontsize = 16)
plt.xticks(fontsize = 16)
plt.show()

def analytical(t):
    return 2*np.cos(w0*t) - 2*Fd/(k-m*wd**2)*np.sin((w0+wd)*t/2)*np.sin((wd-
        w0)*t/2)

plt.plot(t, analytical(t))
plt.grid()
plt.title("Analytisk")
plt.xlabel("Posisjon/vinkel [rad]")
plt.ylabel("Vinkelhastighet [rad/s]")
plt.show()

```

Kode oppgave 5

```

def diffEquation(x,v,t):
    """
    :param x: position
    :param v: velocity
    :param t: time
    :return: acceleration of HO
    """
    return Fd/m*np.cos(wd*t)-k/m*x - b/m*v

dt = 1e-2
t = np.arange(0,100,dt)
x, v = np.zeros(len(t)), np.zeros(len(t))
x[0], v[0] = 3.0, -1.0
m, k = 0.5, 1
w0 = np.sqrt(k/m)
Fd = 0.7;
b = 0.1
wd = 13./8 * np.sqrt(k / m)
#wd = 2/(np.sqrt(5)-1)*w0
for i in range(len(t)-1):
    x[i+1], v[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i])

plt.plot(t,x)
plt.grid()
plt.title("Tidrom for dempet oscillator \n "
"med patrykt oscillerende kraft", fontsize = 17)
plt.ylabel("Posisjon [m]", fontsize = 17)
plt.xlabel("Tid [s]", fontsize = 17)
plt.yticks(fontsize = 16)
plt.xticks(fontsize = 16)
plt.show()

plt.plot(x,v)
plt.grid()
plt.title("Faserom for dempet oscillator \n med patrykt oscillerende kraft",
", fontsize = 17)
plt.xlabel("Posisjon [m]", fontsize = 17)
plt.ylabel("Hastighet [m/s]", fontsize = 17)
plt.yticks(fontsize = 16)
plt.xticks(fontsize = 16)
plt.show()

E = 0.5*k*x[-1]**2 + 0.5*m*v[-1]**2
a = np.sqrt(2*E/k)
b = np.sqrt(2*E/m)
print(E)
print(a, b)

```

Kode oppgave 6

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def diffEquation(x,v,t,m):
    """
    :param x: position
    :param v: velocity
    :param t: time
    :return: acceleration of HO
    """
    a = -x*k/m - v*(b+psi)/m - g
    print(a)
    return a

def RK4(x_init , v_init , t_init , m):
    """
    :param x0: initial position
    :param v0: initial velocity
    :param t0: initial time
    :return: Solution to diffEquation
    """
    m += psi*dt
    a1 = diffEquation(x_init , v_init , t_init , m)
    v1 = v_init

    xHalf1 = x_init + v1 * dt/2.0
    vHalf1 = v_init + a1 * dt/2.0

    a2 = diffEquation(xHalf1 , vHalf1 , t_init+dt/2.0 , m)
    v2 = vHalf1

    xHalf2 = x_init + v2 * dt/2.0
    vHalf2 = v_init + a2 * dt/2.0

    a3 = diffEquation(xHalf2 , vHalf2 , t_init+dt/2.0 , m)
    v3 = vHalf2

    xEnd = x_init + v3 * dt
    vEnd = v_init + a3 * dt

    a4 = diffEquation(xEnd , vEnd , t_init + dt , m)
    v4 = vEnd

    aMiddle = 1.0/6.0 * (a1 + 2*a2 + 2*a3 + a4)
    vMiddle = 1.0/6.0 * (v1 + 2*v2 + 2*v3 + v4)

    xEnd = x_init + vMiddle * dt
    vEnd = v_init + aMiddle * dt
    return xEnd, vEnd, m

```



```

dt = 1e-4
g = 9.81 # m/s
k = 0.475 # N/m
b = 0.001 # kg/s
t = np.arange(0,3,dt)
x = np.zeros(len(t))
v = np.zeros(len(t))
m = np.zeros(len(t))
x[0] = -0.001 # m
v[0] = 0.001 # m/s
m[0] = 0.00001 # kg

psi = 0.00055 # kg/s

for i in range(len(t)-1):
    x[i+1], v[i+1], m[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i], m[i])

plt.plot(t,x)
plt.grid()
plt.title("Tidrom for drape i vannkran \n Psi = 0.00055 kg/s", fontsize =
    17)
plt.ylabel("Posisjon [m]", fontsize = 17)
plt.xlabel("Tid [s]", fontsize = 17)
plt.yticks(fontsize = 16)
plt.xticks(fontsize = 16)
plt.show()

plt.plot(x,v)
plt.grid()
plt.title("Faserom for drape i vannkran\n Psi = 0.00055 kg/s", fontsize =
    17)
plt.xlabel("Posisjon [m]", fontsize = 17)
plt.ylabel("Hastighet [m/s]", fontsize = 17)
plt.yticks(fontsize = 16)
plt.xticks([0.0, -0.01, -0.02, -0.03, -0.04], fontsize = 16)
plt.show()

