Cuestionario T2

1.- ¿Identificar la/s diferencia/s esencial/es entre el plano afín y el plano proyectivo? ¿Cuáles son sus consecuencias? Justificar la contestación.
En un plano afín, las rectas que son paralelas lo seguirán siendo siempre. Para representar un punto en este plano sólo necesitamos las coordenadas (x, y) y las rectas son del tipo $\alpha x + \beta y + c = 0 \mid \alpha, \beta \ \varepsilon \ R$. Mientras, en el plano proyectivo un punto está definido por $(x, y, 1)$, coordenadas homogéneas. Para encontrar la relación entre ambos planos cogemos una variable ω donde $(\omega x, \omega y, \omega)$ del plano afín corresponde con $(x, y, 1)$ del plano proyectivo.

En definitiva las transformaciones proyectivas plasman una imagen plana de forma que resulte real para nosotros, por lo que llevan puntos al infinito aunque anteriormente estos no lo estuviesen y sólo se preserva la intersección entre rectas, tangencias, concurrencia y colinealidad; en cambio las transformaciones afines sólo mantienen el paralelismo y las proporciones (traslaciones, escalados, cizallas, giros) y éstos no llevan puntos al infinito si antes tampoco lo eran.

2.- Verificar que en coordenadas homogéneas el vector de la recta definida por dos puntos puede calcularse como el producto vectorial de los vectores de los puntos (*l* = *x* x *x'*). De igual modo el punto intersección de dos rectas l y l' está dado por *x* = *l* x *l'*.
Tenemos que el punto de intersección de dos rectas l y l' está dado por $x = l \times l'$ y que el producto vectorial de los vectores de dos puntos es $l = x \times x'$.

Aquí lo que queremos hacer es obtener la ecuación de la línea que pasa por dos puntos, que viene determinada por el producto vectorial de las coordenadas homogéneas de los mismos. Teniendo que l es la recta que contiene los puntos x y x' entonces tenemos que $l \cdot x = 0$ y $l \cdot x' = 0$ siendo l un vector perpendicular a x y x' pues para dos vectores cualesquiera a, b la condición $a \cdot b = 0$ implica que a y b son perpendiculares. Para determinar l es suficiente obteniendo cualquier vector perpendicular a x y x', y se obtiene mediante el producto vectorial, que devuelve un vector perpendicular para los dos vectores dados, como $l = x \times x'$.

Ahora queremos determinar el punto de intersección de dos líneas. Teniendo que x es el punto de intersección de las líneas l y l' entonces x es un punto que está en ambas líneas si:
$l \cdot x = 0$ y $l' \cdot x = 0$
Por tanto x es un vector perpendicular a las líneas l y l' y motivo suficiente para establecerlo como $x = l \times l'$. El producto vectorial genera las coordenadas homogéneas del punto de intersección.

3.- Sean x y l un punto y una recta respectivamente en un plano proyectivo P1 y suponemos que la recta l pasa por el punto x, es decir lTx=0. Sean x' y l' un punto y una recta del plano proyectivo P' donde al igual que antes l'Tx'=0. Supongamos que existe un homografía de puntos H entre ambos planos proyectivos, es decir x'=Hx. Deducir de las ecuaciones anteriores la expresión para la homografía G que relaciona los vectores de las rectas, es decir G tal que l'=Gl. Justificar la respuesta

Tenemos que $l^T x' = l^T x = 0$ y que $H^{-1}H$ es igual a la matriz identidad. Por lo que podemos hacer lo siguiente:

$l^T x' = l^T H^{-1} H x = 0$

Sabemos que $x' = Hx$ por tanto si lo sustituimos en la fórmula anterior:

$l^T x' = l^T H^{-1} x' = 0$

Eliminamos x' de la fórmula por lo que nos quedamos con $l'^T = l^T H^{-1}$ donde sacando la traspuesta: $l'^T = ((H^{-1})^T l)^T$

Sabemos que los si los vectores traspuestos son iguales también lo son sin trasponer por tanto:

$l' = (H^{-1})^T l$

Finalmente como $l' = Gl$ podemos deducir de la fórmula anterior que $G = (H^{-1})^T$.

