

Lengde, hastighet og aksellerasjon

Oline A. Ranum

Universitetet i Oslo; Institutt for fysikk

olinear@student.matnat.uio.no

(Dated: March 9, 2018)

Det følgende eksperimentet ble utført 07. Februar 2018 hvis formål var en økt forståelse for sammenhengen mellom lengde hastighet og aksellerasjon. Artikkelen presenterer først sentral teori vedrørende relasjoner fra mekanikken, dopplerskift, fouriertransformasjoner, usikkerhetsbehandling og noen teoretiske modeller anvendt i videre forsøk. Deretter fremgår en beskrivelse av eksperimentets tre delforsøk bestående av ulike metoder for å estimere de tre størrelsene fra teoretiske modeller i samspill med målinger av modellens parametere. Deretter presenteres resultater fra forsøkene, så gjennomgås diskusjon av øvrige resultater før eksperimentets konklusjon trekkes. Artikkelen sekundære fokus var å illustrere hvordan usikkerheter beregnes i sammensatte størrelser og hvordan teoretiske modeller samvirker med målt data.

INTRODUKSJON

Eksperimentene undertatt i denne artikkelen søker å gi en dypere innsikt i mekanikkens verden og sammenhenger mellom lengde, hastighet og aksellerasjon. Delforsøkene vil benytte seg av ulike metoder innen datasampling og bruk av måleinstrumenter for å betrakte ulike metoder for å estimere størrelsene. Å finne nye metoder for å estimere størrelser som ikke lar seg måle direkte er nødvendig for å møte verdens mer komplekse problemstillinger. Likevel kan det ikke alltid forventes at nøyaktigheten til slike estimatene er tilsvarende god. Analyse av usikkerheter gis derfor en sentral rolle i denne artikkelen.

Det første delforsøket tar for seg direkte og indirekte måling av lengder. Ved å benytte en meterstokk, lasermåler og et skyvelær til å måle lengden av to aluminiumsstenger vil det bli klart hvordan usikkerheter opptrer ved direkte og indirekte målinger. Deretter vil denne innsikten anvendes til å forstå usikkerheter og måleteknikker assosiert med å tilpasse data til teoretiske modeller. Herunder i lys av et estimat for en Focault-pendels snorlengde.

Det andre delforsøket illustrer hvordan endringer i lufttrykk kan anvendes for å estimere hastigheten til en lydkilde. Konseptet om dopplerforskyvelse vil anvendes for å relatere efrekvensendringer til lydkildens hastighet.

Det tredje delforsøket vil estimere aksellerasjon på tre måter og sammenlikne måleteknikk og teoretisk analyse. Estimatenes vil dannes med utgangspunkt i dopplerforskyvelse og i lys av den klassiske mekanikkens relasjoner mellom distanser og tid. Estimatenes vil så sammenliknes med en rent teoretisk tilnærmelse til størrelsen.

Fysikkens kunst er deduksjon av generelle sammenhenger i naturen, og vi håper med dette forsøket å kunne illustrere noen viktige poeng om hvordan ulike verktøy kommer sammen for å analysere og observere naturen. Forhåpentlig vis vil man i samspillet mellom analyse og eksperiment komme litt nærmere å forstå den verden som omgir oss og oppnå innsikt til å håndtere nye problemstillinger.

TEORI

A. Lengde, hastighet og aksellerasjon i klassisk mekanikk

I den klassiske mekanikken er sammenhengen mellom lengde, hastighet og aksellerasjon gitt som i likning 1. Der a representerer aksellerasjonen, v står for hastighet og x er distanse.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

Denne teoretiske tilnærmelsen fremstår simpel, men i realiteten oppstår raskt komplikasjoner som gjør størrelsene utfordrende å måle. Av den grunn kan behovet for forenklete relasjoner oppstå, man vil foreksempel kunne benytte seg av likning 2 og 3 for å betrakte gjennomsnittelige verdier som estimerer for relevante størrelser.

$$\Delta x = \Delta v \Delta t \quad (2)$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t^2} \quad (3)$$

En av de mest fundamentale lovene i klassisk mekanikk burde også trekkes fram da den ofte anvendes for å gi en teoretisk tilnærmelse til aksellerasjonsberegning, Newtons andre lov. Dersom vi har et legeme som sklir nedover et skråplan utelukkende subjekt til gravitasjonskraften kan vi med utgangspunkt i Newtons andre lov hevde at aksellerasjonen kan tilnærmes med likning 4. Der a_x er aksellerasjonen langs med skråplanet, g er gravitasjonskonstanten og γ er vinkelen til planet.

$$a_x = g \sin \gamma \quad (4)$$

B. Svingetid for en pendel

Dersom det ikke er mulig å gjennomføre direkte målinger av en størrelse kan man alternativt søke å konstruere teoretiske modeller bestående av målbare parametere for å beskrive fenomenet. For eksempel kan man vise til følgende relasjon mellom en pendels periodetid og snorlengde som angitt i likning 5. Da det ofte kan være lettere å måle tiden over et vist intervall enn en fysisk lengde av en pendelsnor vil likningen kunne omskrives til å gi et estimat av snorlengden.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5)$$

Her er T periodetiden, L snorlengden til pendelen og $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ er gravitasjonskonstanten kjent til 3% nøyaktighet.

Doppler-effekt

Tidvis kan det være utfordrende å måle både distanser, hastighet og aksellerasjon med god nøyaktighet. Det kan derfor være gunstig å søke alternative måter å estimere størrelsene på. Illustrativt for en slik metode er å benytte dopplershift til å estimere hastighet.

Lydbølger vil alltid bre seg med en viss hastighet i forhold til et medium og vil følgelig være subjekt til en potensiell dopplereffekt. Det vil si opplevelsen av at lyd fra en lydkilde endrer tonhøyde når kilden passerer en observatør.

Gitt en lydkilde i ro vil kilden produsere konsentriske bølger. Alle bølgefrontene vil ha samme sentrum og observatøren vil oppfatte en ensartet frekvens. Dersom observatøren derimot er plassert slik at lydkilden nærmer seg, vil det oppleves at bølgetoppene har en høyere frekvens enn om kilden var i ro. Fenomenet er illustrert i figur 1. Størrelsen på den forskjøvede frekvensen vil være direkte relatert til hastigheten som angitt i likning 6. Det vil med andre ord være mulig å estimere lydkildens relative hastighet dersom vi kjenner kildens faktiske frekvens og gjør målinger av den dopplershiftede frekvensen.

$$f_m = \frac{c}{c - v} f \quad (6)$$

Her er f frekvensen til lydbølgen fra en lydkilde i ro, f_m er frekvensen til lydkilden som beveger seg mot opptakeren i ro med hastigheten v og c er lydhastigheten i tørr luft (til 0.1% nøyaktighet). Lydhastigheten i tørr luft er angitt i likning 7, der T er lufttemperaturen i Celcius.

$$c = 331.1 + (0.606T) \text{ m/s} \quad (7)$$

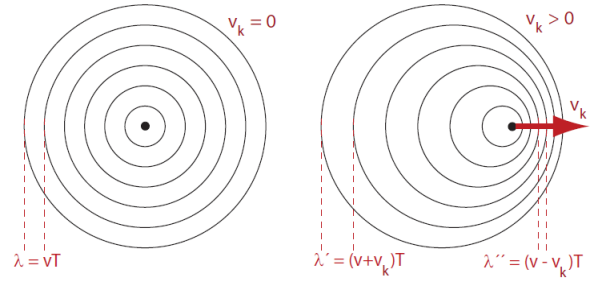


FIG. 1. Lydbølger vil bre seg med samme hastighet i alle retninger i mediet lydbølgen brer seg i. Dersom kilden er i ro i forhold til luften vil bølgetoppene ligge like lang fra hverandre. Dersom kilden er i bevegelse i forhold til luften med en hastighet v_k vil bølgetoppene ligge tettere på den ene siden enn på den andre.

