



Simulation & Optimisation

Projet 2

Numéro d'étudiant: SY1624132

Prénom : Victor — Li Jiaqi

Numéro d'étudiant: ZY1624134

Prénom : Olivier — Shi Libin

Table de matières

1.	Description du problème	1
1.1	Hypothèses supplémentaires	1
1.2	Modélisation mathématique	1
2.	Des questions que nous choisissons de traiter	3
2.1	La forme du port	3
2.2	La direction d'onde incident	4
2.3	La propriété d'onde incident	4
3.	Expériences et analyses des résultats	4
3.1	Améliorer la maille création avec Adaptmesh	5
3.2	La forme du port	5
3.3	La direction de la houle incidente	8
3.4	La phase initiale de la houle incidente	8
3.5	La longueur de la houle (l'onde)	9
3.6	Evolution en temps	10
4.	Conclusion	12
5.	Références	0

1. Description du problème

On étudie l'effet d'une houle dans un port. Le mot "houle" signifie en français une vague régulière (que l'on peut représenter par une fonction sinusoïdale en première approximation).

1.1 Hypothèses supplémentaires

Nous penons certaine hypothèse supplémentaire pour simplifier notre modélisation mathématique.

1) On néglige l'effet de réflexion dans la direction de la profondeur de l'eau. En fait, si la profondeur de l'eau est trop petite, l'effet de réflexion vas avoir lieu sur le fond quand la vibration verticale est très forte. Afin de réaliser cet hypothèse, nous prenons une valeur raisonnable de la profondeur H .

2) On considère l'effet de réflexion sur les digues est réflexion totale. Dans cet article^[1], la réflexion sur les digues est modélisée avec un paramètre physique, le coefficient de réflexion r . Il obtient une condition de limite comme $\frac{\partial u}{\partial n} = ik_0 \frac{1-r}{1+r} u$. On prenne l'hypothèse « réflexion totale » en supposant que $r = 1$.

1.2 Modélisation mathématique

Le modèle mathématique est celui de l'équation des ondes où la fonction $u(x, t)$ représente l'amplitude des vagues au point x et au

temps t . On suppose que la houle entre au bord Γ_0 , ce qui est modélisé par un mouvement de l'eau représentée par une oscillation sinusoïdale, et que tous les autres bords, notés Γ_1 sont des quais ou des digues, ce qui conduit si on simplifie, à une condition $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Soit $c = \sqrt{gH}$ où $g = 9.81m/s^2$ et $H \sim 2m$. On cherche une solution de la forme $u(\vec{x}, t)$ du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \\ u|_{\Gamma_0} = a(\vec{x}) \sin(\omega t) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0 \\ u(\vec{x}, 0) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

(L'état initial est immobile).

Remarquer qu'une onde plane solution de l'équation des ondes est de la forme $u(\vec{x}, t) = a * \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi) = a * \exp i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t + \phi)$ avec $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ le vecteur d'onde qui signifie la direction d'onde. On a

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \frac{\omega}{c}$$

a donc une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et une longueur d'onde $\lambda = cT$. La houle est une onde plane, donc pour une longueur d'onde λ on $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$. On pourra considérer par exemple dans (1) le cas particulier

$$a(\vec{x}) = a \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} + \phi) = a \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \phi)$$

en fixant les valeurs des constantes.

En présence de dissipation (non modélisée dans cette équation) la solution est asymptotiquement harmonique et son évolution en temps est

sinusoïdale $u(\vec{x}, t) = u(\vec{x})\sin(\omega t)$. L'amplitude $u(\vec{x})$ est solution d'un problème de Helmholtz homogène

$$\begin{cases} -c^2\Delta u - \omega^2 u = 0 \\ u|_{\Gamma_0} = a(\vec{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases}$$

Cette équation a une solution unique si et seulement si ω^2 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-c^2\Delta$, ce qui correspond au cas où le problème

$$\begin{cases} -c^2\Delta u = \omega^2 u \\ u|_{\Gamma_0} = a(\vec{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

a une solution non nulle.

