



CEM des systèmes

Utilisation de la méthode DF pour la simulation CEM

Objectifs :

- Calcul des champs électrique / magnétique par la méthode des différences finies
- Développement d'un code de calcul temporel

Compétences visées :

- Connaître les éléments constitutifs d'un modèle électromagnétique sur un exemple de calcul transitoire : domaine de calcul, source, conditions initiales, conditions aux limites, itérations
- Utilisation d'un outil de simulation & développement numérique (sous environnement Matlab / Octave)
- Post-traitement des données & sensibilisation aux grandeurs CEM

Contrôle des connaissances :

- Rendu d'un compte-rendu des travaux suite à la séance de travaux
-

Introduction

Le but de ce TP est de vous amener à étudier, comprendre, implémenter et tester un problème d'électrodynamique classique dans le contexte de la compatibilité électromagnétique. Ainsi, on s'intéresse à la propagation d'une onde (électromagnétique) basée sur la résolution des équations de Maxwell.

Dans le contexte précédent, on s'intéresse à la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD en anglais, pour Finite Difference in Time Domain). Différentes raisons poussent à ce choix : le schéma FDTD est minimal en termes d'investissement puisque son implémentation ne demande pas de ressources informatiques trop importantes (matrices de dimensions élevées). En outre, son utilisation est relativement simple pour étudier les phénomènes d'interaction des ondes et de couplages [1, 2].

Simulation (C)EM pour les systèmes

1°- Schéma FDTD => scriptFDTD01

1.1 Les équations de Maxwell

Les équations décrivant la propagation temporelle des ondes (électromagnétiques ici) sont données à partir des équations de Maxwell temporelle en espace libre (espace libre signifiant que l'interaction des objets et éléments divers est faible pour la propagation des ondes électromagnétiques) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

Les données E et H sont des vecteurs à trois dimensions cartésiennes qui représentent respectivement le champ électrique et le champ magnétique. L'opérateur différentiel « nabra » ∇ est défini par :

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Le traitement de $\nabla \times \mathbf{H}$ se fait de manière similaire.

Les équations de Maxwell peuvent se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dans la suite de ce TP, on ne s'intéressera pas aux champs tridimensionnels mais à un problème particulier concernant la propagation d'une onde selon l'axe « z ». On prendra pour hypothèse que la composante E_y est nulle (tout comme E_z) et on a : $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$. Ceci impose que la seule composante pour \mathbf{H} non nulle est H_y ici. Les deux seules équations à considérer dans la suite sont :

Simulation (C)EM pour les systèmes

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}\end{aligned}$$

On se basera dans la suite sur les deux équations précédentes pour l'implémentation des équations de Maxwell.

1.2 Algorithme à utiliser (implémentation sous Matlab) => `scriptFDTD01`

Dans la suite de ces travaux, on s'intéressera à la propagation des ondes transverses électromagnétiques (TEM) ; pour cela, on considérera les composantes E_x et H_y des champs électrique et magnétique. Comme vu précédemment dans vos cours, le schéma FDTD qui sera utilisé ici requiert une discrétisation spatiale et temporelle. Pour l'approximation, on définira le pas spatial « Delta_z » pour la variation suivant l'axe de propagation z et « Delta_t » pour l'écart constant séparant deux instants consécutifs (discrétisation temporelle). On utilise les différences finies centrées pour obtenir les approximations des équations précédentes, on en déduit donc :

$$\frac{(E_x)_k^{n+1/2} - (E_x)_k^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{(H_y)_{k+1/2}^n - (H_y)_{k-1/2}^n}{\Delta z} \quad (1)$$

$$\frac{(H_y)_{k+1/2}^{n+1} - (H_y)_{k+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{(E_x)_{k+1/2}^n - (E_x)_{k-1/2}^n}{\Delta z} \quad (2)$$

Dans cette approximation, chaque pas de temps est représenté par n et chaque pas spatial par k . La résolution des composantes E_x et H_y au pas de temps $n+1/2$ et $n+1$ respectivement conduit à :

$$(E_x)_k^{n+1/2} = \gamma \left((H_y)_{k+1/2}^n - (H_y)_{k-1/2}^n \right) + (E_x)_k^{n-1/2} \quad (3)$$

$$(H_y)_{k+1/2}^{n+1} = \tau \left((E_x)_{k+1/2}^{n+1/2} - (E_x)_{k-1/2}^{n+1/2} \right) + (H_y)_{k+1/2}^n \quad (4)$$

Avec : $\gamma = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\Delta t}{\Delta z}$ et $\tau = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta t}{\Delta z}$.

Le pas de temps à utiliser dans la simulation peut s'écrire :

$$dt_0 \leq \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} * dz \quad (5)$$

La méthode FDTD autorise l'utilisation de pas de temps tels que : $dt = \alpha * \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} * dz$, avec α un critère compris entre 0 et 1 (critère de stabilité).

Simulation (C)EM pour les systèmes

Pour la gestion des constantes mises en jeu, la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique dans le vide sont données par : $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$.

Le profil temporel de la source utilisée est détaillé dans la suite (source de profil Gaussien, à imposer au milieu du domaine de calculs) :

$$E(z_0, t) = \exp(-[(t - t_0)/\text{spread}]^2) \quad (6)$$

Avec une source imposée au point z_0 (dans la suite, le point situé au centre du domaine de calculs).

