UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Dinâmica Clássica Avançada - 2023.1
Prof. Mauro Copelli
10ª Lista de Problemas:
Teoria Clássica de Campos - Formalismo hamiltoniano e sólitons

Leitura sugerida: capítulo 10 de N. Lemos e sessões 9.3 e 9.4 de José & Saletan

Questão 1: Uma corda com extremos fixos em $x = 0$ e $x = \ell$ tem densidade linear de massa σ e tensão τ constantes. Se $\varphi_1(x,t)$ e $\varphi_2(x,t)$ são pequenos deslocamentos transversais da corda, ao longo de duas direções mutuamente perpendiculares, a densidade lagrangiana do sistema é

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\right)^2\right] - \frac{\tau}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2\right] .$$

(a) Obtenha as equações de Lagrange para $\varphi_1(x,t)$ e $\varphi_2(x,t)$.
(b) Levando em conta que $\varphi_1(x,t)$ e $\varphi_2(x,t)$ anulam-se nos extremos $x = 0$ e $x = \ell$, prove que a quantidade

$$Q = \int_0^\ell \sigma\left(\varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 \varphi_2\right) dx$$

é conservada, isto é, seu valor não depende do tempo.
(c) Que quantidade física Q representa?
(d) Para que valor de ω a onda estacionária $\varphi_1(x,t) = A\cos(\omega t)\sin(\pi x/\ell)$, $\varphi_2 = 0$ é solução das equações de Lagrange? Calcule a energia associada a esta onda.

Questão 2: Ao expandirmos $\varphi_j(x,t) = \sum_n a_n^j(t)\phi_n(x)$ supondo um conjunto infinito ortonormal $\{\phi_n(x)\}$, isto é, $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$, mostramos que os coeficientes $\{a_n^j\}$ podem ser entendidos como coordenadas generalizadas que satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Além disso, é possível formular o problema de maneira hamiltoniana, em que os momentos canonicamente conjugados $b_n^j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n^j}$ correspondem aos coeficientes da expansão $\Pi_j(x,t) = \sum_n b_n^j(t)\phi_n^*(x)$, onde $\Pi_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_j}$ (vide notas de aula). Mostre que, consistentemente, a hamiltoniana

$$H(a,b) = \sum_{n,j} b_n^j \dot{a}_n^j - L$$

de fato é igual a

$$\int \mathcal{H}\, d^3x = \int \left[\sum_j \Pi_j \dot{\varphi}_j - \mathcal{L}\right] d^3x .$$

Questão 3: Considere a equação de sine-Gordon em 1+1 dimensões em sua forma adimensional:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \sin\varphi = 0 . \tag{1}$$

(a) Mostre que

$$\varphi_{ss}(x,t) = 4\arctan[u\sinh(\gamma x)\,\mathrm{sech}(u\gamma t)]$$

é uma solução da eq. (1), onde $1/\gamma^2 = 1 - u^2$.
(b) $\varphi_{ss}(x,t)$ é uma solução sóliton-sóliton. Para ilustrar a colisão de dois sólitons, faça gráficos de $\varphi_{ss}(x,t)$ com pelo menos dois valores de u.

(c) Mostre que

$$\varphi_{sa}(x,t) = 4\arctan[u^{-1}\,\mathrm{sech}(\gamma x)\sinh(u\gamma t)]$$

é uma solução da eq. (1).

(d) $\varphi_{sa}(x,t)$ é uma solução sóliton-anti-sóliton. Para ilustrar a colisão de um sóliton com um anti-sóliton, faça gráficos de $\varphi_{sa}(x,t)$ com pelo menos dois valores de u.

(e) Mostre que

$$\varphi_b(x,t) = 4\arctan[(u\gamma)^{-1}\,\mathrm{sech}(\gamma^{-1}x)\sin(ut)]$$

é uma solução da eq. (1).

(f) $\varphi_b(x,t)$ é uma solução do tipo *breather*. Para ilustrar o breather, faça gráficos de $\varphi_b(x,t)$ com pelo menos dois valores de u.

Nota histórica: breathers são soluções em que uma perturbação fica localizada numa região do espaço. Foram observados num trabalho precursor de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou em que termos não-lineares foram acrescentados à equação de uma corda vibrante. É considerado o primeiro experimento de simulação computacional da história e foi publicado em 1955 [?]. A expectativa de Fermi era que os termos não-lineares acoplassem modos normais diferentes e portanto contribuíssem para a termalização do sistema, isto é, com os diferentes modos sendo excitados de maneira mais ou menos aleatória, justificando a hipótese ergódica utilizada na Mecânica Estatística. Uma solução localizada como um breather é mais ou menos o oposto disto! A questão é estudada até hoje.

Nota histórica da nota histórica: os autores do artigo são E. Fermi, J. R. Pasta e S. M. Ulam. Mas todas as simulações foram feitas pela matemática Mary Tsingou, então uma das responsáveis pela programação do computador MANIAC do Laboratório Nacional de Los Alamos. Em 2008, um artigo de Thierry Dauxois na Physics Today elucidou a história e reivindicou que ela fosse reconhecida por seu trabalho. Desde então, o problema "FPU" passou a ser chamado de "FPUT".

Dica: Há essencialmente três maneiras diferentes de fazer um gráfico $\varphi(x,t)$. Em ordem crescente de complexidade: 1) Fixar t_0 e fazer um gráfico de $\varphi(x,t_0)$, isto é, φ vs. x com t_0 fixo; depois é só variar t_0 e repetir o procedimento. Neste caso, é útil deslocar os diferentes gráficos por incrementos constantes de φ, para que as curvas fiquem mais visíveis; 2) Simplesmente utilizar um software que faça gráficos $3d$ e plotar diretamente φ em função de seus dois argumentos (como exemplo, o software `gnuplot` faz gráficos $3d$ com a função `splot`); 3) Fazer um "filme" em que cada *frame* corresponde a um valor de t_0 e mostra um gráfico de $\varphi(x,t_0)$. Em qualquer uma destas estratégias, é importante tomar o cuidado de incluir intervalos de tempo simétricos em torno de $t=0$. Sugestão: veja as Figs. 9.6, 9.7 e 9.8 de José & Saletan [?]. **Apenas os itens (b), (d) e (f) desta questão devem ser entregues digitalmente.** Lembre-se que, para cada um deles, pelo menos dois valores de u devem ser utilizados, portanto seis conjuntos de gráficos devem ser entregues.