1. 构造一个 DFA，识别所有以 1001 结尾的二进制字符串，请给出状态转换图，以及该 DFA 的五元组。

解. 设初始状态为 q_0，状态 q_1 表示已接收串 $\{0,1\}^*1$（简记为 $q_1 : \{0,1\}^*1$）。类似地，$q_2 : \{0,1\}^*10$，$q_3 : \{0,1\}^*100$，以及接收状态 $q_4 : \{0,1\}^*1001$，于是识别 1001 后缀二进制串的 DFA M 的状态转换图如图 *1* 所示。

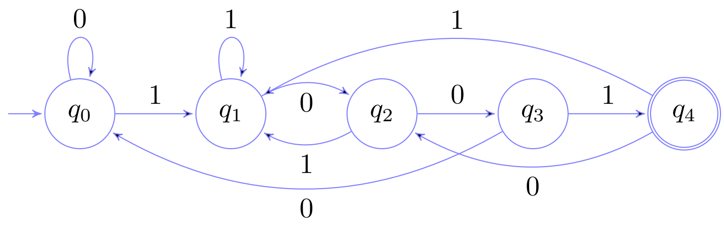

图 1: M 状态转换

定义，

(1) 状态集 $Q \triangleq \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$，

(2) 字母表 $\Sigma \triangleq \{0, 1\}$，

(3) 转换函数

$$\begin{aligned}\delta \triangleq \{\delta : Q \times \Sigma \to Q | \delta(q_0, 0) = q_0, \delta(q_0, 1) = q_1,\\ \delta(q_1, 0) = q_2, \delta(q_1, 1) = q_1,\\ \delta(q_2, 0) = q_3, \delta(q_2, 1) = q_1,\\ \delta(q_3, 0) = q_0, \delta(q_3, 1) = q_4,\\ \delta(q_4, 0) = q_2, \delta(q_4, 1) = q_1\}\end{aligned}$$

(4) 接收状态集 $F = \{q_4\}$。

于是该 DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 即为所求。

注 1. 转换函数 δ 也可以用如下表格表示，

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_3	q_1
q_3	q_0	q_4
q_4	q_2	q_1

也可以简单写成**转换函数 δ 由状态转换图 1 描述**。

2. 构造一个简单售货机的 DFA。该售货机只卖一种饮料 A，价格为 1.25 元。售货机只接受 0.25 元 (假定有这个面额硬币) 和 1 元投币，并且当收到 1.25 元或以上就不再接受新的投币。当售货机收到 1.25 元或以上，此时顾客按“出货”键可以拿到饮料。请写出该 DFA 的五元组，画出状态转换图。

解. 设状态 q_0 表示初始状态，即售货机已投入 *0* 元（简记为 $q_0 : 0$）。类似地，$q_1 : 0.25$，$q_2 : 0.5$，$q_3 : 0.75$，$q_4 : 1$，$q_5 : 1.25$，$q_6 : 1.5$，$q_7 : 1.75$，$q_8 : 2$。将对售货机的操作抽象为 $\{"0.25", "1", select\}$，其中 ”·” 表示投币 · 元（下面省略双引号），$select$ 表示按下“出货”键。于是定义，

(1) 状态集 $Q \triangleq \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$，

(2) 字母表 $\Sigma \triangleq \{0.25, 1, select\}$，

(3) 转换函数 δ 由图 *2* 给出描述，

(4) 初始状态 q_0，

(5) 接收状态 $F \triangleq \varnothing$。

则该 DFA 五元组即为 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$，状态转换图如图 *2* 所示。