Synthétiquement, les différentes étapes de l'algorithme à réaliser sont données ici :

- Initialisation des constantes physiques (eps0, mu0 par exemple),
- Discrétisations spatiale et temporelle (définir la dimension du domaine de calcul, le nombre de points de mesure en espace « max_space » et en temps « max_time », le pas de temps temporel à utiliser doit respecter le critère de stabilité).
- Définition des coefficients γ et τ vus précédemment.
- Initialiser les valeurs des champs E et H dans deux tableaux tels que nombre de points en champ E = nombre de points en champ H + 1.
- Initialiser les paramètres de la source de champ E ($\text{spread}=1,6 \times 10^{-10}$, position spatiale = centre du domaine de calcul, $t_0 = 40 \cdot \Delta t$).
- Démarrer la boucle temporelle allant de l'itération « 1 » à l'itération « max_time » choisie. Dans la boucle temporelle précédente, prévoir :
 - Le calcul du champ électrique (boucle ou calcul vectorisé) à partir des champs magnétiques.
 - La définition de la source de champ électrique (voir le profil temporel dans la suite), à imposer au milieu du domaine de calcul.
 - Le calcul du champ magnétique (boucle ou calcul vectorisé) à partir des champs électriques.
 - Le tracé du champ électrique dans une figure Matlab pour chaque itération en fonction de la position dans le domaine de calculs (voir un exemple dans la figure 1).
- Prévoir à la fin le tracé du champ magnétique et du champ électrique obtenu dans le domaine de calcul à la dernière itération en temps.

Dans les équations (3) et (4) précédentes, il peut sembler étrange à première vue de définir des demi-pas d'espace et de temps pour faire le calcul. L'expression théorique du schéma différences finies pas schéma « saute-mouton » impose cette définition théoriquement. Toutefois, pour la programmation, on accède évidemment qu'à des indices entiers (et pas de demi-indice) pour les tableaux E() et H().

Pour débiter le programme, on peut s'intéresser à l'initialisation des tableaux qui doit intervenir au début du programme :

```
max_space = 201 ;  
max_time  = 100 ;  
% Initialisation des champs E et H  
% dimension en H = dimension en E - 1 du au schema  
% conditions aux limites imposees ici pour E(1) et E(max_space)
```

Simulation (C)EM pour les systèmes

```
E = zeros(max_space,1);  
H = zeros(max_space-1,1);
```

On propose de discrétiser en « 200 » intervalles (donc 201 points d'espaces) le domaine de calcul 1-D d'une longueur $L=2\text{m}$. Cela conduit à définir un pas spatial $\Delta z=0.01\text{m}$ (1cm).

Exercice : réaliser le programme « scriptFDTD01.m » qui permettra de modéliser les équations de Maxwell à l'aide des indications fournies plus haut. Le script ne renvoie pas a priori de variables de sortie mais prend un paramètre en entrée (« time » qui représente le nombre d'itérations de la simulation, par exemple « 100 » pour tester la fonction dans l'invite de commande. Tester en lançant dans l'invite de commande par exemple `>> scriptFDTD01`.

1.3 Test de la condition de stabilité

Dans l'algorithme présenté initialement, le coefficient « alpha » (α) joue le rôle de critère de stabilité. On sait (voir le cours FDTD) que ce critère ne doit pas dépasser 1 et est lié aux pas temporel et spatial du schéma et aux propriétés du milieu de propagation. Ainsi, augmenter la valeur du coefficient α permet, pour un même nombre d'itérations en temps (paramètre « n » précédent) d'atteindre un temps de simulation plus important. Toutefois, il n'est pas bon d'augmenter indéfiniment α sous peine de divergence du calcul.

Exercice :

Faire le test avec le programme précédent en conservant les figures Matlab obtenue pour :

- $\alpha = 0.5$,
- $\alpha = 1.1$,
- $\alpha = 1.01$,
- $\alpha = 0.95$,
- $\alpha = 0.99$.

Conclure sur la nécessité de respecter le critère de stabilité pour le schéma FDTD.

2°- Les sources d'excitation => `scriptFDTD02` et `scriptFDTD03`

2.1 Les sources temporelles => `scriptFDTD02`

Dans le programme proposé, on utilise une source « dure » (« hard » source). Comme évoqué précédemment, ce type de source correspond à l'imposition d'une condition en un point spatial du domaine de calcul (ici au milieu du domaine de calcul : « center_problem_space »).

Dans les algorithmes précédents, on constate que la source à utiliser est à définir entre les boucles spatiales sur le champ E et le champ H. Cette dernière est dite « hard » (on verra la différence dans la

Simulation (C)EM pour les systèmes

suite par opposition à une « soft » source) : en un point de l'espace de calcul (ici le centre du domaine), on impose, pour toutes les itérations, le profil d'un champ temporel gaussien.

```
% Hard source
pulse = exp(-1*((t-t0)/spread)^2);
E(center_problem_space) = pulse;
```

Exercice : faire le test en augmentant le temps de calcul pour la simulation (prendre par exemple 300 itérations). Lancer la fonction « scriptFDTD02 » dans l'invite de commande avec « max_time=300 ». Que constate-t-on quand les deux ondes générées au centre du domaine reviennent au centre ? Cela pouvait-il être prévu ?