Si $\omega \sim \omega_k$ où $\omega_k^2 = \lambda_k$ et où λ_k est une valeur propre de l'opérateur $-c^2\Delta$, alors la solution est très grande et proche du vecteur propre associé $v_k(\vec{x})$. La fonction $v_k(\vec{x})$ est un mode propre et $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}$ est la fréquence propre associée.

2. Des questions que nous choisissons de traiter

Dans la situation de ce problème, nous considérons certains points intéressants qui ont des influences sur la solution. Enduit, nous désignons les expériences de simulation associées.

2.1 La forme du port

Nous croissons que la solution dépend très fort de la forme du port. D'abord, la forme du frontière détermine les conditions de limite. De plus,

certaines structures spéciales, par exemple, les coins pointus, les formes symétriques, peuvent changer la solution. On réalise un port avec les sous-port en différentes formes, cercle, rectangulaire, etc.

2.2 La direction d'onde incident

La houle entre le port avec un vecteur d'onde $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ et on a $\|\vec{k}\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \frac{\omega}{c}$. Le couple (k_1, k_2) signifie les direction incidente différentes. Quand la direction incidente change, l'état de la solution peut changer.

2.3 La propriété d'onde incident

La solution $u(\vec{x}, t)$ dépend aussi dépend des propriétés de la houle, par exemple, la longueur d'onde, la fréquence. L'études de la longueur d'onde, qui signifie la dimension de la houle, ont beaucoup de sens. Avec un point de vue physique, la diffraction peut avoir lieu en certaines structures, par exemple, une entrée étroite d'un sous-port. Donc la longueur d'onde est très importante quand on va voir la diffraction. Par ailleurs, la fréquence apparaît dans le system (2), qui détermine la solution.

3. Expériences et analyses des résultats

Avant de faire des expériences, on tout d'abord fixe des paramètres. $g = 9.81\text{m/s}$, $H = 1\text{m}$ et $a = 1\text{m}$. Et puis, la forme fondamentale est dans la figure 1, Γ_0 est le bord entré et Γ_1 sont des quais. Et puis, la chose plus importante est la dimension du port qui est précisée dans figure1 à gauche.

3.1 Améliorer la maille création avec *Adaptmesh*

A l'aide du manuel officiel de Freefem++, on trouve que la fonction *adaptmesh* améliore la création de l'espace des mailles.

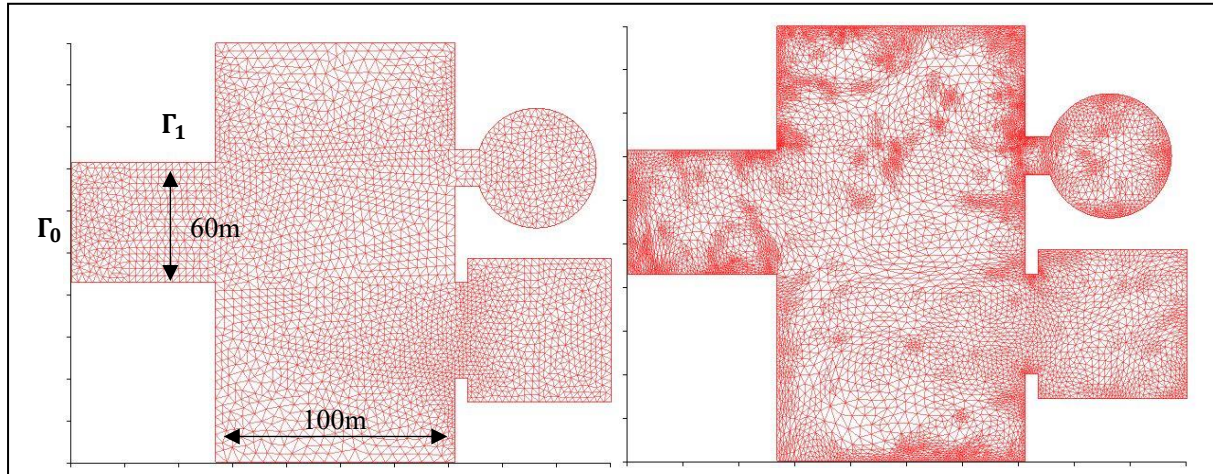


Figure 1. La maille sans l'adaptation (à gauche) et la maille avec l'adaptation (à droite)