Fouriertransformasjon

For å effektivt analysere resultatene av de samplede lydbølgene opptrer behovet for fouriertransformasjoner. En diskret fouriertransformasjon vil behandle N samplede datapunkter over en tidsdifferanse Δt og angi et korresponderende frekvensspekter. Når et lydopptak tas registreres amplitudene til en lyd per tid $t_i \in \Delta t$. Ved hjelp av likning 8 kan samplingene i tidsdomenet transformeres til frekvensdomenet, og gi informasjon om frekvenskomponentene som inngår i den samplede lyden.

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} \quad (8)$$

for $k = 0, \dots, N-1$. Her er x_n de samplede verdiene i tidsdomenet og X_k det tilsvarende settet med verdier i frekvensdomenet.

For å forstå potensielle feil og usikkerheter assosiert med et samplet datasett må vi forstå hvordan samplingen virker sammen med dataen som presenteres fra fouriertransformasjonen. Tidsoppløsningen angitt av likning 9 og hastighetsoppløsningen av likning 10 er nødvendig for å forstå hvordan lyden tas opp og hvorfor ikke samplingen nødvendigvis vil gi det riktige bildet av lyden. I likningene herunder er N antallet målinger som gjøres og T den totale tiden der målingene tas opp.

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (9)$$

$$\Delta v = \frac{c}{2Tf} \quad (10)$$

Analyse av usikkerheter

Uavhengig av hva slags målinger som gjennomføres vil det alltid være usikkerheter assosiert med eksperimentelle teknikker. Usikkerheter vil opptre på forskjellig vis relativt til alle målinger og fremgår av varierende art. En absolutt usikkerhet kan være vanskelig å beregne, men når vi har tallfestet den vil vi også alltid kunne estimere en relativ usikkerhet definert som i likning 11 Relativ usikkerhet er definert som

$$\Delta z_{rel} = \frac{\Delta z_{abs}}{Z} \quad (11)$$

For usikkerheter assosiert med datasett, der en størrelse har blitt målt gjentatte ganger, kan det derimot være rimlig å anta at en absolutt usikkerhet kan estimeres med utgangspunkt i spredningen av måleresultatene. Med andre ord kan det i slike tilfeller benyttes et standardavvik fra gjennomsnittet av observasjoner som usikkerhetsestimant. Dette standardavviket vil være bestemt av likning 12.

$$\sigma_m \approx \sqrt{\frac{1}{n^2 - n} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

Videre er det helt sentralt å kontroll på usikkerheter som inngår når man estimerer sammensatte størrelser. Relasjonene mellom usikkerhetene i de målte parameterene og det endelige estimatet er angitt i tabell I, der A og B er de målte parameterene og Z er den sammensatte størrelsen. Ofte vil en enkelt størrelse inneha en usikker-

Relasjon Z og A,B	Relasjon standardavvik
$Z = A \pm B$	$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 \pm (\Delta B)^2$
$Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n \frac{\Delta A}{A}$
$Z = AB$	$(\frac{\Delta Z}{Z})^2 = (\frac{\Delta A}{A})^2 + (\frac{\Delta B}{B})^2$

TABLE I. Oversikt over usikkerhetsberegninger i sammensatte størrelser

het som er satt sammen av mange forskjellige komponenter. Deriblant usikkerheter assosiert med sikting, menneskelige feil og usikkerheter i måleinstrumentene. Likning 13 er eksemplifiserende for hvordan en målt distanse uttrykkes med sine assosierte usikkerheter.

$$l = l_a + dl_s + \sum_i^n dl_{i,i} + dl_m + \alpha l_a (T - 20^\circ C) \quad (13)$$

Her er l_a er den avleste lengden og dl_s korreksjonen for sikting fra enden av stangen til målestokken. $dl_{i,i}$ er korreksjon for slark i ledd i og n er antallet ledd benyttet i den aktuelle lengdemålingen. dl_m er korreksjon for toleransen til målestrekene. Det siste leddet i likningen referer til den termiske ekspansjonen i materialet til målestokken. For et fiberglass-materialet vil en passende temperaturutvidelseskoeffisient være $\alpha = 2 \times 10^{-5} C^{-1}$. Videre er T er romtemperaturen målingen gjøres ved og fratrekket på $20^\circ C$ er referansetemperaturen til en Hultafors glass-fiber målestokk.

Vektet midling

En viktig ide i analyse av målte størrelser er at gjentatte målinger reduserer effekten av tilfeldige feil, og under korrekte forhold også systematiske feil. Dermed kan man ofte oppnå en bedre nøyaktighet ved å gjennta forsøket, og følgelig blir hypotesen og analysen antatt å være bedre. Eksempelvis kan det være gunstig å gjennomføre vektete midlinger av målte størrelser. En slik vektning kan angis ved likning 14, hvis korresponderende vektete standardavvik er gitt ved likning ??.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n 1 / \sigma_i^2} \quad (14)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n 1 / \sigma_i^2}} \quad (15)$$

Usikkerheter i stigningstall

Usikkerheter relatert til stigningstall i lineærtilpassninger kan estimeres ved bruk av likning 16. For en generell linje $y = mx + c$ har man i henhold til Squires (s.39, 4. Utgave) at

$$(\Delta m)^2 \approx \frac{1}{n-1} \frac{\sum x_i^2 \sum y_i^2 - (\sum x_i y_i)^2}{(\sum x_i^2)^2} \quad (16)$$

EKSPERIMENTELL METODE

A. Lengde

I eksperimentets første del tok vi for oss lengdemålinger, tidsmålinger og hvordan å beregne en sammensatt størrelse ved den teoretiske modellen beskrevet av likning 5. Vi begynte forsøket med å måle lengder på to aluminiumsstenger ved bruk av tre metoder. Først benyttet vi en meterstokk for å måle lengden av aluminiumsstav A (l_A) og aluminiumsstav B (l_B) direkte. For å redusere usikkerheter assosiert med parallakseeffekter ble stokken lagt så tett inntil staven som mulig. Deretter eliminerte vi risikoen for feil ved nullpunktsavlesninger ved å ta målinger i begge ender av staven og subtrahere lengdemålene fra hverandre. Deretter benyttet vi en lasermåler for å måle l_A og l_B på nytt. Lasermåleren ble plassert kant i kant med den ene enden av stangen, og i den andre enden plasserte vi en svart papplate som reflekterte laserlyset tilbake til måleren. Oppsettet for målingene med meterstokk og lasermåler er skissert i figur 2. Vi målte så lengdeforskjellen mellom aluminiumsstengene direkte ved å benytte et digitalt skyvelær. Stengene ble lagt side om side inn mot en vegg og vi målte differansen mellom lengdene i den andre enden med skyvelæret. Til slutt målte vi temperaturen i rommet ved å sikte et IR-termometer på den svarte papplaten.