L'imposition d'une hard source est tributaire de la forme temporelle (voir la variable « pulse ») définie. Dans nos exemples précédents, on a utilisé une gaussienne dont la valeur tend vers « 0 » quand « n » augmente (et donc quand l'itération et le temps de calcul augmente). Ainsi, l'expression permettant d'imposer une valeur de champ électrique au centre du domaine revient (une fois que le pulse a été généré) à imposer une condition quasi-nulle (i.e. très proche de « 0 ») au centre du domaine et on assiste à une réflexion des deux ondes (avec déphasage), très similaire à l'imposition d'une condition PEC (comme celle sur le bord).

Pour éviter la difficulté précédente, on opte principalement pour l'une des deux solutions :

- « couper » la source « hard » quand le profil de celle-ci est retombé à zéro (ce qui est le cas ici car le profil est gaussien, si la source était continue, par exemple un « sinus », cela ne serait pas possible, voire dangereux car une rupture brutale de la source introduit des effets « parasites »),
- définir une « soft » source.

La première solution consiste à estimer un délai (nombre d'itérations limite « n » par exemple) au-delà duquel on considère qu'il n'est plus nécessaire d'émettre la source.

Exercice : introduire dans le code précédent une modification qui teste la valeur du paramètre « n ». Si « n » dépasse « 60 », ne plus imposer la valeur « pulse » au champ E au centre du domaine de calcul et laisser le calcul s'effectuer par FDTD (boucle intérieure). Faire le test en lançant la fonction pour 300 itérations. Que remarque-t-on quand l'onde repasse par le centre du domaine ?

Concernant la « soft source », la seule modification à apporter au code précédent consiste à remplacer le « bloc » source par une source permettant de s'appuyer sur la valeur du champ électrique calculées précédemment par FDTD « + » le profil de la source gaussienne.

Exercice : faire la modification précédente et sauvegarder le fichier sous « scriptFDTD02.m ». Lancer le script « scriptFDTD02 » avec toujours 300 itérations en temps dans l'invite de commande. Que remarque-t-on ?

Simulation (C)EM pour les systèmes

On constate sur les deux exemples précédents sur les sources temporelles sont utiles et peuvent permettre de générer deux types de sources (« hard » et « soft »). Toutefois, cela entraîne l'apparition de deux ondes divergentes qui se séparent au niveau du point de source dans les deux directions opposées. Nous verrons dans la partie suivante qu'il est possible de générer des sources « spatiales ».

2.2 Les sources spatiales => `scriptFDTD03`

Dans cette section, le principe pour insérer de l'énergie dans le domaine de calcul à travers une source est différent de la partie précédente. Il n'est plus question d'imposer, comme dans le cas précédent une source (de champ électrique E) pour tout ou partie du temps de simulation en un point unique de l'espace, mais plutôt de former un champ spatialement (sur tout le domaine de calcul, en respectant les conditions aux limites imposées ici, i.e. $E=0$ en $z=0$ et $z=L$), juste à l'itération temporelle « $n=1$ ». On s'intéresse pour cela à la forme de l'onde plane incidente incluant sa variation spatiale.

Ainsi, dans le code, on introduit avant la boucle extérieure temporelle la définition de la source à la position $z=z_0=1\text{m}$ selon le profil spatial suivant :

$$E(z, z_0) = \exp(-[(z - z_0)/(c_0 * \text{spread})]^2) \quad (7)$$

avec le paramètre « spread » inchangé, z_0 est la position de la source (au milieu du domaine de calculs ici), c_0 est la vitesse de propagation dans le milieu, et z la position des points dans le domaine de calcul.

On impose le paramètre précédent pour tous les points du domaine de calculs hormis le premier et le dernier (conditions aux limites $E=0$), et cela seulement à la première itération (et pas tout le long de la simulation).

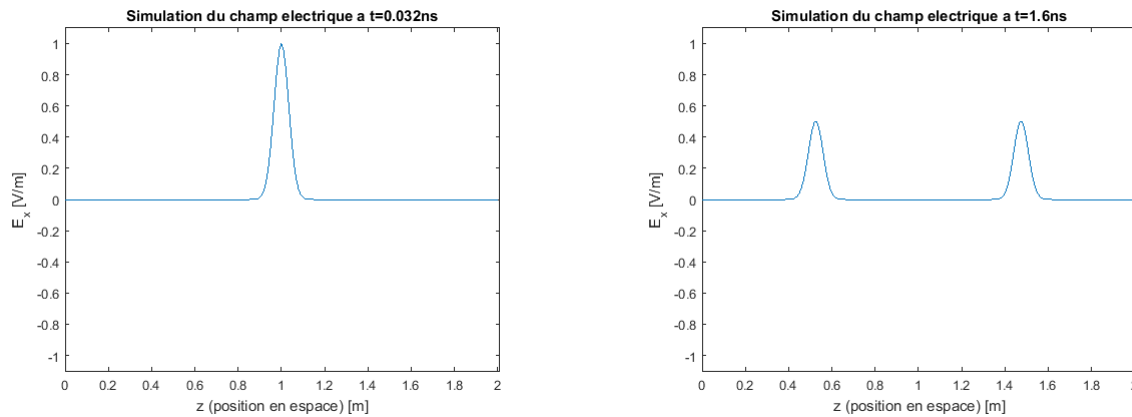


Figure 1. Représentation du champ électrique à différents instants de la simulation pour une source spatiale située au milieu du domaine de calcul ($z=z_0=1\text{m}$).

