



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
Dinâmica Clássica Avançada - 2023.1
Prof. Mauro Copelli

4ª Lista de Problemas: Hamilton-Jacobi e variáveis Ação-Ângulo

Questão 1: Usando o método de Hamilton-Jacobi, resolva o problema do lançamento oblíquo em três dimensões dado pela hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz .$$

Questão 2: Uma partícula de massa m move-se no plano xy sujeita ao campo gravitacional de duas massas muito maiores m_1 e m_2 que permanecem fixas sobre o eixo x nas posições $(\pm a, 0)$.

(a) Mostre que em coordenadas elípticas (u, v) definidas por

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \cos v , \\ y &= a \sinh u \sin v , \end{aligned}$$

a Hamiltoniana deste problema é

$$H = \frac{1}{2ma^2} \frac{p_u^2 + p_v^2}{\cosh^2 u - \cos^2 v} + \frac{k}{\cosh u - \cos v} + \frac{k'}{\cosh u + \cos v}$$

e determine k e k' .

(b) Mostre que a equação de Hamilton-Jacobi correspondente é separável e reduza a solução das equações de movimento a quadraturas (isto é, você pode deixar integrais indicadas na solução final).

Questão 3: Uma partícula de massa m restrita ao eixo x se move sob a ação de um potencial $V(x) = V_0 \tan^2(\alpha x)$, onde V_0 e α são constantes positivas.

(a) Obtenha a variável de ação como função da energia e , a partir deste resultado, obtenha a frequência como função da energia.

(b) Tome os limites de alta e baixa energias para mostrar que os resultados se aproximam respectivamente do oscilador harmônico e da partícula na caixa.

Dado: $\int_0^{\beta^{-1} \arctan(\sqrt{f/v})} dq \sqrt{f - v \tan^2(\beta q)} = \pi(\sqrt{f+v} - \sqrt{v})/(2\beta)$ ($f > 0$).

Questão 4: Resolva o problema do átomo de hidrogênio ($V(r) = -k/r$) usando variáveis ação-ângulo. Obtenha os níveis de energia aplicando a regra de Bohr-Sommerfeld.

Algumas integrais úteis:

$$\int \frac{dx}{1 - k^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan \left(\sqrt{1 - k^2} \tan(x) \right)$$

$$\int \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{x} dx = \sqrt{a + bx + cx^2} - \sqrt{-a} \arcsin \left(\frac{2a + bx}{x\sqrt{\Delta}} \right) - \frac{b}{2\sqrt{-c}} \arcsin \left(\frac{2cx + b}{\sqrt{\Delta}} \right) ,$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$, $a, c < 0$. Sugestão: siga os passos detalhados no livro de Nivaldo Lemos [Lem04].

Questão 5: Revisite o retrato de fase do pêndulo simples (por exemplo, seção 1.3 de José & Saletan ou seção 9.5 de Nivaldo Lemos). Observe que, para energias baixas, as curvas de energia constante são curvas fechadas C_α no plano (θ, p_θ) que circundam o ponto de equilíbrio estável ($\theta = 0, p_\theta = 0$). Fisicamente,

estas curvas fechadas correspondem à oscilação do pêndulo em torno do ponto mais baixo. Foi neste tipo de movimento (chamado de *libração*) que concentramos a aplicação das variáveis Ação-Ângulo.

Para energias suficientemente altas, entretanto, o pêndulo atinge o ponto mais alto de sua trajetória com energia cinética suficiente para permanecer girando. Este tipo de movimento (chamado de *rotação*) é representado no espaço de fase por trajetórias que não são mais fechadas. Observe que $p_\theta(\theta)$ ainda é uma função periódica, mas $\theta(t)$ não mais (θ cresce monotonicamente com o tempo). Ainda assim, neste caso é possível definir uma variável de ação J que parametriza a curva de energia constante na qual a partícula se mantém. Para isso, definimos

$$J = \int_{q_0}^{q_0+T_q} p dq ,$$

onde T_q é a periodicidade *no eixo* q (no caso do pêndulo, $T_\theta = 2\pi$).