4.- Identificar los movimientos elementales (traslación, giro, escala, cizalla, proyectivo) representados por las homografías H1, H2, H3 y H4:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

H_1 es una multiplicación de tres matrices donde se aplican tres transformaciones, una traslación de 3 unidades para la x y 5 unidades para la y, un escalado y una cizalla.

H_2 es una multiplicación de dos matrices donde se aplica una composición de una traslación de 2 unidades para la x y -3 para la y con un giro de 90º (debido a que el $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ y $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ donde $\frac{\pi}{2} = 90^o$) de la primera y una composición de un escalado con cizalla en la segunda.

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

H_3 es una multiplicación de dos matrices donde la primera aplica una composición de cizalla con escalado, y la segunda es una transformación proyectiva al cambiarse la última fila, y no es composición al tener las dos primeras filas con la identidad.

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tras una serie de operaciones llegamos a la conclusión de que H_4 es una composición de transformaciones, en concreto traslación, escalado y cizalla. También se aplica una transformación proyectiva ya que de nuevo tenemos que se cambia la última fila y las anteriores son la identidad.

$$H_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.- ¿Cuáles son las propiedades necesarias y suficientes para que una matriz defina una homografía entre planos? Justificar la respuesta.

Las propiedades para que una matriz defina una homografía:

- El determinante de dicha matriz sea distinto de 0.
- Forman clases de equivalencia salvo una constante.
- La matriz tiene que ser de tamaño 3x3.

Por tanto si *H* es invertible la función $h: P^2 \rightarrow P^2$ mantiene la colinealidad, además si para cada punto x éste pertenece a un plano proyectivo donde $h(x) = Hx$, la matriz *H* defina una homografía entre ambos planos proyectivos.

6.-¿Qué propiedades de la geometría de un plano quedan invariantes si se aplica una homografía general sobre él? Justificar la respuesta.
Si *H* es una homografía dada por $h: P^2 \rightarrow P^2$ donde se seleccionan tres puntos x_1, x_2, x_3 pertenecientes a misma línea o recta r entonces $h(x_1), h(x_2), h(x_3)$ también lo cumple. Por este motivo se preservan las intersecciones entre rectas, puntos de tangencia, concurrencia y colinealidad.

7.- ¿Cuál es la deformación geométrica más fuerte que se puede producir sobre la imagen de un plano por el punto de vista de la cámara? Justificar la respuesta.
La deformación geometría más fuerte es la proyección pues es la que menos invariantes preserva, a pesar de las propiedades que hemos dicho en el ejercicio 1 que conserva, no mantiene ángulos, distancias, áreas o paralelismo cuando otras transformaciones si.

8 .-¿Qué información de la imagen usa el detector de Harris para seleccionar puntos? ¿El detector de Harris detecta patrones geométricos o fotométricos? Justificar la contestación.
Utiliza el gradiente para la detección de los puntos mediante la primera derivada respecto a x y la primera derivada respecto a y. El detector de harris detecta puntos correspondientes a una esquina que no tienen por qué ser cambios de intensidad, siendo un patrón geométrico pero también detecta patrones fotométricos ya que también obtiene información que tiene que ver con los cambios de intensidad.

9.- ¿Sería adecuado usar como descriptor de un punto Harris los valores de los píxeles de su región de soporte? En caso positivo identificar cuando y justificar la respuesta.
Podría ser adecuado como descriptor pero no siempre ya que si tenemos un punto Harris y como descriptor la región de soporte, mostrando estos ejemplos:

- Si se realiza una traslación sobre la imagen los cambios de intensidad se mantienen pues la región de soporte se mueve a la vez que la imagen y el descriptor será invariante a dicha transformación.

- Si lo que realizamos es un escalado y hacemos la imagen tres veces más grande y queremos encontrar el mismo descriptor en la imagen grande, no podremos debido a que el tamaño de la ventana se queda más pequeña y no se podría encontrar la esquina, por lo que no sería una buena opción la región de soporte para este caso.

- Si se realiza una rotación encontraremos también el punto Harris al encontrarse la esquina pero será otro punto diferente para el descriptor.

La conclusión es que si las transformaciones no son traslaciones no se debe usar la región de soporte como descriptor por lo que en términos generales no es adecuado usarlo.