Simulation (C)EM pour les systèmes

On obtient le résultat spécifié dans la figure 1 pour $n=1$ (au début de la simulation) et pour $n=50$.

Exercice : réaliser le travail proposé précédemment et nommer votre script « `scriptFDTD03.m` ». On constate que les deux ondes qui se propagent ne sont plus d'amplitude « 1 » comme dans la section précédente avec une source temporelle mais ici de « 0.5 ». Comment faire pour propager à nouveau des ondes vers la droite et vers la gauche avec une amplitude de « 1 » ? Réaliser cette modification dans votre programme.

3°- Simulations en espace libre : les conditions de non-réflexion (« magic time-step »)

=> `scriptFDTD04` et `scriptFDTD05`

Dans les exemples précédents, on a pu constater que les conditions aux limites conduisent à une réflexion totale des champs électriques sur les bords (conditions de type PEC). La réflexion est également observable au niveau du champ magnétique H_y mais sans déphasage (condition PEC et non Perfect Magnetic Conductor, PMC). On a ainsi pu constater que les ondes produites au niveau du centre du domaine de calcul se réfléchissent au cours du temps sur les bords (voir figure 2).

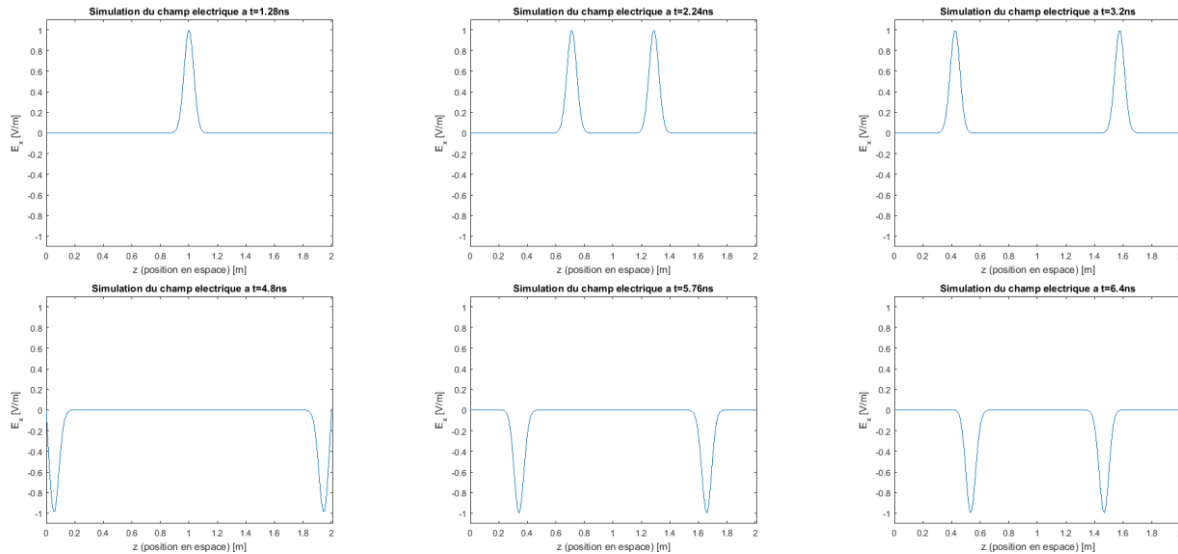


Figure 2. Représentation du champ électrique à différents instants de la simulation.

On voit bien sur la figure 2 que, lorsque le « pulse » touche les bords du domaine de calcul en $z=0$ et en $z=L$, le champ électrique est entièrement réfléchi et déphasé. On souhaite dans cette partie définir des conditions aux limites nouvelles permettant de simuler l'espace libre (et permettre à l'onde d'être absorbée sur les bords du domaine de calcul). En l'état actuel, les conditions aux limites sont telles dans le code de calcul que les termes $E(1)$ et $E(\text{max_space})$ sont fixés à 0 et agissent comme des « murs ». Une idée simple pour permettre de transformer ces conditions en conditions absorbantes « parfaites » en

Simulation (C)EM pour les systèmes

dimension 1 consiste à trouver la distance parcourue par l'onde durant une itération en temps. A partir de là, il suffit d'utiliser la valeur dans le tableau du champ électrique à proximité du « mur » à l'itération temporelle précédente et de l'introduire sur la condition aux limites au niveau du mur à l'instant courant.