Utilizando variáveis Ação-Ângulo, resolva o problema de um rotor com momento de inércia I girando sobre um eixo fixo na ausência de torques externos, ou seja,

$$H = \frac{p_\theta^2}{2I} .$$

Observação: neste caso, a extrema simplicidade do problema faz com que o período da função $p_\theta(\theta)$ seja... qualquer!

Questão 6: Façamos inicialmente uma **revisão sobre modos normais de vibração** (se preferir, consulte e.g. Goldstein ou Nivaldo Lemos ou pule diretamente para o item (a)). Quando um sistema conservativo com n coordenadas generalizadas $\{q_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$ tem um mínimo local de energia potencial, $\left. \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \right|_{q=q_0} = 0$, $\forall \alpha$, normalmente é possível expandir a lagrangiana até os primeiros termos relevantes,

$$L = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \dot{\eta}_\alpha \dot{\eta}_\beta - \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \right) , \quad (1)$$

onde $\eta \equiv q - q_0$ é a perturbação em torno do mínimo em $q = q_0$. Se se propõe uma solução periódica do tipo $\eta_\alpha(t) = \Re[z_\alpha(t)] = \Re[z_\alpha^0 e^{i\omega t}]$, as equações de Euler-Lagrange levam a uma equação do tipo

$$(V - \omega^2 T) \vec{z}_0 = 0 , \quad (2)$$

onde $\vec{z}_0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)^T$ é um vetor constante. Ela tem solução não-trivial desde que $\det(V - \omega^2 T) = 0$, que é uma equação algébrica de grau n para ω^2 , com n raízes positivas $\omega = \omega_s$, $s = 1, \dots, n$. A estas raízes estão associados vetores característicos reais $\vec{v}^{(s)}$ que são solução da eq. (2), isto é, $\vec{z}_0 = \vec{v}^{(s)}$. Assim, $\vec{z}_s \equiv \vec{v}^{(s)} e^{i\omega_s t}$, $s = 1, \dots, n$ são n soluções independentes chamadas de *modos normais de vibração*. Uma solução geral do problema é uma combinação linear de modos normais:

$$\vec{z}(t) = \sum_s^n C_s \vec{v}^{(s)} e^{i\omega_s t} . \quad (3)$$

De fato, é possível fazer uma transformação de coordenadas $\vec{\eta} = A \vec{\zeta}$ tal que a lagrangiana (1) fique inicialmente reescrita como $L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\zeta}}^T A^T T A \dot{\vec{\zeta}} - \frac{1}{2} \vec{\zeta}^T A^T V A \vec{\zeta}$. A escolha $A_{ij} = v_j^{(i)}$ promove a diagonalização $A^T T A = 1$ e $A^T V A = W^D$, onde W^D é uma matriz diagonal contendo os ω_s^2 . Assim, em termos das *coordenadas normais* $\{\zeta_\alpha\}$, a lagrangiana fica

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\dot{\zeta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \zeta_\alpha^2 \right) , \quad (4)$$

que corresponde a n osciladores harmônicos desacoplados. Ou seja, a equação de Hamilton-Jacobi deste problema é completamente separável. Projetando a trajetória do espaço de fase $2n$ -dimensional no plano bidimensional (ζ_α, p_α) (onde $[\zeta_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha,\beta}$), temos uma elipse.

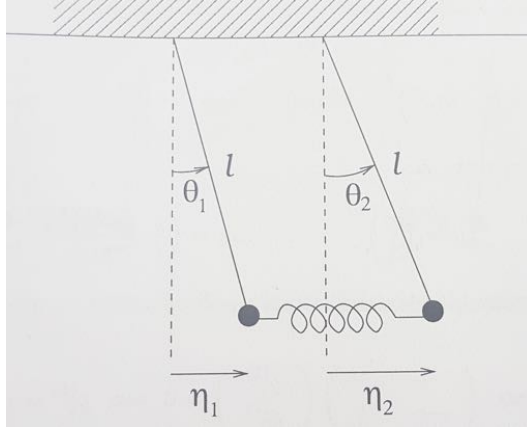


Figura 1: Dois pêndulos acoplados [Fig. 5.5 de Nivaldo Lemos].