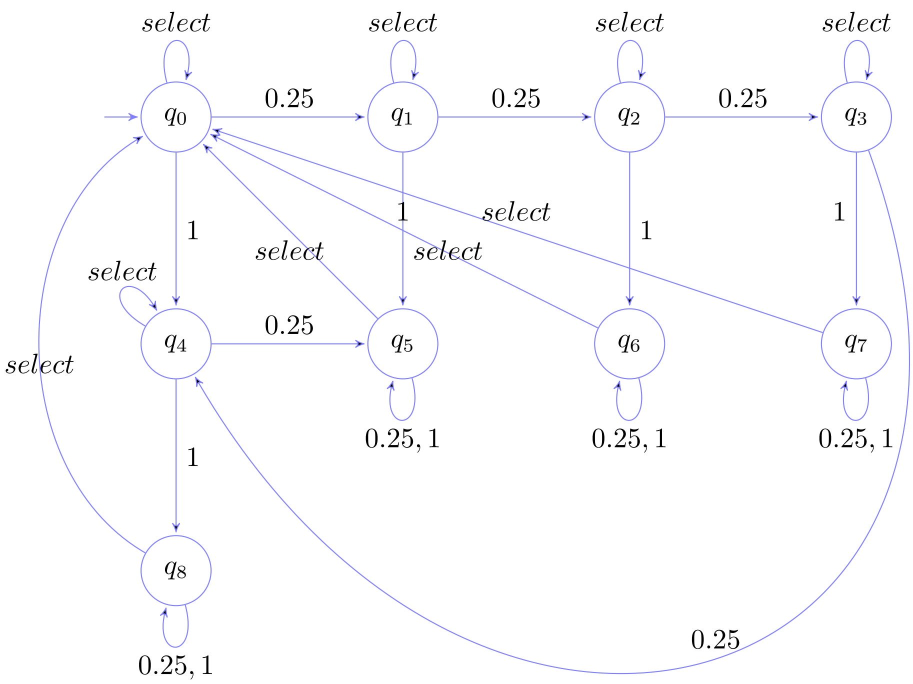

图 2: 简单售货机对应 DFA 状态转换

注 2. 本题考察 DFA 的实际应用，故需仔细考虑实际意义。顾客对售货机的操作（投币和按“出货”键）被抽象为 DFA 的字母表。由于是 DFA 模型，所以需要考虑所有转换情况，例如在售货机未达出货条件时，按“出货”键不会改变售货机状态，而达到出货条件时投币操作不会改变售货机状态（事实上售货机此时会将投入硬币直接退回，而 DFA 没有输出故在此模型下无需考虑）。最后，我们希望售货机能一直工作，故不应该设置接收状态。

注 3. 可以称两个接收串集合相同的 DFA 为等价的。而在没有限定 DFA 状态个数的情况下，存在无穷个互相等价的 DFA，因此本题答案并不唯一（包括第一题）。但是，对于第二题这种抽象实际生活中“售货机”的应用题，需确保 DFA 每个状态有实际含义且满足“售货机模型”（否则，由于题中 DFA 没有终态，接收串可认为是 $\varnothing$，任

意一个字母表相同且无终态的 DFA 都与之等价，可以画出很多无实际意义的 DFA）。例如，如果定义状态 $q_5 :\geq 1.25$，表示售货机已投入不少于 *1.25* 元的硬币，可以画出和图 *2* 等价且具有实际意义的 DFA 状态转换图（如图 *3* 所示），

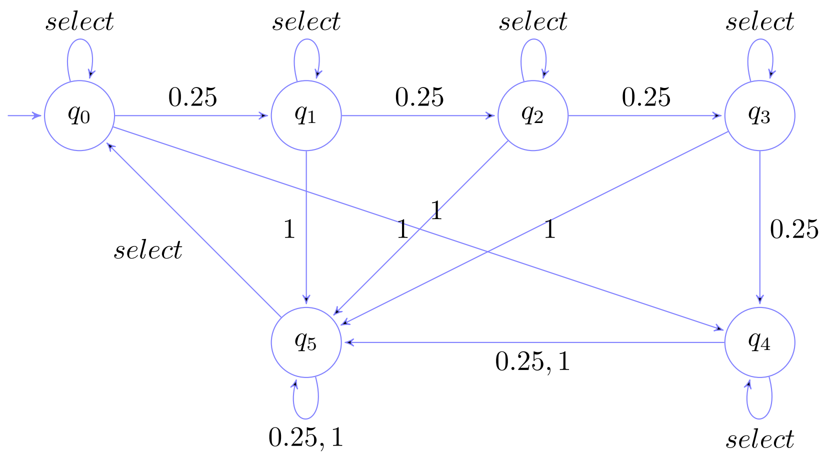

图 3: 与图 2 等价的 DFA 状态转换图

定义状态集 $Q \triangleq \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$，转换函数 δ 由图 *3* 给出描述，其余同上即可得到该 DFA 的五元组表示。