On trouve que la fonction *adaptmesh* améliore la maille en rajouter les triangulaires élémentaires en les zones non triviales (un coin pointu, une zone à côté d'une frontière discontinue, etc.).

Grâce à l'optimisation de cet algorithme, on utilise *adaptmesh* dans nos expériences suivantes.

3.2 La forme du port

En fait, la forme du port a des influences importantes sur l'évolution de la vague. Donc on fait des recherches sur les aspects différents de la forme du port. La position et le contour du sous-port, la dimension de l'entrée d'un sous-port, et la situation où il y a un obstacle (comme une île) dans le port. Ici, on fixe toutes les propriétés de la vague et d'outre paramètres.

1) Position du sous-port

On étudie des influences de la différente position du sous-port, et donc

on définit deux ports comme la figure 2. Pour le port à gauche, la vague plut haute arrive $3.75m$. Pour le port à droite, la vague plut haute arrive $2.34m$.

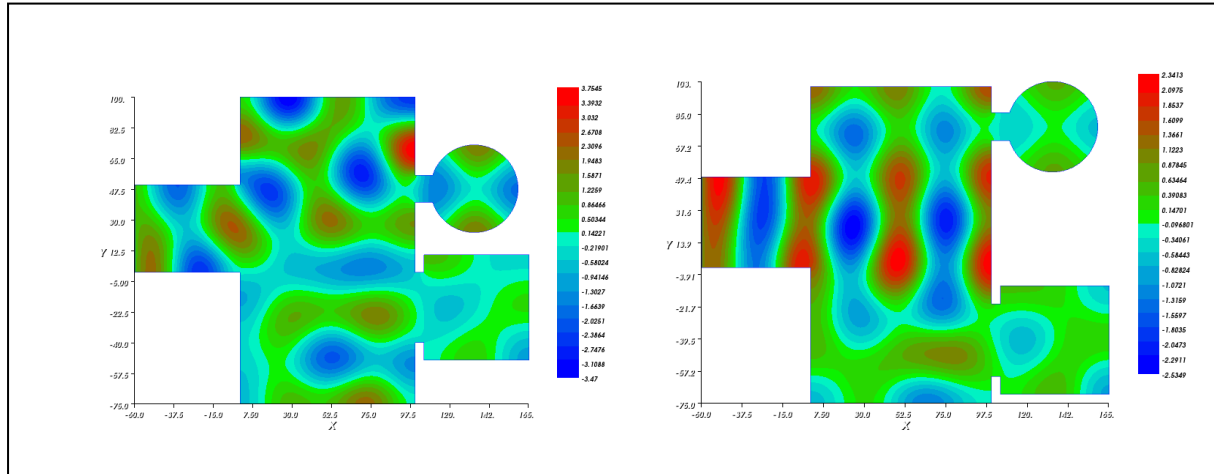


Figure 2. Différente position de deux ports

2) Dimension de l'entrée du sous-port

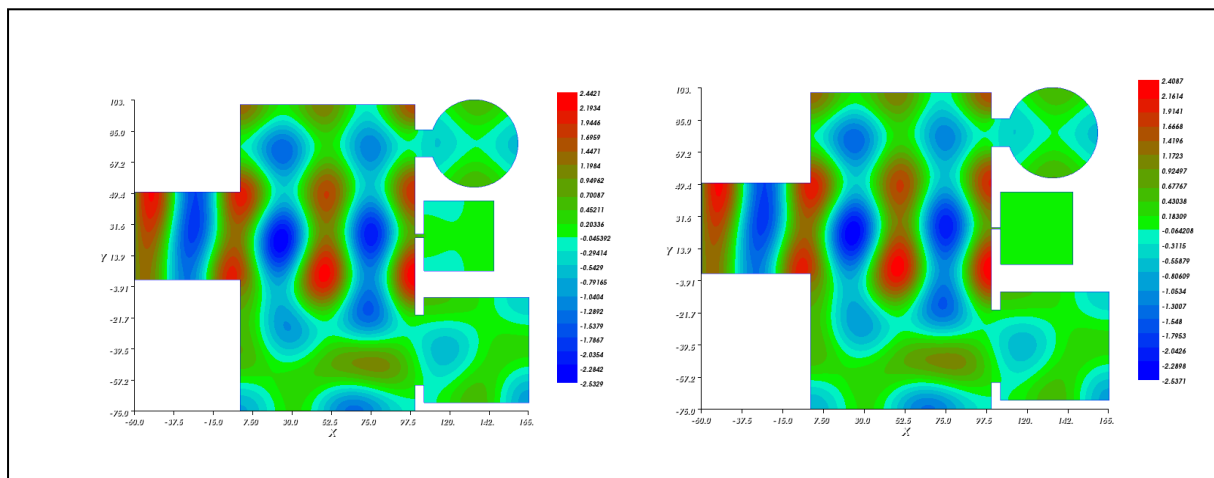


Figure 3. Différente dimension de l'entrée du sous-port

On définit des différentes dimensions de l'entrée du sous-port, comme la figure 3. La distance de l'entrée du sous-port de grand carré égale $40m$, de petit carré égale $2m/1m$ (à gauche/ à droite), de cercle égale $20m$. Le résultat est intéressant quand la distance de l'entrée égale $1m$, il n'y a pas

de vague dans le sous-port.

3) Influence d'une île

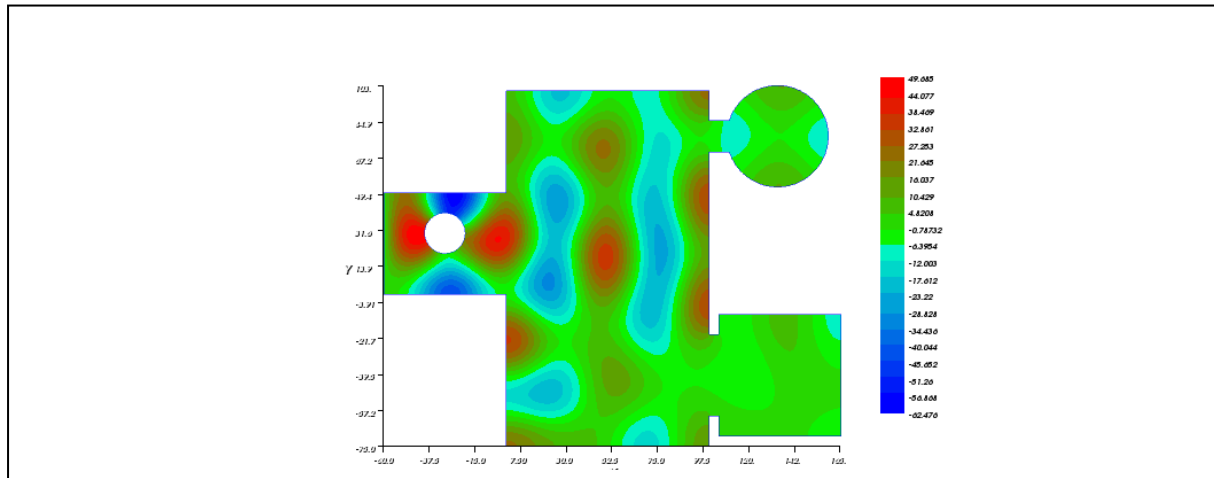


Figure 4. Influence d'une île

On définit une île à l'entrée du port, et on trouve que la vague la plus haute s'arrive à 49m, il a une grande influence sur la fluide et conduit une grande vague.