(a) Usaremos aqui um exemplo resolvido em detalhe no capítulo 5 de Nivaldo Lemos [Lem04]. Considere dois pêndulos planos idênticos (comprimento ℓ e massa m) acoplados por uma mola de constante elástica k (Fig. 1). Neste caso, a aplicação dos procedimentos descritos acima resulta em dois modos normais:

$$\begin{cases} \text{modo simétrico: } \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com frequência } \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ (isto é, com a mola sempre em equilíbrio)} \\ \text{modo anti-simétrico: } \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ com frequência } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}. \end{cases} \quad (5)$$

O modo simétrico corresponde aos dois pêndulos oscilando na mesma direção (observe que ω_1 não depende de k , pois a mola permanece em equilíbrio). O modo anti-simétrico corresponde aos dois pêndulos oscilando em direções opostas (com frequência $\omega_2 > \omega_1$, uma vez que agora a mola contribui para a oscilação). As coordenadas normais respectivas são $\zeta_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}(\eta_1 + \eta_2)$, que oscila com frequência ω_1 , e $\zeta_2 = \sqrt{\frac{m}{2}}(\eta_1 - \eta_2)$, que oscila com frequência ω_2 .

Como vimos em sala de aula, a trajetória deste sistema reside num 2-toro. O objetivo do exercício numérico a seguir é simplesmente visualizar como o movimento multiperiódico de um sistema hamiltoniano integrável de dimensão 4 aparece quando observamos a seção de Poincaré de dimensão 2. Suponha, por simplicidade, que escolhamos uma condição inicial tal que $\dot{\zeta}_1(t=0) = \dot{\zeta}_2(t=0) = 0$ (isto é, os pêndulos começam parados). Neste caso, $\zeta_\alpha(t) = \zeta_\alpha^0 \cos(\omega_\alpha t)$ e, calculando p_α a partir da lagrangiana (4), $p_\alpha = -\omega_\alpha \zeta_\alpha^0 \sin(\omega_\alpha t)$ ($\alpha = 1, 2$). Por simplicidade, escolha $\zeta_1^0, \zeta_2^0 > 0$.

Tome agora a seção de Poincaré S como sendo, por exemplo, $p_2 = 0$ e $\zeta_2 > 0$. Ou seja, S reside no plano (ζ_1, p_1) . Pela escolha das condições iniciais e da seção de Poincaré, em $t = 0$ o sistema se encontra exatamente “furando” S , no ponto $(\zeta_1(0), p_1(0))$. Ele retornará a S quando as condições $p_2 = 0$ e $\zeta_2 > 0$ ocorrerem novamente, ou seja, após um período $T_2 = 2\pi/\omega_2$. O segundo ponto que aparece em S é portanto $(\zeta_1(T_2), p_1(T_2))$. Os seguintes são $(\zeta_1(2T_2), p_1(2T_2)), (\zeta_1(3T_2), p_1(3T_2)), \dots, (\zeta_1(mT_2), p_1(mT_2))$ etc.

Considere $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e escolha valores razoáveis para ℓ , k e m . Observe que, a não ser que você manipule os dados com este propósito (ou tenha uma sorte merecedora de estudo...), a razão ω_1/ω_2 deve ser um número irracional (deixe registrado no gráfico os valores dos parâmetros utilizados, bem como de ω_1 , ω_2 e ω_1/ω_2). Faça três gráficos da seção de Poincaré, mostrando os pontos no plano (ζ_1, p_1) com m_1 pontos, m_2 pontos e m_3 pontos ($m_1 < m_2 < m_3$). Observe que eles vão gradualmente preenchendo uma elipse no plano (ζ_1, p_1) , mas nunca se repetem.

(b) O movimento $\eta_1(t)$ da primeira partícula é dado, a menos de uma constante multiplicativa irrelevante, pela soma das duas coordenadas normais. Faça um gráfico de $\zeta_1(t) + \zeta_2(t)$ para um tempo longo o suficiente (digamos, $> 50T_1$) para se convencer de que $\eta_1(t)$ não é um movimento periódico (mas sim multiperiódico). Note que ele pode parecer periódico (daí o nome “quasi-periódico!”), mas não é.

Dica: observe que não é preciso integrar nenhuma equação diferencial, nem no item (a) nem no item (b). Basta usar a solução analítica!

Referências

- [GPS02] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3rd edition, 2002.
- [Lem04] N. A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2004.