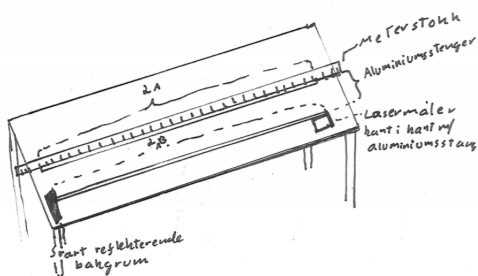


FIG. 2. Skisse for måling av aluminiumsstengenes lengde med henholdsvis meterstokk og lasermåler.

I forsøkets andre del estimerte vi periodetiden og målte massesenterhøyden til Foucaultpendelen ved fysisk institutt på UiO. Periodetiden ble estimert ved bruk av en stoppeklokke. Det ble tatt totalt tyve påfølgende tidsmålinger når pendelen nådde sitt maksimale utslag, der de ti midterste verdiene ble benyttet til å beregne et gjennomsnitt representativt for periodetiden. Deretter estimerte vi høyden til pendelkulens massesenter. For å forenkle målingene antok vi at snoren var masseløs og at kula hadde en perfekt kulesymmetrisk massefordeling. Selve estimeringen av høyden ble gjort ved å sikte lasermåleren inn på midten av kulen når kulen var i sitt bunnpunkt etter øyemål. Diagonalt for lasermålen satt vi en meterstokk med nullpunkt på bakkenivå, og leste av verdien der lasermåleren traff meterstokken. Vi benyt-

tet de diagonale siktlinjene opptegnet under pendelen til å minimere usikkerhetene assosiert med siktlinjen fra lasermåler til målestokk. Vi lot i tillegg lasermåleren stå helt inntil glasset som omgikk pendelen. Fra det samme stedet som meterstokken ble plassert målte vi høyden til taket ved hjelp av lasermåleren. Pendelen, måleteknikken og pendelomgivelsene er skissert i figur 3. Beregningene av l_p som er lengden av pendelsnoren over takhøyden gjøres av flere grupper, og resultatene deles så i fellesskap slik at det kan gjøres en vektet midling for å finne \bar{l}_p med feilestimat S_m .

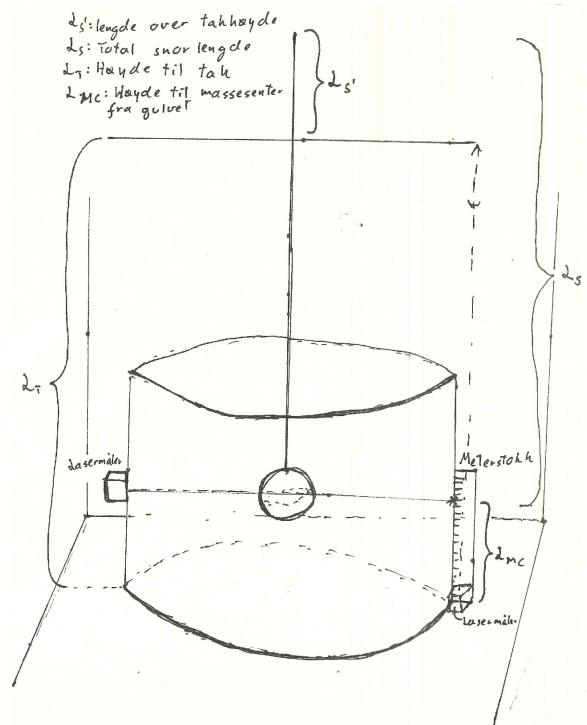


FIG. 3. Skisse for måling av høyden til Foucaultpendelens massesenter og pendelens omgivelser.

B. Hastighet

Eksperimentets andre del tok for seg en metode for å estimere hastighet med utgangspunkt i innspilte lyd-frekvenser subjekt til dopplerforskyvning. Forsøket benyttet seg av en mikrofon for å ta opp lyd over en periode på 3 sekunder og programvare for å fouriertransformere den samplede lyden. Programvaren produsere tre plot for frekvenser, tid, energier og amplituder. I forkant av forsøket ble det gjort samplinger av bakgrunnslyden i rommet for å kunne betrakte feilkilder og andre tilstedeværende tendenser ved rådataen og energispektrum. Deretter ble det samlet et opptak av en tilnærmet ren tone, for å betrakte effektene av en distinktiv lyd på energispekter og rådata.

Forsøkets hoveddel var sentrert om å konstruere et uttrykk for bilens hastighet som funksjon av tid. En lydkilde ble plassert på taket av en lekebil og satt rett under mikrofonen. Lyden ble så samlet slik at frekvens til lydkilden kunne estimeres mens bilen stod i ro. Deretter ble bilen satt ovenfor mikrofonen på en gummi matte som illustrert i figur 4. Når bilen så ble satt til å kjøre rett mot mikrofonen var det mulig å sample en frekvens subjekt til dopplereffekten som ønsket. Deretter ble likning 6 benyttet til å estimere bilens hastighet mot mikrofonen. Ved å benytte en lineærtilpassning av dataen kunne det følgelig konstrueres et uttrykk for hastigheten som funksjon av tiden.

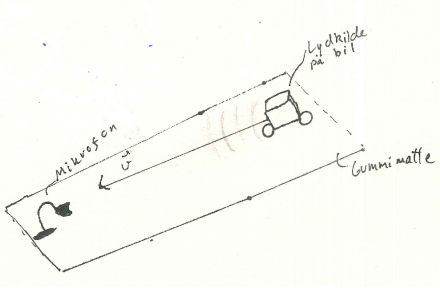


FIG. 4. En radiobil med lydkilde plasseres ovenfor en mikrofon på tvers av en gummi matte. Opptaket settes igang, bilen starter i ro og kjøres rett mot mikrofonen.