On a déjà analysé des influences de différents ports sur l'évolution de la vague. Et après, pour simplifier le problème sans perdre la précision d'analyse suivante, on fixe la forme du port comme la figure 5.

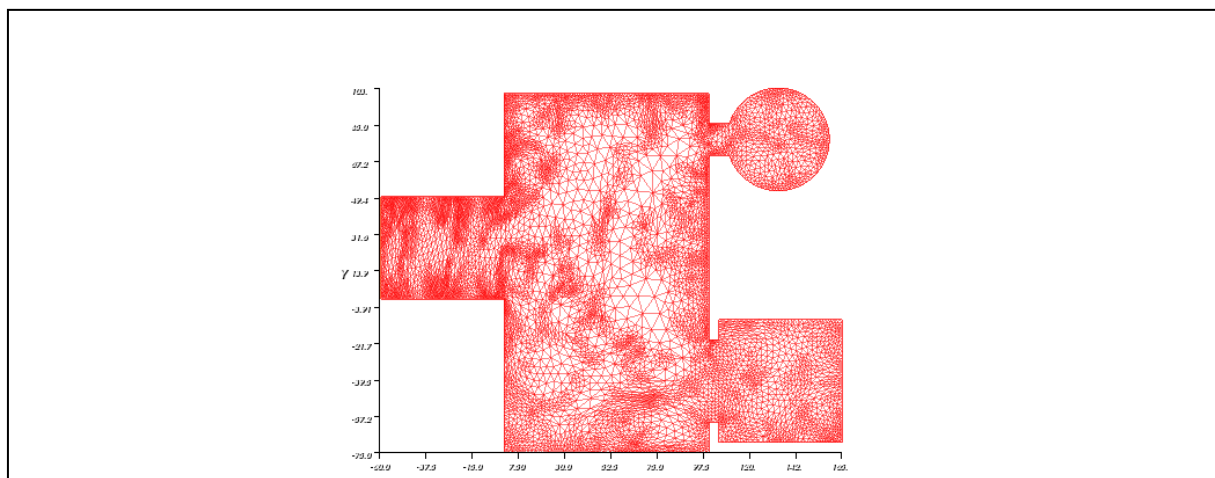


Figure 5. La forme fixée pour le problème suivant

3.3 La direction de la houle incidente

On a que la fonction d'onde incidente est

$$a(\vec{x}) = a \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} + \phi) = a \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \phi)$$

Donc, la direction est déterminée par \vec{k} .

On fixe $\lambda = 50$, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, et puis $\|\vec{k}\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \frac{\omega}{c}$