Pour faciliter les calculs, dans la suite, nous considérerons un critère de pas temporel tel que :

$$dt = 0.5 * dz/c_0$$

Jusque-là, le pas de temps avait été fixé avec un critère de stabilité à 0.96 ($dt=3.200.10^{-11}$ alors que le pas de temps maximum autorisé était de $3.333.10^{-11}$). Le fait de fixer un critère de stabilité = 0.5 permet de faciliter l'implémentation des conditions d'absorption « parfaites ». En effet, dans notre exemple, une onde se propageant à la vitesse de la lumière dans le vide le fait à une célérité $c_0 = 3.10^8$ m/s ; d'après l'hypothèse précédente concernant dt , la distance parcourue par une onde au bout d'une itération en temps est :

$$distance = c_0 dt = 0.5c_0 * \frac{dz}{c_0} = 0.5 * dz$$

Et on en déduit qu'il faut deux pas de temps (tel que défini précédemment) à l'onde pour parcourir un pas spatial dz . Ainsi, les nouvelles conditions à prévoir aux limites du domaine de calcul s'écrivent :

$$E(1)^n = E(2)^{n-2}$$

$$E(max_space)^n = E(max_space - 1)^{n-2}$$

Ceci conditionne les conditions à appliquer en $z=0$ ($E(1)$) et en $z=L$ ($E(max_space)$) pour l'itération temporelle « n ». IL est nécessaire de sauvegarder les valeurs de champs électriques obtenues à chaque fois à l'itération « n-2 » précédente aux points voisins (c'est-à-dire respectivement les champs électriques $E(2)$ et $E(max_space-1)$). Schématiquement, ce traitement peut être illustré par la figure 3.

Simulation (C)EM pour les systèmes

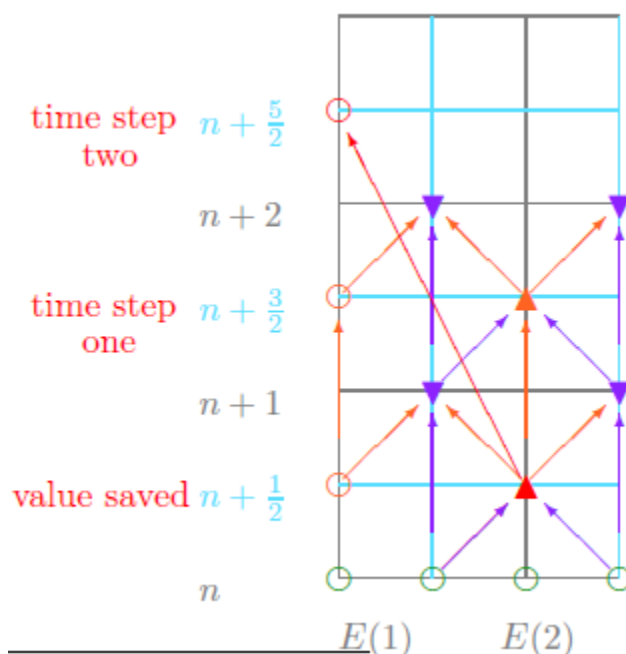


Figure 3. Schéma illustrant la condition aux limites de type « pas de temps magique » pour une condition absorbante « parfaite » (« magic time step ») du côté « gauche du domaine de calcul.

Exercice : réaliser l'introduction des conditions aux limites de type « magic time step » ; celles-ci sont à placer après la boucle interne sur le champ électrique et la source de champ électrique, et avant la boucle interne sur le champ magnétique. On rappelle qu'il faut récupérer les valeurs des champs $E(2)$ et $E(\text{max_space}-1)$ deux itérations avant l'itération « n » considérée pour imposer une valeur sur $E(1)$ et $E(\text{max_space})$.

Indication : il vous faudra deux variables pour chaque condition aux limites (donc 4 au total) que nous initialiserons à zéro avant la boucle externe sur les itérations en temps comme suit :

```
% Pour le 'magic time step' : initialisation des variables
Eleft1=0;
Eleft2=0;
Eright1=0;
Eright2=0;
```

Au final, on doit être capable de produire la propagation de l'onde plane sous la forme suivante (sans réflexion sur les bords du domaine de calcul) de la figure 4 :

Simulation (C)EM pour les systèmes

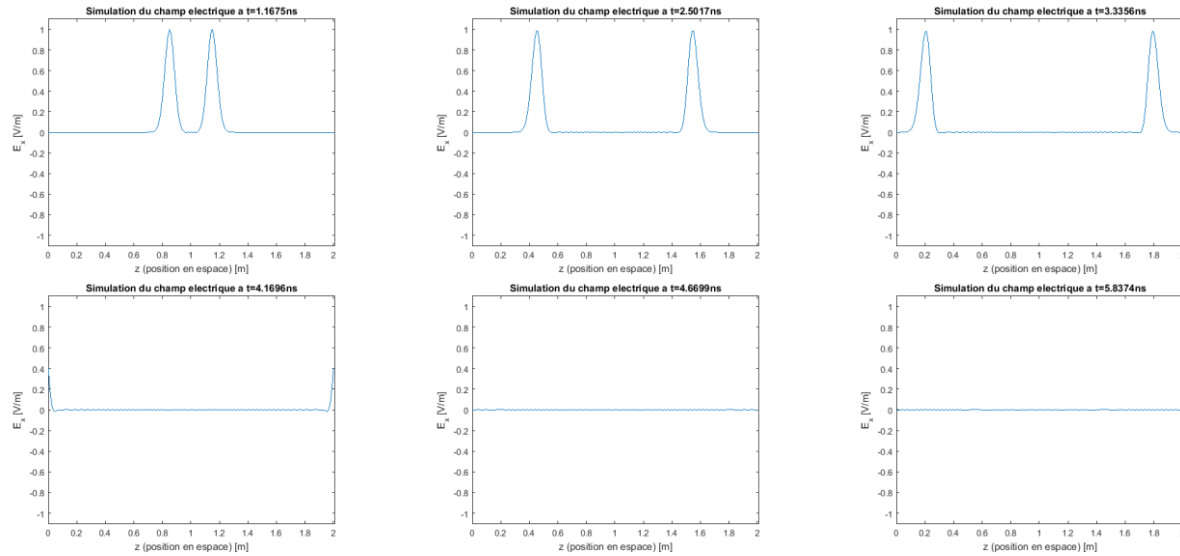


Figure 4. Propagation d'une onde plane avec des conditions aux limites « magic time step » absorbantes.

