



CONSULTORES Y CONTRATISTAS DE EXPLORACIONES GEOFISICAS

•

PETROLEO

MINERALES

AGUA SUBTERRANEA

Y

APLICACION A LA INGENIERIA CIVIL

•

SERVICIOS GEOFISICOS, S. A. DE C. V.

AV. JUAREZ 97 DESPACHO 302

TELS. - 18 - 41 - 41 Y 12 - 89 - 70

MEXICO 1, D. F.

COMPAÑIA MEXICANA AEROFOTO. S. A.



ESPECIALIDADES

Cartografía
Catastro urbano y rural.
Cálculo electrónico.
Diseño fotogramétrico electrónico
de obras de Ingeniería.
Estudios preliminares.
Fotointerpretación.
Fotografía aérea; pancromática,
Infrarroja y a color.
Fotografía comercial aérea
Fotomurales.
Levantamientos fotogramétricos.
Localización de obras.
Mosaicos fotográficos.
Programación electrónica.
Topografía

132 empleados especializados.

EQUIPO

1 Avión Queen Air A-80 Mat. XB-XAK	4 Cámaras de Reproducción
1 Avión Riley Rocket. Mat. XB-SAR	3 Unidades de Telurómetro MRA-3
1 Avión Beech Craft Mat. XB-VIG	4 Teodolitos Wild T-2
2 Aviones Piper Aztec Mat. XB-MOJ y NOO	2 Niveles automáticos Wild NAK-2
1 Avión Cessna 185 Mat. XB-TIS	4 Camionetas doble tracción
Unidad Central de Proceso IBM. 1131	2 Autógrafos Wild A-7 con Registradora de coordenadas
Lectora perforadora de tarjetas IBM. 1442	
Unidad Impresora, IBM. 1132	1 Estereó cartógrafo Wild A-8
1 Cámara Fotogramétrica Zeiss MRK-A	1 Autógrafo Wild A-9
1 Cámara Fotogramétrica Wild RC-9	4 Autógrafos Wild B-6
1 Cámara Fotogramétrica Wild RC-8	1 Balíx 763, de 7 proyectores
1 Cámara Fotogramétrica Wild RC-5	2 Kolsh K-5, de 4 proyectores c.u.
3 Cámaras Fairchild	2 Kolsh K-1 de 2 proyectores c.u.
4 Cámaras para fotografía oblicua	2 Múltiplex de 8 proyectores c.u.
6 Cámaras Rectificadoras	

DIRECCION

Av. Obrero Mundial Num. 338 esq. con Pestalozzi
Teléfonos 43-38-55 con tres líneas directas y 13-87-45
Cable: AEROFOTO, MEXICO MEXICO 12, D. F.
Servicios Aéreos: Ave. Santos Dumont Num. 212

SCHLUMBERGER

SCHLUMBERGER SURENCO, S. A.

AGENCIA EN MEXICO

Av. Morelos 98, Desp. 306

Tels.: 46-85-25 y 46-13-85

MEXICO 6, D. F.

**GEOFISICOS CONSULTORES PARA
PETROLEOS MEXICANOS**



*Seismograph Service Corporation
of Mexico*

**AVE. JUAREZ 95-207 • MEXICO 1, D.F.
TELEFONOS : 18-27-25 • 18-56-33**

**SUBSIDIARIA DE
SEISMOGRAPH SERVICE CORPORATION
6200 East 41st. St. • Box 1590 • Tulsa, Oklahoma, U.S.A.**

ESPECIALIZADOS EN :

**SERVICIO DE
GEOFISICA**

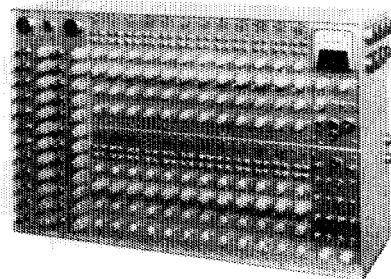
- Levantamientos :**
- Sismológicos
 - Gravimetricos
 - Magnetométricos
 - Procesado de Datos Magnéticos
 - LORAC-Levantamiento Electrónico

**SERVICIO DE
REGISTRO DE POZOS**

- Registros para Evaluación de Formaciones
- Registros de Pozos de Producción
- Servicio de Terminación Permanente
- Registro Continuo de Velocidad

INSTRUMENTAL

DA MEJOR
RENDIMIENTO,
MAYOR DURACION
Y A UN COSTO MENOR



FORTUNE T-1. SISTEMA DE AMPLIFICADORES SISMICOS TRANSISTORIZADOS PARA TRABAJOS DE REFLEXION Y REFRACCION.

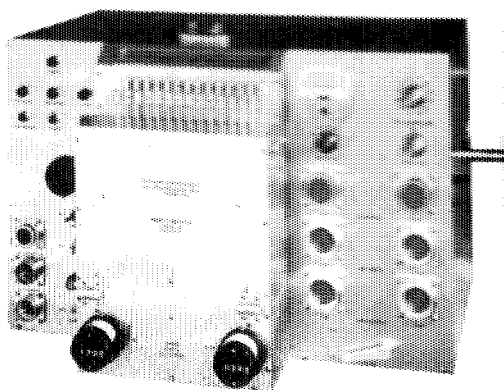
BAJO COSTO — El modelo T-1 es el amplificador transistorizado más barato en el mercado.

POCO PESO Y TAMAÑO REDUCIDO — El equipo T-1 de 24 canales, completo, pesa únicamente 73 libras (33.1 Kgs.) y está contenido en una sola caja, cuyas dimensiones son: 25 3/8" de largo, 15 3/4" de alto y 8" de fondo.

ALTA SENSIBILIDAD — Como el ruido propio del equipo es muy bajo, es posible operarlo con altas ganancias. La relación de señal a ruido, en los amplificadores, es de 20 db a 0.5 microvolts de entrada.

POTENCIA REQUERIDA — 2 amperes, a 12 volts de corriente directa.

GEOFISICO



FORTUNE DC-2B.

**SISTEMA DIRECTO DE GRABACION Y REPRODUCCION.
COMPLETAMENTE TRANSISTORIZADO**

El equipo DC-2B es capaz de aplicar, simultáneamente, correcciones estáticas y dinámicas a 24 trazas o más, empleando cintas normales de 6 1/2 ó 7" de ancho. Las correcciones dinámicas se aplican mediante una leva acoplada a la flecha del tambor y que puede ser referida a él. También es posible obtener levadas previamente calibradas y ajustadas a determinada función analítica.

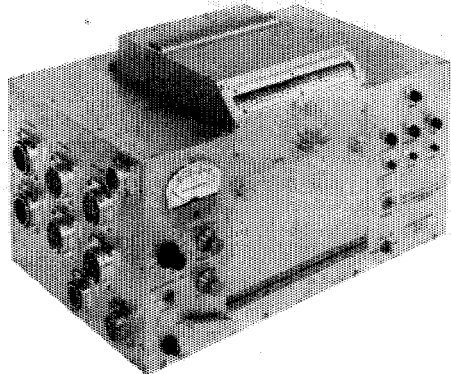
SE AJUSTA A CUALQUIER SISTEMA DE TIRO — No importa el sistema de tiro empleado, ya que mediante una barra universal de tendidos y gracias a medidores ajustables (calibrados en por ciento), es posible aplicar a cada traza la corrección dinámica adecuada.

ESPECIFICACIONES DEL MODELO DC-2B.

Transportador de la cinta. Mediante tambor, cuyo diámetro es de 7.5".
Número de canales. 24 sísmicos, 2 ó 4 auxiliares.
Tamaño de la cinta. 6 1/2 ó 7" de ancho por 24 1/2" de largo.
Distancia entre pistas. 1/4" (de centro a centro).
Velocidad de la cinta. 3.59"/segundo.
Tiempo útil de grabación. 6 seg. (el tambor da una vuelta completa en 5.6 seg.).
Corrección dinámica máxima. 150 miliseg.
Característica del motor. De histéresis de 400 ciclos.
Corrección máxima. 700 miliseg/segundo.
Acoplado al tambor.
Rango de corrección estática. ± 50 miliseg.
Polarización (bias). 8 miliamperes a 11 Kilociclos.
Respuesta. De 5 a 200 cps.
Relación de señal a ruido. 50 db RMS a RMS.
Distorsión armónica total (a 100% el nivel de grabación). 2.5%.
Alimentación cruzada (cross feed). — 36 a 10 cps.
Grado de exactitud del sistema de tiempo. ± 1 miliseg.
Necesidades de entrada (a 100% el nivel de grabación). 50 milivolts a través de 40 ohms.*
Salida (a 100% el nivel de grabación). 100 microvolts a 50 ohms.
Potencia requerida. 0.5 amper en vacío y 14 amperes con carga.
Tamaño del transportador de la cinta. 15 x 18 x 14".
Peso. 90 libras (40.823 Kgs.).

* Al ordenar un equipo, las necesidades de entrada pueden ser cambiadas al gusto del cliente. Esto puede hacerse sin cambiar las demás especificaciones.

....DE "FORTUNE ELECTRONICS"



FORTUNE SR-5. SISTEMA DE GRABACION DIRECTA EN UNA UNIDAD "BUFFERLESS" (DE MENOR AMORTIGUAMIENTO).

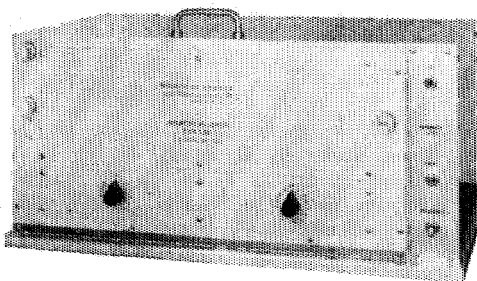
TOTALMENTE TRANSISTORIZADO — La grabadora SR - 5 ofrece los últimos adelantos en sencillez de manejo, presentando características iguales a las de sistemas más costosos y complicados.

PRECISION Y SENCILLEZ — Durante el proceso de grabación, las cabezas magnéticas están gobernadas desde la salida de los amplificadores sismicos. Para las reproducciones, las cabezas son conectadas directamente a la entrada de los amplificadores. La reproducción queda compensada mediante una red pasiva. La ventaja de todo este tipo de operación es que se obtienen resultados con un mínimo de complicaciones y conexiones.

UN SISTEMA COMPLETO — El modelo SR - 5 está equipado con sistemas Fortune de polarización y manejo, los cuales han sido probados cientos de veces en diferentes partes del Mundo. La unidad contiene los amplificadores necesarios para grabar instante de explosión, tiempo vertical y escala de tiempo. Tiene conexiones exteriores para diversos circuitos, tales como la acción de la supresión a partir del instante de tiro, el arranque de la cámara, etc., todo ello a base de levas. Para acoplar el SR - 5 a un equipo convencional, lo único que se requiere es un juego de cables interconectores.

ESPECIFICACIONES DEL MODELO SR-5.

Transporte de la cinta. Mediante tambor, cuyo diámetro es de 7.5".
 Número de canales. 24 sismicos y 2 ó 4 auxiliares.
 Tamaño de la cinta. 6 1/2 ó 7" de ancho por 24 1/2" de largo.
 Velocidad de la cinta. 3.59"/segundo.
 Tiempo útil de grabación. 6 seg. (el tambor da una vuelta completa en 6.6 seg.).
 Características del motor. De histéresis de 400 ciclos. Acoplado al tambor.
 Polarización (bias). 8 miliamperes a 6 kilociclos.
 Respuesta. De 5 a 200 cps.
 Correcciones estáticas (opcional) ± 100 miliseg.
 Relación de señal a ruido 50 db RMS a RMS.
 Distorsión armónica total. (A 100% el nivel de grabación. 2.5%
 Alimentación cruzada. (Cross feed). Con entrada de 100%. —36 db a 10 cps.
 Nivel de grabación. 50 millivolts a través de 40 ohms.
 Potencia requerida. 0.5 amper en vacío y 6.5 amperes con carga.
 Medida del transportador de la cinta. 11 x 18 1/2 x 11 1/4".
 Peso. 53 libras (24.040 kgs.).



FORTUNE — LDR.

MICROPISTA - 1 (UNIDAD DE DOS TAMBORES)

PARA USARSE EN OFICINAS O EN EL CAMPO La serie LDR se obtiene en uno, dos o tres tambores. También existe el tipo de un solo tambor ancho, con 54 cabezas de micropista, capas de manejar, simultáneamente, una cinta ancha o dos cintas angostas.

Cada cabeza de micropista graba sobre un ancho de 0.006", teniendo para su control lateral hasta 20 posiciones, en forma manual o automática.

Actualmente los modelos LDR llevan 15, 12 y 6 pasos, pudiendo instalarles cabezas de doble micropista, para grabación simple o doble.

Si se desean combinar los resultados de diferentes pozos de tiro, para puntos de reflexión común (common depth point), es posible agregarle al equipo conexiones programadas y amplificadores de transcripción.

Para el sistema anterior (de punto común) o trabajos de caídas de peso (weight drop), pueden combinarse los modelos LDR - 1 y DC - 2B, obteniendo así un equipo sísmico completísimo.

**Fortune
Electronics, Inc.**

H. H. HAPPEL -- H. H. HAPPEL, Jr.
2505 SOUTH BOULEVARD, HOUSTON, TEXAS

Representante en Europa:

Techmation

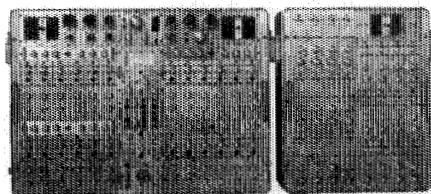
113 Rue Lamarck, París, Francia.

SIE entregará el sistema sísmico Número 1000 durante el año

Durante este año la SIE producirá y entregará el unmil sistema sísmico que ha fabricado desde que la compañía empezó a operar hace 18 años. Nadie sabe cual sistema será el #1000 debido a que los records del pasado no están completos, por lo tanto es posible que el total ya haya pasado 1000 unidades.

Lo importante es que SIE se mantiene al frente en el ramo de instrumentos sísmicos. La calidad superior y la mejora continua del performe de los instrumentos de la SIE ha sido gran influencia en el establecimiento de muchos de los conceptos que hoy día existen en instrumentos sísmicos. Entre los "primeros" de SIE, se encuentran:

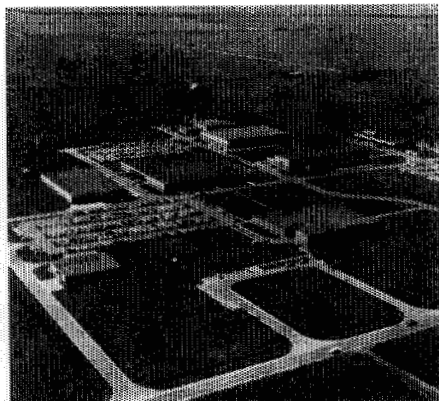
1. El sistema P-11, completamente portátil, integrable e independiente.
2. MR-4—el primer sistema de registro magnético FM (frecuencia modulada) aceptado por la industria.
3. PMR-6—el primer sistema portátil del registro magnético.
4. MS-12—el primer sistema para reducir datos sísmicos y procesar las cintas AM y FM.
5. PMR-20—el primer sistema portátil de registro magnético FM completamente transistorizado.
6. PT-100 con GCU-3—el primer sistema sísmico transistorizado, libre de distorsión, que incorpora medios para controlar el programa de ganancia.
7. TRO-6—la primera cámara registradora transistorizada capaz de proveer cinco tipos distintos de presentaciones, con un solo banco de galvanómetros.



PT-100—sistema amplificador transistorizado libre de distorsión.

La Mayor parte de los geofísicos consideran los instrumentos sísmicos de SIE "el standard de la industria." La producción corriente de SIE incluye una línea completa de registradores y analizadores sísmicos, capaz de acoplar los mas vastos requisitos de exploración geofísica.

Investigaciones y desarrollo. En total, SIE ha invertido en investigaciones y desarrollo de instrumentos geofísicos desde el 1947 mas de dos millones de dólares. Actualmente hay 25 personas en el departamento de Ingeniería de SIE, las cuales representan 130 años total de experiencia en la compañía y 45 años total de experiencia en ingeniería geofísica.



CENTRO DE DRESSER ELECTRONICS EN LOS SUBURBIOS DE HOUSTON

Cuando quiera el mejor instrumento sísmico, ya sea de nuestra producción corriente, o de diseño especial para satisfacer cualquier problema especial, llame enseguida a la SIE, la compañía que ha establecido el "standard" desde hace 18 años. La dirección es DRESSER SIE, 10201 Westheimer Road (P. O. Box 36230), Houston 42, Texas. CABLE: SIECO HOUSTON. TELEX: 713 571 2412. Teléfonos: SUNset 2-2000, o directamente al Departamento de Geofísica SUNset 2-5749 (Ventas) y SUNset 2-2893 (Departamento de Servicio).

GSI DE MEXICO, S. A. DE C. V.

EXPLORACIONES
GEOFISICAS

TECNOLOGIA
DIGITAL
APLICADA

Afiliados a:

**GEOPHYSICAL SERVICE
INCORPORATED**

6000 Lemmon Avenue
DALLAS, TEXAS, 75222
Tel. Fleetwood 7-5411

Avenida Juárez No. 119
Despacho 42,
Tels. 46-37-20 21-74-67
MEXICO 1, D. F.

