

# BOLETIN

de la

## Asociación Mexicana de Geofísicos de Exploración

---

### S U M A R I O

Fórmula Aproximada de la Función  $\pi$  de Gauss válida tanto para números elevados como pequeños, por el Prof. *Dr. Hans Ertel*.

Nueva Fórmula Aproximada para la Función  $\pi$  de Gauss y Aplicación Especialmente al Cálculo de Probabilidades, por el Prof. *Dr. Hans Ertel*.

Influjo de la Luna y del Sol sobre la Pesantez, por el *Dr. Honorato de Castro B.*

Nomograma para el Cálculo de la Influencia del Sol y de la Luna en Trabajos Gravimétricos para la República Mexicana, por el *Ing. V. A. Olhovich*.

Notas Sobre Dos Nuevos Métodos de Exploración Sísmica, por el *Ing. Santos Figueroa*.

“Foro Abierto”.

Teoría del Nivel, por el *Dr. Honorato de Castro B.*

Contribuyentes.

Nuevos Socios.

## MESA DIRECTIVA PARA EL PERIODO 1961-1962

Presidente: Santos Figueroa Huerta.

Vice-Presidente: Guillermo Hernández Moedano.

Secretario: Alfonso Cornejo Toledo.

Tesorero: Thomas Ortiz.

Vocal de Petróleo: Jesús Basurto García.

Vocal de Minas: Guillermo P. Salas.

Vocal de Ingeniería Civil: Juventino Islas Leal.

Editor: Vladimir A. Olhovich.

Coeditor: Armando Eguía Huerta.

Coeditor: Antonio Cordero Limón.

Presidente Directiva anterior: Antonio García Rojas.

*ESTE BOLETIN SE PUBLICA CADA TRES MESES*

Dirección: Av. Juárez No. 97 - Despacho 302.

Tels.: 18-41-41 y 12-89-70.

# FORMULA APROXIMADA DE LA FUNCION PI DE GAUSS VALIDA TANTO PARA NUMEROS ELEVADOS COMO PEQUEÑOS

Por el *Prof. Dr. Hans Ertel* \*

## Resumen

La función pi de GAUSS [ $H(n)$ ], que se reduce a los factoriales [ $n!$ ] cuando el argumento [ $n$ ] es un número entero y positivo, ocupa una posición destacada en las aplicaciones de la Estadística a las Ciencias Naturales. Por desgracia, los factoriales son funciones que se prestan a la transformación únicamente cuando  $n$  es un número elevado (por ejemplo mediante de la fórmula de STIRLING). Por otra parte, la fórmula de STIRLING no puede aplicarse a números pequeños.

A continuación damos la deducción de una fórmula aproximada más exacta de la función pi de GAUSS, válida también para números pequeños (error máximo  $= 7 \cdot 10^{-3}$  en el caso límite  $n = 0$ ).

## 1. Introducción

La función pi de GAUSS

$$H(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx \quad (1)$$

( $n \geq 0$ , no necesariamente entero) que se reduce a los factoriales cuando  $n$  es un número entero:

$$H(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n! \quad (2)$$

tiene especial importancia en innumerables aplicaciones a las Ciencias Naturales. En estos casos aparecen con frecuencia factoriales de números cuyo valor es fatigoso de calcular cuando el último factor es muy grande. Además, los factoriales son funciones que se prestan poco a la transformación, y por

---

\* Vicepresidente de la Academia de las Ciencias de Berlín y Catedrático de la Humboldt-Universidad (Berlín), Berlín W 8, Jaeger-Strasse 22/23.

esto se desea en muchas ocasiones sustituirlos por otras expresiones que, aunque aproximadas, sean susceptibles de manejarse con mayor facilidad.

Esto consigue con la fórmula de STIRLING, que puede expresarse así

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{o} \quad n! \sim \sqrt{2\pi e} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n + \frac{1}{2}} \quad (3)$$

respectivamente, en donde  $e$  representa la base del sistema de logaritmos naturales, indicando con el símbolo  $\sim$  que el cociente de los dos miembros tiende al límite 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ , y, por tanto, que, según la expresión habitual, son, "asintóticamente iguales".

De la exactitud de la fórmula (3) es fácil convencerse como sigue:

Haciendo

$$n = \quad 10 \qquad 20 \qquad 30$$

será el error relativo

$$\rho = -8^0/00 \qquad -4^0/00 \qquad -2,8^0/00$$

y en general

$$\rho = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} - 1 = -\frac{1}{12n} + \text{términos de orden } n^{-2}, \quad (4)$$

con lo cual puede formarse juicio de la exactitud de la fórmula aproximada de STIRLING (véase, p. ej: WHITTAKER and ROBINSON [7], MARGENAU y MURPHY [3], WHITTAKER and WATSON [8], CZUBER [1], SCHEMETTER [5], VAN DER WAERDEN [6]).

Se tendrá en cuenta el error aproximado  $\rho = -\frac{1}{12n}$ , es posible obtener una fórmula más rigurosa, la llamada aproximación de la serie de STIRLING:

$$n! = \sqrt{2\pi e} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n + \frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{12n}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \cdot \left(n + \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n - \frac{1}{2}}, \quad (5)$$

relación de utilidad en el cómputo de  $n!$  para valores grandes de  $n$ .

Para el cálculo corriente se emplean los logaritmos decimales ( $\log 10 = 1$ ). Según la segunda fórmula de (5), se tendrá

$$\log n! = 0,1819447 \dots + \log \left( n + \frac{1}{12} \right) + \left( n - \frac{1}{2} \right) \cdot (\log n - 0,4342945 \dots), \quad (6)$$

en donde

$$\log \sqrt{\frac{2\pi}{e}} = 0,1819447 \dots \quad \text{y} \quad \log e = 0,4342945 \dots$$

Como se ve, los cálculos que hay que efectuar son siempre muy sencillos. Este mérito será, por consiguiente, lo que preside toda la exposición que sigue.

## 2. Planteamiento del problema

Ahora bien, unos de los casos del cálculo de probabilidades y sus aplicaciones no son tan sencillos para que la forma (5) de la serie STIRLING nos dé una aproximación satisfactoria. Este resultado se explica especialmente porque la fórmula de STIRLING no puede aplicarse, por ejemplo, a números pequeños. Por lo tanto, el problema consiste en la determinación de una fórmula aproximada para  $H(n)$  válida también si  $n$  es pequeño y que quedará escrita además en una forma parecida a la expresión (5).

## 3. Solución

Consideremos la integral definida.

$$J_\mu = \int_0^{2\mu} e^{-x^3} x^{3n+2} dx \quad (n \geq 0), \quad (7)$$

en donde el límite superior  $2\mu$  es arbitrario ( $0 < \mu \leq \infty$ ). Cuando  $\mu$  tiende hacia  $\infty$ , tendremos

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} J_\mu = \frac{1}{3} H(n). \quad (8)$$

Si en la integral (7) ponemos  $x = \mu + \xi$ , y cambiamos los límites, se transforma en

$$J_{\mu} = e^{-\mu^3} \mu^{3n+2} \int_{-\mu}^{+\mu} e^{-(3\mu^2\xi + 3\mu\xi^2 + \xi^3)} \left(1 + \frac{\xi}{\mu}\right)^{3n+2} d\xi. \quad (9)$$

En el entorno de  $\xi = 0$  se tiene el desarrollo en serie de MACLAURIN

$$\log \text{ nat} \left(1 + \frac{\xi}{\mu}\right)^{3n+2} = (3n+2) \left\{ \frac{\xi}{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{\mu^2} + \frac{1}{3} \frac{\xi^3}{\mu^3} - \frac{1}{4} \frac{\xi^4}{\mu^4} + \dots \right\}.$$

La serie será convergente si  $-\mu < \xi \leq +\xi$ .

