UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Dinâmica Clássica Avançada - 2023.1
Prof. Mauro Copelli
8ª Lista de Problemas:
Dinâmica Não-Linear Dissipativa - Bifurcações, ciclos-limite e atratores estranhos

Leitura sugerida: capítulos 7, 8 e 9 de Strogatz

Questão 1: Esta questão ilustra o gargalo que domina a dinâmica de um fluxo unidimensional quando ele está próximo de uma bifurcação sela-nó. Neste caso, a derivada $\dot{x}$ é muito pequena, de modo que o tempo de passagem na região em que nascerá o ponto fixo semi-estável (que depois dará origem a uma sela e um nó) cresce com $\sim (\mu - \mu_c)^{-1/2}$. Por isso, o período das oscilações de um ciclo-limite que está perto de desaparecer numa bifurcação de período infinito (SNIC - *Saddle-Node on an Invariant Cycle*) também diverge da mesma maneira. Leia a seção 4.3 de Strogatz e considere o seguinte fluxo no círculo ($-\pi \leq \theta < \pi$):

$$\dot{\theta} = f(\theta) = 10\mu - 9\cos\theta \ ,$$

onde $\mu > 0$ é um parâmetro de controle.
(a) Esboce o gráfico de $f(\theta)$ para 3 valores diferentes e representativos de μ, mostrando que ocorre uma bifurcação sela-nó em $\mu = \mu_c$ (para fazer os gráficos, use $\mu < \mu_c$, $\mu = \mu_c$ e $\mu > \mu_c$). Calcule μ_c.
(b) Suponha que $\mu = 1$. Forneça uma **estimativa** para o período das oscilações não-uniformes, fazendo uma expansão em torno do ponto fixo semi-estável que desaparece na bifurcação, deixando um "fantasma" em seu lugar.
Dado: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{a + \xi^2} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

Questão 2: Para cada valor de r abaixo, use um computador para explorar a dinâmica do sistema de Lorenz, com $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. Em cada caso, faça gráficos de $x(t)$, $y(t)$ e x vs. z para uma condição inicial (desprezando ou não um transiente inicial, se isso ajudar a visualização). Sugerimos que você utilize o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem.
(a) $r = 100$ (dentro da região caótica $24.06 < r < 313$ existem intervalos de valores de r nos quais o sistema é *periódico*: são as chamadas "janelas periódicas").
(b) $r = 166.3$ (observe o chamado "caos intermitente": o sistema parece periódico durante um certo tempo, mas "de vez em quando" — daí o termo *intermitência* — se comporta de maneira caótica).
(c) $r = 212$ (observe o fenômeno de "periodicidade ruidosa": o sistema parece periódico com pequenas flutuações, *como se* houvesse sido adicionado ruído a um ciclo-limite).

Questão 3: Construa um novo tipo de conjunto de Cantor através do seguinte procedimento: iniciando com um segmento de reta de comprimento unitário, remova a *metade central* deste segmento, depois itere a regra nos segmentos restantes.
(a) Qual é a dimensão de similaridade do conjunto? (Forneça a resposta exata e o valor numérico com pelo menos três casas decimais).
(b) Qual é a medida do conjunto? Interprete sua resposta à luz da resposta do item (a).

Questão 4: Produza o seu próprio diagrama de órbita do mapa logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$.
Dica: Não se esqueça de desprezar um transiente inicial para cada valor de r.

Questão 5: Obtenha o gráfico do expoente de Lyapunov λ do mapa logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ em função do parâmetro de controle r.