III CONVENCIÓN

TÉCNICA DE LA

ASOCIACIÓN MEXICANA DE

GEOFÍSICOS DE EXPLORACIÓN



Lugar: - Monterrey, N. L.



Fecha: - Octubre de 1965.

BOLETIN

de la

Asociación Mexicana de Geofísicos de Exploración

S U M A R I O

Principios de Filtrado Digital, por los Sres. *E. A. Robinson* y *S. Treitel*.

El Teorema de la Superposición y el Filtrado en el Dominio del Tiempo, por el Ing. *A. García Rojas*.

La S. E. G. anuncia su XXXV Convención Anual Internacional.

ASOCIACION MEXICANA DE GEOFISICOS DE EXPLORACION

MESA DIRECTIVA PARA EL PERIODO 1965-1966

Presidente: Alfonso Cornejo Toledo.

Vice-Presidente: Armando Eguía Huerta.

Vice-Presidente Especial: José Coffin Otero.

Secretario: Jorge Lázaro Nájera Villa.

Tesorero: Roberto Oñate Espinosa.

Vocal de Minas: Jorge Suárez Rodríguez.

Vocal de Petróleo: Antonio Cordero Limón.

Vocal de Ingeniería: Mariano Hernández Moedano.

Editor: Daniel Gutiérrez Gutiérrez.

Presidente Saliente: Guillermo Hernández Moedano.

Este Boletín se publica cada tres meses y se distribuye gratuitamente a los socios.

El precio de subscripción para no socios es de \$ 150.00 m/n al año y
de \$ 50.00 m/n número suelto.

Para todo asunto relacionado con el Boletín: manuscritos, asuntos editoriales, subscripciones, descuentos especiales a bibliotecas públicas o de Universidades, publicaciones, anuncios, etc., dirigirse a:

ING. DANIEL GUTIERREZ GUTIERREZ

Av. Juárez No. 97, Despacho 302.

Teléfonos 18-41-41 y 12-89-70

México 1, D. F.

Impreso por Abastecedora de Impresos, S. A. — Dr. Jiménez No. 352 — México 7, D. F.
Teléfono 19-56-75 con 3 líneas.

PRINCIPIOS DEL FILTRADO DIGITAL *

Por *E. A. Robinson* ** y *S. Treitel* ***

La computadora digital es una herramienta versátil que puede emplearse para filtrar trazas sísmicas. El filtrado convencional se realiza por medio de circuitos electrónicos de tipo analógico, cuyo comportamiento se estudia ordinariamente en el dominio de las frecuencias. El filtrado digital, por otra parte, se trata más provechosamente en el dominio del tiempo. Un filtro digital se representa por una secuencia de números llamados coeficientes de peso. La salida de un filtro digital se obtiene mediante la Convolución de la traza de entrada digitalizada, con los coeficientes de peso del filtro. La mecánica del filtrado digital en el dominio del tiempo es descrita con la ayuda de la teoría discreta de la transformada Z. Estas ideas son después relacionadas con la interpretación más familiar del comportamiento del filtro en el dominio de las frecuencias. Un importante criterio para la clasificación de filtros es la noción del “retraso mínimo de fase”. Este trabajo termina con una presentación nueva y simple de este concepto.

I N T R O D U C C I O N

El uso de las computadoras digitales para procesar sismogramas digitalizados como una herramienta de investigación en el desarrollo de métodos de filtrado está actualmente bien establecido. Al final de este trabajo se da una lista parcial de estudios sobre este tema, que se relaciona con la exploración geofísica.

* Reimpreso de GEOPHYSICS, Vol. XXIX, No. 3, Junio de 1964, por cortesía y autorización de la Society of Exploration Geophysicists, de Tulsa, Oklahoma. Traducido por el Ing. Jesús Basurto García, de la Gerencia de Exploración de Petróleos Mexicanos.

** Consultor de la Pan American Petroleum Corporation.

*** Pan American Petroleum Corporation.

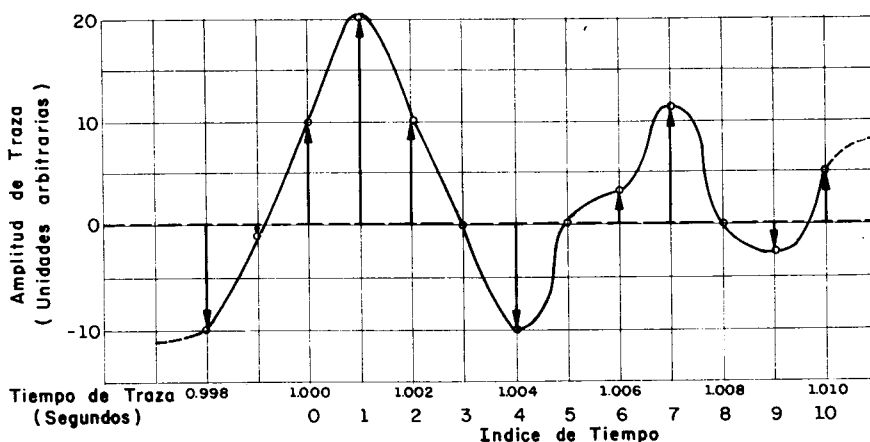


FIGURA 1.—PORCION DE UNA TRAZA DIGITALIZADA

Un filtro digital se representa por una secuencia de números llamados coeficientes de peso. El caso más simple posible es un filtro digital con un coeficiente de peso constante a_0 , esto es un filtro constante. Su acción se muestra esquemáticamente por el diagrama de bloques en donde los óvalos indican entrada y salida, y una caja rectangular indica el filtro. La variable t es el



índice de tiempo, en donde $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ alternatively, podemos ilustrar la acción del filtro a_0 por medio de la tabla (en donde hemos supuesto que $a_0 = \frac{1}{2}$):

Indice de tiempo t	0	1	2	3	4	5
Entrada: x_t	10	20	10	0	—10	0
Salida: $y_t = \frac{1}{2} x_t$	5	10	5	0	—5	0

A continuación introducimos el concepto de un filtro digital que produce un retraso unitario. Este es el **FILTRO DE RETRASO UNITARIO**. Representamos tal filtro por el símbolo Z . De esta manera tenemos:



En términos de las lecturas, tenemos $y_1 = x_0$, $y_2 = x_1$, $y_3 = x_2 \dots, 0$

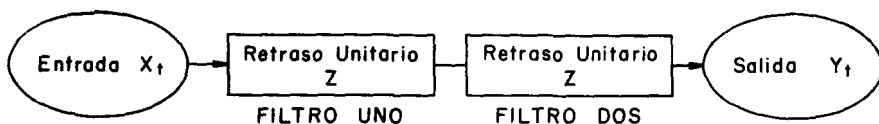
Indice de tiempo t	0	1	2	3	4	5	6
Entrada x_t	10	20	10	0	-10	0	
Retraso de							
Salida $y_t = x_{t-1}$ tiempo unitario		10	20	10	0	-10	0

El símbolo Z empleado aquí tiene un significado matemático especial, esto es, Z representa un operador matemático que produce un retraso unitario. Por lo tanto llamamos a Z el operador de retraso unitario. Si escribimos a Z más explícitamente como

$$Z^1$$

(esto es, Z a la primera potencia) entonces el exponente 1 representa el retraso.

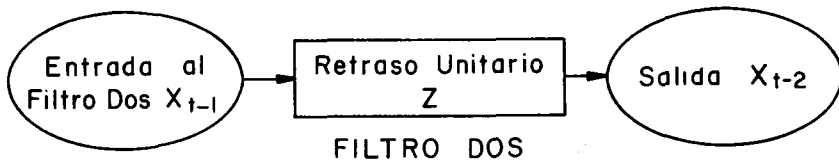
¿Qué ocurre cuando conectamos en serie dos filtros de retraso unitario? Esto es, supóngase que tenemos:



Por una conexión en serie o sucesiva queremos significar que la salida del “Filtro Uno” es la entrada del “Filtro Dos”. Ahora bien, el Filtro Uno produce un retraso unitario, por lo cual su salida es x_{t-1} , o sea:



Ahora usamos el hecho de que la entrada al Filtro Dos es la salida proveniente del Filtro Uno, por lo cual la entrada al Filtro Dos es x_{t-1} . Debido a que el Filtro Dos produce un retraso unitario, su salida es x_{t-2} , esto es:



En términos de las lecturas, tenemos:

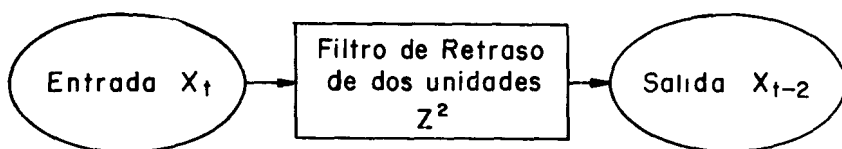
Indice del tiempo t	0	1	2	3	4	5	6	7
Entrada x_t	10	20	10	0	-10	0		
Salida del Filtro Uno		10	20	10	0	-10	0	
Entrada del Filtro Dos		10	20	10	0	-10	0	
	Retraso de tiempo							
Salida x_{t-2}	de dos unidades		10	20	10	0	-10	0

En resumen, vemos que dos filtros de retraso unitario en sucesión son equivalentes a un filtro con un retraso de dos unidades, esto es, si la entrada

es x_t , entonces la salida es x_{t-2} . Un retraso de dos unidades es pues representado por el operador matemático

$$Z^2$$

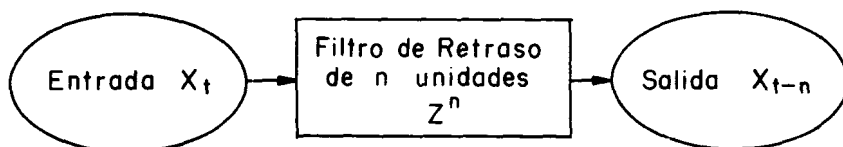
(esto es, Z a la segunda potencia) representando el exponente 2 el retraso:



Siguiendo el mismo razonamiento, es fácil ver que n filtros de retraso en sucesión son equivalentes a un filtro con un retraso de n unidades, esto es, si la entrada es x_t , entonces la salida es x_{t-n} . Un retraso de n unidades es representado por el operador matemático

$$Z^n$$

(esto es, Z a la n -ésima potencia), representando el exponente n el retraso:



¿Puede uno preguntar qué ocurre cuando $n = 0$? Debido a que el exponente representa el retraso, vemos que en este caso el retraso es cero, y así la entrada es igual a la salida.



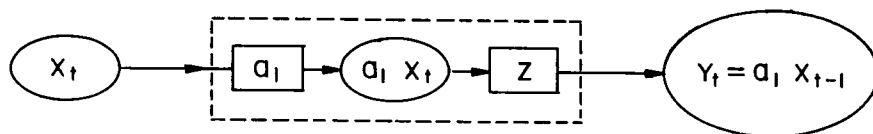
De esta manera, el filtro Z^0 representa el FILTRO IDENTIDAD, y siguiendo el álgebra ordinaria hacemos

$$Z^0 = 1$$

y así, vemos que el filtro constante a_0 (descrito previamente) puede ser representado más explícitamente por

$$a_0 Z^0$$

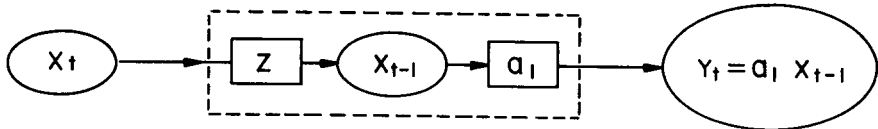
La combinación en serie o sucesión de un filtro constante a_1 seguido por un filtro de retraso unitario Z da el filtro $a_1 Z$; esto es, el filtro a_1 conectado en serie con el filtro Z es mostrado por



o (suponiendo $a_1 = 1/4$):

Indice de tiempo: t	0	1	2	3	4	5	6
Entrada x_t	10	20	10	0	-10	0	
$a_1 x_t$	2.5	5	2.5	0	-2.5	0	
Salida: $y_t = a_1 x_{t-1}$		2.5	5	2.5	0	-2.5	0

Notamos que el factor de peso a_0 está asociado con el filtro constante de RETRASO CERO, mientras que a_1 está asociado con el filtro de retraso UNITARIO. Es evidente que la combinación en sucesión del filtro Z seguido del filtro a_1 da el filtro Za_1 , esto es:

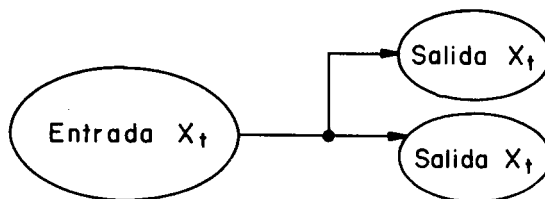


o (haciendo $a_1 = 1/4$):

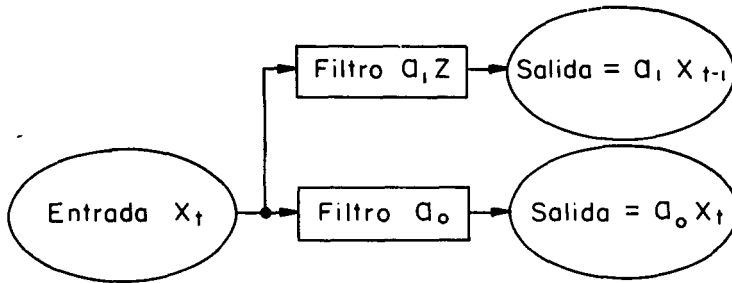
Indice de tiempo: t	0	1	2	3	4	5	6
Entrada: x_t	10	20	10	0	-10	0	
x_{t-1}		10	20	10	0	-10	0
Salida $y_t = x_{t-1}a_1$		2.5	5	2.5	0	-2.5	0

En consecuencia, vemos que el filtro a_1Z es equivalente al filtro Za_1 .

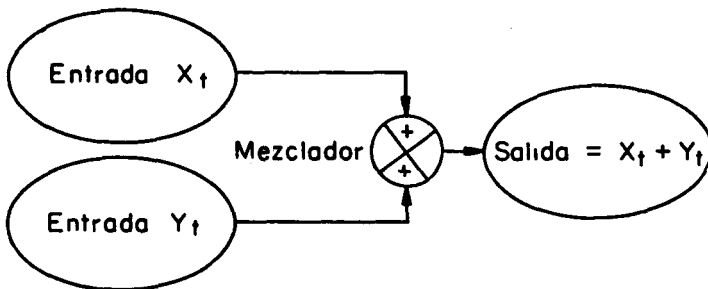
Hasta este momento, hemos conectado dos filtros digitales en serie o sucesión. Ahora queremos introducir una CONEXION EN PARALELO, tal conexión será ilustrada en nuestros diagramas de bloques por el elemento de conexión:



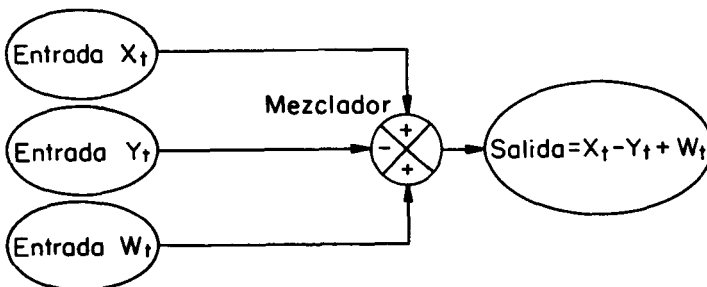
Esta figura ilustra que un elemento de conexión en paralelo, cuando se toma por sí mismo, produce la misma salida en cada derivación o línea de bifurcación. La combinación del filtro a_0 y el filtro a_1Z CONECTADOS EN PARALELO a la misma entrada x_t daría el diagrama de bloques



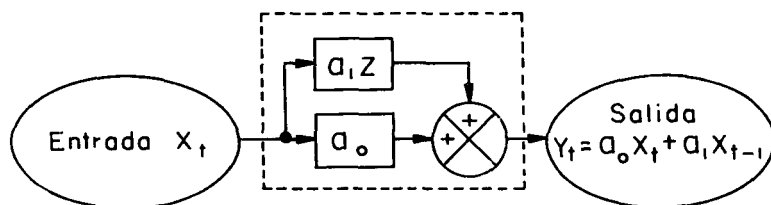
Un mezclador es un dispositivo que añade (o sustrae) dos entradas para producir una salida. Un ejemplo de este dispositivo es:



Otro ejemplo de mezclador es:



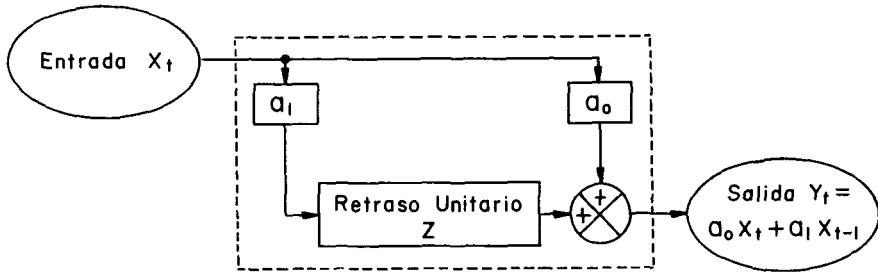
Consideremos ahora el filtro de retraso $a_0 + a_1Z$ que se ilustra por el diagrama de bloques,