C. Aksellerasjon

Det siste deleksperimentet var sentrert om beregne aksellerasjon ut ifra samlet lyd. For dette eksperimentet festes en lydkilde på taket av en legobil, og frekvensen til lydkilden måles først i ro på samme måte som i forsøk B. Som illustrert i figur 5 ble en legobil med en lydkilde på taket satt på toppen av et skråplan, 20 cm nedenfor toppen av planet. Lengdene L_1 , L_2 og L_3 som referert til i figuren måles med meterstokk. For å estimere vinkelen på skråplanet benyttes lengden L_1 og den varierende lengden L_3 ved hjelp av trigonometriske relasjoner. Lydopptaket settes igang og bilen slippes fra en tilstand i ro nedover planet. Passeringstiden t_x måles ved hjelp av en stoppeklokke som startes når bilen slippes og stoppes når bilen når mikrofonen etter øyemål. Tidene som ble målt vil benyttes sammen med likning 3 for å gi et anslag for en gjennomsnittelig aksellerasjon. På samme måte som i delforsøk B kan hastigheten estimeres ved hjelp av dopplereffekten og likning 6. Ved hjelp av en lineærtilpassning av disse måletallene kan det vidre finnes et stigningstall som også ble brukt for å gi et anslag på aksellerasjonen. Forsøket ble så gjentatt for vinkler på 11.4° og 19.9° . Alle estimater for $a_v(\gamma)$ gjøres for den første tidsmålingen, de andre tidsmålingene er kun for å estimere aksellerasjonen a_t .

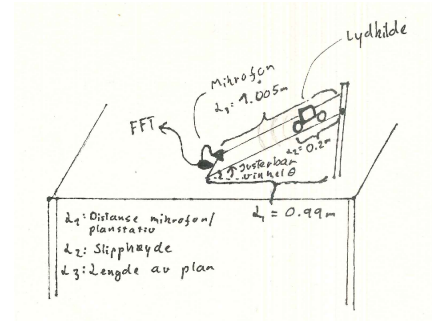


FIG. 5. Legobil med lydkilde som ruller nedover et skråplan mot en mikrofon. L_3 er lengden av skråplanet, $L_2=20\text{cm}$ er dropphøyden til bilen og L_1 svarer til distansen mellom mikrofonen (bunn av skråplan) til skråplanets stativ. Vinkelen varieres og følgelig endres L_1 .

I. RESULTATER

A. Lengde

Romtemperaturen var på starten av eksperimentet $T = 22.0 \pm 0.5^\circ\text{C}$. Mål av lengder på aluminiumsstengene er presentert i tabell II, der det fremgår at stengene hadde en forskjellig lengde og var avhengig av valgt måleinstrument. Usikkerhetene assosiert med meterstokken er angitt i tabell III. Alle endelige lengdemåle med deres absolutte og relative usikkerheter er angitt i tabell VI.

Stang	Instrument	Lengdemål [cm]
A	Meterstokk	195.0-75.5
A	Lasermåler	192.2
B	Meterstokk	182.6-63.0
B	Lasermåler	119.7
B-A	Skyvelær	0.2

TABLE II. Lengdene målt på aluminiumsstengene.

	X_i [cm]	δx_i [cm]
l_a	119.5	0
l_b	119.6	0
dl_s	0	0.02
$\sqrt{n}dl_l$	0	$\sqrt{6} \times 0.5 = 1.2$
dl_m	0	0.14
$\alpha l_a(22.0^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})$	0.005	0.0005
$\alpha l_b(22.0^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})$	0.005	0.0005
l_A	$\sum_i x_i$ 119.5	$\sqrt{\sum_i \delta x_i^2}$ ± 0.3
l_B	119.6	± 0.3

TABLE III. Usikkerhetsbudsjett for måling med meterstokk.

Usikkerheter assosiert med lasermålingene er presentert i tabell IV.

	X_i [cm]	δx_i [cm]
l_a	119.2	0
l_b	119.7	0
dl_{s1}	0	0.02
dl_{s2}	0	0.01
dl_{la}	0	0.2
l_A	$\sum_i x_i$	$\sqrt{\sum_i \delta x_i}$
l_B	119.2	± 0.23
	119.7	± 0.23

TABLE IV. Usikkerhetsbudsjett for måling ved lasermåler

Her er dl_{s1} korreksjon for sikting på plassering av lasermåler relativt til aluminiumsstangen og dl_{s2} er korreksjon for stabilisering av refleksjonsflate i motsatt ende av stangen. dl_{la} er den typiske målenøyaktigheten ved lasermåleren. Direkte målinger av lengdedifferansen mellom stavene med skyvelær er angitt i tabell V.

	X_i [mm]	δx_i [mm]
l_{B-A}	2.00	0
l_s	0	0.2
l_i	0	0.03
l_{B-A}	$\sum_i x_i$	$\sqrt{\sum_i \delta x_i}$
	2.00	± 0.23

TABLE V. Usikkerhetsbudsjett for måling av lengdedifferanse med skyvelær.

Stav	Lengdemål [cm]	Relativ usikkerhet [%]
$l_{A, stokk}$	119.5 ± 0.3	0.3
$l_{A, laser}$	119.2 ± 0.2	0.2
$l_{B, stokk}$	119.6 ± 0.3	0.3
$l_{B, laser}$	119.7 ± 0.2	0.2
$l_{A-B, Skyvelær}$	0.200 ± 0.023	12

TABLE VI. Totaloversikt av lengdemålinger med absolutte og relative usikkerheter.

Differansen betraktet som en sammensatt størrelse fra målingene med meterstokk og lasermåler med sine sammensatte usikkerheter er angitt i tabell VII

Metode	$l_B - l_A$ [mm]	$\Delta(l_B - l_A)$ [mm]
Meterstokk	1	0.4
Lasermåler	5	0.3

TABLE VII. Differansen beregnet som sammensatt størrelse med usikkerheter.

Ved oppgavens andre del ble periodetider målt som angitt i tabell VIII.

Måling	Periode [s]
1	7.41
2	7.56
3	7.54
4	7.57
5	7.45
6	7.68
7	7.64
8	7.45
9	7.69
10	7.67
T_{avg}	7.57 ± 0.03

TABLE VIII. Mål av Foucaultpendelens periode.