Remarque : le fait de choisir un critère de stabilité inférieur à 1 est nécessaire (sans cela encore une fois, le schéma FDTD n'est pas stable). Par contre, il est toujours préférable de choisir un critère le plus proche possible de 1. En introduisant un critère de stabilité égal à 0.5 dans l'exemple précédent, on facilite l'implémentation du « magic time step » mais on crée également de la dispersion (due au schéma différences finies et visible dans vos visualisations Matlab à travers les légères déformations du pulse gaussien au cours de sa propagation).

4°- Simuler la propagation d'une onde plane pour la traversée d'un diélectrique (1-D) sans pertes

=> `scriptFDTD05` et `scriptFDTD06`

La prise en compte d'un matériau (ou d'un objet appelé « slab » dans la suite) nécessite de revenir aux équations de Maxwell. Ainsi, on peut réécrire ces dernières en tenant compte de la permittivité diélectrique relative ϵ_r :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

Très clairement, quand $\epsilon_r = 1$, on retrouve l'équation de propagation dans le vide établi au début de ce document. Il est donc nécessaire dans la suite de tenir compte du milieu diélectrique.

Simulation (C)EM pour les systèmes

Exercice : on demande en préambule deux modifications avant d'introduire le domaine diélectrique dans la simulation :

- modifier les programmes précédents pour traiter le cas d'un domaine de calculs $L=0.5\text{m}$ (on adaptera le code pour obtenir un pas spatial $\Delta z=0.001\text{m}$ cette fois !!),
- conserver des conditions absorbantes « magiques » comme dans le script « scriptFDTD04 »,
- placer la source (pulse gaussien comme dans le script précédent au point $z=0.001$ (cela revient à exciter $E(2)$) ; ceci pour éviter de générer deux ondes divergentes et se concentrer sur l'onde électromagnétique se propageant dans le sens « +z »,
- lancer enfin votre code « scriptFDTD05 » pour $\text{max_time}=1500$ et vérifier que la propagation se déroule correctement.

A partir du fichier précédent « scriptFDTD05 », on souhaite introduire un diélectrique ($\epsilon_r = 4$) dans la zone comprise entre $z=0.200\text{m}$ et $z=0.500\text{m}$ (à droite du domaine de calcul). A partir des équations de Maxwell reformulées, on trouve les nouvelles équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}\end{aligned}$$

Exercice : Faire la modification selon les hypothèses formulées précédemment pour que, dans le vide, le calcul tienne compte d'une valeur $\epsilon_r = 1$ et que dans le « slab » diélectrique on ait $\epsilon_r = 4$.

Indication : on pourra penser à introduire une boucle avant la boucle externe temporelle sous la forme suivante :

```
for u=1:max_space
    if (u>=dielec_deb & u<=dielec_fin)
        alphaEdielec(u) = alphaE./epsr;
    else
        alphaEdielec(u) = alphaE;
    end
end
```

Les valeurs « dielec_deb » et « dielec_fin » seront à définir en fonction des hypothèses prédéfinies.

Dans la boucle interne sur le champ électrique, on aura :

```
% Boucle interieure sur le champ E
for k=2:max_space-1
    E(k) = E(k) + alphaEdielec(k) * (H(k-1)-H(k));
end
```

Simulation (C)EM pour les systèmes

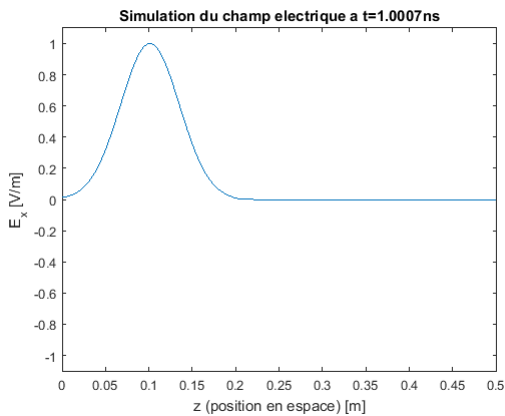
Enfin, on modifiera les paramètres de la source en utilisant cette valeur pour la source de type « soft source » gaussienne :

```
% Largeur du pulse de la source
spread=1.6e-10;
% Pulse : temps et en espace
t0 = 400*dt;           % source en temps maximale a cet instant
pulse_space = 2;
```