Imponiendo ahora a  $\mu$  la condición de ser

$$3\mu^3 = 3n + 2. \quad (10)$$

con lo cual será:

$$\log \text{ nat} \left(1 + \frac{\xi}{\mu}\right)^{3n+2} = 3\mu^2\xi - \frac{3}{2}\mu\xi^2 + \xi^3 - \frac{3}{4}\xi^4,$$

si desarrollando la serie nada más que hasta el cuarto término. Además se tiene

$$\log \text{ nat} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\xi^4}{\mu}\right) = -\frac{3}{4} \frac{\xi^4}{\mu}$$

con la misma exactitud, y, por consecuencia,

$$\left(1 + \frac{\xi}{\mu}\right)^{3n+2} = e^{3\mu^2\xi - \frac{3}{2}\mu\xi^2 + \xi^3} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\xi^4}{\mu}\right). \quad (11)$$

Introduzcamos esta expresión en (9); resulta

$$J_{\mu} = e^{-\mu^3} \mu^{3n+2} \int_{-\mu}^{+\mu} e^{-\frac{9}{2}\mu\xi^2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\xi^4}{\mu}\right) d\xi. \quad (12)$$

Ahora bien, sabemos que es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{9}{2}\mu\xi^2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\xi^4}{\mu}\right) d\xi = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \left(1 - \frac{1}{36\mu^3}\right), \quad (13)$$

y con ayuda de este valor vamos a calcular los límites de los dos cocientes

$$\frac{J_{\mu}}{e^{-\mu^3} \mu^{3n+2} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}} \left(1 - \frac{1}{36\mu^3}\right)} = \frac{\int_{-\mu}^{+\mu} e^{-\frac{9}{2}\mu\xi^2} \left(1 - \frac{3}{4}\frac{\xi^4}{\mu}\right) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{9}{2}\mu\xi^2} \left(1 - \frac{3}{4}\frac{\xi^4}{\mu}\right) d\xi},$$

cuando  $\mu$  tiende hacia  $\infty$  (es decir:  $n \rightarrow \infty$ ).

Teniendo en cuenta las ecuaciones (8) y (10) se tendrá:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{II(n)}{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{n + \frac{2}{3}}{e}\right)^{n + \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{36\left(n + \frac{2}{3}\right)}\right)} \right\} = 1, \quad (14)$$

es decir, numerador y denominador del quebrado son asintóticamente iguales:

$$II(n) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{n + \frac{2}{3}}{e}\right)^{n + \frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{36\left(n + \frac{2}{3}\right)}\right). \quad (15)$$

Esta ecuación es la fórmula aproximada que buscábamos. Se caracteriza por su sencillez y es de la forma (5) de la aproximación de STIRLING, pero conserva su validez en el caso de números pequeños.

Para emplear el cálculo logarítmico se tiene:

$$\begin{aligned} \log II(n) = & \log \left( \frac{1}{36e} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{1}{e^3}}} \right) + \log (36n + 23) \\ & + \left( n - \frac{1}{2} \right) \{ \log (36n + 24) - \log (36e) \}, \end{aligned} \quad (16)$$

en donde

$$\log \left( \frac{1}{36e} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{1}{e^3}}} \right) = 0,33361105 \dots - 2,$$

y

$$\log (36 e) = 1.9905970 \dots$$

#### 4. Exactitud de la aproximación

Aplicando esta aproximación (15) se hallan los números indicados en la siguiente lista:

$n$	$H(n)$ Verdadero valor	$H(n)$ Cálculo aproximado	Error relativo
0	1	1,0070	$+ 7,0 \cdot 10^{-3}$
1	1	1,0017	$+ 1,7 \cdot 10^{-3}$
2	2	2,0015	$+ 7,5 \cdot 10^{-4}$
4	24	24,006	$+ 2,5 \cdot 10^{-4}$
6	720	720,09	$+ 1,3 \cdot 10^{-4}$
8	40 320	40 323	$+ 7,5 \cdot 10^{-5}$
10	3 628 800	3 628 980	$+ 4,9 \cdot 10^{-5}$
			6*

Se reconoce sin esfuerzo que la fórmula aproximada (15) es mucho más exacta en el intervalo de números pequeños que otras fórmulas usadas frecuentemente. Por ejemplo la transformación práctica de la fórmula (5) de STIRLING

$$H(n) = \sqrt{2\pi \left(n + \frac{1}{6}\right)} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

tiene para

$$n = \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 2 \quad \quad 10$$

los errores relativos

$$-23 \cdot 10^{-3} \quad + 4,0 \cdot 10^{-3} \quad + 14 \cdot 10^{-4} \quad + 6,6 \cdot 10^{-5}$$

(véase, p. ej.: RICHTER [4]).



Para terminar, permítasenos agregar todavía el cálculo de  $H(3,42)$ . Aplicando fórmula (15) tenemos:  $H(3,42) = 10,420$ . El verdadero valor es 10,417 (véase, p. ej.: JAHNKE and EMDE [2]), y el error relativo es, por tanto,  $\pm 3 \cdot 10^{-4}$ .

## B I B L I O G R A F I A

- [1] CZUBER, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bd. 1, 6. Aufl. Leipzig/Berlín 1941, 24—27.
- [2] JAHNKE, E., and F. EMDE, Tables of Functions with Formulae and Curves, Fourth Ed. New York 1945, 14.
- [3] MARGENAU, H., y G. M. MURPHY, Las Matemáticas de la Física y Química, Madrid 1952, 115 y 550.
- [4] RICHTER, H., Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlín/Goettingen/Heidelberg 1956, 332—333.
- [5] SCHMETTERER, S., Einführung in die mathematische Statistik, Wien 1956, 96—98.
- [6] VAN DER WAERDEN, B. L., Mathematische Statistik, Berlín/Goettingen/Heidelberg 1957, 56—57.
- [7] WHITTAKER, E., and G. ROBINSON, The Calculus of Observations, Fourth Ed. (reprinted) London/Glasgow 1952, 138—140.
- [8] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON, A Course of Modern Analysis, Fourth Ed. (reprinted) Cambridge 1952, 251—253.

# NUEVA FORMULA APROXIMADA PARA LA FUNCION PI DE GAUSS Y APLICACION ESPECIALMENTE AL CALCULO DE PROBABILIDADES

Por el *Prof. Dr. Hans Ertel* \*

## Resumen

Deduciremos una nueva fórmula aproximada para la función pi de GAUSS ( $H(n)$ , generalización de la factorial,  $n!$ ). Con un parámetro arbitrario ( $\lambda^2$ ), la solución obtenida no representa una sola curva sino un haz de curvas. El valor de  $\lambda^2$  se calcula, por ejemplo, por la condición  $H(0) = 1$ . Esta fórmula aproximada es de gran significado por el cálculo de probabilidades, como puede deducirse fácilmente de unos ejemplos numéricos. La fórmula aproximada de STIRLING no es otra cosa que un caso particular ( $\lambda^2 = 0$ ).

## 1. Consideraciones generales respecto a la probabilidad máxima

Sean  $p$  y  $q = 1 - p$  las probabilidades absolutas que en un solo ensayo corresponden a los sucesos  $E_1$  y  $E_2$ , los cuales se excluyen mutuamente. La probabilidad de que se realice  $m$  veces el suceso  $E_1$  y  $n$  veces el suceso  $E_2$ , siendo arbitrario el orden de sucesión, es

$$\frac{(m + n)!}{m! \, n!} p^m q^n$$

(véase, p. ej.: MARGENAU y MURPHY [5]). Este valor es máximo cuando  $m = ps$  y  $n = qs$ , en donde  $s = m + n$ . Por tanto, la probabilidad máxima  $W$  tiene por expresión

$$W = \frac{s!}{(ps)! \, (qs)!} p^{ps} q^{qs} \quad (1)$$

(véase, p. ej.: YULE and KENDALL [7]).

---

\* Vicepresidente de la Academia de las Ciencias de Berlín y Catedrático de la Humboldt-Universidad (Berlín), Berlín W 8, Platz der Akademie.

Aplicando a dicha expresión la fórmula de STIRLING

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (2)$$

y teniendo en cuenta que  $p + q = 1$ , la ecuación (1) se transforma en la fórmula conocida

$$W = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q s}}, \quad (3)$$

que representa aproximadamente el valor de aquella probabilidad (véase, p. ej.: COOLIDGE [1], CZUBER [2]).