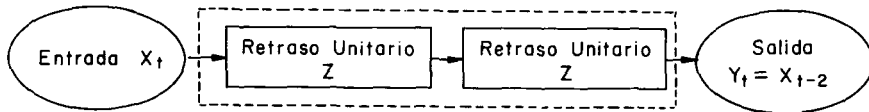
La salida de la subcomponente a_0 es $a_0 x_t$. La salida de la subcomponente $a_1 Z$ es $a_1 x_{t-1}$. Estas dos salidas son a continuación alimentadas como entradas al mezclador, que las añade, y en consecuencia produce la salida $y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1}$. Ilustraremos numéricamente la acción de este filtro para $a_0 = 1/2$ y $a_1 = 1/4$, con lo cual nuestro filtro es $1/2 + 1/4 Z$:

Indice de tiempo t	0	1	2	3	4	5	6
Entrada x_t	10	20	10	0	-10	0	
$a_0 x_t$	5	10	5	0	-5	0	
x_{t-1}		10	20	10	0	-10	0
$a_1 x_{t-1}$		2.5	5	2.5	0	-2.5	0
Salida $y_t = a_0 x_t + a_1 x_{t-1}$	5	12.5	10	2.5	-5	-2.5	0

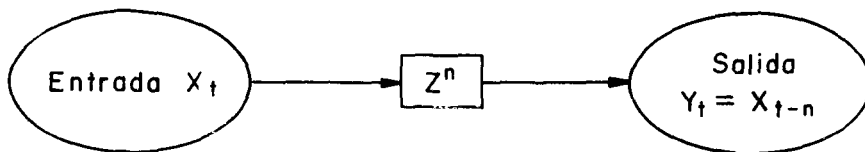
No es difícil verificar que el filtro de retraso $a_0 + a_1 Z$ puede también ilustrarse por el diagrama de bloques:



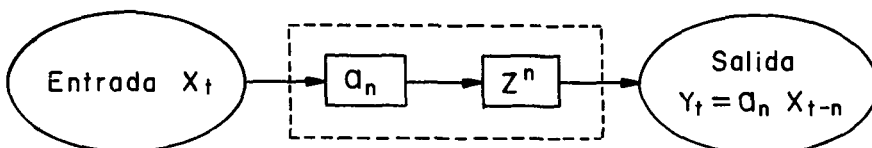
Como ya hemos visto, la conexión en serie de dos filtros de retraso unitario es equivalente a un filtro con retraso de dos unidades:



El rectángulo punteado es el filtro Z^2 , que es un filtro de dos unidades de retraso. Recordemos que Z^n representa un filtro de retraso de n unidades, esto es



Un filtro constante a_n conectado en serie con un filtro de retraso Z^n de n unidades produce el filtro $a_n Z^n$, mostrado por



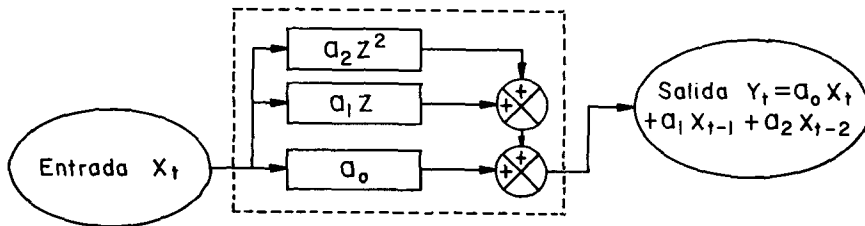
Si por ejemplo, se supone $n = 2$ y $a_2 = 3/4$, entonces el filtro $a_2 Z^2$ es ilustrado por la tabla:

Indice de tiempo t	0	1	2	3	4	5	6	7
Entrada: x_t	10	20	10	0	-10	0		
	tiempo de retraso							
x_{t-2}	de dos unidades		10	20	10	0	-10	0
Salida: $y_t = a_2 x_{t-2}$			7.5	15	7.5	0	-7.5	0

El filtro de retraso más general tiene la forma:

$$a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + a_4 Z^4 + \dots + a_n Z^n$$

Por ejemplo, el filtro de retraso (con un número finito de componentes), $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2$ tiene el diagrama de bloques,



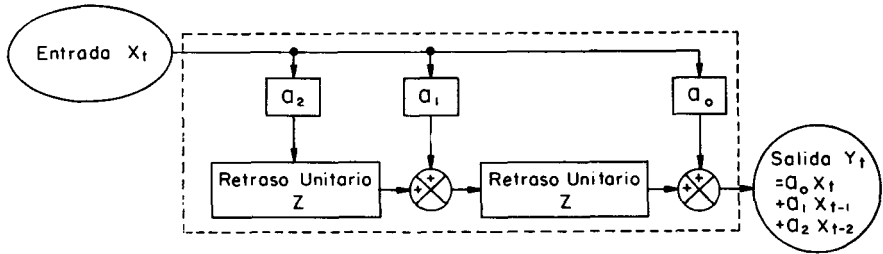
Podemos ilustrar numéricamente el filtro $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2$, haciendo $a_0 = 1/2$, $a_1 = 1/4$, y $a_2 = 3/4$:

Indice de tiempo t	0	1	2	3	4	5	6	7
Entrada: x_t	10	20	10	0	-10	0		
$a_0 x_t$	5	10	5	0	-5	0		
$a_1 x_{t-1}$		2.5	5	2.5	0	-2.5	0	
$a_2 x_{t-2}$			7.5	15	7.5	0	-7.5	0
Salida: y_t	5	12.5	17.5	17.5	2.5	-2.5	-7.5	0

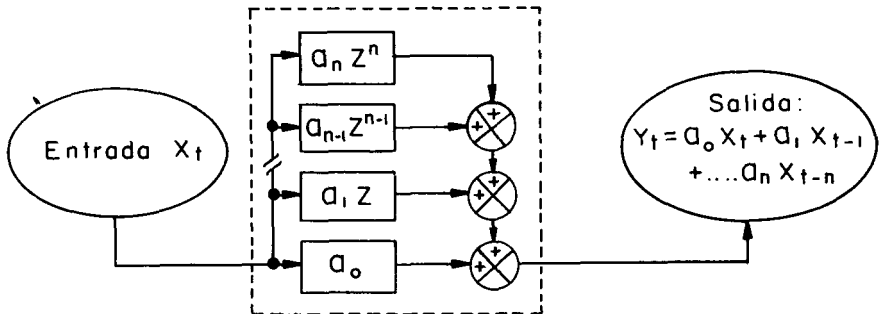
en donde:

$$\begin{aligned}
 y_t &= a_0 x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} \\
 &= \frac{1}{2} x_t + \frac{1}{4} x_{t-1} + \frac{3}{4} x_{t-2}
 \end{aligned}
 \quad (1)$$

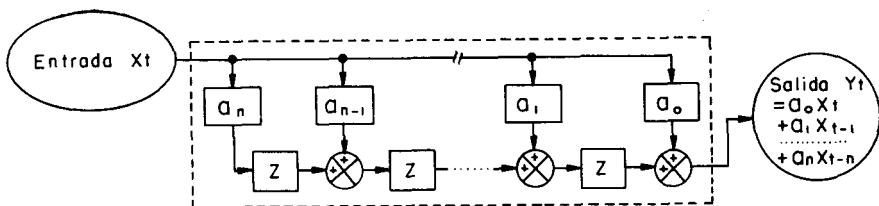
Un diagrama de bloques equivalente para el filtro $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2$ está dado por:



El filtro de retraso de orden n , $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots + a_n Z^n$ puede ilustrarse por cualquiera de los dos diagramas de bloques:



ó,



Como cosa de terminología, el polinomio en Z de orden n ,

$$F(Z) = a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + \dots + a_nZ^n, \quad (2)$$

es denominado *Transformada Z del filtro de retraso* de orden n . Las constantes

$$a_0, a_1, a_2 \dots a_n$$

son los coeficientes de peso del filtro de retraso. Una descripción alternativa de tales filtros digitales de retraso, junto con sus relaciones con los filtros de línea de retraso de tipo analógico está dada por Smith (1958). (Ver nota 1).

Consideremos la acción de un filtro de retraso de orden n sobre una entrada dada por los valores seleccionados e igualmente espaciados x_0, x_1, \dots, x_m . Procediendo como en (1), escribiremos para la salida en el tiempo t :

$$y_t = a_0x_t + a_1x_{t-1} + a_2x_{t-2} + \dots + a_nx_{t-n}$$

Una notación más compacta para este proceso es:

$$y_t = \sum_{s=0}^n a_s x_{t-s} \quad \text{para } t = 0, 1, 2, \dots, m + n \quad (3)$$

siendo $y_t = 0$ cuando t cae fuera del rango (ó de los límites) $t = 0, 1, 2, \dots, m + n$.

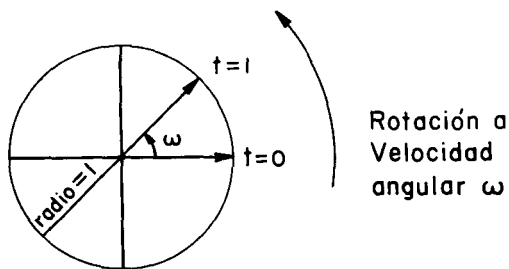
NOTA 1.—Esta definición de la transformada Z sigue el uso matemático originado por Laplace. Algunos textos de ingeniería usan Z^{-1} en lugar de nuestra Z . Preferimos nosotros la versión de Laplace ya que conduce a transformadas de Z que son polinomios más bien que series de Laurent.

Esta expresión es la representación discreta de la operación lineal comúnmente conocida como Convolución. En la literatura se ve esta operación representada usualmente por una integral más bien que por una suma discreta. Esto es debido a que los filtros analógicos con los cuales tienen que tratar los Ingenieros Electricistas operan en tiempo continuo que requiere una representación integral de la operación de Convolución. Puesto que aquí tratamos con datos de tiempo discretos, es necesario representar el proceso de Convolución por una suma. La salida del filtro digital de retraso de orden n es obtenible así por la convolución discreta de la entrada $x_0, x_1, \dots x_m$ con los factores de peso $a_0, a_1, \dots a_n$.

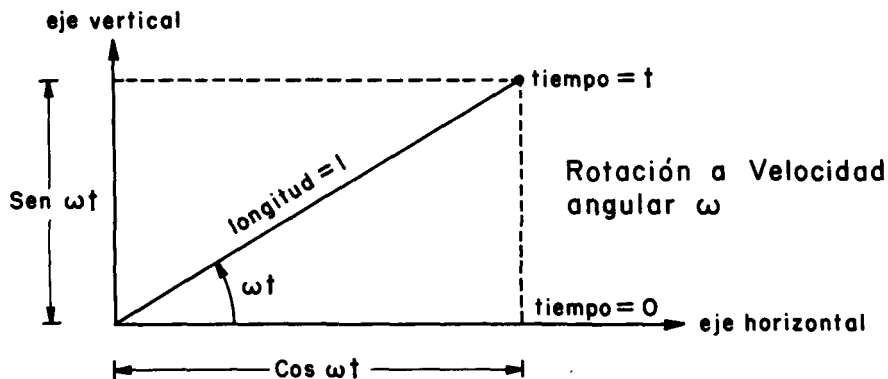
CARACTERISTICAS DE AMPLITUD Y FASE DE LOS FILTROS DIGITALES

Los filtros que hemos discutido en la sección previa todos operan en el dominio del tiempo. Por lo tanto pueden llamarse **FILTROS DIGITALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO**. Los ejemplos numéricos presentados hasta ahora ilustran el filtrado digital en el dominio del tiempo. Muchas gentes, los ingenieros en particular, están más acostumbrados a pensar sobre el filtrado en el dominio de las frecuencias. Se puede estudiar provechosamente la acción de los filtros tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, o en una combinación de ambas. La selección del ataque particular depende de la naturaleza del problema que se tenga a mano. Ahora procederemos a esbozar la relación que existe entre el filtrado en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Antes de hacer esto, es conveniente hacer una breve discusión del movimiento armónico simple.

El movimiento armónico simple o senoidal a una frecuencia dada puede ilustrarse por una rueda girando a velocidad angular constante. El siguiente diagrama muestra una rueda de radio unitario girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a una velocidad angular de ω radianes por unidad de tiempo:



Los dos vectores muestran que un ángulo de ω radianes es barrido en una unidad de tiempo. El vector inferior corresponde al tiempo $t = 0$, el vector superior a $t = 1$. En lugar de considerar una rueda giratoria, podemos pensar simplemente en un vector que gira a una velocidad angular constante ω :



Para el tiempo $t = 0$, suponemos que el vector yace en la dirección positiva a lo largo del eje horizontal de Coordenadas. Después, a un tiempo arbitrario t , el vector hará un ángulo de ωt radianes, con el eje horizontal. Se ve que la proyección de este vector sobre el eje horizontal es:

$$\text{COMPONENTE HORIZONTAL} = \text{Cos } \omega t$$

en tanto que su proyección sobre el eje vertical es:

$$\text{COMPONENTE VERTICAL} = \text{Sen } \omega t$$

Considerando que el eje vertical sea el eje imaginario (esto es, una distancia unitaria sobre el eje vertical sea $i = \sqrt{-1}$), vemos que podemos representar el vector para un tiempo t en función de sus componentes $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ como sigue:

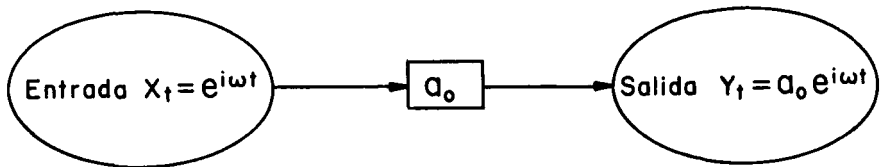
$$\text{VECTOR (a un tiempo } t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

que, mediante la fórmula de Euler, es:

$$\text{VECTOR (a un tiempo } t) = e^{i\omega t}$$

En esta forma, el exponencial $e^{i\omega t}$ representa un vector unitario (o rueda) girando a una velocidad angular constante ω . Las componentes de este vector representan un movimiento armónico simple.

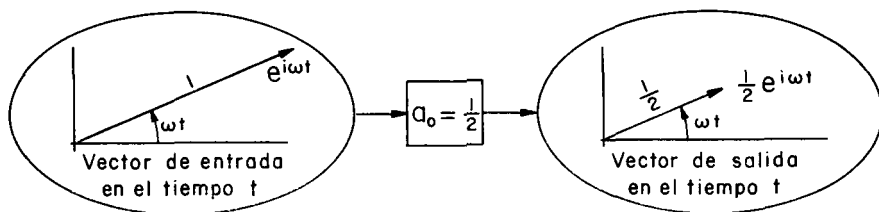
Ahora hagamos que el movimiento armónico simple sea la entrada a los varios filtros digitales que hemos considerado. Primero, consideremos el filtro constante a_0 , tenemos:



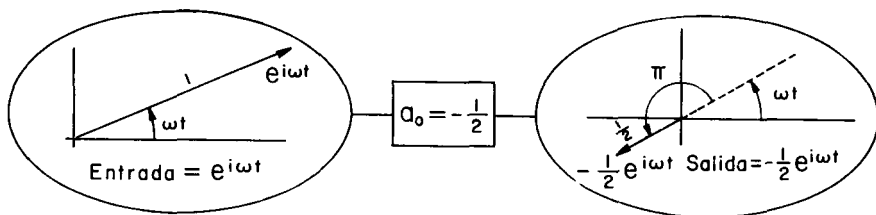
que muestra que la salida es

$$\begin{aligned} y_t = a_0 e^{i\omega t} &= a_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ &= a_0 \cos \omega t + i a_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

Por lo tanto, la salida es también un vector giratorio, pero en lugar de tener una longitud unitaria tiene una longitud a_0 . Por ejemplo para $a_0 = 1/2$, tenemos:



Puesto que tanto el vector de entrada en el tiempo t y el vector de salida en el tiempo t hacen el mismo ángulo ωt con el eje horizontal, decimos que la entrada y la salida están EN FASE. Aquí, hemos supuesto tácitamente que a_0 es una constante positiva. Si, por otra parte, a_0 fuera una constante negativa, digamos $a_0 = -1/2$, tendríamos



Esto es, el vector de salida es,

$$-\frac{1}{2} e^{i\omega t}$$

que puede también escribirse (ya que $-1 = e^{i\pi}$)

$$+\frac{1}{2} (-1) e^{i\omega t} = \frac{1}{2} e^{i\pi} e^{i\omega t}$$

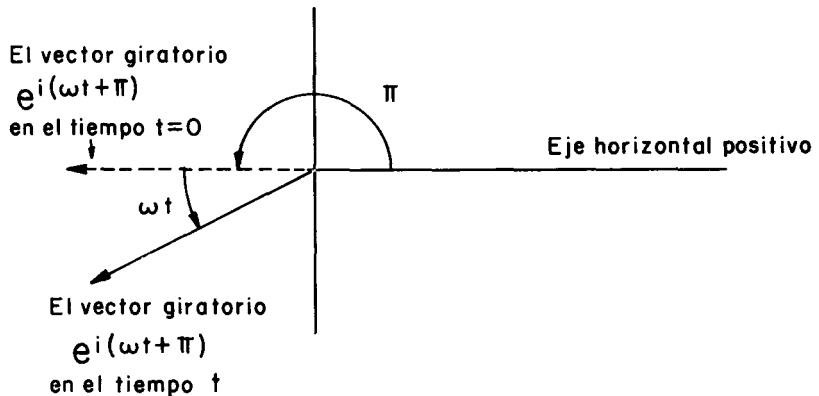
que es:

$$\frac{1}{2} e^{i(\omega t + \pi)}$$

Hemos así convertido el vector de salida en el producto de la constante positiva $\frac{1}{2}$ por $e^{i(\omega t + \pi)}$. La constante positiva $\frac{1}{2}$ es la longitud del vector de salida y en consecuencia es llamada la amplitud del vector de salida. Ahora, la cantidad:

$$e^{i(\omega t + \pi)} = \cos(\omega t + \pi) + i \sin(\omega t + \pi)$$

representa el vector giratorio de longitud unitaria que puede trazarse en la forma:



En el tiempo $t = 0$, este vector yace sobre el eje horizontal en la dirección negativa y hace un ángulo de π radianes con el eje horizontal positivo. Este ángulo π se denomina la fase del vector:

$$e^{i(\omega t + \pi)}$$

Regresando ahora a nuestro ejemplo del filtro $a_0 = -1/2$, podemos decir que la salida del filtro:

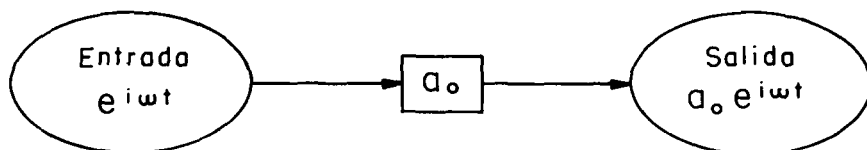
$$\begin{aligned}
 -1/2 e^{i\omega t} &= 1/2 e^{i(\omega t + \pi)} \\
 &= 1/2 \cos(\omega t + \pi) + i 1/2 \sin(\omega t + \pi)
 \end{aligned}$$

puede imaginarse como un vector giratorio de amplitud $+ 1/2$ y fase de π radianes. Si dividimos la salida $1/2 e^{i(\omega t + \pi)}$ entre la entrada $e^{i\omega t}$, obtenemos la llamada FUNCION DE TRANSFERENCIA del filtro.

$$\frac{\text{SALIDA}}{\text{ENTRADA}} = 1/2 e^{i\pi}$$

Esta cantidad, que en general es compleja, puede describirse en función de su magnitud y su ángulo de fase. La magnitud de la función de transferencia es conocida como la CARACTERISTICA DE AMPLITUD DEL FILTRO, mientras que su ángulo de fase es llamada la CARACTERISTICA DE FASE DEL FILTRO. Por lo tanto, la característica de amplitud del filtro $a_0 = -1/2$ es $+ 1/2$, mientras que su característica de fase es π . Observamos que tanto la característica de amplitud como la característica de fase de este filtro son INDEPENDIENTES DE LA VELOCIDAD ANGULAR ω . Porque la característica de fase es constante e igual a π , podemos decir que la entrada y la salida de este filtro están fuera de fase por π para todas las ω , o simplemente que están 180° fuera de fase.

De la misma manera, podemos calcular la función de transferencia de cualquier filtro constante a_0 . Aquí:

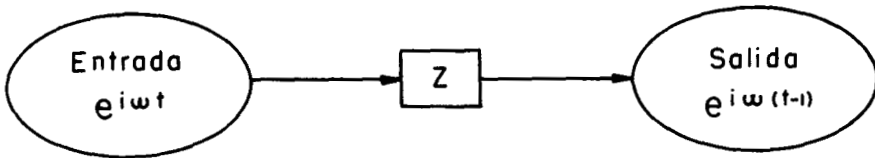


La función de transferencia es:

$$\frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = a_0$$

que es exactamente el vector constante a_0

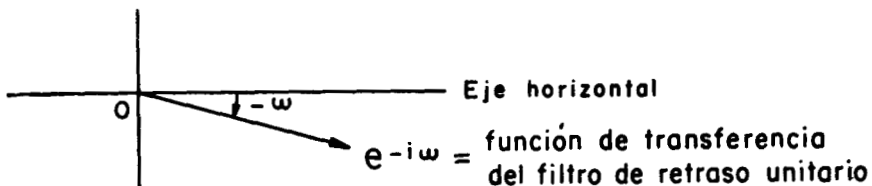
El siguiente filtro que queremos considerar es el filtro de retraso unitario Z . Tenemos:



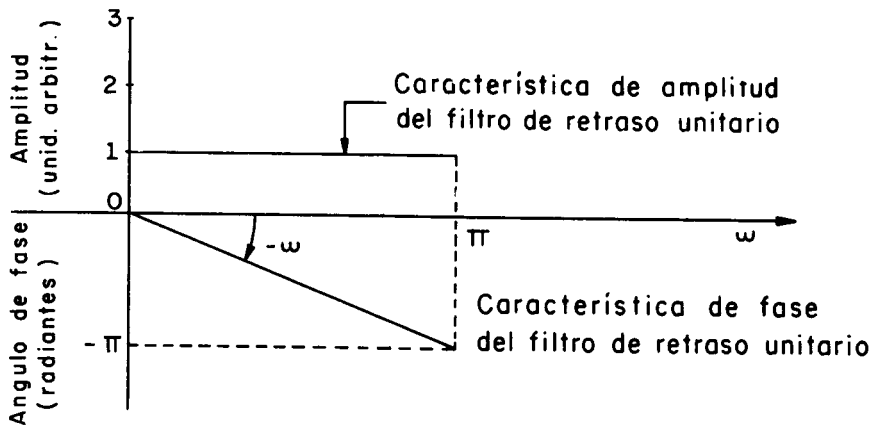
La función de transferencia es ahora:

$$\frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = \frac{e^{i\omega(t-1)}}{e^{i\omega t}} = e^{-i\omega}$$

esto es, la función de transferencia del filtro de retraso unitario es el vector constante $e^{-i\omega}$, que se muestra en el diagrama:



Ahora recordemos que la **CARACTERISTICA DE AMPLITUD** de un filtro es igual a la magnitud de la función de transferencia del filtro. Debido a que el vector $e^{-i\omega t}$ tiene magnitud unitaria, vemos que la característica de amplitud del filtro de retraso unitario es uno. También recordemos que la **CARACTERISTICA DE FASE** de un filtro es igual al ángulo de fase de la función de transferencia del filtro. Puesto que el vector $e^{-i\omega t}$ forma un ángulo $-\omega$ con el eje horizontal positivo, vemos que la característica de fase de este filtro es $-\omega$. En consecuencia, la característica de fase de este filtro es una **FUNCION DE LA VELOCIDAD ANGULAR ω** , aunque su característica de amplitud es independiente de ω :



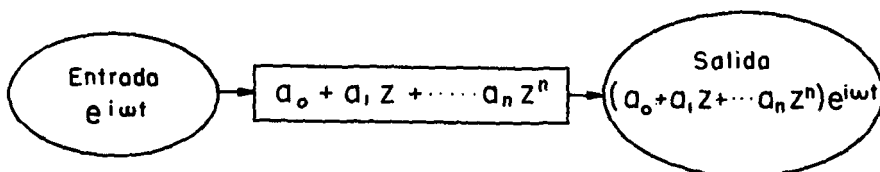
Resumiendo, vemos que la función de transferencia del filtro a_0 es a_0 , y que la función de transferencia del filtro Z es $e^{-i\omega t}$. Para el filtro $a_1 Z$ tenemos la función de transferencia:

$$\frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = \frac{a_1 e^{i\omega(t-1)}}{e^{i\omega t}} = a_1 e^{-i\omega t}$$

mientras que el filtro $a_0 + a_1 Z$ tiene la función de transferencia:

$$\frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = \frac{a_0 e^{i\omega t} + a_1 e^{i\omega(t-1)}}{e^{i\omega t}} = a_0 + a_1 e^{-i\omega}$$

La función de transferencia del filtro de retraso de orden n :



puede ahora establecerse por inducción:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} &= \frac{a_0 e^{i\omega t} + a_1 e^{i\omega(t-1)} + \dots + a_n e^{i\omega(t-n)}}{e^{i\omega t}} \\ &= a_0 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_n e^{-i\omega n} \end{aligned}$$

Nuestros resultados pueden tabularse en la forma:

FILTRO	FUNCION DE TRANSFERENCIA
a_0	a_0
Z	$e^{-i\omega}$
$a_1 Z$	$a_1 e^{-i\omega}$
$a_0 + a_1 Z$	$a_0 + a_1 e^{-i\omega}$
.....
$a_0 + a_1 Z + \dots + a_n Z^n$	$a_0 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_n e^{-i\omega n}$

De este modo, la función de transferencia de cada filtro es obtenida formalmente por la substitución de $e^{-i\omega} = Z$ en la transformada Z del filtro. Notamos que, excepto para el caso del filtro constante a_0 , la función de transferencia siempre depende de la velocidad angular ω .

Si escribimos la función de transferencia en la forma polar:

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

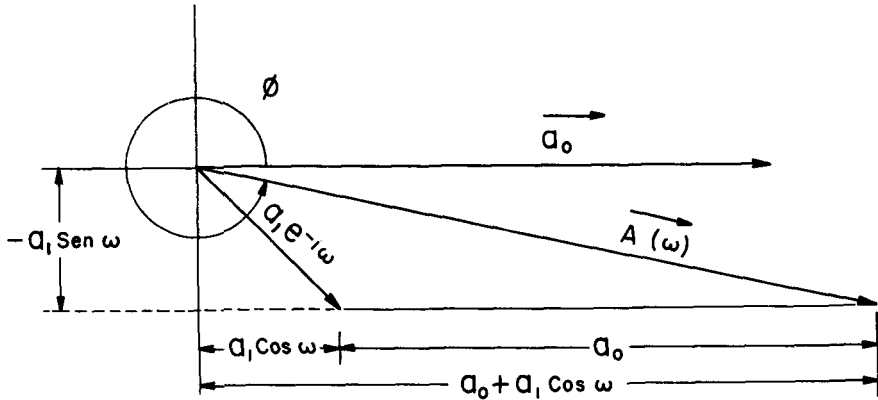
vemos que la magnitud $|A(\omega)|$ y el ángulo $\phi(\omega)$ representan, respectivamente, las características de amplitud y de fase del filtro. Por ejemplo, la función de transferencia del filtro

$$a_0 + a_1 Z$$

es

$$\begin{aligned} A(\omega) &= a_0 + a_1 e^{-i\omega} \\ &= (a_0 + a_1 \cos \omega) - i (a_1 \sin \omega) \end{aligned}$$

Ahora $A(\omega)$ (para un valor fijo de ω) es el vector que es la suma de los vectores a_0 y $a_1 e^{-i\omega}$:



La longitud, $|A(\omega)|$, del vector $A(\omega)$ es:

$$\begin{aligned} |A(\omega)| &= + \sqrt{(a_0 + a_1 \text{ Cos } \omega)^2 + (a_1 \text{ Sen } \omega)^2} \\ &= + \sqrt{a_0^2 + 2a_0a_1 \text{ Cos } \omega + a_1^2} \end{aligned}$$

Esta cantidad es la característica de amplitud del filtro $a_0 + a_1 Z$. El ángulo ϕ , que es una función de ω :

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{-a_1 \text{ Sen } \omega}{a_0 + a_1 \text{ Cos } \omega} = -\tan^{-1} \frac{a_1 \text{ Sen } \omega}{a_0 + a_1 \text{ Cos } \omega}$$

da la característica de fase del filtro $a_0 + a_1 Z$. Vemos que AMBOS, la característica de amplitud y la de fase, son funciones de la frecuencia angular ω .

LA CARACTERISTICA DE RETRASO MINIMO DE FASE DE UN FILTRO DIGITAL

Hemos visto en la sección anterior que la función de transferencia de un filtro digital puede convenientemente expresarse en términos de una característica de amplitud $A(\omega)$ y de una característica de fase $\phi(\omega)$. Es mucho más fácil visualizar la significación física de la característica de amplitud de un filtro que lo es entender la correspondiente característica de fase. Algunas gentes, por lo tanto, tienden a descuidar la característica de fase de los filtros cuando resuelven problemas reales. Pero ocurre, sin embargo, que la característica de fase es de fundamental importancia al describir filtros cuyas características de amplitud son *idénticas*. Este hecho es quizá mejor ilustrado por un simple ejemplo.

Consideremos dos filtros, uno con transformada Z :

$$F_0(Z) = 1 + 0.5Z$$

el otro con transformada Z :

$$F_1(Z) = 0.5 + 1Z$$

En otras palabras los coeficientes de peso del filtro F_0 son (1, 0.5) mientras que los coeficientes de peso del filtro F_1 son (0.5, 1). Recordemos que la característica de amplitud del filtro

$$F(Z) = a_0 + a_1Z$$

es

$$|A(\omega)| = \sqrt{a_0^2 + 2a_0a_1 \cos \omega + a_1^2}$$

Haciendo $a_0 = 1$ y $a_1 = 0.5$ en esta fórmula, encontramos que la característica de amplitud del filtro $F_0(Z)$ es:

$$\begin{aligned}
 |A_o(\omega)| &= + \sqrt{1 + \cos \omega + 0.25} \\
 &= + \sqrt{1.25 + \cos \omega}
 \end{aligned}$$

Haciendo $a_o = 0.5$ y $a_1 = 1$, encontramos que la característica de amplitud del filtro $F_1(Z)$ es:

$$\begin{aligned}
 |A_1(\omega)| &= + \sqrt{0.25 + \cos \omega + 1} \\
 &= + \sqrt{1.25 + \cos \omega}
 \end{aligned}$$

que es la misma que la anterior expresión para $|A_o(\omega)|$. De esta manera, los dos filtros tienen la misma característica de amplitud, que se muestra en la Figura 2 para el rango de frecuencia $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Las frecuencias negativas se usan por conveniencia matemática (véase, por ejemplo, Goldman, 1948, p. 70-72). En nuestra discusión del movimiento armónico simple, una frecuencia positiva indicaría que la rueda está girando en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, mientras que una frecuencia negativa indicaría rotación en la dirección de las manecillas del reloj.

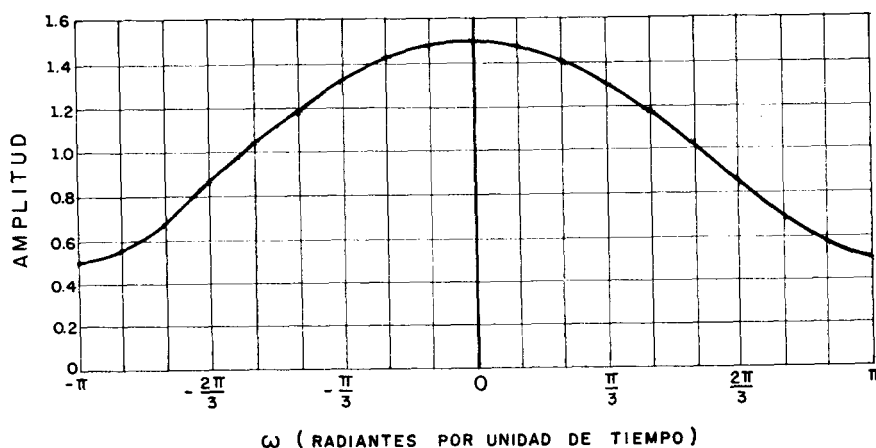


FIGURA 2.—CARACTERÍSTICA DE AMPLITUD DE LOS FILTROS $F_o(Z)$ Y $F_1(Z)$

La cuestión que ahora se presenta es: ¿Cuál es la relación entre las características de fase de los dos filtros $F_o(Z)$ y $F_1(Z)$? Recordemos que la característica de fase del filtro $a_o + a_1 Z$ está dado por:

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{a_1 \operatorname{Sen} \omega}{a_o + a_1 \operatorname{Cos} \omega} \right)$$

Así, para el filtro $F_o(Z)$ tenemos con $a_o = 1$ y $a_1 = 0.5$

$$\phi_o(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{0.5 \operatorname{Sen} \omega}{1 + 0.5 \operatorname{Cos} \omega} \right)$$

Por otra parte, haciendo $a_o = 0.5$ y $a_1 = 1$, tenemos para el filtro $F_1(Z)$:

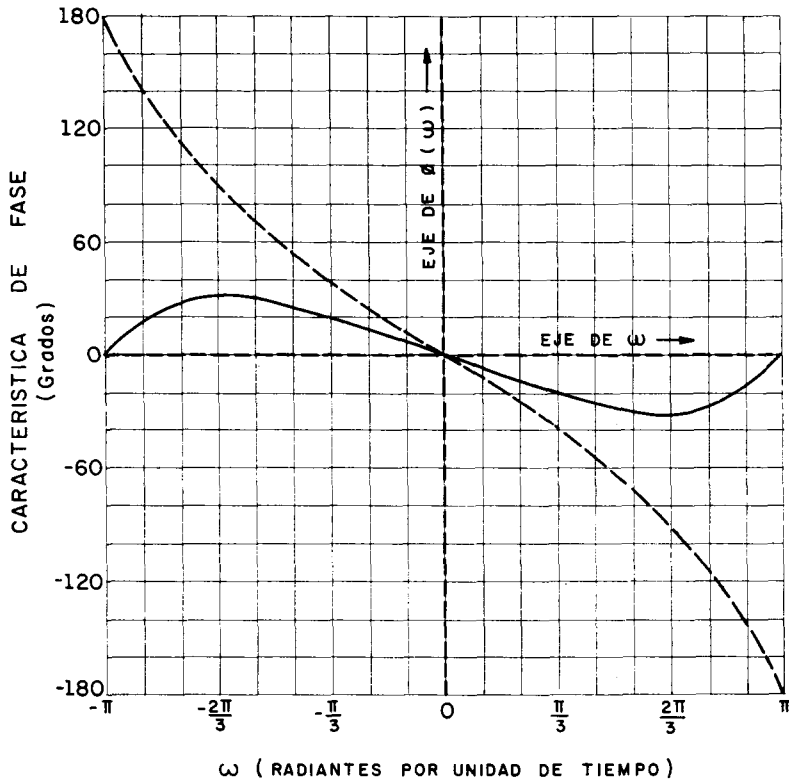
$$\phi_1(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Sen} \omega}{0.5 + \operatorname{Cos} \omega} \right)$$

Estas dos características de fase aparecen dibujadas en la Figura 3 para el rango $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

En lugar de considerar la fase $\phi(\omega)$, muchas gentes, ingenieros en particular, prefieren tratar con la fase negativa, $-\phi(\omega)$, que es llamada el retraso de fase ("Phase lag"). Las características de retraso de fase de los filtros $F_o(Z)$ y $F_1(Z)$ están dadas por

$$-\phi_o(\omega) = \tan^{-1} [0.5 \operatorname{Sen} \omega / (1 + 0.5 \operatorname{cos} \omega)]$$

$$-\phi_1(\omega) = \tan^{-1} [\operatorname{Sen} \omega / (0.5 + \operatorname{Cos} \omega)]$$


 FIGURA 3.—CARACTERÍSTICAS DE FASE DE LOS FILTROS $F_0(Z)$ Y $F_1(Z)$

Puesto que las curvas de fase así como las de retraso de fase son funciones impares de la frecuencia angular ω (esto es, son antisimétricas con relación al origen), solo necesitamos dibujar $-\phi_0(\omega)$ y $-\phi_1(\omega)$ para ω en el rango de 0 a π .