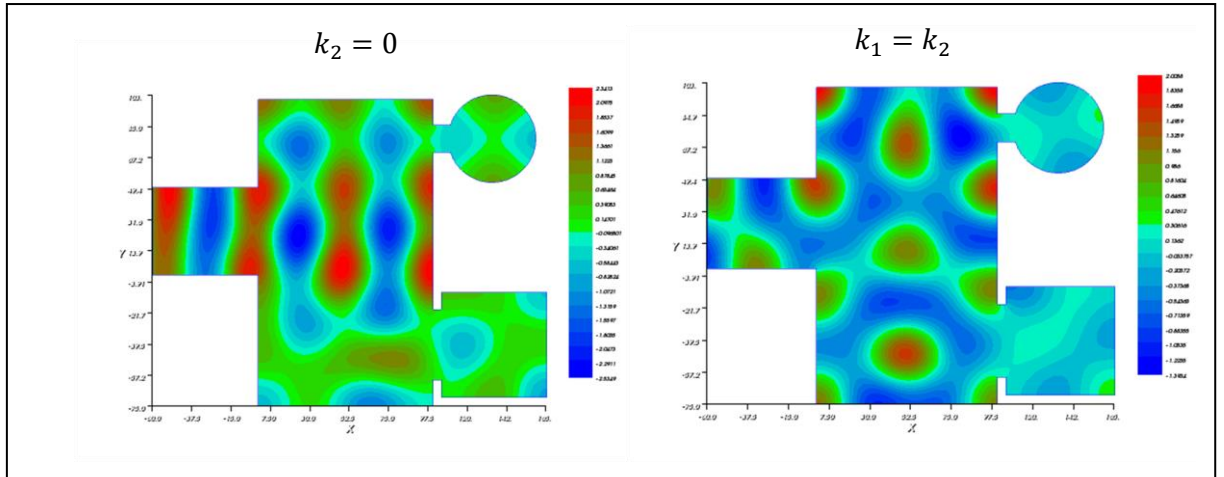


Figure 6. Différentes directions de la houle incidente

Quand $k_2 = 0$, alors la houle entre le port selon x . On voit que si on fait des lignes traversant les crêtes d'onde (des zones rouges dans les figures), la direction de cette ligne est selon x .

Quand $k_1 = k_2$, alors \vec{k} est parallèle à la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors les lignes qui traversent les crêtes d'onde est parallèle à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc on croit que les lignes traversant les crêtes d'onde sont parallèles à la direction incidente de la houle \vec{k} .

3.4 La phase initiale de la houle incidente

On sait que $u|_{\Gamma_0} = a(\vec{x}) \sin(\omega t)$, on pourra considérer le cas particulier,

$$a(\vec{x}) = a \cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \phi)$$

ϕ signifie la phase initiale et également il peut représenter l'évolution de la houle incidente en temps.

Le résultat se présente dans la figure 7. On trouve que l'espace caractéristique ne change pas, mais la dimension du couleur change beaucoup. La vague plus haute égale $0.7m$ dans la figure à gauche et $2.3m$ dans la figure à droite.

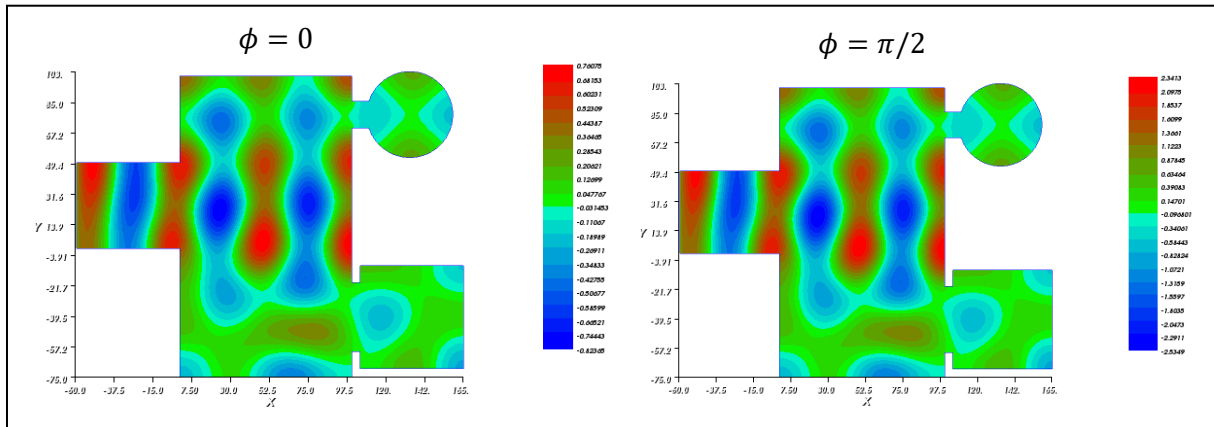
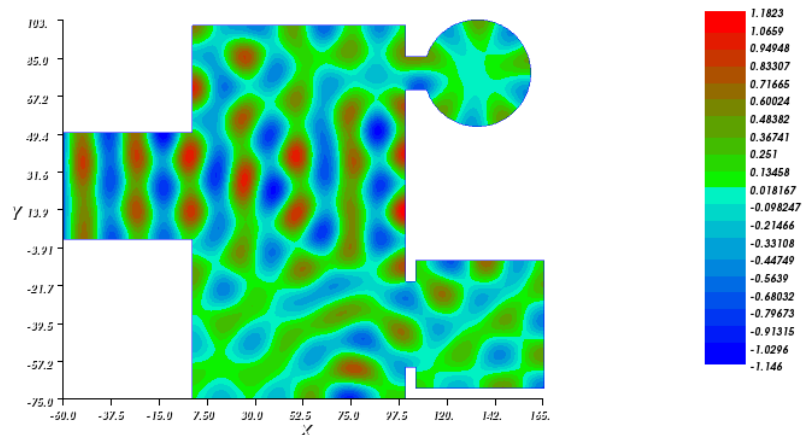