Especialmente interesante es el caso límite en que  $m = 0$  ( $n = s$ ) ó  $n = 0$  ( $m = s$ ), es decir  $p = 0$  ó  $q = 0$ . La fórmula aproximada (3) da para la probabilidad máxima en el caso límite en el cual  $p$  ó  $q$  son nulos, el valor  $W = \infty$  en lugar de  $W = 1$ . Este resultado contradictorio se explica porque la fórmula (2) de STIRLING no puede aplicarse a  $n = 0$ . Cuando  $n = 0$ , la fórmula aproximada (2) toma el valor 0 en lugar de  $0! = 1$ .

Ya hemos encontrado antes la siguiente fórmula aproximada

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{n + \frac{2}{3}}{e}\right)^{n + \frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{36\left(n + \frac{2}{3}\right)}\right) \quad (4)$$

(véase ERTEL [3]), expresión mucho más exacta en el dominio ( $0 \leq n < \infty$ ) que otras fórmulas usadas frecuentemente. Esta expresión (4) posee para  $n = 0$  el valor aproximado de 1,0070...

A continuación deduciremos aquí una nueva fórmula aproximada para la función pi de GAUSS (una generalización de la factorial), que representa exactamente el valor 1 cuando  $n$  tiende hacia 0. Nuestra solución puede aplicarse también al cálculo aproximado de factoriales de números elevados. (Cuando  $n$  es un número entero y positivo, la función  $H(n)$  representa la factorial,  $n!$ , y además se verifica  $H(0) = 1 = 0!$ ).

## 2. Demostración de la nueva fórmula aproximada

Para obtener la nueva fórmula aproximada, conviene hacer uso de la integral definida

$$J_{\mu} = \int_0^{2\mu} e^{-x^m} x^{m(n+1)-1} dx \quad (5)$$

para cualquier valor de  $m \geq 1$  y de  $n \geq 0$ . El límite superior  $2\mu$  es arbitrario; si extendemos la integral (5) a todo el dominio  $(0, \infty)$ , sin duda

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} J_{\mu} = \int_0^{\infty} e^{-x^m} x^{m(n+1)-1} dx = \frac{1}{m} \Gamma(n), \quad (6)$$

en donde  $\Gamma(n)$  representa la función pi de GAUSS en el campo de variabilidad  $0 \leq n \leq \infty$ . Ya dijimos que  $\Gamma(n)$  se reduce a los factoriales

$$\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n! \quad (7)$$

cuando  $n$  es un número entero.

Haciendo  $x = \mu + \xi$ , la integral (5) se transforma en

$$J_{\mu} = e^{-\mu^m} \mu^{m(n+1)-1} \int_{-\mu}^{+\mu} e^{-\psi(\xi, m, n)} d\xi, \quad (8)$$

donde  $\psi(\xi, m, n)$  es la función

$$\psi(\xi, m, n) = (\mu + \xi)^m - \mu^m - \{m(n+1) - 1\} \log \text{nat} \left(1 + \frac{\xi}{\mu}\right). \quad (9)$$

Desarrollemos ahora  $\psi(\xi, m, n)$  según las potencias crecientes de  $\xi$ :

$$\psi(\xi, m, n) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots, \quad (10)$$

los coeficientes  $c_0, c_1, c_2, \dots$  de los distintos términos tienen que ser iguales a

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 0, \\ c_1 &= m \mu^{m-1} - \frac{m(n+1)-1}{\mu}, \\ c_2 &= \frac{m(m-1)}{2} \mu^{m-2} + \frac{m(n+1)-1}{2\mu^2}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Imponiendo a  $\mu$  la condición de ser

$$\mu^m = n + 1 - \frac{1}{m} \quad (12)$$

tendremos entonces:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = + \frac{m^2}{2} \mu^{m-2}, \quad \dots, \quad (13)$$

y por lo tanto, despreciando los términos de orden superior,

$$e^{-\psi(\xi, m, n)} = e^{-\frac{m^2}{2} \mu^{m-2} \xi^2}. \quad (14)$$

Este desarrollo es particularmente útil cuando el integrando en (8) no se desvía demasiado de una distribución de "GAUSS" normal.

De las ecuaciones (8), (12) y (14) podemos deducir la siguiente:

$$J_\mu = \left(\frac{\mu^m}{e}\right)^{\mu^m} \int_{-\mu}^{+\mu} e^{-\frac{m^2}{2} \mu^{m-2} \xi^2} d\xi. \quad (15)$$

Se acostumbra a escribir este resultado en forma asintótica para valores grandes de  $\mu$ :

$$\frac{II(n)}{m} = \left(\frac{\mu^m}{e}\right)^{\mu^m} \frac{\sqrt{2\pi}}{m \mu^{\frac{m}{2}-1}}, \quad (16)$$

puesto que se tiene con tanta más aproximación cuanto mayor sea  $\mu$ :

$$J_\mu \rightarrow \frac{II(n)}{m}, \quad \text{y} \quad \int_{-\mu}^{+\mu} e^{-\frac{m^2}{2} \mu^{m-2} \xi^2} d\xi \rightarrow \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2}{m^2 \mu^{m-2}}}. \quad (17)$$

Sustituycamos en (16)  $\mu^m$  por  $n + 1 - \frac{1}{m}$  según ecuación (12) y tendremos

$$II(n) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{n + 1 - \frac{1}{m}}{e}\right)^{n + \frac{1}{2}}. \quad (18)$$

El valor de  $m \geq 1$  es todavía arbitrario.

Introduzcamos ahora el parámetro

$$0 \leq \lambda^2 = 1 - \frac{1}{m} \leq 1. \quad (19)$$

La ecuación (18) puede también escribirse así:

$$II(n) = \sqrt{2\pi} e \cdot e^{-\lambda^2} \cdot \left( \frac{n + \lambda^2}{e} \right)^{n + \frac{1}{2}}, \quad (20)$$

que es la fórmula aproximada que deseábamos obtener.

Esta solución generalizada (20), en la cual  $\lambda^2$  ( $0 \leq \lambda^2 \leq 1$ ) constituye un parámetro arbitrario, no representa una sola curva sino un sistema de infinitas curvas, es decir, un haz de curvas. La fórmula (20) nos da evidentemente

$$II(0) = 1 \quad (21)$$

cuando  $\lambda$  es una raíz de la ecuación transcendente

$$1 = \sqrt{2\pi} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda^2}, \quad (22)$$

es decir, con otra notación:

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} = -\frac{1}{2} \Phi^{(2)}(\lambda), \quad (23)$$

donde  $\Phi^{(2)}(\lambda)$  es la derivada segunda de la integral del error de GAUSS

$$\Phi(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx. \quad (24)$$

### 3. Cálculos numéricos

La ecuación (22) tiene dos raíces. Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las raíces de esta ecuación. Se encontrará mediante el uso de las tablas de JAHNKE y

EMDE [4]  $\lambda_1^2 = 0.276\,91 \dots \approx 0.277$  y  $\lambda_2^2 = 0.819\,26 \dots \approx 0.819$ ; reemplazando en (20), resulta

$$H(n) = \sqrt{2\pi e} \cdot e^{-0.277} \cdot \left( \frac{n + 0.277}{e} \right)^{n + \frac{1}{2}}, \quad (25,1)$$

$$H(n) = \sqrt{2\pi e} \cdot e^{-0.819} \cdot \left( \frac{n + 0.819}{e} \right)^{n + \frac{1}{2}}, \quad (25,2)$$

y sabemos que ambas ecuaciones satisfacen a la condición (21).

El cálculo numérico lo indicamos a continuación como tabla 1.

**Tabla 1**

$n$	Error relativo	
	según la ecuación (25,1)	según la ecuación (25,2)
0	0	0
1	+ 8,75 . 10 <sup>-3</sup>	— 2,63 . 10 <sup>-3</sup>
2	+ 5,95 . 10 <sup>-3</sup>	— 2,25 . 10 <sup>-3</sup>
4	+ 3,54 . 10 <sup>-3</sup>	— 1,58 . 10 <sup>-3</sup>
6	+ 2,48 . 10 <sup>-3</sup>	— 1,18 . 10 <sup>-3</sup>
8	+ 1,88 . 10 <sup>-3</sup>	— 0,94 . 10 <sup>-3</sup>
10	+ 1,57 . 10 <sup>-3</sup>	— 0,77 . 10 <sup>-3</sup>
20	+ 0,82 . 10 <sup>-3</sup>	— 0,41 . 10 <sup>-3</sup>
30	+ 0,56 . 10 <sup>-3</sup>	— 0,30 . 10 <sup>-3</sup>

Para la comparación se emplean unos valores de los errores relativos según la fórmula (2) de STIRLING como tabla 2.