Lasermåleren målte en takhøyde tilsvarende

$$h_{tak} = 13.859 \pm 0.002\text{m}$$

Usikkerhetsbudsjett for måling av høyden til massesenteret Her er H_{cm} den målte massesenterhøyden, dh_{sm}

	X_i [cm]	δx_i [cm]
H_{mc}	18.5	0
dh_{sm}	0	5.0
dl_{lm}	0	0.14
$\sqrt{n}dl_i$	0	0.05
l_A	$\sum_i x_i$	$\sqrt{\sum_i \delta x_i}$
	18.5	5.2

TABLE IX. Usikkerhetsbudsjett for måling ved lasermåler

siktungskorreksjonen av lasermåleren på massesenteret.

$$H_{mc} = 18.5 \pm 1.7\text{cm} \quad (17)$$

Høyden til massesenteret har en relativ usikkerhet som svarer til 8.7 %. Disse målingene kan vi benytte til å estimere snorlengden til pendelen med sin usikkerhet Der-som likning 5 løses med hensyn på snorlengden gis en lengde på 14.24 m hvis usikkerhet er beregnet med hensyn til tabell I.

$$L_{snor} = \left(\frac{t_{avg}}{2\pi}\right)^2 g = \left(\frac{7.57}{2\pi}\right)^2 \times 9.81 = 14.24\text{m} \quad (18)$$

For å finne hvor høyt over taket Foucaultpendelen er festet kan vi så trekke takhøyden fra snorlengden og legge til massesenteret.

$$l_p = l_s - (h_{tak} - h_{mc})$$

$$l_p = 14.24\text{m} - (13.859 - 0.185)\text{m} = 0.566\text{m}$$

Våre beregninger tilsvarer at pendelen skal være festet

$$l_p = 56.6 \pm 13.4\text{cm}$$

Gruppe	$l_p \pm \Delta l_p$ [cm]
1	72 ± 3.8
2	56.9 ± 0.9
3	99.2 ± 1.0
4	53.2 ± 2.0
5	59.3 ± 1.9
6	46.8 ± 3.9
7	47.5 ± 14.8
8	56.6 ± 13.4
9	71.3 ± 38
10	44.5 ± 1.2

TABLE X. Oversikt over gruppenes målinger av l_p og Δl_p .

over takhøyden, som svarer til en relativ usikkerhet på 23.7 %. Resultatene for alle gruppene er oppført i tabell X.

En vektet midling av denne dataen gir i henhold til 15 og ??

$$\bar{l}_p = 66.4\text{cm} \quad (19)$$

$$\sigma_{\bar{l}_p} = 0.5\text{cm} \quad (20)$$

B. Hastighet

Bakgrunnsstøy

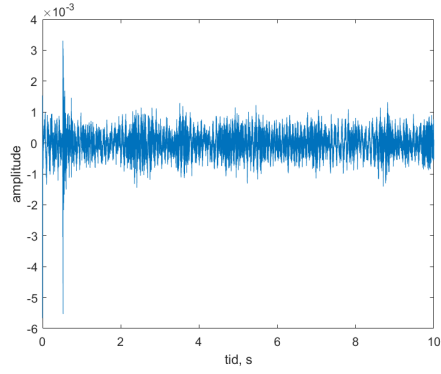


FIG. 6. Amplitude målt over tid for bakgrunnsstøy

Ren tone

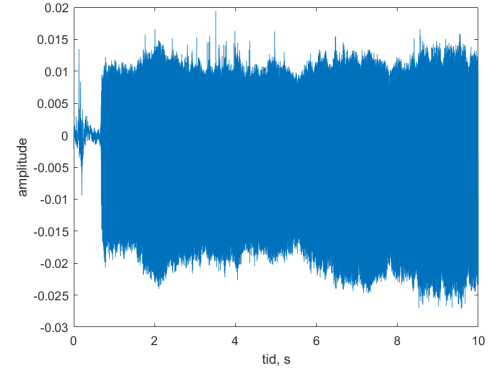


FIG. 9. Amplitude målt over tid for bakgrunnsstøy

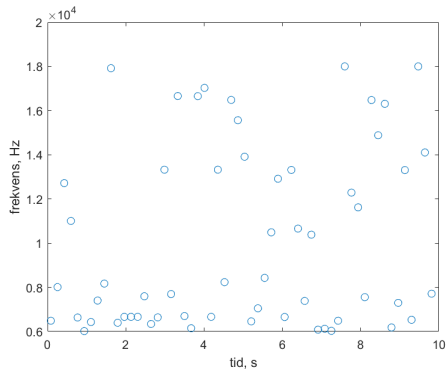


FIG. 7. Frekvenser målt over tid for bakgrunnsstøy

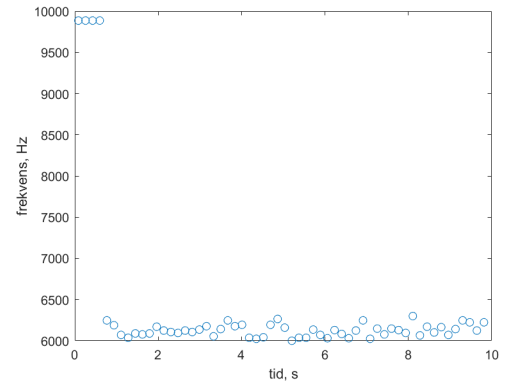


FIG. 10. Frekvenser målt over tid for bakgrunnsstøy

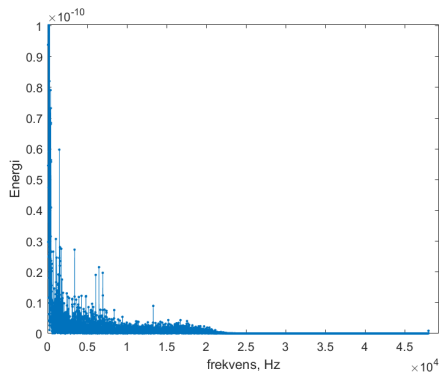


FIG. 8. Energi per frekvens målt over en periode på 10s for bakgrunnsstøy

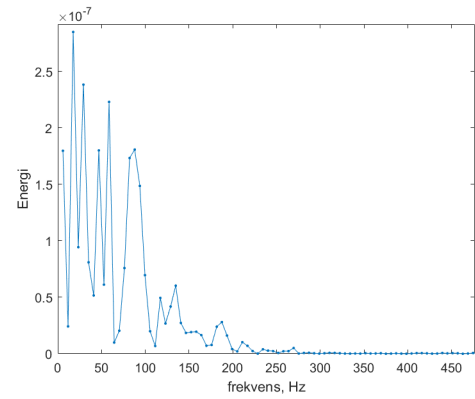


FIG. 11. Energi per frekvens målt over en periode på 10s for bakgrunnsstøy

Eksemplifiserende bakgrunnsstøy er angitt i figur 6, 7 og 8. Det fremgår at bakgrunnsstøyen opptrer for frekvenser inntil 2000 Hz, men ved svært lave energinivåer. Energinivåene er tilsynelatende størst for de laveste frekvensnivåene. Det fremgår av figur 6 at den samlede lyden kan være sensitiv ovenfor tilfeldige bakgrunnsutslag. Eksemplifiserende plot for når lydbildet forstyrres av en ren tone er illustrert i figur 9, 10 og 11. Det fremgår av plottene at tilførselen av en markant fremtredende lyd vil fremgå klart når lyden samples. Det bemerkes likevel at det kan være vanskelig å skille lavere frekvenser fra bakgrunnsstøyen som i vist i figur 11.

Ved lydopptak når bilen står i ro under mikrofonen kan man estimere frekvensen til lydkilden. Dette gjøres ved å lese direkte av energi-frekvensplottet som illustrert i figur 12. Siden den svært markante frekvensen vil bære såpass høy energi relativt til bakgrunnsstøyen fremgår det eksplisitt hvilken frekvens det må være. Lydkildens frekvens korresponderer til omtrentelig 7009 Hz.