Esto se hace en la Figura 4. Así vemos que el retraso de fase $-\phi_0(\omega)$ yace debajo del retraso de fase $-\phi_1(\omega)$. Ahora estamos en posición de afirmar que el filtro $F_0(Z)$ tiene una característica de retraso de fase que es menor que la característica de retraso de fase del filtro $F_1(Z)$ para el rango $0 < \omega \leq \pi$. Para $\omega = 0$ las características de retraso de fase de ambos filtros son cero.

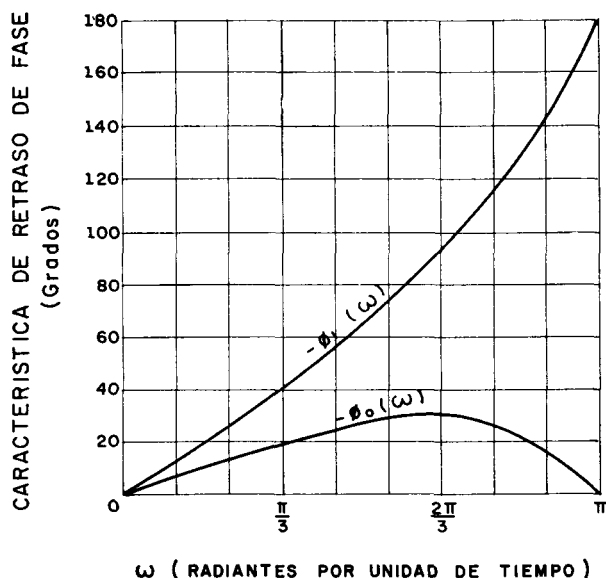


FIGURA 4.—CARACTERISTICAS DE RETRASO DE FASE
DE LOS FILTROS $F_0(Z)$ Y $F_1(Z)$

Limitémonos a coeficientes de pesos reales solamente, y consideremos solo filtros digitales del tipo de retraso, para los cuales la salida nunca puede preceder a la entrada en tiempo. Entonces, vemos que el par de filtros $\{F_0(Z), F_1(Z)\}$ representa un juego de filtros digitales de retraso, cada uno con la misma característica de amplitud. Este juego es completo en el sentido de que los dos coeficientes de peso reales a_0 y a_1 pueden ocurrir ya sea en la secuencia a_0, a_1 o en la secuencia a_1, a_0 . Ahora podemos decir que el filtro $F_0(Z)$ tiene la CARACTERISTICA MINIMA DE RETRASO DE FASE del juego de filtros $\{F_0(Z), F_1(Z)\}$. El concepto de filtros de retraso mínimo de fase es completamente general y puede ser extendido a juegos de filtros de retraso de orden n , teniendo cada filtro en el juego la misma característica de amplitud. En cada uno de tales juegos hay un filtro cuya característica de retraso es mínima con relación a las características de retraso de fase de todos los otros miembros de ese juego, y este filtro es el filtro de retraso mínimo de fase. Todos los filtros dentro del juego dado tienen la misma característica de amplitud.

Estos casos están íntimamente relacionados con las cuestiones de estabilidad de filtros que se presentan cuando quiere uno operar digitalmente so-

bre una traza sísmica con el fin de convertirla en un registro continuo de velocidades. Este proceso, conocido como “deconvolución” o “convolución inversa”, ha recibido considerable atención en la literatura geofísica reciente (Backus, 1961; Foster, Hicks and Nipper, 1962; Kunetz, 1961; Rice, 1962, y muchos otros).

CONCLUSIONES

Durante años muy recientes han aparecido varios trabajos que tratan de los resultados finales obtenidos por medios digitales (tales como Smith, 1958; Rice, 1962). Por esta razón nuestra presente discusión tiene que ver primariamente con los principios básicos del filtrado digital.

Hemos demostrado con algún detalle cómo los filtros digitales operan sobre una entrada digitalizada arbitraria para producir una salida discreta. Encontramos que la mecánica de este proceso puede ser visualizada con la mayor facilidad en el dominio del tiempo, pero es usualmente necesario pensar del filtrado en función tanto del dominio del tiempo como de la frecuencia. De esta manera hemos intentado aquí presentar una descripción completa, aunque algo heurística, del comportamiento de los filtros en ambos de esos dominios. Hemos introducido el concepto de retraso mínimo de fase para la clasificación de los filtros.

REFERENCIAS

- Backus, M.*—“Deconvolution and the one-dimensional reflection seismogram”: oral presentation at the 31 st. International SEG Meeting, Denver Colo., November 1961.
- Foster, M. R., Hicks, W. G., and Nipper, J. T.*, 1962, “Optimum inverse filters which shorten the spacing of velocity logs”: *Geophysics*, V. 27, p. 317-326.

- Goldman, S.*, 1948, "Frequency analysis, modulation, and noise": Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 434, p.
- Kunetz, G.*, 1961, "Essai d'analyse de traces sismique": Geoph. Prosp., V. 9, p. 317-341.
- MIT Geophysical Analysis Group 1952-1957, GAG Reports No. 1 through No. 11: Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.
- Rice, R. B.*, 1962, "Inverse-convolution filters": Geophysics, V. 27, p. 4-18.
- Robinson, E. A.*, 1957, "Predictive decomposition of seismic traces": Geophysics, V. 22, p. 767-778.
- Smith, M. K.*, 1958, "A review of methods of filtering seismic data": Geophysics, V. 23, p. 44-57.
- Swartz, C. A., and Sokoloff, V. M.*, 1954, "Filtering associated with selective sampling of geophysical data": Geophysics, V. 19, p. 402-419.
- Wold, H.*, 1938, "A study in the analysis of stationary time series": Uppsala, Almqvist and Wiksells.

EL TEOREMA DE LA SUPERPOSICION Y EL FILTRADO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Por el Ing. *A. García Rojas* *

R E S U M E N :

Se presentan los aspectos fundamentales del Teorema de la Superposición y se muestra la equivalencia del filtrado en el dominio de las frecuencias y el filtrado en el dominio del tiempo.

En el caso de los registros sismológicos, el filtrado en el dominio del tiempo puede desarrollarse en calculadoras analógicas o calculadoras digitales.

Para desarrollar las operaciones de filtrado en calculadoras digitales se requiere que tengan una gran capacidad para almacenamiento de datos y es conveniente que sean de una gran velocidad.

EL PRINCIPIO Y EL TEOREMA DE LA SUPERPOSICION

1. — *INTRODUCCION*

Uno de los principios fundamentales de la Física, que se emplea en la mayor parte de las aplicaciones diarias, es el llamado Principio de la Superposición, que puede expresarse de la siguiente manera:

* Gerente de Exploración, Petróleos Mexicanos.

En todo sistema físico en el cual el cambio es proporcional a la excitación, al aplicar varias excitaciones diferentes el cambio total es igual a la suma de los cambios producidos individualmente por cada excitación.

Como ejemplo típico puede citarse el alargamiento de un resorte, que aumenta proporcionalmente a la carga total, siempre que la suma de las cargas no llegue a un valor que exceda el límite de trabajo elástico del material de que está hecho el resorte.

Debe notarse que en ingeniería se aplican también los sistemas cuya respuesta no es lineal. Un ejemplo típico es el del control de ganancia en los aparatos sismológicos.

Otro principio fundamental de los mecanismos empleados en las aplicaciones de ingeniería es que la respuesta a una excitación individual es la misma cualquiera que sea el tiempo en que esta excitación ocurra. Un ejemplo típico es el de un sistema de sonido, en el cual la reproducción de un disco es igual cualquiera que sea el tiempo al cual se le toque.

La aplicación del principio de la superposición a los sistemas eléctricos y mecánicos se trata en la mayor parte de los libros sobre Cálculo Operacional y la Transformada de Laplace. En el caso especial de la Sismología Aplicada, el Teorema de la Superposición permite determinar la respuesta del sistema a una señal cualquiera cuando se conoce su respuesta a una señal que toma la forma de un pulso instantáneo, según se describe en este trabajo.

El problema tiene interés especial, puesto que los procesos de filtro en el dominio del tiempo que se pueden aplicar en las calculadoras electrónicas de alta velocidad se basan en el principio de la Superposición (Bibliografía 10) dado que en ellas, tanto la señal como las características del filtro, tienen que representarse por números, en lugar de emplearse señales y circuitos eléctricos, como se hace en los trabajos sismológicos convencionales.

En este trabajo, que se enfoca específicamente a los trabajos sismológicos de exploración, se toma un filtro sismológico como base para explicar la respuesta de un sistema al pulso instantáneo y el teorema de Superposición; pero las mismas consideraciones pueden ser aplicables a un detector sismo-

lógico, o a cualquier otro sistema mecánico o eléctrico, según puede verse en el libro de W. T. Thompson (Bibl. 4).

Las ecuaciones de la Transformada de Fourier son esenciales para comprender fácilmente la relación entre la respuesta de los filtros en el dominio de las frecuencias y en el dominio del tiempo.

La transformada de Fourier queda definida por las dos ecuaciones siguientes:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

(Véase Bibliografía 1 y 2).

Las ecuaciones anteriores muestran que una función transitoria, tal como una señal sismológica, puede descomponerse en la suma de un espectro continuo de ondas senoidales, y por lo tanto, la posibilidad de alterar la forma de una señal eléctrica al hacerla pasar por un filtro eléctrico, que no es otra cosa que un circuito cuya respuesta varía con la frecuencia, según se ha mostrado en la cita bibliográfica 1, en donde este problema se trata en el dominio de las frecuencias, ya que el comportamiento de los aparatos sismológicos se explica fácilmente en función de la respuesta de sus diferentes elementos a diferentes frecuencias.

2—CARACTERISTICAS TIPICAS DE LOS FILTROS

El filtro típico empleado en sismología es un circuito eléctrico que tiene diferentes respuestas para señales de diferentes frecuencias, pero en el cual la señal de salida es directamente proporcional al valor de la señal de entrada.

Gráficamente las características de un filtro se representan, por lo general, en función de la frecuencia, según se indica en la figura No. 1:

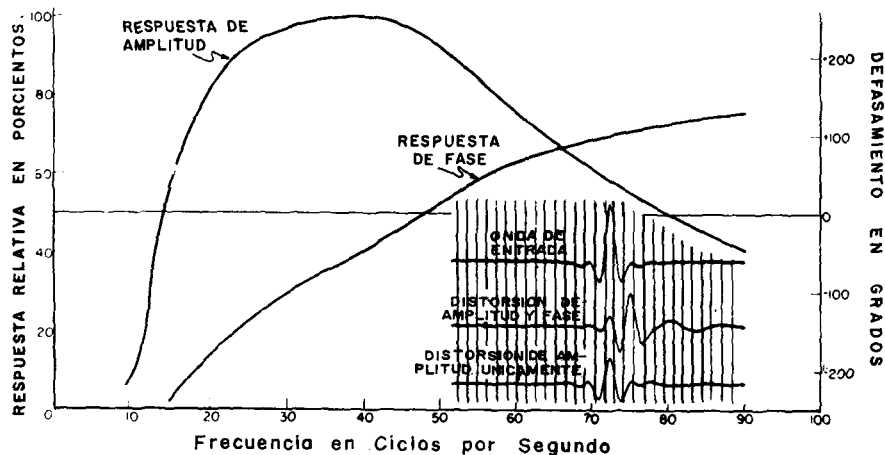


Figura 1.—Características típicas, en el dominio de las frecuencias, de un filtro empleado en los aparatos sismológicos de exploración (Bibl. 6).

Las características del filtro pueden resumirse como sigue:

- 1 — Cuando a la entrada del filtro se aplican señales senoidales de diferentes frecuencias, la relación entre la amplitud de las señales a la entrada y la salida del filtro varían en la forma indicada por la gráfica de “*Respuesta de Amplitud*”.
- 2 — Las señales de diferentes frecuencias sufren el cambio de fase indicado en la curva “*Respuesta de Fase*”.

Como resultado de lo anterior la señal de salida sufre una distorsión, según se muestra en las señales típicas indicadas en la figura 1.

EL IMPULSO UNITARIO

La respuesta combinada de amplitud y fase de un filtro puede determinarse fácilmente a partir de la respuesta a un pulso instantáneo, el cual se define como una señal de duración infinitamente pequeña y con una altura tal que el área del impulso es igual a la unidad. Esta señal se designa como $\delta(t)$ y se representa esquemáticamente en la figura 2.

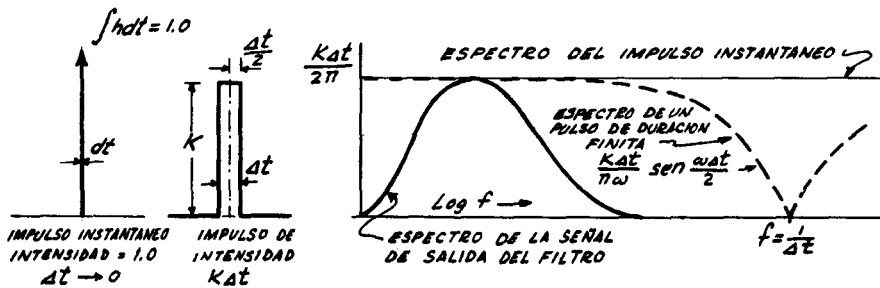


Figura 2.—Espectro de un pulso de duración finita y del pulso instantáneo.

El impulso instantáneo puede aproximarse en la práctica a un pulso de altura finita K y de una anchura Δt , según se indica en la figura 2. En muchos casos el valor $K \Delta t$ difiere de la unidad y su valor se define como la intensidad del impulso.

El espectro de frecuencias para un impulso de intensidad $K \Delta t$ se puede determinar aplicando la ecuación 1, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 C(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K \Delta t e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} K \Delta t e^{-j\omega t} dt = \frac{2 K \Delta t}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega} = \\
 &= \frac{K \Delta t}{2\pi} \frac{\sin(\omega \Delta t/2)}{\omega/2} \dots (3)
 \end{aligned}$$

El ángulo de fase de las componentes es cero para $t = 0$, puesto que no existen componentes cosenoidales.

La amplitud de las componentes de frecuencia del impulso $K \Delta t$ varía como se indica en la figura 2 con rayas punteadas para el caso de un impulso muy angosto y su componente para $f = 0$ es $K \Delta t / 2 \pi$.

En el caso de que Δt sea infinitesimal, es decir, para el impulso instantáneo, es infinita la frecuencia para la cual la amplitud tiene un valor de cero, y las componentes son de amplitud igual a $1/2 \pi$ para frecuencias entre cero e infinito, estando en fase para $t = 0$.

La condición anterior muestra que el aplicar un pulso unitario a un filtro, equivale a aplicarle toda la gama de frecuencias entre cero e infinito, quedando éstas en fase para $t = 0$.

APLICACION DEL PULSO UNITARIO A UN FILTRO

La señal de salida del filtro al aplicar el pulso unitario será la suma de todas las componentes que pasen por el filtro. A esta señal se le designa como respuesta en el dominio del tiempo $h(t)$ y su valor, de acuerdo con la ecuación 2 es:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) C(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Todas las componentes del pulso unitario tienen una amplitud igual a $(1/2 \pi)$, según se ve en la ecuación (3), por lo tanto

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

De la ecuación anterior se ve que $2 \pi h(t)$ es igual a la ecuación No. 2, por lo cual puede ponerse:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) muestran la relación existente entre la respuesta del filtro en el dominio del tiempo y la respuesta del filtro en el dominio de las frecuencias.