**Tabla 2**

$n$	Error relativo
0	— 1000 . 10 <sup>-3</sup>
1	— 78 . 10 <sup>-3</sup>
2	— 41 . 10 <sup>-3</sup>
10	— 8 . 10 <sup>-3</sup>
20	— 4 . 10 <sup>-3</sup>
30	— 2,8 . 10 <sup>-3</sup>

Como otro ejemplo calcularemos  $H(3,64) = 14,162$  (valor verdadero). Nuestra fórmula aproximada (25,1) da el valor de 14,216; el error relativo es + 3,81 . 10<sup>-3</sup>, y la fórmula (25,2) da el valor 14,139 con un error relativo — 1,62 . 10<sup>-3</sup>.

#### 4. Término general de la distribución de BERNOUILLI

Dirigiremos nuestra atención a la expresión

$$W = \frac{s!}{m! n!} \cdot \frac{m^m n^n}{s^s} \quad (s = m + n), \quad (26)$$

llamada término general de la distribución de BERNOUILLI, que, en virtud de ecuación (20), se transforma en

$$W = \sqrt{\frac{s}{2 \pi m n}} \cdot e^{+\lambda^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{s}\right)^{s + \frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{m}\right)^{m + \frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\lambda^2}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}}}. \quad (27)$$

Haciendo  $m = p \cdot s$ ,  $n = q \cdot s$ , tendremos la probabilidad máxima

$$W = \frac{1}{\sqrt{2 \pi p q s}} \cdot e^{+\lambda^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{s}\right)^{s + \frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{p s}\right)^{p s + \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda^2}{q s}\right)^{q s + \frac{1}{2}}}. \quad (28)$$

Ahora vamos a calcular el límite  $\lim_{p \rightarrow 0} W$  (es decir,  $q \rightarrow 1$ ). En este caso tenemos

$$\lim_{p \rightarrow 0} W = \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} \frac{e^{+\lambda^2}}{(p s + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda^2}{p s}\right)^{p s}} \right\} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\lambda^2}{p s}\right)^{-p s}. \quad (29)$$

El último resultado es, en forma de desarrollo,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\lambda^2}{p s}\right)^{-p s} = \lim_{p \rightarrow 0} e^{-2 p s} \left\{ \frac{\lambda^2}{2 p s + \lambda^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^2}{2 p s + \lambda^2}\right)^3 + \dots \right\},$$



y el lector podrá comprobar sin dificultad que es

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{p s} \right)^{-p s} = 1 ,$$

por lo tanto,

$$\lim_{p \rightarrow 0} W = 1 .$$

resultado que es válido también para  $q \rightarrow 0$  (es decir,  $p \rightarrow 1$ ).

Consideremos también un ejemplo numérico como aplicación de la fórmula (28). Si admitimos que sea  $n = 20$  el número de casos y  $p = 0,3$  ( $q = 0,7$ ), obtendremos según ecuación (28):  $W = 0,19111$  (utilizando la raíz  $\lambda_1$ ) con el error relativo  $-2,75 \cdot 10^{-3}$ , porque el valor verdadero es  $W = 0,19165$  (véase WEBER [6]). Según la ecuación (3) es  $W = 0,19467$  con el error relativo  $+ 15,8 \cdot 10^{-3}$ . Con la utilización de la raíz  $\lambda_2$  y (28) resulta  $W = 0,19190$ ; por consiguiente, el error relativo tiene el valor pequeño  $+ 1,3 \cdot 10^{-3}$ .

## 5. Casos particulares

Aplicaremos nuestra fórmula generalizada (20) a algunos casos particulares, en los cuales se podrá ya reconocer la generalidad y la utilidad de este modo de representación.

a) Sabemos que el parámetro  $\lambda^2$  de la ecuación (20) representa una constante arbitraria, cuyo valor ( $0 \leq \lambda^2 \leq 1$ ) puede ser elegido a capricho. Elijiendo, por ejemplo,  $\lambda^2 = 0$ , resulta

$$H(n) = \sqrt{2 \pi e} \cdot \left( \frac{n}{e} \right)^{n + \frac{1}{2}} , \quad (31)$$

lo que no es otra cosa que la fórmula (2) de STIRLING.

b) Supongamos que sea  $\lambda^2 = 2/3$ , obtendremos

$$H(n) = \sqrt{2 \pi} \cdot e^{-\frac{1}{6}} \left( \frac{n + \frac{2}{3}}{e} \right)^{n + \frac{1}{2}} , \quad (32)$$

que es la fórmula aproximada (4) si despreciamos para mayor sencillez el factor  $\left(1 - \frac{1}{36\left(n + \frac{2}{3}\right)}\right)$ . También esta ecuación (32) es todavía más exacta que la fórmula (2) de STIRLING. Compárese, por ejemplo, los siguientes errores relativos:

Tabla 3

$n$	Error relativo	
	según la ecuación (2)	según la ecuación (32)
0	$-1000 \cdot 10^{-3}$	$+50.8 \cdot 10^{-3}$
10	$-8 \cdot 10^{-3}$	$+2.6 \cdot 10^{-3}$

Los valores de la tabla 3 ilustran la exactitud de nuestra afirmación.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] COOLIDGE, J. L. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig/Berlin 1927, 43.
- [2] CZUBER, E., Die statistischen Forschungsmethoden, 3. Aufl. (hrsg. v. F. BURKHARD) Wien 1938, 271.
- [3] ERTEL, H., Fórmula aproximada de la función pi de Gauss válida tanto para números elevados como pequeños. Gerl. Beitr. Geophys. 67 (1958), Heft 1.
- [4] JAHNKE, E., and F. EMDE. Tables of Functions with Formulae and Curves, Fourth Ed. New York 1945, 26—31.
- [5] MARGENAU, H., y G. M. MURPHY, Las Matemáticas de la Física y Química, Madrid 1952, 548.
- [6] WEBER, E., Grundriß der biologischen Statistik, 2. Aufl. Jena 1956, 96.
- [7] YULE, G. U., and M. G. KENDALL, An Introduction to the Theory of Statistics, Fourteenth Ed. (Second Impr.) London 1953, 179.

## INFLUJO DE LA LUNA Y DEL SOL SOBRE LA PESANTEZ

Por el Dr. Honorato de Castro B.\*

Con propósitos de investigación teórico-práctica, se hicieron determinaciones gravimétricas en distintos puntos de la República Mexicana (Cacalilao, Ver., Jaltipan, Ver. y Muna, Yuc.), con intervalos de 15 minutos, al mismo tiempo que se efectuaban observaciones semejantes en otros lugares del mundo.

Para comparar los resultados prácticos con los teóricos, se debería comenzar por calcular los efectos que en la pesantez se producen por la acción gravífica de los cuerpos celestes, principalmente por la Luna y el Sol, que son los cuerpos que ejercen mayor influjo.

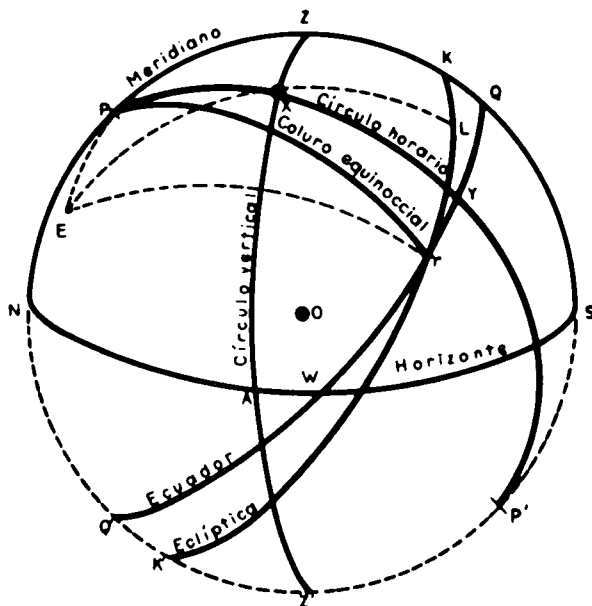
Al tratar de calcular esta acción teórica, se advirtió que algunos textos especializados en Geofísica calculan el influjo tan sólo para el momento del paso del astro por el meridiano y consideran además como constante la paralaje del astro.