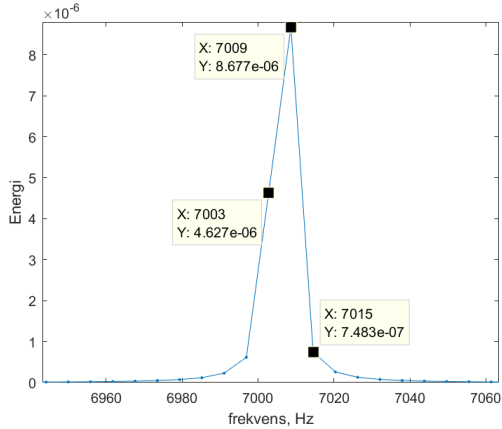


FIG. 12. Plotter energi mot frekvens fra opptak av lydkilden i ro. Lydkildens frekvens fremgår på 7009 Hz.

Når bilen kjøres langs gumimatten fremgår en dopplerforskjøvet frekvens i lydbildet som kan anvendes til å estimere bilens hastighet. Likning 6 løses for fartsparemeteret og resultatet er plottet mot tiden i figur 13. Hastigheten antas å være tilnærmet lineært avhengig av tiden og ved å gjøre en lineærtilpassning av datamengden kan vi tilnærme et uttrykk for hastigheten til bilen som funksjon av tid. Da vi samler 17 målinger over en periode på 3 sekunder får vi en tidsoppløsning på $\Delta t = 0.18$ s. Følgelig får vi også en hastighetsoppløsning på $\Delta v = 13.9$ cm/s. Figur 13 viser lineærtilpassningen og måledataen av hastigheten som funksjon av tid. Lineærtilpassningen av måledataen gir at hastigheten på det korte intervallet kan tilnærmes ved likning 21.

$$v(t) = 0.0152 + 2.3943t \quad (21)$$

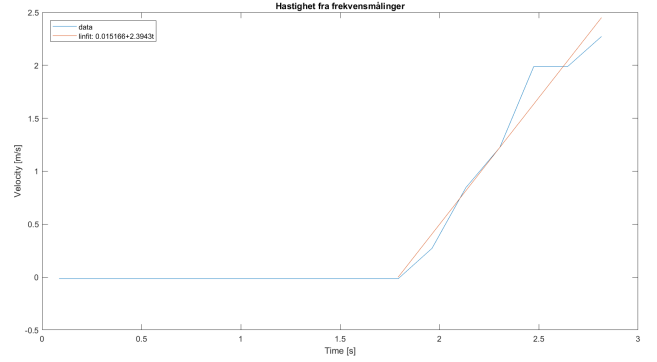


FIG. 13. Hastighetsplott for målt dopplerforskyvning

C. Aksellerasjon

Frekvensen til lydkilden når legobilen er i ro måles til $f = 6850$ Hz. De tre vinklene for skråplanet estimeres til $\gamma_1 = 9.9^\circ$, $\gamma_2 = 11.4^\circ$ og $\gamma_3 = 19.9^\circ$. Tabell XI er et illustrativt usikkerhetsbudsjett for alle lengdemål av skråplanet og dets stativ som danner utgangspunktet for usikkerheten i vinkelen. For vinkelen $\gamma = 11.3^\circ$ er $L_1 = 98.5$ cm og for $\gamma = 19.9^\circ$ er $L_1 = 94.5$ cm, der selve lengden av skråplanet tilsvarer $L_3 = 100.5$ cm. Det vil si at usikkerheten på ± 2.7 gjelder for alle målingene av L_3 og følgelig inngår i alle feilestimatene av vinkelen. Tabell XII, XIV og XVI angir fem målinger for tiden ved henholdsvis vinkel γ_1 , γ_2 og γ_3 . Beregningene av teoretisk aksellerasjon gjøres i henhold til likning 4.

	X_i [cm]	δx_i [mm]
L_1	100.5	0
L_3	99.0/98.5/94.5	0
dl_s	0	0.2
$\sqrt{n}dl_{L1}$	0	$\sqrt{6} \times 0.5 = 1.2$
$\sqrt{n}dl_{L3}$	0	$\sqrt{5} \times 0.5 = 1.1$
dl_m	0	1.4
L_1	$\sum_i x_i$	$\sqrt{\sum_i \delta x_i^2}$
L_3	100.5	± 2.8
	99.0/98.5/94.5	± 2.7

TABLE XI. Usikkerhetsbudsjett for måling av lengde på skråplan og skråplastativet. L_1 og L_3 korresponderer til parameterene i figur 5.

1. $\gamma_1 = 9.9^\circ$

Målinger av tiden det tar for bilen å rulle ned skråplanet ved γ_1 er angitt i tabell XII.

Måling	Tid [s]
t_1	1.21
t_2	1.10
t_3	1.15
t_4	1.12
t_5	1.04
t_{avg}	1.12
σ	0.03

TABLE XII. Målinger av tid fra legobil slippes til legobil treffer mikrofonen ved vinkel på 9.9° .

Ved likning 3 er da den gjennomsnittelige aksellerasjonen gitt ved

$$a_{t1} = \frac{80.5}{1.12^2} \pm 4.4 \text{ cm/s}^2 = 0.64 \pm 0.04 \text{ m/s}^2 \quad (22)$$

Dette svarer til en relativ feil på 6.2%. Figur 14 angir dataen som dannet utgangspunktet for den lineære regresjonen.

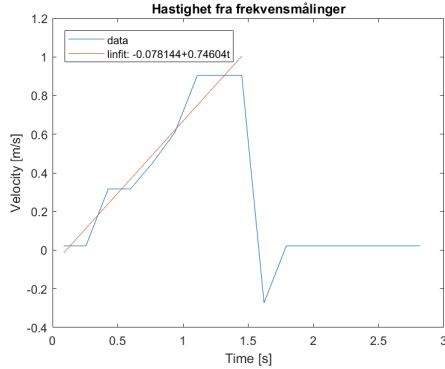


FIG. 14. Hastighetsgraf for γ_1

Tabell XIII angir alle aksellerasjonene beregnet ved γ_1 .

Metode	Aksellerasjon [m/s^2]
Lineærtilpassning	0.75 ± 0.18
Gjennomsnittelig akselerasjon	0.64 ± 0.04
Teoretisk	1.68

TABLE XIII. Samling for beregnede aksellerasjoner for $\gamma_1 = 9.9^\circ$.

2. $\gamma_2 = 11.4^\circ$

Tabell XIV angir tiden det tar for bilen å rulle ned skråplanet ved γ_2 .

Måling	Tid [s]
t_1	1.15
t_2	1.18
t_3	1.08
t_4	1.11
t_5	1.02
t_{avg}	1.11
σ	0.03

TABLE XIV. Målinger av tid fra legobil slippes til legobil treffer mikrofonen ved vinkel på 11.4° .

