UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Dinâmica Clássica Avançada - 2023.1
Prof. Mauro Copelli

7ª Lista de Problemas: Dinâmica Não-Linear Dissipativa - Pontos Fixos

Leitura sugerida: capítulos 5 e 6 de Strogatz, capítulo 1 de Guckenheimer & Holmes

Questão 1: Este exercício pretende ilustrar como, em certas situações físicas, a não-unicidade de soluções para EDOs é natural e óbvia, ao invés de patológica.

Considere um balde d'água com um furo no fundo. Se você vê um balde vazio com um poça d'água abaixo dele, você sabe dizer quando o balde estava cheio? É claro que não. Ele poderia ter se esvaziado um minuto atrás, dez minutos atrás etc. A solução para a EDO correspondente tem que ser não-única.

Um modelo simples para este problema pode ser formulado da maneira a seguir. Sejam: $h(t)$ a altura da água que ainda resta no balde no instante t; a a área do furo; A a área (seção transversal) do balde (suposta constante); e $v(t)$ a velocidade da água passando pelo furo.

(a) Mostre que $av(t) = A\dot{h}(t)$. Que lei física você está invocando?

(b) Para derivar uma equação adicional, use a conservação da energia. Em primeiro lugar, encontre a variação na energia potencial do sistema, assumindo que a altura da água no balde decresce de uma quantidade Δh e que a água tem densidade ρ. Então encontre a energia cinética transportada para fora do balde pela água que está escapando. Finalmente, pressupondo que toda a energia potencial é convertida em energia cinética, obtenha a equação $v^2 = 2gh$, onde g é a aceleração gravitacional.

(c) Combinando os resultados anteriores, mostre que $\dot{h} = -C\sqrt{h}$, onde $C = (a/A)\sqrt{2g}$.

(d) Dado $h(0) = 0$ (balde vazio em $t = 0$), mostre que a solução para $h(t)$ não é única no *tempo revertido*, isto é, para $t < 0$. (Sugestão: reescreva a EDO em termos de $t' = -t$).

Questão 2: Suponha que um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^3$ tenha sido linearizado e que a dinâmica da perturbação $\vec{\xi}$ em torno do ponto fixo seja dada por $\dot{\vec{\xi}} \simeq A\vec{\xi}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Obtenha $\vec{\xi}(t)$ para a condição inicial $\vec{\xi}(0) = (1, 1, 1)^T$.

(b) Para onde $\vec{\xi}(t)$ converge quando $t \to \infty$? E quando $t \to -\infty$?

Questão 3: Considere o sistema dinâmico bidimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay(x^2 + y^2) . \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Mostre que a linearização em torno do ponto fixo na origem prevê que ele é um centro, $\forall a$.

(b) Para reescrever o sistema nas coordenadas polares usuais, mostre inicialmente que $\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$.

(c) Reescreva as equações 1 em coordenadas polares, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r, \theta) \\ \dot{\theta} &= g(r, \theta) \end{aligned}$$

e mostre que na verdade elas estão desacopladas.

(d) A partir das equações do item (c), explique o que acontece com o sistema quando $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$, verificando assim que a linearização faz uma previsão errada, neste caso.

Questão 4: Considere uma partícula de massa unitária num potencial unidimensional tipo poço-duplo

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \ .$$

Se acrescentarmos um pouco de amortecimento ao problema, o novo sistema dinâmico ficará $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -by + x - x^3$, onde $y = v$ e $0 < b \ll 1$. Produza um retrato de fase numericamente preciso que exiba a bacia de atração do ponto fixo estável $(x^*, y^*) = (1, 0)$, fazendo o desenho grande o suficiente para mostrar a estrutura global da bacia.

Dicas: Para produzir um retrato de fase preciso, basta tomar quatro condições iniciais.

Inicialmente, escolha um valor pequeno para $b > 0$ (diferente dos seus colegas...) e confirme (por uma análise de estabilidade linear simples) que a introdução de $b > 0$ no problema transforma os dois centros do caso conservativo (i.e. para $b = 0$) em duas espirais estáveis (atrativas). Já a única sela do caso conservativo permanece uma sela para $b > 0$.

Agora, calcule exatamente os autovetores do ponto de sela. A seguir, escolha duas condições iniciais que correspondem a *pequenas* perturbações da sela ao longo de $\pm\vec{v}_+$, onde $\vec{v}_+$ é o autovetor correspondente ao autovalor positivo. Quando $b = 0$, estas condições iniciais levariam a órbitas homoclínicas. Como agora $b > 0$, a energia mecânica é dissipada e uma órbita homoclínica é fisicamente impossível. Ao invés disso, para cada uma destas duas condições iniciais, a trajetória deve agora ser atraída por uma espiral diferente. Portanto, cada ramo da variedade instável da sela pertence a uma bacia de atração diferente.

Para separar as duas bacias de atração, a variedade *estável* da sela tem, como é usual, um papel fundamental no problema. Para observá-la com precisão numérica, escolha agora duas condições iniciais que correspondem a *pequenas* perturbações da sela ao longo de $\pm\vec{v}_-$, onde $\vec{v}_-$ é o autovetor correspondente ao autovalor *negativo*. Integre agora as equações para um tempo *negativo*, isto é, voltando no tempo, e obtenha os dois ramos da variedade estável da sela, que delimitam as duas bacias de atração.

Para explicitar a bacia de atração de $(x^*, y^*) = (1, 0)$, pode ser mais fácil produzir a fronteira da bacia de atração numericamente, imprimir o retrato de fase e depois pintar à mão a bacia propriamente dita (foi como eu fiz muitos anos atrás; se você conseguir pintar a bacia computacionalmente, tanto melhor).