Parece por ello oportuno realizar el estudio teórico elemental que se publica a continuación, en el cual se ha prescindido de la complicación que dan al problema las funciones esféricas para el cálculo del efecto de marea. Este estudio es común para el Sol y la Luna sin más que cambiar los elementos pertinentes. Por ello tratamos de la Luna en primer lugar, teniendo presente que en el resultado final habrá que componer los efectos lunares con los solares, como habría que componerlos con los producidos por otros cuerpos celestes si tuvieran intensidad apreciable para nuestros métodos de observación.

Considerando que este artículo ha de tener algunos lectores que no están especializados en cuestiones astronómicas, se utilizará en su exposición todo aquello que sirva para aclarar conceptos a los no especializados. De la lectura de estos conceptos aclaratorios podrá prescindir seguramente la mayoría de los lectores. Presentamos sin embargo una figura aclaratoria así como las explicaciones que permiten conocer los diferentes elementos geométrico-astronómicos que intervienen en el problema.

---

\*) Geofísico, Gerencia de Exploración, Petróleos Mexicanos.



Relación entre las distintas coordenadas

La figura indica cómo están relacionadas entre sí unas y otras coordenadas. La esfera celeste está representada, como vista desde un punto *exterior*, hacia el oeste y un poco por encima del plano del horizonte. O es el observador situado en el centro de la esfera y OZ la vertical del observador. Z es el cenit Z' el nadir y P y P' son los *polos celestes* norte y sur. El círculo PZQSP'Z'N es el *meridiano*. NAW'S es el *horizonte*, que corta al meridiano en el punto Norte (N) y el punto Sur (S). QYW'Q' es el *Ecuador*, que corta al horizonte en el punto Oeste (W) y al meridiano en el "punto sur del Ecuador" (Q). KLK' es la *Elíptica*, que corta al Ecuador en el *punto vernal* Y. E es el *polo norte de la Elíptica*. El arco PE, o el ángulo KTQ, es la *oblicuidad de la Elíptica*. X es un astro, ZXAZ' es el *círculo vertical* del astro. AX es su *altura* y XZ es su *distancia cenital*. Su *acimut* es el ángulo SZX (medido también por el arco SA sobre el horizonte). PXYP' es el *horario* del astro, YX su *declinación*, y QPX su *ángulo horario* (que es también igual al arco QY). TPY, es su *ascensión recta* || arco TY. El ángulo QPT (o el arco QT) es el *tiempo sidérico*. LX es la *Latitud celeste* del astro y TL (o el ángulo TEL) es la *longitud*. PT es un cuadrante del coluro equinoccial y PE una porción del coluro solsticial. Para evitar complicaciones no se indican las coordenadas galácticas.

## ACCION GRAVIFICA DE LA LUNA SOBRE LA UNIDAD DE MASA SITUADA EN UN PUNTO O, EN EL MOMENTO T DE UNA OBSERVACION GRAVIMETRICA

Si fuese inalterable la posición de la Luna con relación al punto en que se encuentra un observador, sería también inalterable con la sucesión de

los tiempos el influjo que nuestro satélite ejercería sobre la pesantez porque no cambiaría ni la masa de la Luna, ni la distancia al observador, elementos únicos con posible variación que intervienen en la expresión matemática de la Ley de Newton.

Mas como la posición relativa de la Luna, con relación al observador, cambia con el tiempo, cambiaría también el influjo lunar y serán diferentes por esta razón los valores de la pesantez determinados en un mismo lugar de la superficie terrestre en momentos diferentes de tiempo. Tan sólo serán iguales los valores observados de la pesantez cuando, por causa de la periodicidad de los movimientos de la Luna y del observador, sean idénticas las posiciones relativas de la una y del otro.

Debemos además tener en cuenta otra causa de variación del influjo lunar sobre la pesantez observada en un cierto punto de la superficie terrestre. Si en el fenómeno no existiesen más influjos que el lunar, la pesantez observada sería la resultante de tres fuerzas, a saber: la acción atractiva que se ejerce en el sentido de la vertical del lugar, la fuerza centrífuga que produce el movimiento de rotación de la Tierra y por último, el influjo lunar que se ejerce en dirección de la recta que une al observador con el centro de la Luna. La resultante de estas tres fuerzas depende no sólo de sus respectivas intensidades sino que también de sus direcciones relativas, es decir, de los ángulos que en cada momento forman las direcciones en que las fuerzas se ejercen.

De todo ello resulta que para estudiar las variaciones del influjo lunar sobre la pesantez, debemos tener en cuenta las variaciones de distancia del observador al satélite perturbador y la variación de la dirección, producidas una y otra por los movimientos de la Luna y del observador.

Los movimientos que influyen en las variaciones del influjo lunar son: a) el movimiento del observador producido por la rotación terrestre que realiza una revolución completa en un día sidéreo igual a 23 h. 56 m. 4.091 s. de tiempo medio, siendo su velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.091} = 0.000072921 \text{ unidades cegesimales.}$$

b) el movimiento de traslación de la Luna en torno de la Tierra que realiza en un mes sidéreo (27 días, 7 hrs., 43 min., 11.47 segs. de tiempo solar medio).

c) el movimiento de traslación de la Tierra en torno del Sol, describiendo

su órbita en un año sidéreo o sea en 365 días, 4 hrs., 9 mins., 29 segs. de tiempo solar medio.

Si pretendiéramos estudiar el problema en toda su amplitud, deberíamos partir del conocimiento de todos los elementos que determinan las posiciones de las órbitas antedichas así como las condiciones en que se realizan sobre las órbitas respectivas los movimientos de traslación de la Tierra y de la Luna. Pero no precisa repetir un trabajo ya realizado por los astrónomos que publican en los anuarios astronómicos elementos suficientes para determinar los valores que en cada momento corresponden a las variables de nuestro problema.

El movimiento de traslación de la Luna en torno de la Tierra produce, por no ser circular la órbita lunar, una variación en la distancia que separa los centros de nuestro planeta y nuestro satélite. Resulta muy sencillo calcular esa distancia para un momento cualquiera por medio de la paralaje diurna lunar que publican anuarios de los observatorios tales como por ejemplo "The American Ephemerides and Nautical Almanac" de Washington, U.S.A. Los valores que publican los referidos anuarios corresponden a la paralaje horizontal ecuatorial y se dan en sus tablas valores para intervalos de 12 horas y las variaciones que permitan, por interpolación, hallar la que corresponde a un momento cualquiera.

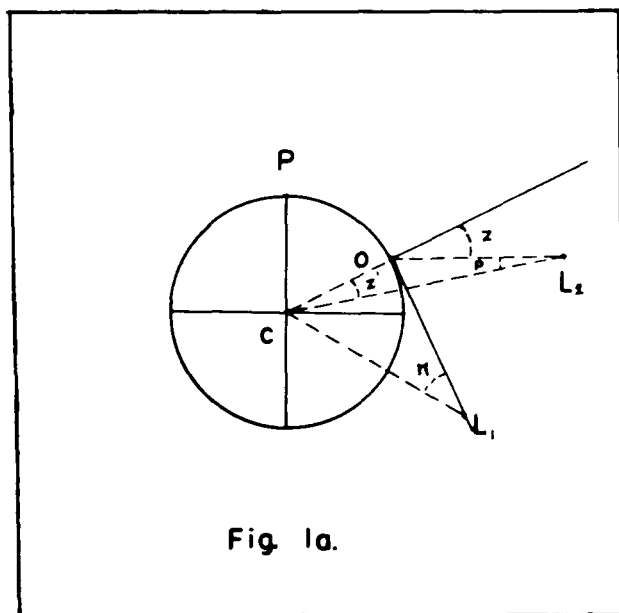
Mas como en las fórmulas que vamos a deducir no interviene la paralaje horizontal, porque, por lo general, no estará la Luna en el horizonte cuando se realice una observación, será preciso pasar de la *paralaje ecuatorial* que dan los anuarios a la *paralaje en altura* que corresponde al momento en que se practica la observación.

