Eduardo Costa de Oliveira
PPGMMC
eduardo.oliveira@sou.unijui.edu.br

Tarefa 2
Equações Diferenciais Ordinárias

21 de junho de 2021

1 Proposição

O Sudário de Turim mostra a imagem, em negativo, do corpo de um homem que aparentemente foi crucificado, e que muitos acreditavam ser de Jesus de Nazareth. Em 1988, o Vaticano deu a permissão para datar por Carbono 14 o Sudário. Três laboratórios científicos e independentes analisaram o tecido e constataram que a quantidade residual de C14 encontrada foi de 92% da quantidade original. Encontre a idade aproximada desse Sudário e conclua se ele poderia ter sido Jesus de Nazareth. Enviar a solução até o dia 14 de junho às 12 h para o email airam@unijui.edu.br.

1.1 Resolução

Uma substância radiotiva decai a uma taxa proporcional a sua quantidade em um determinado tempo.
A taxa de variação de quantidade da substância em uma amostra é proporcional ao negativo desta quantidade.
Desta forma podemos descrever a equação do decaimento exponencial como:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

Que é uma Equação Diferencial Ordinária de 1^a Ordem, homogênea. Onde N é a quantidade da substância e k é a constante de decaimento.

A resolução será dada pela separação das variáveis.

$\frac{dN}{N} = -kdt$

$\int \frac{dN}{N} = -k \int dt$

$\ln|N| = -kt + C$

$\ln N = -kt + C$

Para que a solução seja válida para $t >= 0$, a constante C deve ser escolhida tal que a condição inicial N(0) = N0 seja satisfeita, em $t = 0$, teremos:

$lnN(0) = lnN0 = C$

então:

$\ln N = -kt + lnN0$

$\ln N - lnN0 = -kt$

$ln\frac{N}{N0} = -kt$

$e^{ln\frac{N}{N0}} = e^{-kt}$

$\frac{N}{N0} = e^{-kt}$

$N = N0e^{-kt}$

Dadas estas condições iniciais, a solução $N(t)$ para o decaimento exponencial será:

$N(t) = N0e^{-kt}$ (1)

A meia vida τ de uma substância é calculada por:

$N(\tau) = \frac{N0}{2}$ (2)

Utilizando (1) e (2) podemos relacionar k e τ:

$\frac{N0}{2} = N0e^{-k\tau}$

$\frac{1}{2} = e^{-k\tau}$

$ln\frac{1}{2} = lne^{-k\tau}$

$ln\frac{1}{2} = -k\tau$

$-ln2 = -k\tau$

$k\tau = ln2$

$k = \frac{ln2}{\tau}$

Vamos chamar de $t1$ o tempo em que a substância mantém 92% da quantidade original de C14.
Aplicando esta definição em (1), temos:

$N0e^{-kt_1} = \frac{92}{100}N0$

$e^{-kt_1} = \frac{92}{100}$

$lne^{-kt_1} = ln\frac{92}{100}$

$-kt_1 = ln\frac{92}{100}$

$t_1 = -\frac{1}{k}ln\frac{92}{100}$

Substituindo k
$t_1 = -\frac{1}{\frac{ln2}{\tau}}ln\frac{92}{100}$

$t_1 = -\frac{\tau}{ln2}ln\frac{92}{100}$

Sendo $\tau = 5730$ anos, a meia vida do C14.

$t_1 = -\frac{5730}{ln2}ln\frac{92}{100}$ (3)

$t_1 = 689.29$ anos

A quantidade de 92% de C14 restante no Sudário na época da datação é relativa a idade aproximada de 689 anos, indicando que este não é o Sudário de Jesus de Nazaré.

Para uma datação mais acurada, a quantidade percentual de C14 encontrada no Sudário para o ano de 1988 deveria ser de 79%. Esta estimativa é obtida manipulando-se a equação (3), isolando-se o termo que calcula o logarítmo natural do percentual da quantidade de C14 restante.

$t_1 = -\frac{5730}{ln2}lnx$ (3)

$lnx = \frac{t1}{-\frac{5730}{ln2}}$

$e^{lnx} = e^{\frac{t1}{-\frac{5730}{ln2}}}$

$x = e^{\frac{t1}{-\frac{5730}{ln2}}}$

Avaliando como t1=1988:

$x = e^{\frac{1988}{-\frac{5730}{ln2}}}$

$x = 0.7862$ de C14 restante

É interessante observar a natureza exponencial do decaimento, os 13 pontos percentuais de diferença entre o valor encontrado e o estimado estão separados por 1298 anos aproximadamente.

A curva de decaimento do C14 é apresentada em conjunto com os valores, figura 1.

Foi elaborado um programa na ferramenta Octave para efetuar os cálculos e o gráfico, disponível em `https://github.com/OliveiraEdu/EDO`.

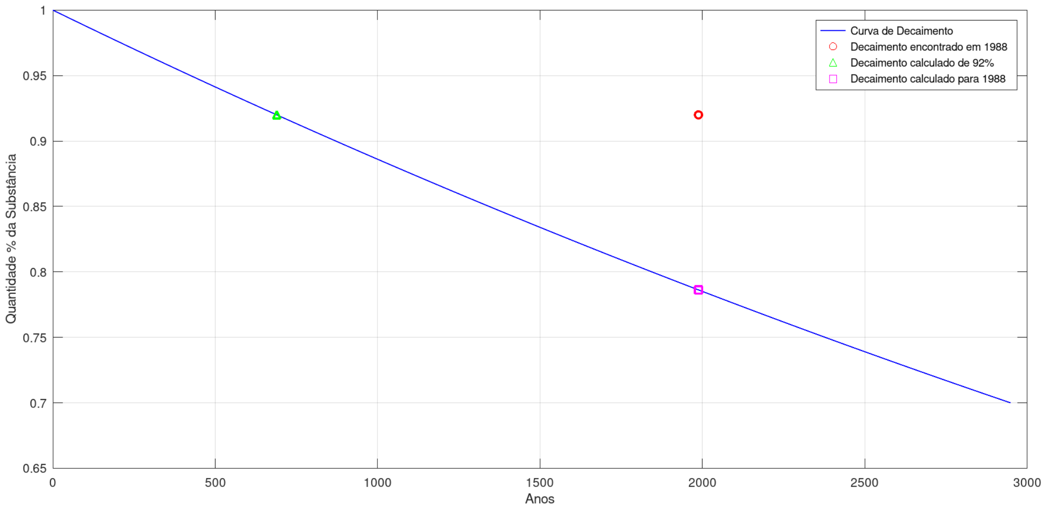

Figura 1: Valores para o decaimento para até 70% da quantidade de C14