Figure 7. Différente phase initiale de la houle incidente

3.5 La longueur de la houle (l'onde)

On varie la longueur d'onde entre $10m$ et $50m$, la solution du problème



(2) change beaucoup.

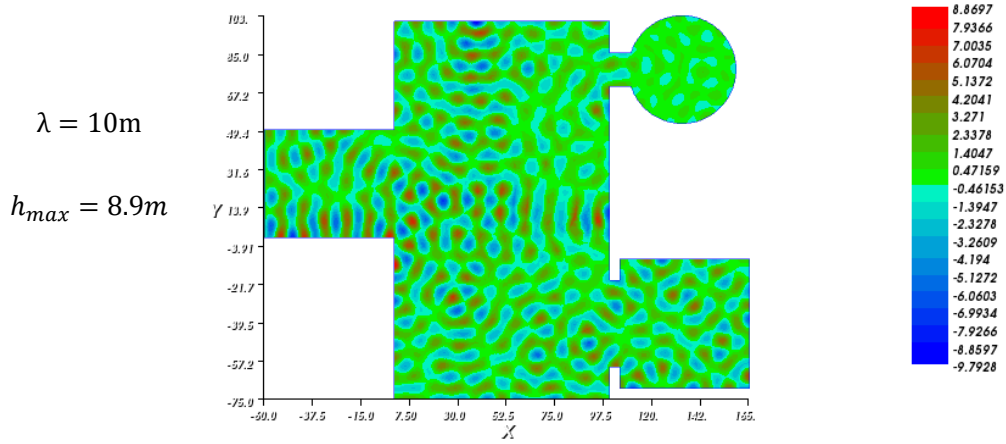


Figure 8. Différente longueur de la houle

Si la longueur d'onde augmente, on voit qu'il y a plus des ventres d'onde et des crêtes d'onde dans le port.

3.6 Evolution en temps

On a fait une hypothèse que la solution est asymptotiquement harmonique et son évolution en temps est sinusoïdale $u(\vec{x}, t) = u(\vec{x})\sin(\omega t)$.

On fixe d'abord $\lambda = 50m$, alors

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 0.4$$

On a $T = \frac{2\pi}{\omega} = 15.7s$

Donc on pose t varie de $0.1s$ à $15.7s$ dans une période.