Este paso es inmediato y se deduce de las definiciones de una y otra paralaje. La paralaje diurna horizontal de la Luna es el ángulo bajo el cual se ve el radio terrestre correspondiente al observador desde el centro de la Luna cuando este satélite se encuentra en el horizonte. La paralaje en altura es el mismo ángulo cuando la Luna alcanzó sobre el horizonte una cierta altura. En la fig. 1a., en donde C representa el centro de la Tierra, L<sub>1</sub> el centro de la Luna cuando se encuentra en el horizonte del observador situado en O, y L<sub>2</sub> el mismo centro lunar cuando se encuentra a una distancia cenital  $z$ ; la paralaje horizontal será  $\pi$  y será  $p$  la paralaje en altura.

La relación que enlaza las paralajes horizontales  $\pi$  y en altura  $p$  es:

$$p = \pi \cot \frac{1}{2} z' \quad (1)$$

donde  $z'$  es la distancia cenital central del astro en el momento de la observación, ángulo que determinamos más adelante (fórmula 3).



**Fig. 1a.**

Se deduce la fórmula (1) considerando los triángulos  $L_1OC$  y  $L_2OC$  de la fig. 1a., cuyos elementos son:  $r = OC$ ,  $R = L_1C = L_2C$ . El primero de los triángulos nos da:

$$\frac{r}{R} = \text{sen } \pi$$

y el segundo

$$\frac{r}{R} = \frac{\text{sen } p}{\text{sen } z'}$$

es decir que

$$\text{sen } p = \text{sen } \pi \text{ sen } z.$$

A virtud de la pequeñez de las paralajes  $p$  y  $\pi$  se puede escribir

$$p = \pi \text{ sen } z$$

pero siendo  $z = z' + p$  tendremos

$$p = \pi (\sin z' \cos p + \cos z' \sin p)$$

que se reduce, a virtud de la pequeñez de  $p$  a

$$p = \pi (\sin z' + p \cos z')$$

y de aquí

$$p = \pi \frac{\sin z'}{1 - \cos z'} = \pi \frac{2 \sin \frac{1}{2} z' \cos \frac{1}{2} z'}{2 \sin^2 \frac{1}{2} z'} = \pi \cot \frac{1}{2} z'$$

Consideremos ahora que en la fig. 2a. sea  $L$  la posición de la Luna en el momento de la observación;  $C$  el centro de la Tierra;  $PP'$  el eje en torno del cual gira;  $O$  el punto de la superficie terrestre en que se hace una determinación gravimétrica cuando un reloj de tiempo solar medio marca la hora  $T$ .

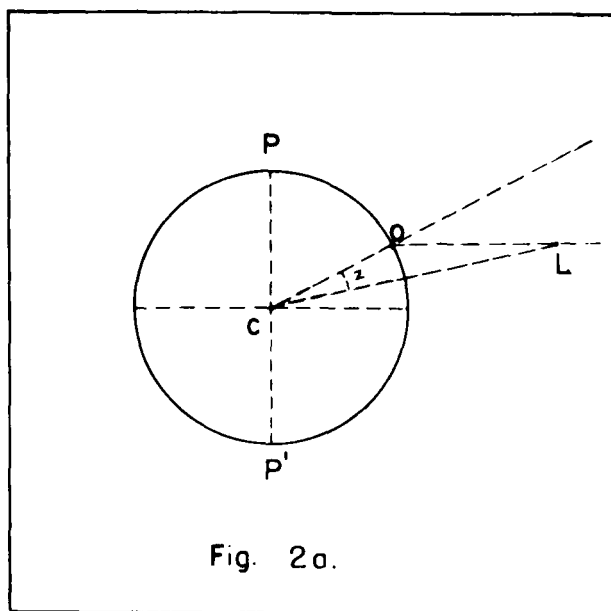


Fig. 2a.

La acción gravítica de la Luna sobre la unidad de masa situada en  $O$  será, según la ley de Newton:

$$g_1 = G \frac{m}{(OL)^2}$$



donde son:

$G$  la constante de gravitación universal de valor

$$G = 6673 \cdot 10^{-11}$$

$m$  la masa de la Luna, 81 veces menor que la masa  $M$  de la Tierra, teniendo por tanto un valor

$$m = \frac{M}{81} = \frac{1}{81} \times 6.1 \times 10^{27} \text{ gr}$$

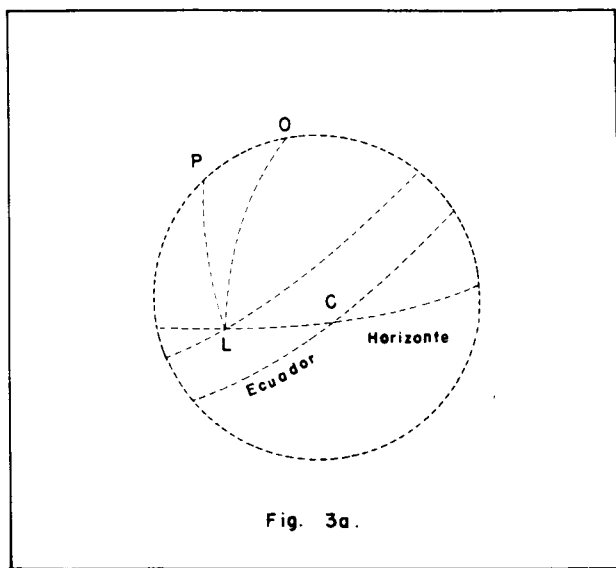
La distancia  $\overline{OL}$  del centro de la Luna al punto de observación, se deduce del triángulo rectilíneo  $OCL$  que nos permite escribir

$$\begin{aligned} \overline{OL}^2 &= \overline{OC}^2 + \overline{LC}^2 - 2 \overline{OC} \times \overline{CL} \cos z' \\ &= (\overline{LC} - \overline{OC})^2 + 4\overline{LC} \cdot \overline{OC} \sin^2 \frac{1}{2} z' \end{aligned} \quad (2)$$

El valor angular del ángulo  $z'$  es igual al del lado  $LO$  del triángulo esférico  $OLP$  (fig. 3a.) cuyos elementos son

$$PO = 90 - \varphi$$

$$PL = 90 - \theta$$



siendo  $\varphi$  la latitud geográfica de  $O$ ;  $\partial$  la declinación de la Luna en el momento de la observación; y sea  $t$  el ángulo horario de la Luna en el lugar y en el momento de la observación.

Entre estos elementos existe la relación:

$$\cos z' = \sin \varphi \sin \partial + \cos \varphi \cos \partial \cos t \quad (3)$$

siendo  $t = \Theta - \alpha$  donde  $\alpha$  es la ascensión recta de la Luna en el momento de observación, que podemos deducir de las tablas de la Luna y  $\Theta$  es igual a la hora sidérica en el momento de observación.

El valor de  $LC$  que figura en la (2) se puede obtener en función del radio ecuatorial terrestre ( $a$ ) y de la paralaje horizontal ecuatorial  $\pi$  en el momento de observación que nos dan las tablas de la Luna. La fórmula correspondiente es:

$$CL = \frac{a}{\sin \pi} \quad (4)$$

fórmula que se deduce inmediatamente de la inspección de la fig. 3a.

El valor de  $CO$  de la fórmula (2) se puede obtener en función de la latitud geocéntrica  $\Psi$  y de la abscisa  $x$  por la fórmula

$$r = x \sec \Psi \quad (5)$$

donde la abscisa  $x$  tiene el valor

$$x = a \cos u$$

estando enlazada la latitud reducida  $u$  con la geográfica  $\varphi$  por la fórmula

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \quad (6)$$

y la latitud geocéntrica  $\Psi$  lo está por la expresión:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi \quad (7)$$

donde  $(a)$  y  $(b)$  son los semiejes mayor y menor del elipsoide terrestre. Estas relaciones se deducen inmediatamente considerando la fig. 4a. donde la línea  $APA'$  es la sección que en la superficie terrestre produce el meridiano del observador, y la  $AQA'$  es el círculo director de la sección elíptica  $APA'$ .