La respuesta $A(\omega)$ del filtro en el dominio de las frecuencias, que se indicó en la figura 1, es la componente real de $H(\omega)$ y corresponde a la relación entre la señal a la salida del filtro y la señal a la entrada del mismo, existiendo un defasamiento entre ambas señales, que en la expresión en números complejos está representada por la parte imaginaria.

La respuesta del filtro al impulso unitario, expresada en números reales es la siguiente:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos[\omega t - \phi(\omega)] d\omega \quad (6)$$

que no es otra cosa que la expresión de la fórmula (5) en números reales. Esta respuesta se indica esquemáticamente en la figura 3-C donde se ve que en la práctica tiene una duración finita después de que se aplicó el pulso unitario. A esta duración se le da el nombre de cola o memoria del filtro, la cual es de carácter netamente transitorio, pudiendo ser de un sólo signo o cambiar de signo, de acuerdo con el circuito del sistema al que se aplica.

La razón para tener los resultados de la figura 3-C es que el filtro suprime una gran parte de las componentes del espectro del pulso, y la combinación de las frecuencias que pasan, con el cambio de fases que sufre cada frecuencia, da por resultado una señal de la forma indicada en la figura 3-C, la cual puede determinarse experimentalmente o calcularse, mediante la aplicación de la ecuación (6), a partir de las características del filtro en el dominio de las frecuencias (figura 1).

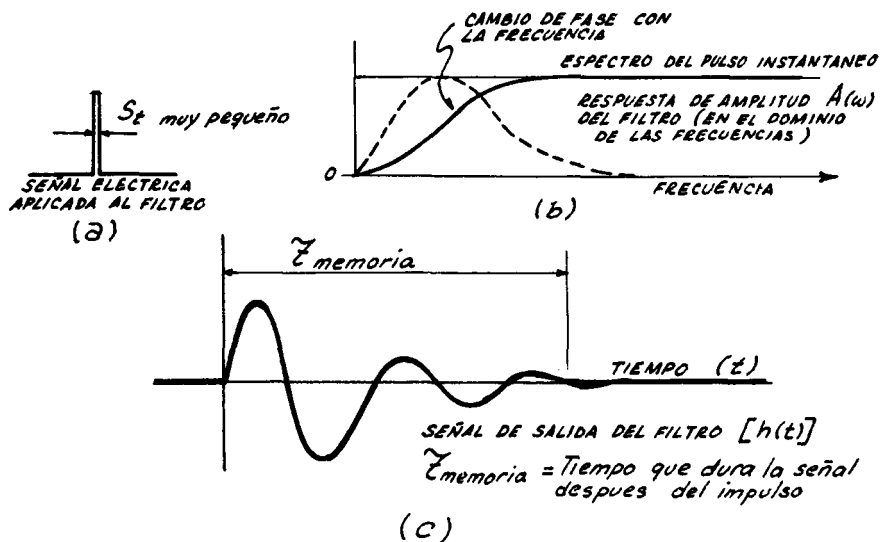


Figura 3.—Característica típica en el dominio del tiempo de un filtro semejante al de la figura 2.

Debe notarse que $h(t)$ es igual a cero para tiempos menores de cero y tiene valores finitos, definidos por la ecuación (6), a partir del tiempo en el que se aplica el pulso unitario al filtro.

Mediante la ecuación (6) es posible determinar la respuesta en el dominio del tiempo para un filtro en el que los cambios de fase se aproximen a las condiciones ideales (Bibliografía 1 y 11), (o sea un filtro en el cual el defasamiento varíe linealmente con la frecuencia) y en el que su corte sea tan pendiente como se requiera, lo cual no puede lograrse en los filtros formados por circuitos eléctricos.

Para los filtros empleados en sismología, la función $h(t)$ converge rápidamente, según se indica en la figura 3-C. Esta propiedad permite una aplicación fácil en el proceso digital o en el empleo de líneas de retraso, según se menciona adelante.

3 — EL TEOREMA DE LA SUPERPOSICION

Anteriormente se vio que si un a tiempo $t = 0$ se aplica un pulso de intensidad unitaria a la entrada de un filtro se tiene una señal de salida $h(t)$ que es función del tiempo transcurrido desde la aplicación del pulso. Si un tiempo T después de la aplicación del primer pulso se aplica otro semejante se tendrá otra señal de salida de la misma forma y amplitud, atrasada al tiempo T con relación a la primera, según se indica en la figura 4.

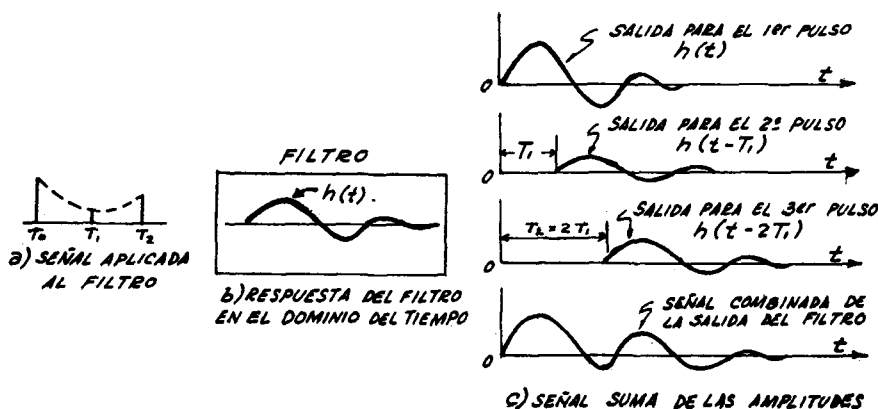


Figura 4.—Ilustración de las señales de salida de un filtro debidas a varios pulsos, con diferencia de tiempo t , y señal total de salida.

La segunda señal de salida puede expresarse como $h(t - T_1)$ siendo t el tiempo transcurrido desde que se aplica la primera señal al filtro y T_1 el tiempo al que se produce el segundo pulso.

La señal resultante a la salida del filtro, a un tiempo cualquiera t , es la suma de las amplitudes de las señales producidas por cada pulso en el tiempo considerado, según se ilustra en la figura 4 C.

Si se aplican al filtro señales con una intensidad $K_n \Delta t$ la señal total de salida para n pulsos será igual a una función del tiempo que puede expresarse por la siguiente fórmula:

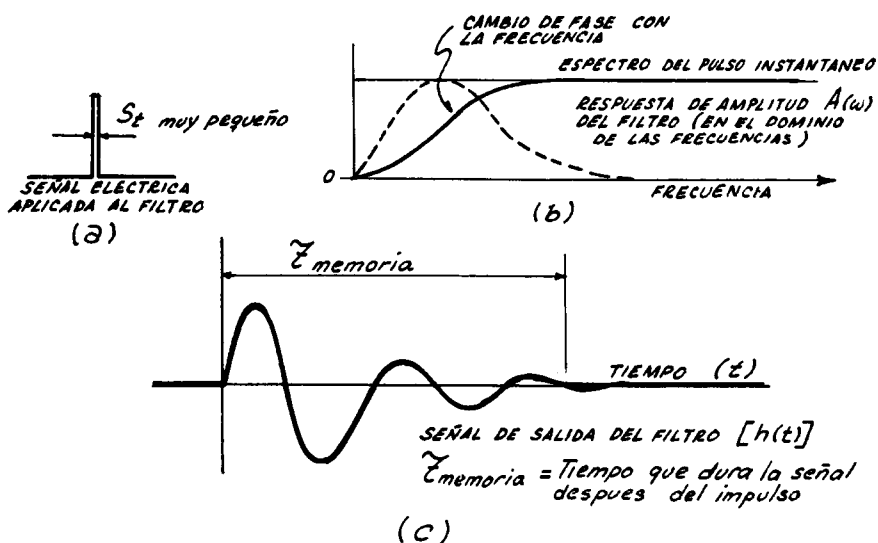


Figura 3.—Característica típica en el dominio del tiempo de un filtro semejante al de la figura 2.

Debe notarse que $h(t)$ es igual a cero para tiempos menores de cero y tiene valores finitos, definidos por la ecuación (6), a partir del tiempo en el que se aplica el pulso unitario al filtro.

Mediante la ecuación (6) es posible determinar la respuesta en el dominio del tiempo para un filtro en el que los cambios de fase se aproximen a las condiciones ideales (Bibliografía 1 y 11), (o sea un filtro en el cual el defasamiento varíe linealmente con la frecuencia) y en el que su corte sea tan pendiente como se requiera, lo cual no puede lograrse en los filtros formados por circuitos eléctricos.

Para los filtros empleados en sismología, la función $h(t)$ converge rápidamente, según se indica en la figura 3-C. Esta propiedad permite una aplicación fácil en el proceso digital o en el empleo de líneas de retraso, según se menciona adelante.

3 — EL TEOREMA DE LA SUPERPOSICION

Anteriormente se vio que si un a tiempo $t = 0$ se aplica un pulso de intensidad unitaria a la entrada de un filtro se tiene una señal de salida $h(t)$ que es función del tiempo transcurrido desde la aplicación del pulso. Si un tiempo T después de la aplicación del primer pulso se aplica otro semejante se tendrá otra señal de salida de la misma forma y amplitud, atrasada al tiempo T con relación a la primera, según se indica en la figura 4.

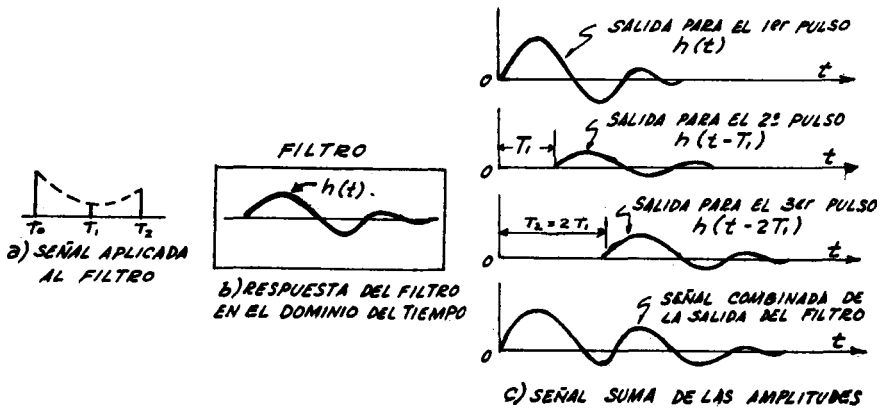


Figura 4.—Ilustración de las señales de salida de un filtro debidas a varios pulsos, con diferencia de tiempo t , y señal total de salida.

La segunda señal de salida puede expresarse como $h(t - T_1)$ siendo t el tiempo transcurrido desde que se aplica la primera señal al filtro y T_1 el tiempo al que se produce el segundo pulso.

La señal resultante a la salida del filtro, a un tiempo cualquiera t , es la suma de las amplitudes de las señales producidas por cada pulso en el tiempo considerado, según se ilustra en la figura 4 C.

Si se aplican al filtro señales con una intensidad $K_n \Delta t$ la señal total de salida para n pulsos será igual a una función del tiempo que puede expresarse por la siguiente fórmula:

$$y(t) = \sum_0^t K_n h(t - T) \Delta t \quad (7)$$

donde K_n es la altura del pulso, Δt su duración y T tiempo al que se aplica el pulso "n".

El muestreo debe hacerse con intervalos de tiempo Δt tales que $\frac{1}{2f}$ donde f es la frecuencia más alta que se desea reproducir. (Bibliografía 12).

Cuando se aplica un filtro a una señal de forma cualquiera como la de una señal sísmica— puede considerarse que está formada por una serie de impulsos consecutivos —de anchura dt — y con una intensidad proporcional a la amplitud de la señal, según se indica esquemáticamente en la figura 5.

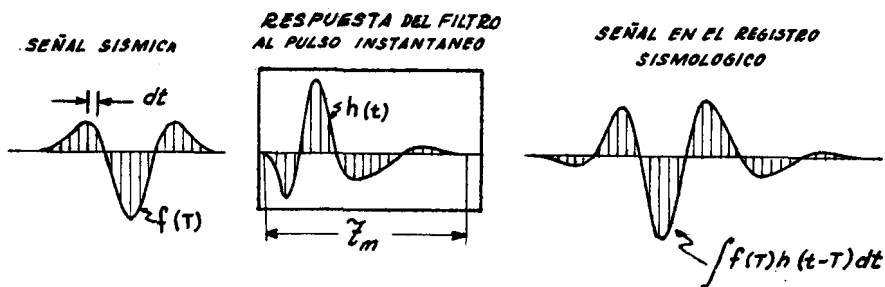


Figura 5.—Respuesta típica de un filtro empleado en sismología a un impulso sísmico.

Si se designa por t al tiempo transcurrido desde que la señal $f_e(t)$ entra al filtro, y por $(t-t_1)$ el tiempo transcurrido desde que un impulso de intensidad $f(t_1) dt$ llega al filtro, la señal debida a este impulso individual será $f_e(t_1) h(t-t_1) dt$ y el valor de la señal total de salida en el tiempo t será:

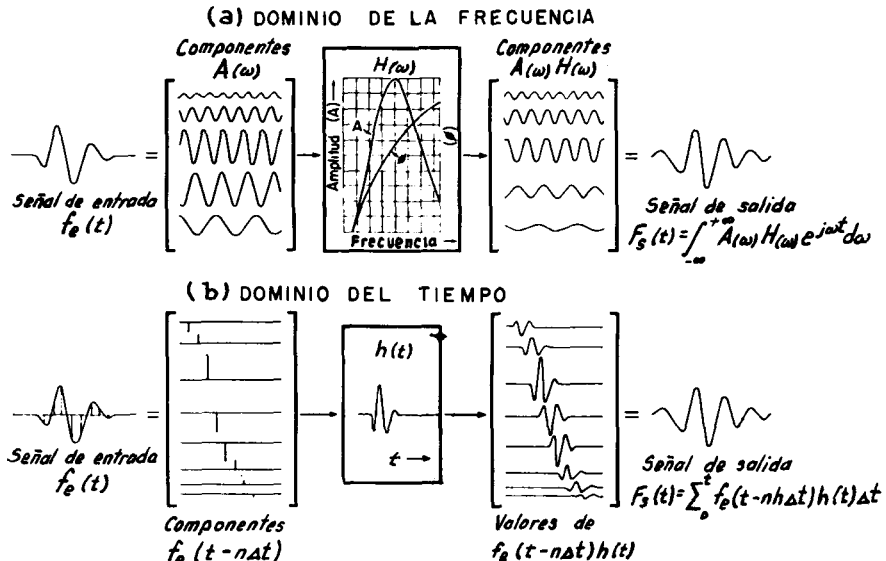
$$F_s(t) = \int_0^t f_e(t) h(t-t_1) dt \quad (8)$$

El desarrollo de la ecuación (8) puede hacerse en forma más rigurosa, según se ilustra en las citas bibliográficas del 2 al 5.

La integral de la ecuación (8) se conoce como el Teorema de la Superposición, y se presta al cálculo analítico cuando se conocen las expresiones $f_e(t)$ y de $h(t)$ —según se ilustra en el libro de W. T. Thompson— o bien puede calcularse en forma numérica cuando se conocen los valores experimentales o teóricos de $f_e(t)$ y de $h(t)$.

El filtro en el dominio de las frecuencias y el filtro en el dominio del tiempo producen los mismos resultados, aunque emplean procesos distintos. En el primero la señal de salida es equivalente a una suma de señales de diferentes frecuencias y amplitudes, según se indica en la figura 6-a.

En el filtro en el dominio del tiempo la señal de salida es la suma de señales a respuestas impulsivas de diferente intensidad, defasadas entre sí, según se indica en la figura 6-b.



En la teoría general del análisis armónico, existe otra expresión parecida, que es la función de correlación, la cual es de considerable importancia e interés. Es como sigue:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$$

donde τ es un desplazamiento continuo en la escala del tiempo, independiente de t .

La similitud de las formas que definen la función de correlación (bibliografía 5, ecuaciones 12 y 13) y de la integral de la superposición hacen necesario hacer notar ciertas propiedades de esta última:

- a) — La función $h(t)$ persiste después que cesó el impulso al sistema, lo cual implica una inercia o memoria del mismo, que no existe en la función $f_2(t)$ que entra en la definición de función de correlación.

Esta memoria tiene una duración determinada, que corresponde al tiempo $t_0 - t_1 = \tau_m$ a partir del cual la función $h(t)$ toma un valor permanente prácticamente igual a cero.

- b) — La Integral de la Superposición toma la siguiente expresión para el tiempo t_1 :

$$F_s(t_1) = \int_0^{t_1} f_1(t) h(t - t_1) dt \quad (9)$$

donde se ve que la respuesta del sistema depende de los valores que haya tomado $f_1(t)$ anteriores al tiempo t_1 y del tiempo de duración de la memoria del sistema, τ_m según se indica en las figuras 3 y 4.

- c) — En la integral de la Superposición $F_s(t)$ puede ser periódica, transitoria o de carácter incoherente (como los ruidos eléctricos o las señales sísmicas incoherentes).

Puede demostrarse fácilmente (bibliografía 4) que cuando la señal de entrada es periódica, la función $F_s(t)$ en la Integral de la Superposición es la suma de una señal transitoria más una señal periódica, aunque no necesariamente con la misma forma de la señal de entrada. (Esto se observa frecuentemente en los filtros empleados en equipos sísmicos, en donde se eliminan muchas de las frecuencias para poder distinguir con mayor claridad las señales reflejadas).

