UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Dinâmica Clássica Avançada - 2023.1
Prof. Mauro Copelli
1ª Lista de Problemas: Mecânica Newtoniana

Leitura recomendada: capítulo(s) sobre mecânica newtoniana de José & Saletan e/ou Arnold e/ou Marcus Aguiar

Questão 1: Considere uma partícula de massa m que está sujeita a uma força conservativa cuja energia potencial associada é um poço do tipo $U(x) = k|x|^\beta$, onde $\beta \geq 1$. O objetivo deste problema é mostrar que, nestes casos, é possível calcular exatamente o período τ_0 de oscilações em torno da origem, mesmo quando não conseguimos obter a solução geral $x = x(t)$. Além disso, mostra que o oscilador harmônico (que é regido por EDOs lineares) tem algumas propriedades que não sobrevivem no caso de osciladores anarmônicos (isto é, regidos por EDOs não-lineares). Nos itens abaixo, utilize apenas o princípio de conservação de energia mecânica, sem (se dar ao trabalho de tentar) resolver a EDO correspondente.
(a) Mostre que, para $\beta = 2$ (isto é, o oscilador harmônico) e uma dada energia mecânica E, o período τ_0 das oscilações *independe* da energia.
(b) Mostre que, para $\beta = 4$ (isto é, um oscilador anarmônico) e uma dada energia mecânica E, o período τ_0 das oscilações *depende* da energia. Escreva a freqüência $\nu \equiv 1/\tau_0$ da oscilação como função de E, k e m. Ela cresce ou decresce com E?
(c) Generalize o resultado dos itens anteriores para qualquer $\beta \geq 1$, isto é, escreva a freqüência como função de E, k, m e β.
Dica: Nos itens (b) e (c), não é preciso resolver uma integral definida que depende *apenas* de β (deixe-a indicada).

Questão 2: Uma partícula de massa m desloca-se ao longo do eixo x sujeita a uma força cuja energia potencial é dada por

$$V(x) = V_0 \left[\exp(-2x/a) - 2\exp(-x/a)\right] \ ,$$

onde V_0 e a são constantes positivas. A análise deste potencial será feita em duas partes.

Parte 1 (análise "local"):
(a) Mostre que o potencial tem um mínimo local em $x = x_{min}$. Calcule x_{min} e $V(x_{min})$.
(b) Suponha que a energia mecânica seja ligeiramente maior do que $V(x_{min})$. Neste caso, convém definir uma nova variável ξ, que corresponde ao deslocamento em relação ao ponto de mínimo local: $\xi \equiv x - x_{min}$. Através de uma expansão em série de V em torno de $\xi = 0$ até o primeiro termo relevante (qual é?), obtenha a equação diferencial ordinária (EDO) aproximada que governa ξ quando este é muito pequeno (digamos, $\xi \ll a$).
(c) Ainda no regime de pequenos deslocamentos em torno do mínimo do potencial, obtenha a solução da EDO do item anterior para uma condição inicial genérica $\xi(t = 0) = \xi_0$ e $\dot{\xi}(t = 0) = v_0$. Qual é a frequência angular ω das oscilações correspondentes a esta solução?

Parte 2 (análise "global"):
(d) Esboce o gráfico de $V(x)$ e indique os pontos de retorno para três valores qualitativamente diferentes (E_1, E_2, E_3) da energia mecânica E: $-V_0 \leq E_1 < E_2 = 0 < E_3$. Para qual intervalo de valores da energia mecânica a trajetória da partícula é limitada (isto é, x não diverge)?
(e) Este problema não-linear tem solução exata! A partir da conservação de energia mecânica $m\dot{x}^2/2 + V(x) = E$, obtenha a função $x(t; x_0, E)$ para uma condição inicial $x(t = 0) = x_0$ e uma energia mecânica E *tais que a trajetória da partícula seja limitada* (consulte o gráfico feito no item (d)).
Dado:

$$\int \frac{du}{\sqrt{\alpha u^2 + 2\beta u - \beta}} = \frac{-1}{\sqrt{|\alpha|}} \arcsin\left(\frac{\alpha u + \beta}{\sqrt{\beta(\beta - |\alpha|)}}\right) \qquad (\alpha < 0)$$

Sugestão: utilize a transformação $u = \exp(+x/a)$.

(f) A partir do resultado do item anterior, obtenha a frequência angular ω de oscilações (não-lineares!) como função da energia mecânica E. Conforme E aumenta, a frequência aumenta, diminui, ou permanece constante? Faça o gráfico $\omega(E)$ e mostre que a partir deste resultado é possível recuperar, no limite apropriado (qual?), a frequência aproximada obtida no item (c).
(g) Esboce o retrato de fase deste problema no plano (x, v) para um conjunto representativo de valores de energia (isto é, que inclua tanto órbitas limitadas como ilimitadas).

A $3^{\underline{a}}$ questão deve ser entregue digitalmente via Google Classroom e fará parte da nota da $1^{\underline{a}}$ unidade.