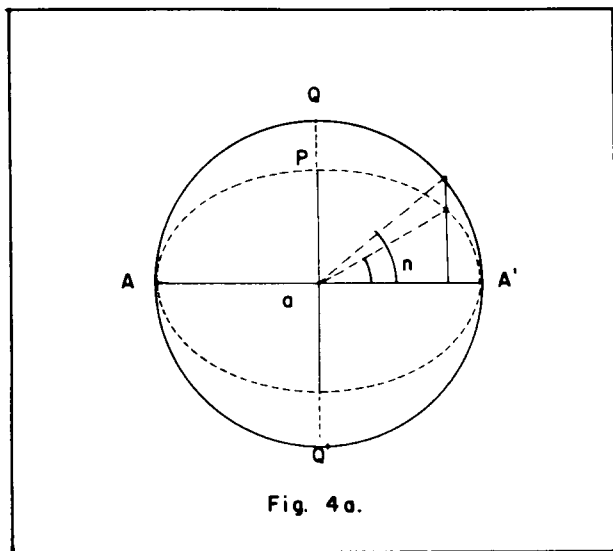


Fig. 4a.

La acción gravífica lunar  $g_1$  cuyo valor se puede calcular por la fórmula (2) y las relaciones con ella, (7), (6), (5), (4) y (3), se ejerce en la dirección y sentido  $OL$ , mientras que la acción terrestre se ejerce en la dirección y sentido de la normal al geoide.

La resultante de estas dos acciones será igual en magnitud y dirección a la diagonal del paralelogramo construido sobre sus intensidades. Para calcular los elementos que definen la resultante, puede suponerse que en la fig 5a. representan:

$OM$  la acción  $g_T$  de la Tierra,

$ON$  .. ..  $g_L$  de la Luna,

La dirección  $OM$  será la de la vertical del lugar de observación. La de  $ON$  es la de la visual dirigida a la Luna en el momento de observación.

El ángulo  $NOM$  será la distancia cenital de la Luna vista desde el lugar  $O$  en el momento de la observación. Por la fig 1a. se ve que

$$z = z' + p \quad (8)$$

donde  $(p)$  es la paralaje en altura de la Luna.

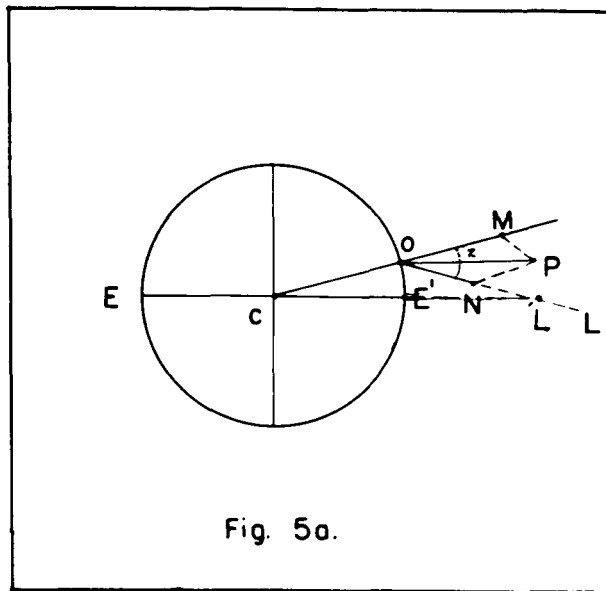


Fig. 5a.

Del triángulo  $OPM$  (fig. 5a.), se deduce:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2OM.ON \cos z \quad (9)$$

que da el valor de la resultante  $OP$  en función de los valores de los componentes  $(g_T$  y  $g_L$ ) y del ángulo  $z$  definido por la fórmula (8).

No sería preciso calcular el valor de  $z$  por la referida fórmula (8) si, al hacer la observación, se hubiera medido la distancia cenital de la Luna y se la hubiera corregido de refracción. Pero si no se hubiera practicado tal medida, como sucederá en ocasiones en que no es posible practicarla, por encontrarse oculta la Luna por un manto de nubes o por estar bajo el horizonte, entonces será preciso utilizar la fórmula (8).

Figuran en ella los valores de  $z'$  y  $p$ . El primero se habrá deducido previamente de la fórmula (3) y el de la paralaje en altura  $p$  se obtendrá por las fórmulas (1) y (3).

El valor  $z'$  de la fórmula (3) se puede preparar para el cálculo logarítmico haciendo

$$\text{sen } \varphi = m \text{ sen } M$$

$$\cos \varphi \cos t = m \cos M$$

y de aquí

$$\text{tg } M = \text{tg } \varphi \sec t$$

$$m = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } M}$$

$$\cos z' = m \cos (M + \vartheta)$$

La dirección  $OP$  (fig. 5a.) es distinta de la dirección  $OM$ . Ello quiere decir que la acción de la Luna no sólo cambia la intensidad de la pesantez sino que cambia también la dirección. El ángulo  $z = POM$  será la desviación de la vertical que se puede determinar considerando el triángulo  $POM$  del cual se deduce

$$\cos z = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OM}^2 - \overline{MP}^2}{2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OM}} \quad (11)$$

En el desarrollo que antecede, no se utilizaron más aproximaciones que las resultantes de substituir los senos por los arcos de las paralajes horizontal y de altura [fórmula (1)]. Se comprende que esta substitución no introduce en el problema errores apreciables por cuanto el valor de la paralaje horizontal, que oscila para el Sol alrededor de  $8.80''$ , no pasa para la Luna de  $61'30''$ , y el valor de la paralaje en altura es siempre menor que el de la paralaje horizontal.

El grupo de fórmulas obtenidas permite por consecuencia calcular, para cualquiera de los momentos en que se determine el valor experimental de la pesantez, los efectos producidos, en intensidad y dirección, por influjos de la Luna y del Sol. El cálculo resulta laborioso pero dará resultados de gran precisión.

Se pueden obtener fórmulas más sencillas, que facilitarán el cálculo, operando de manera semejante a la seguida por E. Dubois en su "Cours d'Astronomie".—París.—Betrand. Págs. 774 y siguientes.

Si se supone que el plano del dibujo de la fig. 5a. es el determinado por la posición del observador  $O$  y por los centros  $C$  y  $L$  de la Tierra y la Luna en el momento en que se determinó la pesantez; y si se representan por  $R$  la distancia  $CL$ , por  $r$  la  $CO$ , y por  $R'$  la  $LO$ , y fuesen conocidos tales valores, se pueden determinar las acciones que opera la Luna sobre la unidad de masa situada en el centro de la Tierra  $C$  y la que ejerce sobre la misma unidad situada en  $O$ .

Estas acciones son

$$F_r = G \frac{m}{R^2} \quad .. \quad F_L = G \frac{m}{R'^2} \quad (12)$$

Con relación a dos ejes rectangulares  $LX$  y  $LY$ , las coordenadas del punto  $O$  son (fig. 6a.):

$$x = LB \quad .. \quad y = OB$$

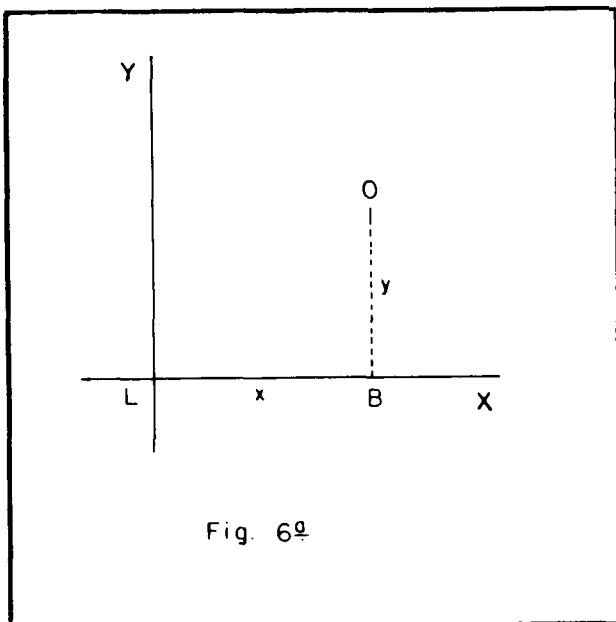


Fig. 6a

La fuerza  $F_L$  que se ejerce en la dirección  $OL$  se puede descomponer en dos  $X$ ,  $Y$  paralelas a los ejes y sus valores serán

$$X = F_L \cos \omega \quad , \quad Y = F_L \sin \omega$$

pero como

$$x = R' \cos \omega \quad , \quad y = R' \sin \omega$$

serán

$$X = \frac{x F_L}{R'} \quad , \quad Y = \frac{y F_L}{R'} \quad (13)$$

Pero además,

$$x = R - r \cos z' \quad , \quad y = r \sin z'$$

con lo cual las (13) toman la forma, habida cuenta de (12), de

$$\begin{aligned} X &= G \frac{m}{R'^3} (R - r \cos z') \\ Y &= G \frac{m}{R'^3} r \sin z' \end{aligned} \quad (14)$$