```

Kode oppgave 7

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def diffEquation(x,v,t,m):
    """
    :param x: position
    :param v: velocity
    :param t: time
    :return: acceleration of HO
    """

```

```

"""
k = 0.475  # N/m
b = 0.001  # kg/s
a = -x*k/m - v*(b+psi)/m - g
return a

def RK4(x_init, v_init, t_init, m):
    """
    :param x0: initial position
    :param v0: initial velocity
    :param t0: initial time
    :return: Solution to diffEquation
    """
    m += psi*dt
    a1 = diffEquation(x_init, v_init, t_init, m)
    v1 = v_init

    xHalf1 = x_init + v1 * dt/2.0
    vHalf1 = v_init + a1 * dt/2.0

    a2 = diffEquation(xHalf1, vHalf1, t_init+dt/2.0, m)
    v2 = vHalf1

    xHalf2 = x_init + v2 * dt/2.0
    vHalf2 = v_init + a2 * dt/2.0

    a3 = diffEquation(xHalf2, vHalf2, t_init+dt/2.0, m)
    v3 = vHalf2

    xEnd = x_init + v3 * dt
    vEnd = v_init + a3 * dt

    a4 = diffEquation(xEnd, vEnd, t_init + dt, m)
    v4 = vEnd

    aMiddle = 1.0/6.0 * (a1 + 2*a2 + 2*a3 + a4)
    vMiddle = 1.0/6.0 * (v1 + 2*v2 + 2*v3 + v4)

    xEnd = x_init + vMiddle * dt
    vEnd = v_init + aMiddle * dt
    return xEnd, vEnd, m

dt = 1e-4
g = 9.81  # m/s
t = np.arange(0, 20, dt)
x = np.zeros(len(t))
v = np.zeros(len(t))
m = np.zeros(len(t))
x[0] = 0.001  # m
v[0] = 0.001  # m/s
m[0] = 0.00001  # kg

```

```

psi = 0.00055                                # kg/s
xc = 0.0025
beta = 50                                     # s/m
rho = 1000

def delta(x,v, m):
    dm = beta*m*abs(v)
    if m-dm <= 1e-6:                          # Korrigerer for negativ
        masse
    dm = m-1e-6
    x += (3*dm**4/(4*np.pi*rho*m**3))**(1./3)
    m -= dm
    return x, m

x0 = -np.array([0.001])
v0 = -np.array([0.001])

for u in x0:
    x[0] = u
    for vu in v0:
        v[0] = vu
        times = []
        for i in range(len(t)-1):
            if abs(x[i]) > xc:
                x[i], m[i] = delta(x[i], v[i], m[i])
                times.append(t[i])
                x[i+1], v[i+1], m[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i], m[i])

        times = np.ediff1d(times)
        print(times)
        plt.plot(t,x)
        plt.grid()
        plt.title("Tidrom for drape i vannkran ", fontsize = 17)
        plt.ylabel("Posisjon [m]", fontsize = 17)
        plt.xlabel("Tid [s]", fontsize = 17)
        plt.yticks(fontsize=16)
        plt.xticks([0,5,10,15,20], fontsize=16)
        plt.show()

        plt.plot(x,v)
        plt.grid()
        plt.title("Faserom for drape i vannkran", fontsize = 17)
        plt.xlabel("Posisjon [m]", fontsize = 17)
        plt.ylabel("Hastighet [m/s]", fontsize = 17)
        plt.yticks([0.00,-0.02], fontsize=16)
        plt.ylim([-0.01,-0.015])
        plt.xticks([-0.001,-0.002,-0.003], fontsize=16)
        plt.show()

```

Kode oppgave 8

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def diffEquation(x,v,t,m,psivar2):
    """
    :param x: position
    :param v: velocity
    :param t: time
    :return: acceleration of HO
    """
    k = 0.475 # N/m
    b = 0.001 # kg/s
    a = -x*k/m - v*(b+psivar2)/m - g
    return a

def RK4(x_init , v_init , t_init , m, psivar):
    """
    :param x0: initial position
    :param v0: initial velocity
    :param t0: initial time
    :return: Solution to diffEquation
    """
    m += psivar*dt
    a1 = diffEquation(x_init , v_init , t_init , m, psivar)
    v1 = v_init

    xHalf1 = x_init + v1 * dt/2.0
    vHalf1 = v_init + a1 * dt/2.0

    a2 = diffEquation(xHalf1 , vHalf1 , t_init+dt/2.0 , m, psivar)
    v2 = vHalf1

    xHalf2 = x_init + v2 * dt/2.0
    vHalf2 = v_init + a2 * dt/2.0

    a3 = diffEquation(xHalf2 , vHalf2 , t_init+dt/2.0 , m, psivar)
    v3 = vHalf2

    xEnd = x_init + v3 * dt
    vEnd = v_init + a3 * dt

    a4 = diffEquation(xEnd , vEnd , t_init + dt , m, psivar)
    v4 = vEnd

    aMiddle = 1.0/6.0 * (a1 + 2*a2 + 2*a3 + a4)
    vMiddle = 1.0/6.0 * (v1 + 2*v2 + 2*v3 + v4)

    xEnd = x_init + vMiddle * dt
    vEnd = v_init + aMiddle * dt

