UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Dinâmica Clássica Avançada - 2023.1
Prof. Mauro Copelli
5ª Lista de Problemas: Teoria de Perturbação Canônica (TPC)

Leitura requerida: seção 6.3 de José & Saletan

Questão 1: Um sistema hamiltoniano de um grau de liberdade e massa unitária é dado por

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} + \epsilon \left(aq + \frac{b}{2} q^2 \right)$$

(a) Resolva o problema exatamente.
(b) Resolva o problema por Teoria de Perturbação Canônica independente do tempo supondo ϵ pequeno.
(c) Expanda o resultado exato em primeira ordem em ϵ e compare com o resultado perturbativo.

Questão 2: Considere o oscilador perturbativamente anarmônico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \left(1 + \epsilon \frac{q}{q_0} \right) ,$$

onde ϵ é pequeno e q_0 constante determina a escala onde a perturbação cúbica na hamiltoniana atua.
(a) Note que, por causa da paridade ímpar, o efeito da perturbação cúbica não é a priori óbvio (pelo menos não para mim). Considere, por exemplo, $\epsilon q_0 > 0$. Por um lado, o termo cúbico deixa o potencial mais "duro" do que o quadrático para $q > 0$, portanto tendendo a fazer com que ω aumente com a energia. Por outro lado, para $q < 0$ o mesmo termo cúbico deixa o potencial mais "mole" do que o quadrático, tendendo a fazer com que ω diminua com a energia. Observe que, também por causa da paridade da perturbação, a correção da frequência em $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ de TPC independente do tempo é nula. Quanto é a correção da frequência em $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ de TPC independente do tempo?
(b) Escolha valores de ϵ (pequeno) e q_0 (> 0 qualquer). Por simplicidade, tome condições iniciais $p(0) = 0$ e $q(0) > 0$ e integre numericamente as equações de Hamilton para obter soluções $q(t)$. Repita esta operação algumas vezes com diferentes condições iniciais, aumentando gradativamente a amplitude e portanto a energia mecânica do sistema. Importante: o termo cúbico pode desestabilizar o sistema para q suficientemente negativo (basta fazer o gráfico da energia potencial). Neste caso, a "perturbação" deixaria de ser pequena e qualquer teoria de perturbação perderia o sentido. Tome portanto cuidado para não aumentar a energia mecânica a ponto de atingir esta desestabilização. Plote num mesmo gráfico as soluções $q(t)$ para as diferentes condições iniciais. O que você conclui a partir delas? A frequência aumenta ou diminui quando a energia aumenta? Isso concorda com os resultados do item (a)?
(c) Aplique agora o método da TPC *dependente* do tempo até $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ para o mesmo valor de ϵ e mesmas condições iniciais do item anterior. Note que **não** é preciso tomar nenhuma média, apenas obtenha $q(C_1(t), D_1(t))$, onde $C_1(t)$ e $D_1(t)$ são obtidos por integração usando C_0 e D_0 no lado direito das ECH. Repita o gráfico de $q(t)$ nos moldes do item (b), só que usando os resultados de TPC. Compare os resultados. Quão informativos são os resultados da TPC (até $\mathcal{O}(\epsilon^1)$), no que diz respeito à dependência da frequência com a energia do sistema?

Dado: $\displaystyle\int \sin^3(z)\, dz = \frac{\cos^3(z)}{3} - \cos(z)$