Cuando la señal de entrada es transitoria, la señal de salida es también transitoria, según se muestra en la figura 5.

Cuando la señal de entrada es de carácter incoherente, la señal de salida es también de carácter incoherente, pero modificada en forma con relación a la señal de entrada.

4 — OTRAS FORMAS DEL TEOREMA DE LA SUPERPOSICION

En lo tratado en la parte 3 de este trabajo se consideró que la respuesta de un sistema a una función $f_e(t)$ podía considerarse como la suma de la respuesta a una serie de señales $K_n \Delta t$ semejantes en forma al pulso unitario. Lo anterior hace pensar en la posibilidad de obtener el mismo resultado considerando a la señal formada por la suma de una serie de señales en forma de escalón, de la forma que se indica en la figura 7, donde la señal tiene un valor igual a cero para $t \leq 0$ y tiene un valor igual a 1 para $t \geq 0$. A esta función se le designa con el nombre de *función unitaria* y su empleo fue originado por Oliver Heaviside, que desarrolló el cálculo operacional.

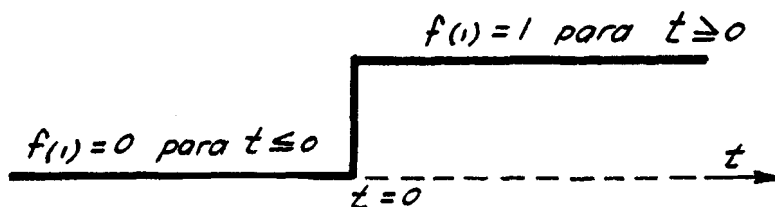


Figura 7.—Definición de la función unitaria.

Los sistemas eléctricos, tales como los filtros; los sistemas mecánicos, como un péndulo amortiguado, y los sistemas electromecánicos lineales, tales como los detectores, a los cuales se les aplica una señal unitaria, o proporcional a ella, tienen en general una respuesta transitoria, en forma semejante a lo que ocurre al aplicar el pulso unitario. A esta respuesta transitoria se le designa frecuentemente como $A_1(t)$.



Figura 8.—Esquema mostrando la respuesta de un sistema a la señal unitaria.

Una señal cualquiera $f_e(t)$ como la mostrada en la figura 9, puede considerarse como la suma de una serie de señales unitarias, positivas o negativas, según el caso, cada una de las cuales da origen a un transitorio de la forma 8-b, cuya amplitud depende de la magnitud de la variación del escalón correspondiente y cuya forma puede ser determinada en forma analítica o experimental.

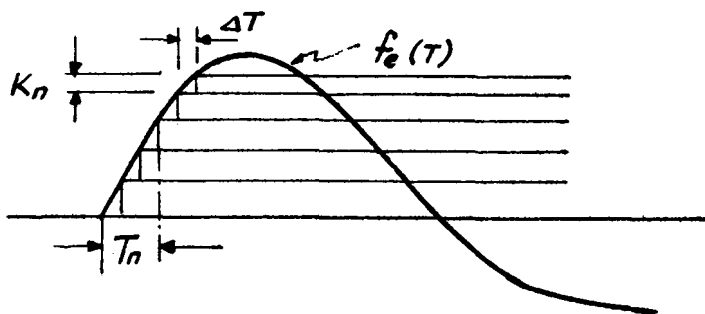


Figura 9.—Esquema mostrando la aproximación de la primera parte de una señal por medio de señales unitarias (escalones) proporcionales a la señal unitaria.

Aplicando el principio de la superposición a los diferentes escalones de la figura 9, puede ponerse:

$$f_s(t) = \sum_{n=0}^{n=N} K_n A_1(t - T) \quad (10)$$

en donde K_n es la altura del escalón correspondiente y T es la diferencia de tiempo entre el principio del escalón considerado y el tiempo en que se inició la señal.

Debe notarse que se ha designado por T_n el tiempo transcurrido desde que se inició la señal, y por t el tiempo transcurrido desde que se inició el transitorio para un escalón determinado. Esto se ha hecho para evitar confusiones, ya que ambas se refieren al valor del tiempo.

La figura 8-a muestra que $K_n = f_e(T)$ y además se tiene:

$$\Delta f_e(t) = K_n = \frac{\Delta f_e(t)}{\Delta t} \cdot \Delta t = f'_e(t) \Delta t \quad (11)$$

Tomando en cuenta lo anterior y suponiendo incrementos infinitesimales en la fórmula (8) se puede poner:

$$F_s(t) = \int_0^T f'_e(t) A_1(t - T) dt \quad (12)$$

que es otra forma del Teorema de la Superposición.

De la fórmula (12) se puede pasar a las (8) mediante integración por partes, según se indica adelante:

$$\begin{aligned}
 F_s(t) &= \int_0^t U \, dV = [UV]_0^t - \int_0^t V \, dU \\
 &= [f_e(t) A_1(t-T)]_0^t - \int_0^t f_e(t) A'_1(t-T) \, dt
 \end{aligned}$$

para la ecuación anterior se tiene:

Para $T = t$

Para $t = 0$

$$A_1(t-T) = A_1(t-t) = A_1(0) = 0$$

$$f_e(0) = 0$$

por lo cual se ve que el primer término de la ecuación anterior es cero, lo cual da por resultado:

$$F_s(t) = \int_0^t f'_e(t) A_1(t-T) \, dt = - \int_0^T f_e(T) A'_1(t-T) \, dT \quad (13)$$

por comparación con la fórmula (8) en donde se ve que $h(t) = -A'(t)$.

Existen otras formas del Teorema de la Superposición, cuya demostración no se da, pero que se mencionan adelante. (Bibliografía 3). Una de ellas, de gran importancia, es la siguiente:

$$F_s(t) = \int_0^T f_e(t-T) h(t) \, dT \quad (14)$$

La fórmula anterior muestra que la variable T puede intercambiarse con t sin que se afecte el resultado final. Lo anterior sólo implica un cambio en la posición relativa de las dos funciones al hacer las multiplicaciones y las su-

mas en el cálculo numérico de la integración, según se puede ver fácilmente en la Tabla 1 que sirvió para el cálculo de la figura 5 lo que es aplicable a las diferentes formas del teorema de la superposición.

Otras formas que se aplican en el caso en que pueda desarrollarse directamente la integración, son las siguientes:

$$f_e(t) = \int_0^t \frac{d}{dt} f_e(T) A_1(t - T) dT \quad (15-a)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_0^t f_e(T) A_1(t - T) dT \quad (15-b)$$

En muchos casos la señal de entrada a un filtro, o cualquier otro sistema, no se inicia desde cero y en ese caso las ecuaciones del teorema de la superposición toman la siguiente forma:

$$\text{Fórmula 6: } f_s(t) = f_e(0) h(t) + \int_0^t f_e(T) h(t - T) dt$$

$$\text{Fórmula 10: } f_s(t) = f_e(0) A_1(t) + \int_0^t f'_e(T) A_1(t - T) dt$$

$$\text{Fórmula 12: } f_s(t) = f_e(0) h(t) + \int_0^t f_e(t - T) h(t) dt$$

$$f_s(t) = f_e(0) A(t) - \int_0^t f_e(t) A'_1(t - T) dt$$

Todas las formas indicadas anteriormente se prestan a la integración numérica cuando las funciones son experimentales o analíticas. En el caso de funciones analíticas es frecuente poder hacer la integración directa.

*EL TEOREMA DE LA SUPERPOSICION EN EL DOMINIO
DE LAS FRECUENCIAS*

Aplicando la transformación de Fourier a las funciones que aparecen en ambos lados de la ecuación (6) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^t F_s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-j\omega t} dt \left[\int_0^t f_e(t) h(t-T) dt \right]$$

en donde el tiempo t debe ser suficientemente largo para una determinación efectiva del espectro.

Por definición la integral de la izquierda en la ecuación anterior es el espectro de frecuencias de $F_s(t)$ y por lo tanto se puede poner:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-j\omega t} dt \int_0^t f_e(t) h(t-T) dt$$

En la ecuación anterior podemos poner $\tau = (t - T)$ y por lo tanto se tendrá: $t = \tau + T$, quedando la ecuación anterior en la forma:

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-j\omega(\tau+T)} dt \int_0^t f_e(t) h(\tau) dt \\ &= \int_0^t e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^t f_e(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

La primera integral no es otra cosa que la respuesta del filtro en el dominio de las frecuencias, según se expresa en la ecuación (5) y la segunda integral es el espectro de frecuencia de la señal, por lo cual

$$F_s(\omega) = H(\omega) F_e(\omega) \quad (16)$$

La ecuación (16) expresa que el espectro de frecuencias de la señal de salida es igual al producto de la respuesta del filtro en el dominio de las frecuencias por el espectro de la señal de entrada.

5 — EL FILTRAJE EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

El proceso del filtrado en el dominio del tiempo, que se puede lograr mediante la aplicación del teorema de la superposición, según se indicó anteriormente, presenta propiedades que no pueden lograrse fácilmente con el empleo de filtros eléctricos. Estas ventajas son:

- a.—El empleo de filtros en el dominio del tiempo permite evitar el problema de la distorsión de fase que se presenta en los filtros eléctricos, ya que puede diseñarse una respuesta al impulso unitario en la cual se tenga un cambio de fase completamente lineal con la frecuencia, que es la respuesta de fase ideal de un filtro. (Bibliografía 1 y 11).

Este problema ha sido tratado con bastante detalle por S. Domenico (Bibliografía 9).

- b.—Los filtros pueden diseñarse de manera que tengan una aproximación más cercana a las condiciones ideales para la resolución del problema específico que se trata de resolver.

Esta propiedad puede ser de gran importancia en la eliminación de reflejos múltiples. Un ejemplo típico se presenta en la eliminación de las reverberaciones en los trabajos sismológicos marinos. (Bibliografía 7).

- c.—Las características del filtro en el dominio del tiempo pueden cambiarse en forma muy rápida, sin necesidad de hacer cambios en los circuitos eléctricos del sistema.

El proceso del filtrado en el dominio del tiempo puede hacerse mediante el empleo de líneas de retraso y potenciómetros, o mediante el empleo de equipos digitales.

FILTRADO EN EQUIPOS ANALOGICOS

El empleo de las líneas de retraso en el filtrado en el dominio del tiempo ha sido tratado con un detalle adecuado por H. Jones et al. (Bibliografía 8).

Una línea de retraso es un sistema capaz de guardar una señal sin atenuación apreciable y sin distorsión durante un tiempo determinado.

Una de las primeras formas de línea de retraso empleadas en sismología para filtrar en el dominio del tiempo fue mediante el empleo de un tambor magnético que gira con una velocidad uniforme.

Para efectuar esta operación se graba en el tambor una señal que permanece en él durante el tiempo de recorrido entre una cabeza grabadora y una cabeza borradora, lo cual toma un tiempo del orden de 100 a 200 milésimos de segundo.

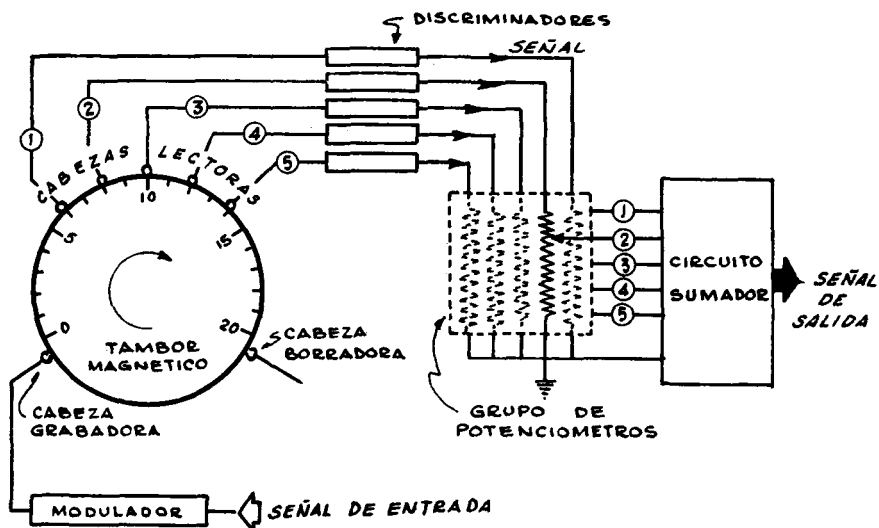


Figura 10.—Esquema de superposición con equipo magnético.

Las señales grabadas en la cinta se leen en un número adecuado de cabezas lectoras, separadas entre sí por una distancia equivalente a una diferencia de tiempo Δt , que puede variarse de acuerdo con la respuesta del filtro que se desea aplicar.

Las señales de las cabezas se reducen por medio de potenciómetros a valores proporcionales a la respuesta del filtro a un pulso instantáneo, es decir, en las proporciones:

$$a_1 = h(\Delta t); \quad a_2 = h(2\Delta t); \quad \dots \quad a_n = h(n\Delta t)$$

siendo Δt el tiempo equivalente a la separación entre las cabezas.

Las señales anteriores se pasan a un circuito sumador, en el cual la señal de salida es:

$$F_s(t) = a_0 h(0) + a_1 f_e(t) + a_2 f_e(t - 2\Delta t) + \dots + a_n f_e(t - n\Delta t)$$

$$= \sum_{m=0}^{m=n} a_m f_e(t - m\Delta t)$$

$$= \sum_{m=0}^{m=n} f_e(t - m\Delta t) h(t) \dots \dots \dots \quad (17)$$

Lo anterior es una aproximación a la integral de la superposición, según se expresó ésta en la fórmula (14).

El sistema de tambor magnético no sigue empleándose en la aplicación particular del filtraje en el dominio del tiempo, pero se emplea —en forma modificada— para la aplicación de correcciones estáticas y dinámicas.

En la actualidad, para filtrar en el dominio del tiempo con equipos analógicos, se emplean líneas de retraso electrónicas, que tienen el mismo

efecto y son de un costo mucho más reducido. Con estas líneas de retraso se pueden obtener salidas simultáneas de la misma señal con retrasos del orden de 0 a 300 milésimos de segundo.

FILTRADO EN CALCULADORAS DIGITALES

La aproximación numérica al Teorema de la Superposición puede hacerse fácilmente utilizando la ecuación (7), y se puede aplicar fácilmente al filtrado de cualquier señal si se conoce la respuesta del filtro a un impulso instantáneo.

En la Tabla No. 1 se ilustra el ejemplo del cálculo del filtrado de una señal cuando el filtro tiene la respuesta, al pulso instantáneo, indicada en la figura 5. (La tabla se encuentra al final del artículo).

En el ejemplo citado se puede ver que el sistema de cálculo no presenta ningún problema especial, pero se requiere una cantidad muy grande de operaciones, que hacen impráctica su aplicación por los métodos normales de cálculo. Sin embargo, en las calculadoras electrónicas el problema no presenta dificultades especiales puesto que el conjunto de multiplicaciones y sumas requeridas para efectuar el proceso de filtrado de una traza, puede hacerse en tiempos que varían de uno a cinco minutos, para registros de 3 segundos de duración, dependiendo de la velocidad y memoria del equipo utilizado y del número de muestras con que se represente la respuesta del filtro al impulso unitario.

Lo anterior muestra que el proceso de filtrado en el dominio del tiempo con calculadoras digitales requiere tiempos grandes de operación, por lo cual generalmente se aplica solamente cuando es necesario mejorar considerablemente la calidad del registro, como sucede con frecuencia en el caso de trabajos sismológicos marinos, en los cuales se tiene una reverberación muy intensa con condiciones complicadas cerca del fondo del mar, o en trabajos especiales, como los que se presentan en regiones en las cuales hay reflejos

múltiples de gran intensidad debidos a capas próximas entre sí, a gran profundidad en la columna geológica atravesada por la señal sísmica.

El tiempo de operación no es problema en otras aplicaciones de las calculadoras digitales a los trabajos sismológicos, por ejemplo, en la aplicación de correcciones estáticas y dinámicas, suma de señales para obtener registros finales en trabajos de punto de registro común (CDP), etc.

Por lo anterior se han desarrollado dos técnicas de trabajo: Una de ellas consiste en hacer los registros de campo en cinta magnética, con la más alta fidelidad posible, para hacer la transcripción a cinta digital en una oficina central.

La otra técnica de trabajo consiste en hacer la conversión directamente en el campo, empleando amplificadores de muy buena calidad, y con un rango dinámico muy grande, que permiten registrar con una distorsión muy baja las señales sísmicas.

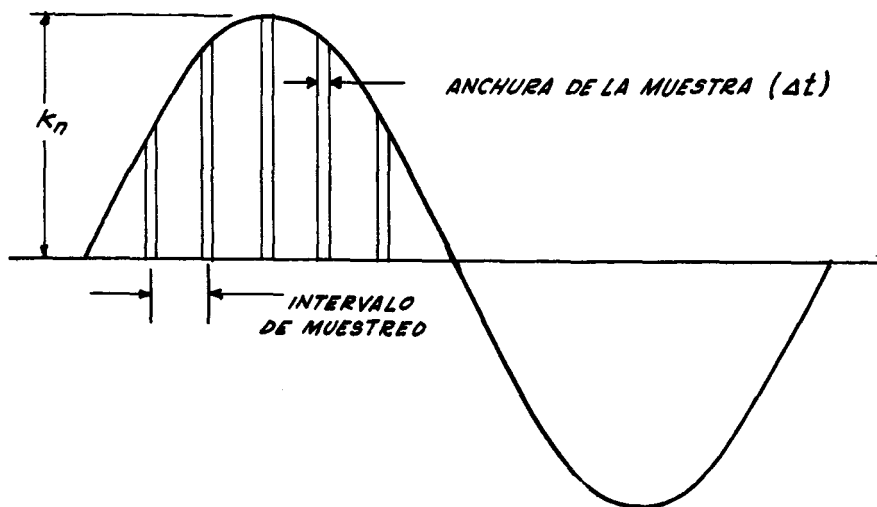


Figura 11.—Esquema indicando el sistema de muestreo empleado en los trabajos sismológicos.