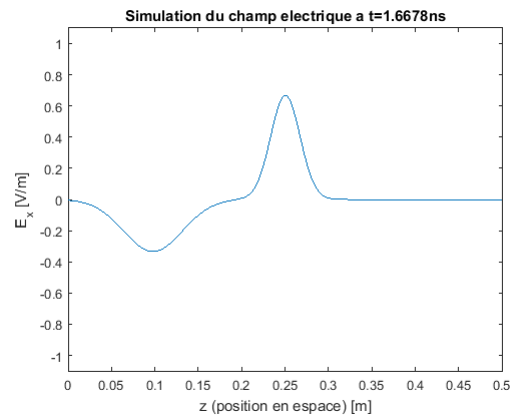
Du point de vue théorique, les coefficients de réflexion (R) et de transmission (T) d'une onde plane à l'interface de deux milieux de permittivités relatives ε_r^0 (milieu de propagation) et ε_r^1 (slab diélectrique) s'écrivent :

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_r^0} - \sqrt{\varepsilon_r^1}}{\sqrt{\varepsilon_r^0} + \sqrt{\varepsilon_r^1}},$$
$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r^0}}{\sqrt{\varepsilon_r^0} + \sqrt{\varepsilon_r^1}}.$$

En réalisant la simulation avec les modifications demandées dans le code FDTD, on trouve les résultats illustrés par la figure 5 suivante pour un nombre d'itérations croissant.

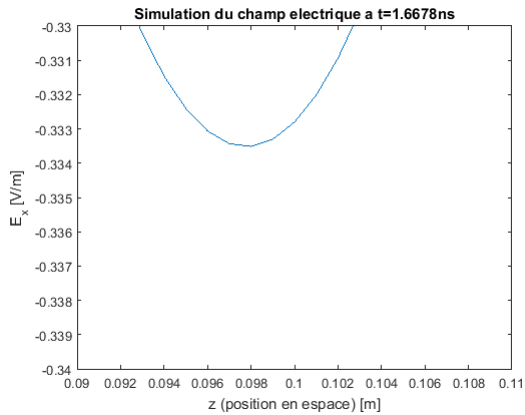


(a) $n = 600$

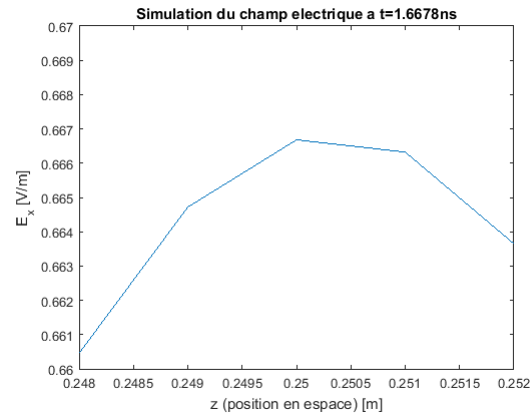


(b) $n = 1000$

Simulation (C)EM pour les systèmes



(c) $n = 1000$, zoom autour de $z=0.01\text{m}$



(d) $n = 1000$, zoom autour de $z=0.25\text{m}$

Figure 5. Propagation de l'onde plane dans le vide (a), après passage dans le diélectrique situé en $z=0.200\text{m}$ (b) et zoom au niveau de l'onde réfléchie (c) et de l'onde transmise (d) dans le diélectrique.

Exercice : on demande deux traitements à ce niveau :

- déterminer les coefficients de réflexion et de transmission dans un diélectrique sans pertes de permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = 4$. Réaliser un script Matlab permettant de calculer les constantes R et T comme spécifié précédemment en fixant les valeurs des permittivités relatives ϵ_r^0 et ϵ_r^1 . Sauvegarder ce script sous le nom « coefRT.m »,
- exécuter le script « scriptFDTD05 » pour les itérations proposées dans la figure 5 et retrouver les niveaux des champs réfléchis et transmis.

La figure 5-a montre la génération de l'onde plane qui se propage dans la direction « +z ». La traversée du diélectrique en $z=0.200\text{m}$ (figure 5-b) laisse apparaître une onde transmise dans le diélectrique (à droite) et une onde réfléchie (à gauche) comme attendu. Les zooms effectués autour des deux ondes précédentes (transmise et réfléchies) montre que, pour une onde incidente d'amplitude « 1 », l'onde transmise présente une amplitude d'environ « 0.667 » (sans déphasage, figure 5-d), et l'onde réfléchie présente une amplitude d'environ « 0.333 » (avec déphasage, figure 5-c). Ceci est en accord avec les valeurs étendues pour $R=-1/3$ (pour $\epsilon_r = 4$), et $T=2/3$.

Exercice : refaire le traitement précédent dans un script « scriptFDTD06 » pour le même domaine de calcul (et les mêmes pas en espace et en temps) mais cette fois pour un slab diélectrique entre les positions $z=0.250\text{m}$ et $z=0.350\text{m}$ (agencement d'une couche d'air, puis du diélectrique, puis d'une autre couche d'air). La valeur de la permittivité diélectrique sera cette fois fixée à 2.2.

Vérifier le calcul des coefficients R et T dans ce cas.

Pour tirer des conclusions, faire tourner votre programme pour un nombre d'itérations variable : 1000, 1250, 1500, 1750, 2000, 2250, 2500 ... Que remarque-t-on ?