På samme måte som for γ_1 kan vi vise til aksellerasjonen estimert ved de to eksperimentelle metodene og den teoretiske tilnærmelsen. Resultatene er presentert i tabell XV og dataen som legger grunnlaget for den lineære regresjonen er angitt i figur 15. Den relative feilen for beregningen av gjennomsnittelig akselerasjon svarer da til 7.7%.

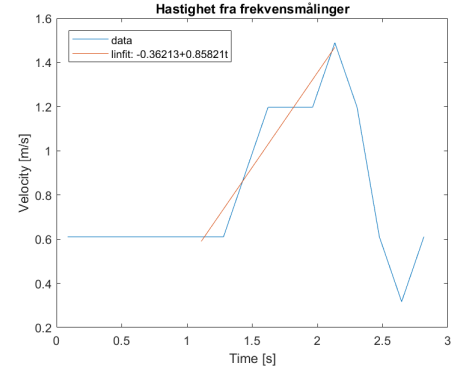


FIG. 15. Hastighetsgraf for γ_2

Metode	Aksellerasjon [m/s^2]
Lineærtilpassning	0.86 ± 0.2
Gjennomsnittelig akselerasjon	0.65 ± 0.05
Teoretisk	1.95

TABLE XV. Samling for beregnede aksellerasjoner for $\gamma_2 = 11.4^\circ$.

3. $\gamma_3 = 19.9^\circ$

Målinger av tiden det tar for bilen å rulle ned skråplanet er angitt i tabell XVI og fartsgrafen til kilden er angitt i figur 16. Tabell XVII viser til aksellerasjonen beregnet ved alle tre metoder. Den relative feilen i gjennomsnittsakseletrasjonen tilsvarer 8.9%.

Måling	Tid [s]
t_1	0.59
t_2	0.65
t_3	0.70
t_4	0.68
t_5	0.62
t_{avg}	0.65
σ	0.02

TABLE XVI. Målinger av tid fra legobil slippes til legobil treffer mikrofonen ved vinkel på 19.9° .

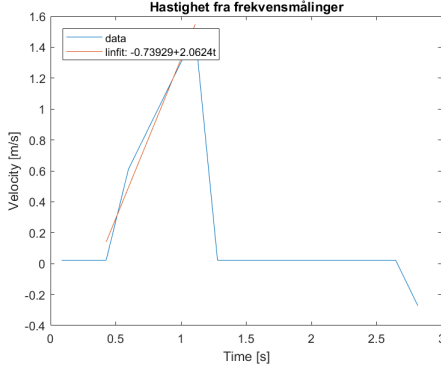


FIG. 16. Hastighetsgraf for γ_3

Metode	Aksellerasjon [m/s^2]
Lineærttilpassning	2.06 ± 0.2
Gjennomsnittelig aksellerasjon	1.91 ± 0.17
Teoretisk	3.34

TABLE XVII. Samling for beregnede aksellerasjoner for $\gamma_3 = 19.9^\circ$.

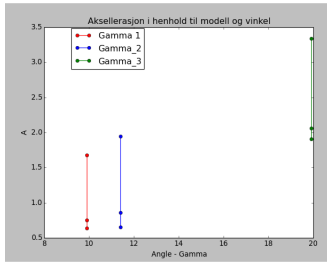


FIG. 17. Plot av aksellerasjonene mot teoretisk aksellerasjon.

II. DISKUSJON

A. Lengde

Det observeres at lengdemålene ved bruk av de to ulike metodene ligger innenfor hverandres usikkerheter. Det kan derfor være rimelig å anta at den faktiske lengden ligger et sted mellom målingene av l_A og l_B gjør ved de to forskjellige metodene. Kanskje er det også rimelig å anta at lengden ligger noe nærmere målingene gjort med lasermåleren da usikkerheten assosiert med denne teknikken er noe lavere enn usikkerheten assosiert med bruken av målestokken etter øvrige estimater. For å tilnærme den faktiske lengden enda bedre burde det være mulig å korrigere målene med hensyn på den faktiske differansen mellom lengdene målt med skyvelæret. Fra resultatene blir det klart at den absolutte feilen som gjøres ved å måle en størrelse direkte er langt mindre enn ved å beregne størrelsen som sammensatt av andre parametere. På den andre siden ser man også at den relative feilen av å måle en såpass liten distanse nødvendigvis må bli større. Dette er svært framtrede i målingene ved bruk av skyvelæret.

Vedrørende neglisjerbare usikkerheter kan det kan initielt bemerkes at alle feilkilder som korresponderer til ekspansjon i måleinstrumentet som følge av temperaturen kan sees bort ifra. Dette er trolig en direkte følge av at temperaturen ligger nær måleinstrumentets referansetemperatur og at temperaturutvidelseskoeffisienten for glassfiber er lav. Et slikt usikkerhetstillegg ville fått større betydning dersom vi målte over større distanser eller ved abnormale temperaturforhold. Det observeres i tillegg at usikkerhetene som følger av korreksjonen for siktingen blir neglisjerbar for både meterstokk og lasermåler. Dette er trolig en konsekvens av at målingene gjøres direkte på objektet, og at siktingen derfor kan gjøres svært nøyaktig. Likevel burde det også bemerkes at siktusikkerhetene kun er tatt innenfor rammene av hva som virker rimelig ved øymål. Slik vil siktingusikkerhetene selv bli subjekt til en usikkerhet det er svært vanskelig å si noe om. På den andre siden kan en slik usikkerhet igjen trolig ansees som neglisjerbar i lys av den faktiske nøyaktigheten og presisjonen i et måleinstrument som en meterstokk. En slik usikkerhet vil trolig ha mer å si ved bruk av skyvelær og lasermåler der nøyaktigheten kan antas å være høyere. For siktingsestimatene ved bruk av lasermåler vil det derimot opptre usikkerhet av en annen art i dl_{s2} . Her burde man for høyest mulig nøyaktighet også ha kontroll på stivheten til pappflaten benyttet for å vurdere eventuelle avbøyningstendenser som påvirker lengdemålet ved refleksjon av laserstrålen. Det kan dog hevdes at en såpass omfattende analyse er unødvendig i lys av eksperimentets formål, men burde bemerkes i metoden generelt.

Man kan så betrakte usikkerhetene estimert for lengdemålene relativt til måleinstrumentenes toleranser. Det bemerkes at for målinger med meterstokk og lasermåler overskrider de estimerte usikkerhetene instru-

mentenes usikkerhetstoleranser, men kun i en relativ størrelsesorden på 10^{-2} . Med andre stemmer det godt overens med toleransene.

