

1. 请问 $L_1 = \{a^n b^j a^n b^j | n \geq 0, j \geq 0\}$ 是否为上下文无关语言, 给出理由或证明。

解. L_1 不是上下文无关语言, 采用反证法证明。

证明. 若 L_1 是上下文无关语言, 设 p 是上下文无关语言泵引理的关键长度 (与生成 $L_1 - \{\epsilon\}$ 的上下文无关文法 G 有关), 考虑 L_1 中的串 $s = a^p b^p a^p b^p$, 由于 $|s| \geq p$, 知 s 可以写成 $s = uvxyz$ 的形式, 其中 $|vxy| \leq p, |vy| \geq 1$. 将 $s = a^p b^p a^p b^p$ 划分成如下四个区域,

$$\begin{array}{cccc} \text{(I)} & \text{(II)} & \text{(III)} & \text{(IV)} \\ \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} \end{array}$$

分情况讨论 v, y 的情况:

(1) vxy 只在区域 (I)

$$\begin{array}{ccccccc} & & p & & p & p & p \\ \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} \\ u & v & x & y & & & z \end{array}$$

此时有 $v = a^{k_1}, y = a^{k_2}$, 其中 $k_1 + k_2 \geq 1$. 考察 $uv^2xy^2z = a^{p+k_1+k_2} b^p a^p b^p$, 由 $p + k_1 + k_2 \neq p$ 知 $uv^2xy^2z \notin L_1$, 而由上下文无关语言的泵引理知 $uv^2xy^2z \in L_1$, 故产生矛盾!

(2) vxy 只在区域 (II), 或只在区域 (III), 区域 (IV)

同情况 (1) 类似分析可得到矛盾。

(3) vxy 跨区域 (I) 和 (II)

① v 只含 a , y 只含 b

$$\begin{array}{ccccccc} & & p & & p & p & p \\ \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{b \cdots b} \\ u & v & x & y & & & z \end{array}$$

此时有 $v = a^{k_1}, y = b^{k_2}$, 其中 $k_1 + k_2 \geq 1$. 考察 $uv^2xy^2z = a^{p+k_1} b^{p+k_2} a^p b^p$, 因 $k_1 + k_2 \geq 1$, 必有 $p + k_1 \neq p$ 或 $p + k_2 \neq p$ 中的一个成立, 故 $uv^2xy^2z \notin L_1$, 而由上下文无关语言的泵引理知 $uv^2xy^2z \in L_1$, 故产生矛盾!

② v 含 a, b , y 只含 b

$$\begin{array}{ccccccc} & & p & & p & p & p \\ \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{a \cdots a} & \underbrace{b \cdots b} & \underbrace{b \cdots b} \\ u & v & x & y & & & z \end{array}$$

此时有 $v = a^{k_1} b^{k_2}, y = b^{k_3}$, 其中 $k_1, k_2 \geq 1$. 考察 $uv^2xy^2z = a^p b^{k_2} a^{k_1} b^{p+k_3} a^p b^p$, 显然不属于 L_1 , 而由上下文无关语言的泵引理知 $uv^2xy^2z \in L_1$, 故产生矛盾!

③ v 只含 a , y 含 a, b

同情况 ② 类似分析可得到矛盾。

(4) vxy 跨区域 (II) 和 (III), 或跨区域 (III) 和 (IV)

对 L_1 而言¹, 同情况 (3) 类似分析可得到矛盾。

□

¹对题 2 L_2 而言, 如果仍然取 $s = a^p b^p a^p b^p$, 跨区域 (II) 和 (III) 和跨区域 (I) 和 (II) 属于不同情况, 需要详细讨论。

2. 请问 $L_2 = \{a^n b^j a^j b^n | n \geq 0, j \geq 0\}$ 是否为上下文无关语言, 给出理由或证明。

解. L_2 是上下文无关语言, 因为存在上下文无关文法 $G = (V, T, S, P)$ 能够生成 L_2 , 其中 $V \triangleq \{S, E_{ab}, E_{ba}\}, T \triangleq \{a, b\}$, 规则 P 为,

$$\begin{aligned} S &\rightarrow E_{ab} | \epsilon \\ E_{ab} &\rightarrow aE_{ab}b | E_{ba} \\ E_{ba} &\rightarrow bE_{ba}a | \epsilon \end{aligned}$$