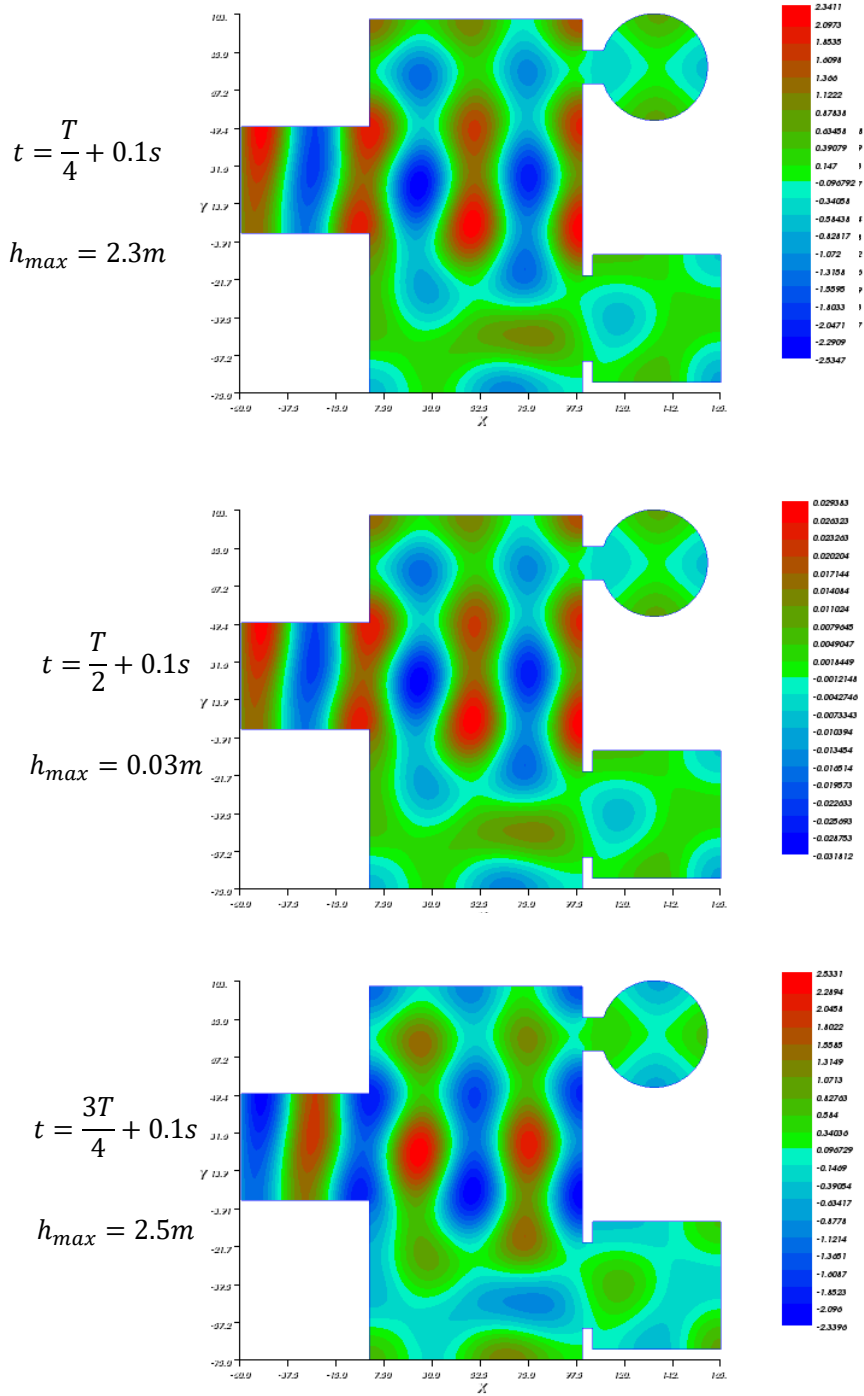


Figure 9. Evolution en temps

4. Conclusion

Dans ce problème, on modélise une situation réelle avec les équations et on obtient les résultats avec Freefem++. Dans ce processus, il y a des inconvénients.

- 1) On néglige l'effet de réflexion sur le lit du port. C'est-à-dire que les ventres d'onde ne touchent jamais le fond du port. Mais dans la saturation réelle, si la houle vit avec une grande amplitude, ce phénomène change aussi la solution.
- 2) On considère les digues comme les digues « durs ». Il signifie que la réflexion sur les digues a grande influence sur la solution. Dans une situation réelle, certaines digues en forme mou, par exemple la plage, peuvent absorber le choc de la houle sur les digues. Moins d'énergie réfléchit, alors la vibration au centre du port affaiblit.

5. Références

- [1] Philippe HELLUY, Vincent REY., Modélisation numérique de la houle dans le port de Banyuls., Institut des Sciences de l'Ingénieur de Toulon et du Var, 1998