En las prácticas actuales se emplean con frecuencia las siguientes constantes de muestreo:

Intervalo de muestreo: 1, 2 ó 4 milésimos de segundo.

Anchura de la muestra: Aprox. (1/30,000) seg.

El intervalo de muestreo está limitado por la velocidad máxima a la que se puede operar con cintas magnéticas digitales, (la cual es del orden de 100 pugas por segundo) y por la necesidad de no emplear demasiado tiempo en el proceso en la calculadora electrónica.

El número de valores empleados para representar $h(t)$ varía generalmente de 10 a 25 cuando se desea tener el efecto equivalente al del filtrado eléctrico y puede aumentar considerablemente cuando se trata de eliminar efectos de reverberación.

COMENTARIOS SOBRE EL EMPLEO DE CALCULADORAS DIGITALES

El empleo de calculadoras digitales permite realizar las operaciones que se ejecutan con los equipos analógicos, con la ventaja de evitar las distorsiones que se originan con el empleo de los amplificadores y filtros usuales.

La velocidad de operación cuando se emplean calculadoras digitales de alta velocidad, puede ser comparable con la velocidad de proceso en los equipos analógicos.

Para poder comprender la teoría de las técnicas empleadas en las calculadoras digitales es necesario el conocimiento de funciones matemáticas que generalmente son poco usadas por los geofísicos, según se indicó en el caso particular del filtrado en el dominio del tiempo, en donde se aplica el teorema de la superposición.

Es necesario hacer notar que además del caso específico tratado en este trabajo, las calculadoras digitales pueden hacer cualquier proceso que se des-

arrolle en máquinas analógicas, y en la actualidad es posible hacer las siguientes operaciones:

- 1 — Aplicaciones de correcciones estáticas y dinámicas.
- 2 — Filtrado en el dominio del tiempo.
- 3 — Recuperación de las amplitudes verdaderas de las señales cuando se ha registrado la variación del nivel de ganancia a lo largo del registro.
- 4 — Funciones de correlación y de auto correlación.
- 5 — Espectros de frecuencias.
- 6 — Eliminación de reverberaciones para una o varias capas.
- 7 — Filtrado en abanico (Pie Slice).
- 8 — Suma de registros para obtener secciones por el método de punto de registro común.
- 9 — Deconvolución de las señales para la eliminación de reflejos múltiples en capas interseccionales relativamente cercanas entre sí.
- 10 — Aplicación del filtrado digital óptimo para diferentes secciones del registro.
- 11 — Deconvolución por el efecto de la atenuación de las señales de diferentes frecuencias en el subsuelo a fin de obtener registros equivalentes a los que se tendrían al registrar a la profundidad de los horizontes reflejantes.
- 12 — Preparación de sismogramas sintéticos a partir de registros sínicos.

Algunas de estas operaciones se pueden hacer con relativa facilidad en equipos analógicos de proceso y otras son muy difíciles de ejecutar o requieren equipos especiales.

Muchos problemas de sismología aplicada requieren programas muy largos, que tardan mucho tiempo en elaborarse. Esto ha retardado el empleo de las calculadoras digitales en el proceso sismológico. Sin embargo, al irse disponiendo de programas básicos el empleo de las calculadoras electrónicas puede llegar a eliminar a los equipos de proceso analógico, puesto que con un sólo equipo puede resolverse prácticamente cualquier problema, lo cual es una ventaja indiscutible, especialmente porque se ha demostrado que el costo del trabajo puede ser igual o menor para las calculadoras digitales que para las máquinas analógicas.

Por lo anterior, el autor considera que las calculadoras digitales ocuparán en poco tiempo un lugar preferente dentro de los centros de proceso de registros sismológicos.

B I B L I O G R A F I A

- 1 — *García Rojas A. y Daniel Gutiérrez Gutiérrez.*—"La Transformada de Fourier y su Aplicación en el Estudio de Equipos Sismológicos", Boletín de la AMGE, Vol. V, No. 4, 1964.
- 2 — *Franklin, Phillip.*—"An Introduction to Fourier Methods and Laplace Transformation", Dover Publications, Inc.—New York.
- 3 — *Bush, V.*—"Operational Circuit Analysis", John Wiley and Sons.—New York.

T A B L A N O . 1

[illegible][illegible]

- 4 — *Thompson, W. T.*—"Laplace Transformation", Prentice Hall, Inc.—New Jersey.
- 5 — *Lee, Y. W.*—"Statistical Theory of Communication", John Wiley and Sons.—New York.
- 6 — *Smith, Mark.*—"A Review of Methods of Filtering Seismic Data" — *Geophysics*. Vol. XXIII, No. 1.—Enero, 1958.
- 7 — *Gutiérrez Gutiérrez Daniel.*—"Características Teóricas de Algunos Tipos de Ruido y Métodos para su Reconocimiento y Eliminación".—Boletín de la AMGE.—Vol. V, No. 1.—1964.
- 8 — *Jones, Hal et al.*—"Magnetic Delay Line Filtering Techniques", *Geophysics*, Vol. XX, No. 4.
- 9 — *Domenico, S. A.*—"Phase Distortionless Filtering", *Geophysics*, Vol. XXX, No. 1.—Febrero, 1965.
- 10 — *Robinson, E. A. y S. Treitel.*—"Principles of Digital Filtering", *Geophysics*, Vol. XXIX, No. 3.—Junio, 1964.
- 11 — *Goldman, S.*—"Frequency Analysis Modulation and Noise", McGraw Hill Book Co.—New York.
- 12 — *Goldman, S.*—"Information Theory", Prentice Hall, New York, 1955.

LA SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICIST (SEG)

Celebrará su XXXV convención anual internacional, en el hotel Statler Hilton de Dallas, Tex., U. S. A., durante los días 14-18 del mes de noviembre próximo.

El tema de esta Convención será: "La Geofísica, Desafío y Desarrollo".

Orador destacado será el Dr. Lloyd V. Berckner, Presidente de la Comisión Ejecutiva. Graduado del Centro de Investigaciones del Suroeste.

J. Frank Rollins, Geofísico Consultor de Dallas, Tex., quien es Presidente General de la Convención, nombró 13 comités que lo ayudarán en la preparación de este evento, encabezados por las siguientes personas:

W. A. Buckley, de la Indel Supply Inc; Vicepresidente General encargado de Finanzas.

Howard L. Cobb, de The Atlantic Refining Co.; Presidente del Comité del Programa Técnico.

Mrs. James H. Kidder, Presidenta del Comité del Programa de Señoras.

John W. Wilson, de Texas Instruments Inc.; Presidente del Comité de Publicidad.

R. H. Rainey, de Geophysical Service Inc.; Presidente del Comité de Diversiones.

J. L. Hollis, de British-American Oil Producing Co.; Presidente del Comité de Alojamientos.

James H. Fresher, de National Geophysical Co. Inc.; Comité de Eventos Especiales.

Dr. Milo M. Backus, de Texas Instruments Incorporated; Presidente del Comité del Programa de Investigaciones.

H. L. Voelker de Humble Oil and Refining Co.; Presidente del Comité de Exhibidores.

John A. Waller, de Sun Oil Co.; Presidente del Comité de Arreglos.

Henry F. Dunlap, de Atlantic Refining Co.; Primer Vice-presidente de la SEG y W. B. Harey Jr., de Geotechnical Corp; Comité de Publicaciones.

E. J. Jasinski, de Atlantic Refining Co.; Comité de Inscripciones.

M. S. Reford, de Canadian Aero Service, Ottawa, Ontario; Presidente de la Sección de Minas.

Para cualquier informe relacionado con esta Convención, favor de dirigirse a:

Society of Exploration Geophysicist, 35th Annual International Meeting

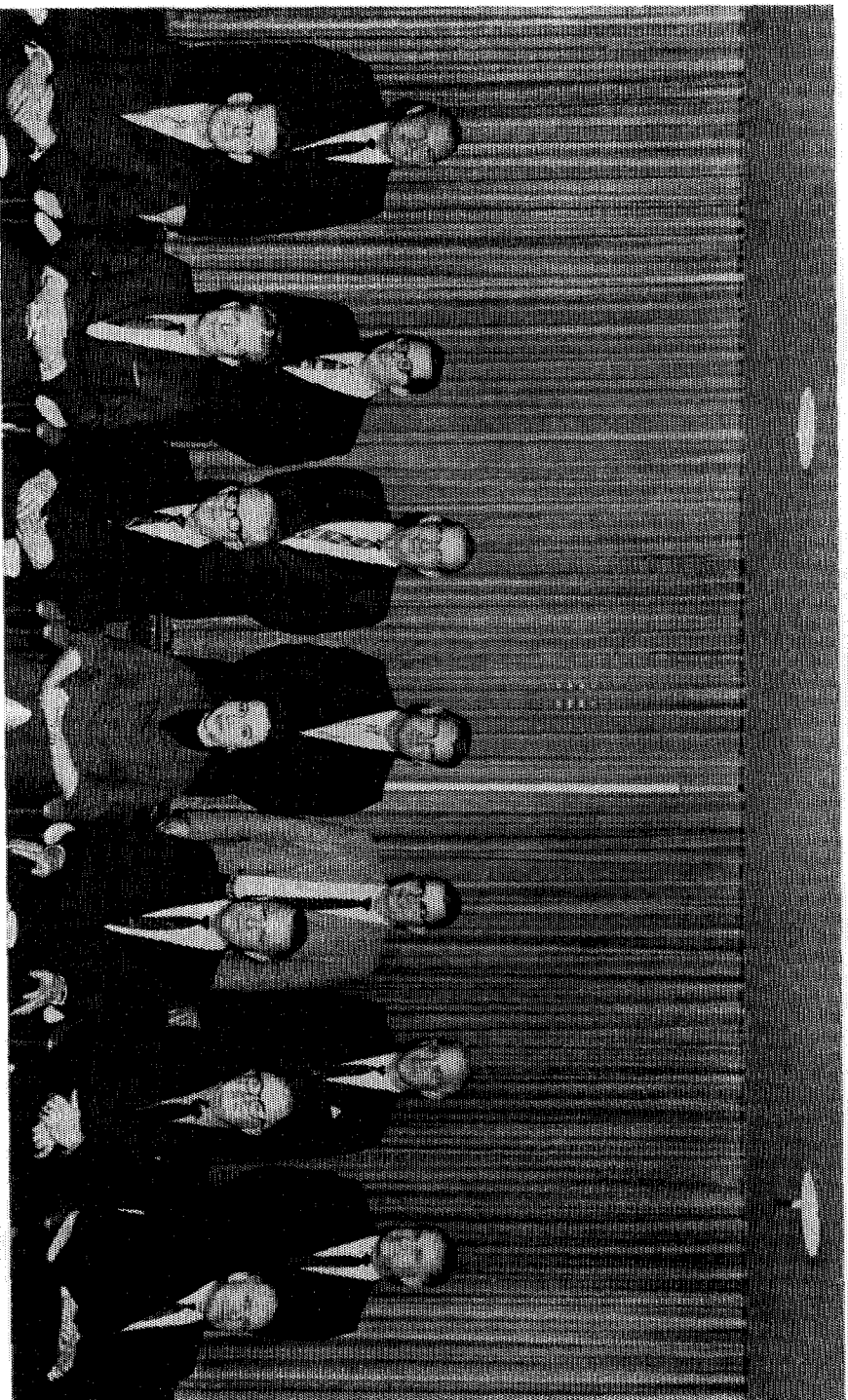
John W. Wilson, Publicity Chairman

Texas Instruments Incorporated

Dallas, Texas 75222

P. O. Box 5621 (6000 Lemmon).

Telephone 214-357-5411.



COMITE DE LA SOCIETY OF EXPLORATION GEOPHYSICIST PARA SU XXXV CONVENCION ANUAL INTERNACIONAL, DALLAS,
TEXAS, NOVIEMBRE 14-18, 1965

(Sentados, de izquierda a derecha) John W. Wilson, R. H. Rainey, J. L. Hollis, Mrs. James H. Kiddler, J. Frank Hollis, W. A. Buckley,
Howard L. Cobb. (Parados, de izquierda a derecha) James H. Frasher, Dr. Milo M. Backus, H. L. Voelker, John A. Walher, Henry F. Dan-
lap, W. B. Heroy, Jr., E. J. Jasinski. (No aparece) M. S. Reford.

Carlos Alemán A.

EXPLORACION

y

PERFORACION

Iturbide No. 36 Desp. 201. Tel. 10-15-64

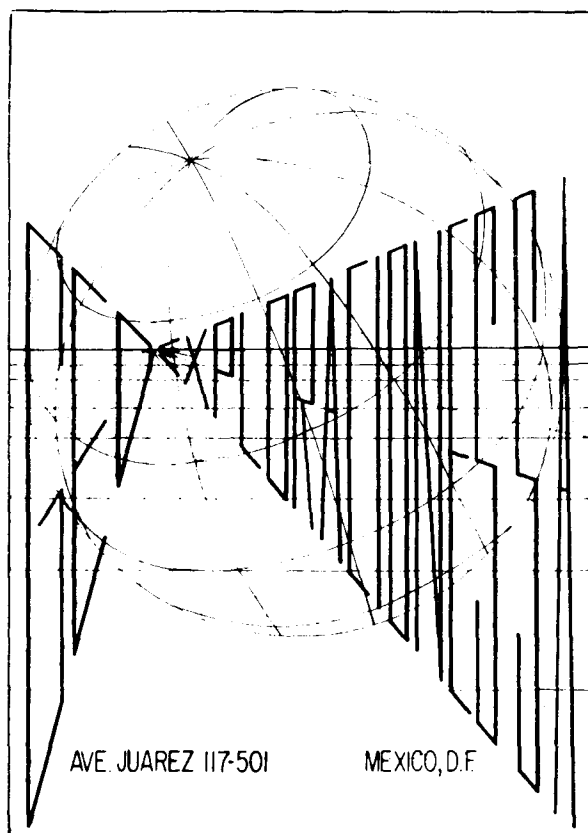
MEXICO 1, D. F.

S E R V I C I O S

GEOFISICOS

GEOLOGICOS

FOTOGEOLOGICOS



TEL. 46 - 11 - 81

GEOHIDROLOGICOS

RADIOACTIVOS

TOPOGRAFICOS

PERFORACIONES, S. A.

**CONTRATISTA DE PERFORACION
EXPLORATORIA DESDE 1950 PARA**

PETROLEOS MEXICANOS

SECRETARIA DE MARINA

CONSTRUCTORA MALTA, S. A.

NATIONAL SOIL SERVICES, CO.

**CIA. FUNDIDORA DE FIERRO Y
ACERO DE MONTERREY, S. A.**

Y PARTICULARES

AVENIDA JUAREZ No. 119 - 5o. PISO

Teléfonos: 21-37-25 y 21-36-42

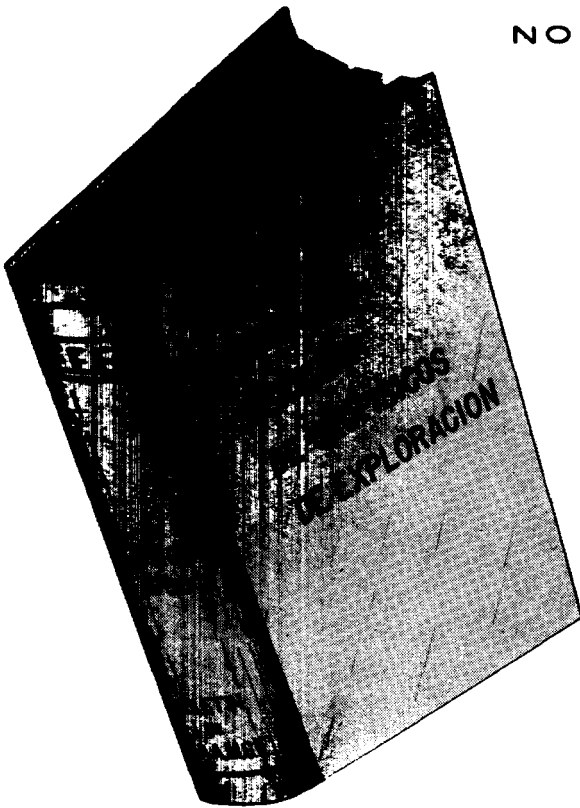
MEXICO 1, D. F.

SOCIOS

\$100.00

NO SOCIOS

\$150.00



ADQUIERA UD. LOS VOLUMENES NUMEROS I - II -
III - IV Y V CORRESPONDIENTES A LOS AÑOS DE 1960
1961 - 1962 - 1963 Y 1964 EMPASTADOS EN KERATOL
CON SUS INICIALES GRABADAS EN ORO.

PEDIDOS A LA
ASOC. MEX. DE GEOF. DE EXPL.

EXPLORACIONES,

===== S. A. =====



Iturbide No. 36 Desp. 201

Tel. 10-15-64

MEXICO, D. F.