Hva angår forskjellen mellom systematiske og tilfeldige feil ved måling med en eller flere metermål kan man betrakte noen fellestrekk. For det første vil systematiske feil kunne opptre ved unøyaktigheter i instrumentet. Foreksempel ved ikke-neglisjerbare usikkerheter i toleransen til målestrekene og slark i ledd. Tilfeldige feil vil heller være av den typen som opptre ved dårlige siktinger eller abnormale temperaturforhold. Altså ofte forhold som eksternt påvirker målingen, mens systematiske feil ofte forekommer ved dårlig konstruksjon av måleinstrumentet. De tilfeldige feilene kan enkelt minimeres ved å ta et stort antall målinger gang på gang. Dersom en høyere nøyaktighet hadde vært ønskelig ved øvrige målinger kunne vi ha gjort målingene flere ganger ved å gjentatte ganger rigge opp og rigge ned målesettingen.

Dersom man betrakter lengdemålene med meterstokk og lasermåler observeres det at målingene ligger innenfor hverandres usikkerheter, som er et godt tegn. Usikkerheten ved å måle differansen direkte er likevel $\frac{1}{10}$ eller mindre av usikkerheten assosiert med å beregne differansen som en sammensatt størrelse. På den andre siden observeres det en langt større relativ usikkerhet assosiert med bruken av skyvelæret. Det blir dermed nødvendigvis en avveining av gunstighetsforholdene rundt å ha en lav absolutt eller relativ usikkerhet.

Denne innsikten kan anvendes til å forstå usikkerhetene ved estimeringen av pendelsnoren lengde. For eksempel kan man betrakte problemstillingen vedrørende hvor nøyaktig pendelperioden og massesenterets posisjon må bestemmes for at bidraget til den endelige feilen skal være like stor som for lasermåleren. Det vil si at vi stiller et krav om at

$$\Delta z_{laser}^2 = 0.2^2 = \Delta A_{posisjon_{mc}}^2 + \Delta B_{Periode}$$

Tas den estimerte feilen for periodetiden $\sigma = 0.03$ som den faktiske feilen i periodemålingen innebærer dette at feilen gjort for estimatet av posisjonen til massesenteret må være mindre enn 0.039. Usikkerheten relatert til siktingen på høyden av massesenteret over den aktuelle distansen vil ved øvrige metode gjøre et slikt resultat tilnærmet umulig å oppnå.

I teorien antas det at den vektete midlingen burde ansees som nærmere den faktiske snorlengden enn tilfeldige måleresultater. Det burde likevel bemerkes at alle estimatene av snorlengden er gjort med varierende metoder av de ulike gruppene, og det er følgelig vanskelig å uttale seg om kvaliteten av enkeltmålingene som inngår i vektingen.

B. Hastighet

Når man tar i betraktning observasjonene gjort over bakgrunnsstøyen var det framtrædende at bakgrunnen var dominert av lavere frekvenser. Den ansees derfor neglisjerbar som en usikkerhetsskilde ovenfor den svært markante lydkilden hvis frekvens lå på 7009 Hz. Den mest sentrale feilkilden blir derimot frekvensoppløsningen. Som fremgår av figur 4 er det en usikkerhet assosiert med at bilens frekvens innenfor intervallet [7003, 7015] Hz. En naturlig konsekvens av en diskret sampling. Det bemerkes så at både nøyaktigheten og presisjonen til den målte hastigheten nødvendigvis vil ha en nær sammenheng med tidsoppløsningen og frekvensoppløsningen. Dataen er blitt samlet med en relativt lav frekvens der vi i ser mellom 4 og 7 samplingspunkter mens bilen rullet. For å få et bedre estimat kunne vi ha forsøkt å regulere forholdet mellom tids- og frekvensoppløsningen for å forsøke å optimere målingene.

C. Aksellerasjon

Det mest framtrædende ved resultatene fra delforsøket er at det er en høyere grad av samsvar mellom de eksperimentelle estimatene relativt til den teoretiske beregningen. Videre bemerkes også at de eksperimentelle estimatene er innenfor hverandres usikkerheter. Når man har klart å benytte to forskjellige metoder og kommet frem til omtrentlig samme svar er det en indikator på at den bakenforliggende ideen eller metodiske tilnærmelsen kan være akseptabel. Dette er likevel langt fra overraskende ettersom det teoretiske resultatet utelukkende baserer seg på effektene av gravitasjonskraften på legemet. Metoden neglisjerer totalt alle former for eksterne effekter på system og situasjon og ser bort ifra alle friksjonskrefter. I et slikt lys blir begresningene av en naiv teoretisk tilnærming svært fremtrædende.

III. KONKLUSJON

Generelt har dette eksperimentet vært illustrativt for forventningene det ble stilt ovenfor. Direkte målinger vil gi langt mindre absolutte feil enn målinger der risikoen for tilfeldige feil er høy. Herover eksemplifisert med en høy usikkerhet i parametere som inngikk i beregningen av pendelens snorlengde på bakgrunn av sikting. Det har videre vært vist at slike tilfeldige feil får større betydning når distansen vi måler over er liten. Til tross for at lasermåleren har lavere usikkerhet assosiert med seg var meterstokkens målinger som i den sammensatte beregningen av lengdedifferansene var nærmest skyvelærsmålene. Denne innsiktigen gjør det så lettere å forstå hvordan usikkerhetene virker inn i et større prosjekt som estimatet av pendelens snorlengde.

Anvendelsen av dopplereffekt og sampling av lyd var illustrativ for en helt annen metode for å måle

hastighet. Det ble klart at helt andre usikkerhetskilder, som tidsoppløsning og hastighetsoppløsning, fikk en ny rolle. Delforsøket ble slik illustrativt for hvordan nye variabler, usikkerheter og parametere dukket opp ved en metode svært forskjellig fra den første deloppgavens måleteknikk.

Videre var det mulig ved bruk av konspeter utenfor klassisk mekanikk, analytiske- og digitale verktøy å framlegge tre forskjellige metoder for å estimere aksellerasjonen. Til tross for at metodene ga relativt forskjellige verdier var delforsøket illustrativt for begrensninger og nytteverdi for noen aspekter ved metodene. Den høyere graden av samsvar mellom de eksperimentelle teknikkene syntes å være en indikator på at den faktiske akselerasjonen burde være i nærheten av de to målene. Det så heller usannsynelig ut at den teoretiske tilnærmelsen som totalt neglisjerte friksjonskrefter og andre fysiske påvirkninger på systemet skulle ha noen større tyngde. Slik ble også delforsøket illustrativt for begrensningene ved rent teoretiske tilnærmelser til faktiske fysiske fenomen.

BIBLIOGRAFI

[1] G. L. Squires, Practical Physics, Cambridge University Press 2001, 4th edition

APPENIX A

Utstysrliste	Modell	Serienummer
To aluminiumstenger		
Skyvelær	Cocraft Stainless Hardened	C1603163063
Meterstokk à 2m	Hultafors EU klasse 3	
Lasermåler	Bosch PLR30	887235842
Stoppeklokke	Cielo WC-060	07119194
Bilbane (gummimatte på gulvet)		
Bil med lydkilde		
Mikrofon		
PC med lydkort og Matlab		
Skråplan à 1 meter		
Legobil med lydkilde		
Svart papplate		
IR-termometer	Fluke 62 mini	