Questão 3: Considere um pêndulo plano constituído por uma partícula de massa m presa a uma haste de comprimento r e massa desprezível, livre para oscilar sobre um eixo fixo e fazendo um ângulo θ com a vertical. A equação de movimento é

$$mr^2\ddot{\theta} = -mgr\sin\theta \tag{1}$$

e podemos escrever a energia mecânica do sistema como $E = \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - mgr\cos\theta$.
(a) Explique porque o movimento do sistema é *qualitativamente* diferente se $E > mgr$ ou $E < mgr$. Que tipo de movimento corresponde ao caso crítico $E = E_c = mgr$?
(b) Observe que podemos reescrever a eq. (1), uma EDO de $2^{\underline{a}}$ ordem em θ, como duas equações de $1^{\underline{a}}$ ordem,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{r}\sin\theta \,, \end{aligned} \tag{2}$$

que definem um campo vetorial $(\dot{\theta}, \dot{\omega}) = \vec{F}(\theta, \omega)$ no plano (θ, ω) (também chamado de "espaço de fase de velocidade"). Uma condição inicial é definida pela escolha de um ponto (θ_0, ω_0) neste plano, o que também define o valor da energia mecânica E_0. Como E se mantém constante, o movimento do pêndulo para uma dada condição inicial corresponde à trajetória de um ponto no plano (θ, ω) que ocorre precisamente sobre uma curva de nível da função $E = E(\theta, \omega)$. Um conjunto representativo de trajetórias no plano é chamado de *retrato de fase*.

O objetivo deste problema é fazer um esboço do retrato de fase através da integração numérica das equações (2). Para fins numéricos, é muito mais conveniente trabalhar com variáveis adimensionais. Podemos definir um tempo adimensional $\tau \equiv t/T$, onde $T \equiv \sqrt{r/g}$ constante é um tempo característico do sistema. Renomeando $x \equiv \theta$ (que já é adimensional) e $y \equiv T\omega$, mostre que as eqs. (2) podem ser reescritas de forma adimensional como

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\sin x \,, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $'$ denota derivação com relação a τ. Defina uma energia mecânica adimensional $\mathcal{E}(x, y)$ apropriada. Qual seria o valor crítico $\mathcal{E}_c$ (no sentido do item (a)) em que o movimento passa a ser qualitativamente diferente?
(c) Observe que as equações (3) definem um campo vetorial no plano adimensional (x, y). Escolhendo diferentes condições iniciais neste plano, você estará escolhendo diferentes valores da energia mecânica adimensional $\mathcal{E}$. Cada condição inicial leva a uma trajetória no plano (x, y). Obtenha uma coleção representativa de trajetórias (veja abaixo como fazer, caso você não tenha experiência com integração numérica de EDOs) e grafique-as todas no mesmo plano. Dicas: 1) por conveniência, limite-se ao intervalo $-\pi - \epsilon < x < \pi + \epsilon$ (escolha $\epsilon > 0$ qualquer, desde que diferente dos seus colegas); 2) o resultado final deve ser semelhante à Fig. 1.5b de José & Saletan.

Como integrar equações diferenciais ordinárias numericamente: estude as seções 2.8 e 6.1 de Strogatz para se familiarizar com o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), que prescreve a seguinte aproximação para a solução de $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$:

$$\vec{x}(t + \Delta t) \simeq \vec{x}(t) + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4\right) ,$$

onde

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{f}\left(\vec{x}(t)\right)\Delta t \\
\vec{k}_2 &= \vec{f}\left(\vec{x}(t) + \frac{\vec{k}_1}{2}\right)\Delta t \\
\vec{k}_3 &= \vec{f}\left(\vec{x}(t) + \frac{\vec{k}_2}{2}\right)\Delta t \\
\vec{k}_4 &= \vec{f}\left(\vec{x}(t) + \vec{k}_3\right)\Delta t \, .
\end{aligned}$$

O erro local (diferença entre a estimativa dada pelo algoritmo e a solução verdadeira $\vec{x}(t+\Delta t)$, dado $\vec{x}(t)$) é da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t^5)$ para o algoritmo RK4. Isso permite que se utilizem passos de tempo maiores, em comparação com o que seria necessário para obter precisão similar usando, por exemplo, o "intuitivo" método de Euler ($\vec{x}(t + \Delta t) \simeq \vec{x}(t) + \vec{f}(\vec{x}(t))\Delta t$), cujo erro local é $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

Existem pacotes prontos que implementam esse algoritmo nas diversas linguagens / ambientes de programação (Python, Mathematica etc). Você pode utilizá-los, desde que saiba o que está fazendo.

Referências

[1] J. V. José and E. J. Saletan. *Classical Dynamics: a Contemporary Approach.* Cambridge University Press, 1998.

[2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag (Berlin), 1989.

[3] M. A. M. Aguiar. *Tópicos de Mecânica Clássica.* Livraria da Física, 2017.

[4] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.