UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Dinâmica Clássica Avançada - 2023.1
Prof. Mauro Copelli

6ª Lista de Problemas: Dinâmica Não-Linear Conservativa

Leitura sugerida: capítulos 7 e 10 de Marcus Aguiar, capítulo 7 de Ott, e seção 7.5.3 de José & Saletan

Questão 1: Uma partícula de massa unitária se move ao longo do eixo x sujeita a um potencial

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \ .$$

(a) Mostre que há três pontos fixos no plano de fase (x,p).
(b) Esboce o gráfico de $V(x)$.
(c) Faça uma análise de estabilidade linear em torno de cada ponto fixo, obtendo os autovalores. Apenas para o(s) ponto(s) fixo(s) hiperbólico(s), encontre também os autovetores.
(d) Usando as técnicas usuais (expansão em Taylor do potencial em torno do mínimo etc), obtenha as frequências de pequenas oscilações dos pontos de equilíbrio estáveis. Mostre que elas coincidem com a parte imaginária dos autovalores dos pontos elípticos obtidos no item (c).
(e) Esboce o retrato de fase deste problema, identificando claramente:

- os pontos fixos;
- os autovetores encontrados no item (b);
- trajetórias homoclínicas e heteroclínicas, se houver.

Questão 2: No mesmo espírito da questão 1, considere uma partícula de massa unitária movendo-se no eixo x sujeita a um potencial $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$. Você tem duas opções:
(a) seguir os mesmos passos da questão 1, passando pelos itens (a), (b), (c), (d) e (e);
(b) ou, se conseguir, fazer apenas o correspondente aos itens (b) e (e).

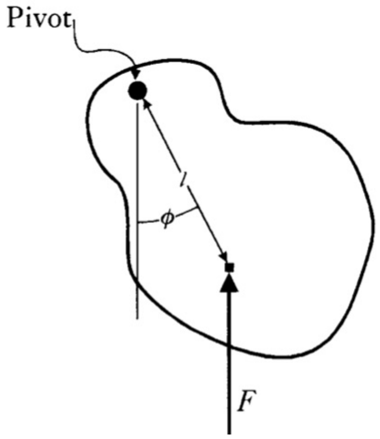
Questão 3: Igual à questão 2, mas para um potencial $V(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2$.

Questão 4: Igual à questão 2, mas para um potencial $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2$.

Questão 5: Igual à questão 2, mas para um potencial $V(x)$ arbitrariamente esboçado por você mesmo.

Nosso estudo de caos hamiltoniano baseou-se fortemente nos conceitos de seção e mapa de Poincaré. Na prática, a integração numérica de um sistema hamiltoniano caótico, a partir da qual se obteria o mapa de Poincaré, pode ser difícil. Para evitar esse problema e facilitar o estudo do caos hamiltoniano, uma estratégia possível foi a de usar diretamente "mapas conservativos". Os dois exercícios seguintes são exemplos disso. Você só precisa fazer um deles, à sua escolha.

Questão 6: Estude em detalhe a seção 7.5.1 de José & Saletan sobre o "rotor chutado" (*kicked rotator*) esquematizado na figura abaixo. Na ausência de força gravitacional, o rotor com momento de inércia I recebe impulsos abruptos e periódicos (com período T) do tipo $F(t) = F_0 \sum_n \delta(t - nT)$, periodicamente causando torques impulsivos do tipo $\tau = F_0 \ell \sin\phi \equiv \epsilon \sin\phi$.



A hamiltoniana, expressa nas variáveis de ação e ângulo (J,ϕ),

$$H = \frac{J^2}{2I} + \epsilon \cos\phi \sum_n \delta(t - nT) \ ,$$

depende do tempo e portanto não se conserva. Tampouco corresponde à energia mecânica E. Mas o problema é interessante mesmo assim. Se olharmos para seu estado estroboscopicamente, a cada período T (o que pode ser entendido como uma seção de Poincaré), obtemos o chamado *mapa padrão*, que dita como o estado (J_n,ϕ_n) estará no ciclo seguinte:

$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + J_{n+1}) \bmod (2\pi) \\ J_{n+1} &= \epsilon \sin\phi_n + J_n \ . \end{cases}$$

Observe que valores de $|J_n|$ maiores do que 2π são "filtrados" pela função mod, então é possível se restringir ao intervalo $(-\pi,\pi)$ tanto para ϕ_n como para J_n. Note ainda que, para $\epsilon = 0$, o mapa padrão é muito parecido com o mapa de Poincaré de um sistema exatamente integrável (com o número de rotação substituído pela variável de ação).

1. Mostre que o mapa padrão preserva áreas.
2. Use um computador (usando sua linguagem preferida de programação) para produzir uma sequência de 8 figuras ao estilo da Fig. 7.35 de José & Saletan, cada uma correspondendo a um valor de ϵ. Para cada ϵ, é preciso escolher várias condições iniciais. Para cada condição inicial, deixe o sistema evoluir por um período transiente (teste!) e depois plote uma sequência de pontos consecutivos. Juntando as várias condições iniciais, você deve "preencher" a seção de Poincaré, observando o que José & Saletan chamam de "toros unidimensionais", os quais eventualmente vão sendo destruídos conforme ϵ vai sendo aumentado.

Questão 7: (Exercício 12.1.8 de Strogatz) O mapa quadrático de Hénon é definido pelas equações

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos\alpha - (y_n - x_n^2)\sin\alpha \\ y_{n+1} &= x_n \sin\alpha + (y_n - x_n^2)\cos\alpha \ . \end{aligned}$$

1. Mostre que o mapa quadrático de Hénon preserva áreas.
2. Encontre o mapa inverso (ou seja, x_n e y_n como funções de x_{n+1} e y_{n+1}). Mostre que o mapa inverso preserva áreas.
3. Use um computador (usando sua linguagem preferida de programação) para produzir uma sequência de figuras para diferentes valores de α. Restrinja-se a condições iniciais dentro do quadrado $-1 \le x, y \le 1$. Para cada valor de α, é preciso escolher várias condições iniciais. Para cada condição inicial, deixe o sistema evoluir por um período transiente (teste!) e depois plote uma sequência de pontos consecutivos. Segue a sugestão de Strogatz:
   (a) Comece com $\cos\alpha = 0{,}24$. Você deveria encontrar uma "adorável cadeia" de cinco ilhas ao redor dos cinco pontos de um ciclo de período 5. Faça então um zoom numa vizinhança do ponto $x = 0{,}57$, $y = 0{,}16$. Você deveria encontrar ilhas menores, e talvez ilhas ainda menores ao redor delas. A complexidade se estende arbitrariamente para escalas espaciais cada vez menores (mas para ver isso você pode precisar de mais pontos, e portanto mais tempo de computação também).
   (b) Tente agora $\cos\alpha = 0{,}22$. Você deveria obter uma cadeia de cinco ilhas, mas agora cercadas por um "mar caótico".