注 4. 关于 DFA 最小化的方法不在课程范围内，故不在此展开讨论，只给出参考链接（有两个方法，一是利用 *Myhill-Nerode* 定理，二是利用等价关系）：*https://www.tutorialspoint.com/automata_theory/dfa_minimization.htm*，供感兴趣的同学参考。

3. 请把如下 NFA（图 4 ）转换成等价的 DFA。

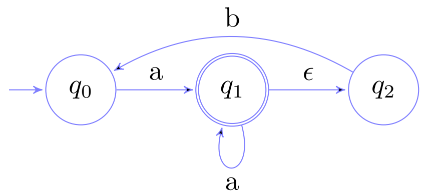

图 4: NFA 状态转换

解. 设图 *4* 对应 NFA 的转换函数 δ_N，等价 DFA 的转化函数 δ_D 且初始状态用 $\{q_0\}$ 表示。下面分三个步骤构造该等价 DFA，

(1) **确定等价 DFA 的状态集**

对 q_0 而言，由 $\delta_N^*(q_0, a) = \{q_1, q_2\}, \delta_N^*(q_0, b) = \varnothing$，知等价 DFA 需添加状态 $\{q_1, q_2\}$ 和 $\varnothing$；对 q_1 而言，由 $\delta_N^*(q_1, a) = \{q_1, q_2\}, \delta_N^*(q_1, b) = \{q_0\}$，状态 $\{q_0\}$ 和 $\{q_1, q_2\}$ 已存在知无需添加新状态；对 q_2 而言，由 $\delta_N^*(q_2, a) = \varnothing, \delta_N^*(q_2, b) = \{q_0\}$ 知同样无需添加新的状态。于是可定义等价 DFA 的状态集 $Q_D \triangleq \{\{q_0\}, \{q_1, q_2\}, \varnothing\}$。

(2) **确定等价 DFA 的状态转换**

对状态 $\{q_0\}$ 而言，由于内部只有一个 NFA 状态，故 $\delta_D(\{q_0\},\cdot)=\delta_N^*(q_0,\cdot)$；对状态 $\{q_1,q_2\}$ 而言，由 $\delta_N^*(q_1,a)=\{q_1,q_2\},\delta_N^*(q_2,a)=\varnothing$ 可知 $\delta_D(\{q_1,q_2\},a)=\{q_1,q_2\}\cup\varnothing=\{q_1,q_2\}$，又由 $\delta_N^*(q_1,b)=\{q_0\},\delta_N^*(q_2,b)=\{q_0\}$ 知 $\delta_D(\{q_1,q_2\},b)=\{q_0\}$；$\varnothing$ 表示 NFA 不可能进行的转换，相当于等价 DFA 的不可接收串，故 $\delta_D(\varnothing,\cdot)=\varnothing$。

(3) **确定等价 DFA 的接收状态**

NFA 的接收状态 $q_1\in\{q_1,q_2\}$，故 $\{q_1,q_2\}$ 为等价 DFA 的接收状态。

综上，等价 DFA 的状态转换图如图 *5* 所示。

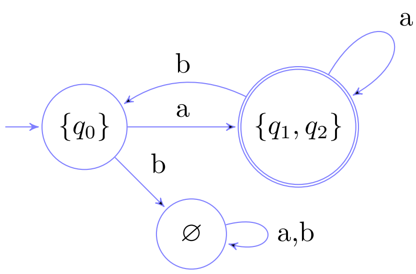

图 5: 等价 DFA 状态转换

注 5. 课件 NFA.ppt 第 *75* 页例题。