```

```

    return xEnd, vEnd, m

dt = 1e-4
g = 9.81                                # m/s
t = np.arange(0,20,dt)
x = np.zeros(len(t))
v = np.zeros(len(t))
m = np.zeros(len(t))
x[0] = -0.001                            # m
v[0] = -0.001                            # m/s
m[0] = 0.00001                           # kg
xc = 0.0025
alpha = 50                               # s/m
rho = 1000

def delta(x,v, m):
    dm = alpha*m*abs(v)
    if m-dm <= 1e-6:                      # Korrigerer for negativ
        masse                             masse
    dm = m-1e-6
    x += (3*dm**4/(4*np.pi*rho*m**3))**(1./3)
    m -= dm
    return x, m

def plot(t,x,v):
    """
    For plotting av spredning i periodetider
    """
    psi_variations = np.linspace(0.00055,0.00075,100)
    for j in range(len(psi_variations)):
        t_new = []
        psi_new = []
        for i in range(len(t)-1):
            x[i+1], v[i+1], m[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i], m[i], psi_variations[j])
            if abs(x[i]) > xc:
                x[i+1], m[i+1] = delta(x[i], v[i], m[i])
            t_new.append(t[i])
            psi_new.append(psi_variations[j])
        t_new = np.array(t_new)
        t_new2 = np.ediff1d(t_new)

        plt.scatter(np.ones(len(t_new2[-51:]))*psi_variations[j], t_new2
[-51:], s = 1)
        plt.xlim([0.0005,0.0008])
        plt.hold(True)
        plt.ylabel("Periodetider [s]", fontsize=16)
        plt.xlabel("Psi [Kg/s]", fontsize=16)
        plt.title("Fra harmoni til kaos \n Spredning av periodetider",

```

```

    fontsize=16)
    plt.yticks(fontsize=14)
    plt.xticks([0.00050, 0.00055, 0.00060, 0.00065, 0.00070, 0.00075,
0.0008], fontsize=14)
    plt.show()
    return t,x,v
plot(t,x,v)

def plot2(t,x,v):
    """
    :return: For effektiv plotting av psi-variasjoner
    """
    psi_variations = np.array([0.55,0.60,0.63,0.65,0.73])*1e-3
    for j in range(len(psi_variations)):
        t_new = []
        psi_new = []
        for i in range(len(t)-1):
            x[i+1], v[i+1], m[i+1] = RK4(x[i], v[i], t[i], m[i], psi_variations[j])
        if abs(x[i]) > xc:
            x[i+1], m[i+1] = delta(x[i], v[i], m[i])
            t_new.append(t[i])
            psi_new.append(psi_variations[j])
        t_new = np.array(t_new)
        t_new2 = np.ediff1d(t_new)
        print(t_new2[20:])

    plt.plot(t, x)
    plt.grid()
    plt.title("Tidrom for drape i vannkran \n Psi = 0.00055 kg/s",
    fontsize=17)
    plt.ylabel("Posisjon [m]", fontsize=17)
    plt.xlabel("Tid [s]", fontsize=17)
    plt.yticks(fontsize=16)
    plt.xticks(fontsize=16)
    plt.show()

    plt.plot(x, v)
    plt.grid()
    plt.title("Faserom for drape i vannkran \n Psi = %g kg/s" % (
psi_variations[j]), fontsize=17)
    plt.xlabel("Posisjon [m]", fontsize=17)
    plt.ylabel("Hastighet [m/s]", fontsize=17)
    plt.yticks([-0.15, -0.125, -0.1, -0.075, -0.05, -0.025, 0, 0.025],
    fontsize=16)
    plt.xticks([0.0010, 0, -0.001, - 0.0020], fontsize=16)
    plt.show()
    return t,x,v
plot2(t,x,v)

```