10.- ¿Qué información de la imagen se codifica en el descriptor de SIFT? Justificar la contestación.
La información que se codifica es la cantidad de gradientes que hay en torno a un punto. Los descriptores se forman en una ventana de tamaño 16x16 píxeles del punto, se divide esta ventana en 4 celdas de 4, es decir, 4x4 píxeles donde habrá un histograma que representa por cada ángulo el número de píxeles que tienen un gradiente con este ángulo.

11.- Describa un par de criterios que sirvan para establecer correspondencias (matching) entre descriptores de regiones extraídos de dos imágenes. Justificar la idoneidad de los mismos.
Un criterio podría ser ir punto por punto de la primera imagen comparando el descriptor de éstos con los de la segunda y establecer la mejor relación de correspondencia posible. Al terminar se realiza lo mismo pero desde la segunda imagen a la primera y se escogen aquellos puntos comunes en ambas iteraciones. Este método es el de fuerza bruta con cruce, la contra de usar este método es que es bastante lento al tener que comparar todos los puntos.

Otro criterio es crear un árbol de búsqueda para características en los descriptores que coincidan con una característica de un descriptor dado. Esto sería bastante eficiente ya que lo que se busca es la característica que queremos y no se tienen que comparar todos los puntos. Podemos encontrar más información sobre esta técnica en el paper Fast Matching of Binary Features.

12.- ¿Cuál es el objetivo principal en el uso de la técnica RANSAC?. Justificar la respuesta.
Encontrar dadas dos imágenes una homografía entre ambas buscando que la calidad de las parejas de puntos sea buena y que estén bien relacionados. Esta técnica no tiene en cuenta las parejas de puntos que considera que no están bien emparejadas, es decir, a que dicha pareja de puntos no corresponde al mismo punto en ambas imágenes.

Se escogen 4 puntos de una imagen y se pregunta a la otra si cada punto de la segunda imagen está en correspondencia con una distancia menor que la establecida y se van contabilizando; esto se repite cambiando entre esos 4 puntos y finaliza con éxito si el número de puntos en correspondencias que estén bien supera el 50%.

13.- ¿Si tengo 4 imágenes de una escena de manera que se solapan la 1-2, 2-3 y 3-4. ¿Cuál es el número mínimo de puntos en correspondencias necesarios para montar un mosaico? Justificar la respuesta.
El número de puntos mínimo que hacen falta para calcular una homografía son 4 por tanto nos dicen que se solapan de la forma 1-2, 2-3, 3-4 por lo que no podríamos decir que 16 puntos serían los que necesitamos ya que para ello esos mismos 4 puntos deberían ponerse en correspondencia entre las 4 imágenes.

La mejor forma para tener el mínimo número de puntos es que para la homografía 2-3 y 3-4 se cojan puntos comunes de su homografía anterior, es decir:
Se cogen 4 puntos de la imagen 1 con 4 puntos de la imagen 2 (4+4=8 puntos), más 3 puntos comunes a estos y uno extra con 4 puntos de la imagen 3 (8+1+4=13 puntos), realizamos la misma operación, es decir, de los anteriores cogemos 3 puntos comunes más uno extra con 4 puntos de la imagen 4, quedándonos con un total de 18 puntos.

14.- En la confección de un mosaico con proyección rectangular es esperable que aparezcan deformaciones de la realidad. ¿Cuáles y porqué?. ¿Bajo qué condiciones esas deformaciones podrían desaparecer? Justificar la respuesta.
Puede ocurrir que líneas o rectas que no se cortan, es decir, que son paralelas, aparezcan como que sí se cortan. Estas deformaciones no aparecerían si el tipo de transformaciones son sólo traslaciones.

Una segunda deformación es debido a que tras capturar imágenes realizando el giro de la cámara, siendo realmente como si se estuviese haciendo en una semicircunferencia, por lo que al realizar una proyección rectangular en un plano, en este la imagen se percibe deforme. Para solucionar esta deformación se podría proyectar la imagen en una semiesfera en lugar de un plano.

Otras deformaciones tienen que ver con la captura de las imágenes en momentos diferentes, como puede ser el cambio luminosidad entre ellas, cambios de la propia escena, (coches, personas, etc). Para el caso de la iluminación podría solucionarse realizando un suavizado y para el caso de los objetos cortados superponerse la imagen que no contiene el objeto sobre el que si.