Simulation (C)EM pour les systèmes

Exercice : pour les plus rapides, proposer une amélioration de la visualisation du champ électrique proposée jusque-là en représentant le « slab » diélectrique avec des trait et/ou une zone colorée à l'écran. On pourra s'inspirer des fonctions Matlab suivantes pour « dessiner » la position du « slab » (fixe) dans la figure Matlab : line, ... La figure 6 donne une idée du résultat attendu.

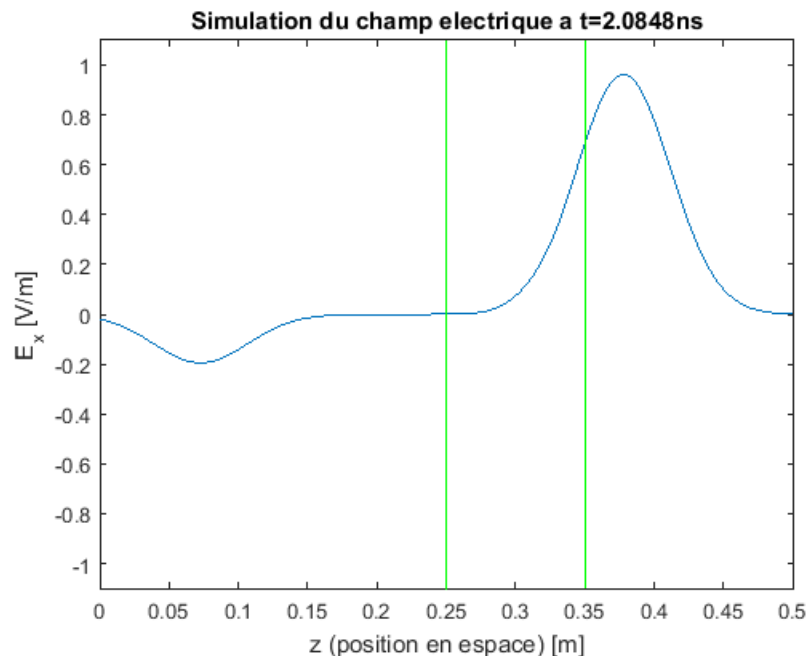


Figure 6. Visualisation du champ électrique (bleu) et de la position du « slab » diélectrique (vert).

5°- Simuler une cavité réverbérante 1-D dans le domaine temporel => `scriptFDTD07`

Dans les exemples précédents (« scriptFDTD01 » et « scriptFDTD02 »), on a constaté que le champ électrique est complètement réfléchi (avec déphasage de 180°) sur les bords du domaine de calcul. Ce type de condition est assimilable à une chambre réverbérante de dimension 1. On constate en effet que les champs sont réfléchis à l'infini par les parois. On reprendra dans la suite l'exemple introduit dans le fichier « scriptFDTD02.m ».

Exercice : choisir un type de source (temporelle ou spatiale) et augmenter le nombre d'itérations (3000) pour constater l'affirmation précédente.

Ajouter dans le code une sortie pour récupérer le champ électrique au cours du temps de la simulation (par exemple au point $z=0.35$ m dans le domaine de calcul). Faire le tracé de ce champ en fonction du temps (récupérer la discrétisation temporelle pour placer le temps en secondes en abscisse). Que constate-t-on au niveau de la réverbération des champs ?

Simulation (C)EM pour les systèmes

On souhaite dans la suite changer le profil temporel de la source utilisée (jusque-là on utilisait une source gaussienne). Utiliser désormais une source sinusoïdale de fréquence f , soit un profil temporel de la forme : $s(t) = \sin(2\pi f t)$, avec t l'instant de simulation (« $n \cdot dt$ » dans le code).

Exercice : faire le test avec cette nouvelle source en plaçant toujours :

- la source au centre du domaine de calcul,
- en utilisant une source temporelle « soft » pour $f=150\text{MHz}$,
- en fixant « $n=1500$ »,
- en plaçant une sonde de mesure du champ au centre du domaine de calcul (et en représentant le champ en ce point en fonction du temps).

Refaire le test précédent avec $f=190\text{MHz}$. Que remarque-t-on au niveau des amplitudes du champ électrique obtenu en $z=1\text{m}$ (centre du domaine de calcul) ?

Pour une cavité monodimensionnelle réverbérante, les fréquences de résonance sont données par :

$$f_n = \frac{n \cdot c}{2 \cdot L} \quad ,$$

avec L la longueur du domaine de calcul, n un entier naturel positif ($n > 1$) et c la vitesse de propagation dans le milieu (du vide ici).

Exercice : refaire le test précédent pour les fréquences f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 . Conclure en observant le niveau du module (fonction Matlab « `abs()` ») des champs électriques obtenus en fonction du temps pour $z=1\text{m}$.

Refaire le même traitement pour f_5 , en se plaçant successivement au point $z=0.2\text{m}$, $z=0.6\text{m}$, $z=1\text{m}$, $z=1.4\text{m}$, et $z=1.8\text{m}$. Observer la forme du module du champ électromagnétique obtenu le long du domaine de calcul. Conclure sur le comportement modal de la cavité réverbérante.

Références

- [1] D. Sullivan, Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method, IEEE Press, 2000.
- [2] A. Taflove and C. Hagness, Computational electrodynamics – the FDTD method, 2nd Edition, Artech House, 2000.