Se puede expresar  $R'$  en función de  $R$  mediante el triángulo  $LCO$  que da:

$$R'^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos z'$$

y de aquí

$$\frac{1}{R'^3} = (R^2 + r^2 - 2Rr \cos z')^{-\frac{3}{2}} \quad (15)$$

Representando el valor (15) por  $\Phi$  tendremos:

$$\Phi = f(r)$$

que desarrollado en serie por la fórmula de McLaurin da:

$$\Phi = (\Phi)_o + \left( \frac{d\Phi}{dr} \right)_o r + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} \right)_o r^2 + \dots$$

y para

$$r = 0 \quad \Phi_o = \frac{1}{R^3}$$

Derivando la expresión (15) sale

$$\left( \frac{d\Phi}{dr} \right)_o = \frac{3 \cos z'}{R^4}$$

El valor de este término es muy pequeño, aún para el valor máximo de  $\cos z'$  y los términos que siguen al segundo en el desarrollo de McLaurin serán despreciables, por lo cual se puede escribir, sin error sensible.

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{R^3} + \frac{3 r \cos z'}{R^4} \quad (16)$$

Puesto el valor (16) en los (14), los valores de las componentes  $X$  e  $Y$  tomarán la forma:

$$X = Gm (R - r \cos z') \left( \frac{1}{R^3} + \frac{3r \cos z'}{R^4} \right)$$

$$Y = Gmr \sin z' \left( \frac{1}{R^3} + \frac{3r}{R^4} \right)$$

Como la cuarta potencia de la distancia Tierra-Luna es muy grande, se puede prescindir de los términos que la contienen en el denominador, con lo cual tendremos para valores aproximados de las componentes  $X$  e  $Y$ :

$$X = G \left( \frac{m}{R^2} + \frac{2mr \cos z'}{R^3} \right) \quad (17)$$

$$Y = G \frac{mr \sin z'}{R^3}$$



Por la forma de la primera de las (17), se ve que la componente  $X$  es la resultante de dos fuerzas, de las cuales la primera es idéntica a la acción que la Luna ejerce sobre la unidad de masa situada en el centro de la Tierra. Esta fuerza no varía por causa del movimiento de rotación de la Tierra.

Resulta en definitiva que la unidad de masa situada en  $O$  se encuentra sometida a la acción de las dos fuerzas siguientes:

$$\frac{2Gmr \cos z'}{R^3} \quad \text{en la dirección } LT$$

y

$$\frac{Gmr \sin z'}{R^3} \quad \text{según una dirección perpendicular.}$$

Si se proyectan estas fuerzas en dirección de la vertical en  $O$  y de una horizontal, se tendrá:

Para la fuerza paralela al eje  $x$ :

$$\frac{2Gmr \cos z'}{R^3} \cos z' \quad .. \quad \frac{2Gmr \cos z'}{R^3} \sin z'$$

y para la otra:

$$\frac{Gmr \sin z'}{R^3} \sin z' \quad .. \quad \frac{Gmr \sin z'}{R^3} \cos z'$$

Y como resultante total en la dirección de la vertical, se tendrá:

$$G \frac{mr}{R^3} (3 \cos^2 z' - 1) = F_v$$

y para resultante horizontal

$$\frac{3}{2} G \frac{mr \sin 2z'}{R^3} = F_h$$

La fuerza que hace variar la pesantez es la  $F_v$ , la cual es nula para los momentos en que el valor de  $z'$  anule el término

$$3 \cos^2 z' - 1$$

que corresponde a valores

$$\cos z' = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

El valor de  $z'$  está enlazado con la latitud  $\varphi$  del lugar  $O$ , con la declinación de la Luna  $\partial$  y con el horario  $t$  por la expresión (3).

$$\cos z' = \sin \varphi \sin \partial + \cos \varphi \cos \partial \cos t$$

y cuando la acción  $F_v$  sea nula deberá ser

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \sin \varphi \sin \partial + \cos \varphi \cos \partial \cos t$$

o sea

$$\cos t = \sec \varphi \sec \partial \left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}} - \sin \varphi \sin \partial \right)$$

Este valor del horario  $t$  permite conocer la hora sidérea local  $O$  que corresponde al momento en que es mínima la acción de la Luna por la fórmula

$$\Theta = t - \alpha$$

Las observaciones realizadas en México están acordes con la teoría y acusan una diferencia, entre los valores máximo y mínimo observados en una estación, que es del orden de 0.45 miligales. La variación máxima observada en un sólo día es del orden de 0.3 miligales.

De ello se deduce que no deben preocuparse de las atracciones lunar y solar, quienes para sus problemas les sea suficiente la apreciación indicada; pero deberán tenerla en cuenta y calcular las correspondientes correcciones quienes necesiten de mayor precisión.

# NOMOGRAMA PARA EL CALCULO DE LA INFLUENCIA DEL SOL Y DE LA LUNA EN TRABAJOS GRAVIMETRICOS PARA LA REPUBLICA MEXICANA

Por el *Ing. V. A. Olhovich \**

El presente nomograma da valores de las correcciones por la influencia de la Luna y la del Sol en trabajos gravimétricos dentro de los límites de la República Mexicana, es decir, entre las latitudes 15° y 33°.

La corrección por la influencia de la Luna es

$$c_m = f.K_m (\cos^2 z_m - 1/3)$$

siendo

$$K_m = 3kMr/R_m^3 = 0.165 \text{ mgls.}$$

donde

$k = 66.67 \times 10^{-9} \text{ cm}^3/\text{gr. seg}^2$  es la constante gravitacional

$M = 7.32 \times 10^{25} \text{ grs.}$  es la masa de la Luna

$r = 6370 \text{ kms.}$  es el radio medio de la Tierra

y  $R_m = 384,400 \text{ kms.}$  es la distancia media Tierra-Luna.

El factor  $f$  depende de la paralaje horizontal de la Luna y toma en cuenta el cambio de la distancia  $R_m$  entre la Tierra y la Luna. Por consiguiente, la cantidad  $c_m$  debe multiplicarse por el factor  $f$  de acuerdo con la tabla de las paralajes horizontales de la Luna. La paralaje correspondiente se encuentra en el Almanaque.

---

\* Gerencia de Exploración, Petróleos Mexicanos.

La corrección por la influencia del Sol es

$$c_s = K_s (\cos^2 z_s - 1/3)$$

siendo

$$K_s = 3kSr/R_s^3 = 0.076 \text{ mls.}$$

donde

$$S = 1.97 \times 10^{33} \text{ grs. es la masa del Sol}$$

$$R_s = 149,500,000 \text{ kms es la distancia media Tierra-Sol.}$$

El ángulo geocéntrico  $z$  entre el punto de observación, el centro de la Tierra y el cuerpo celeste se obtiene de la expresión

$$\cos z = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos (\Theta - \lambda)$$

donde

$\phi$  es la latitud del lugar de observación

$\delta$  es la declinación de la Luna o del Sol.

y  $(\Theta - \lambda)$  es el ángulo de la hora local, es decir,

siendo  $\Theta$  el ángulo de la hora de Greenwich de la Luna o del Sol, y

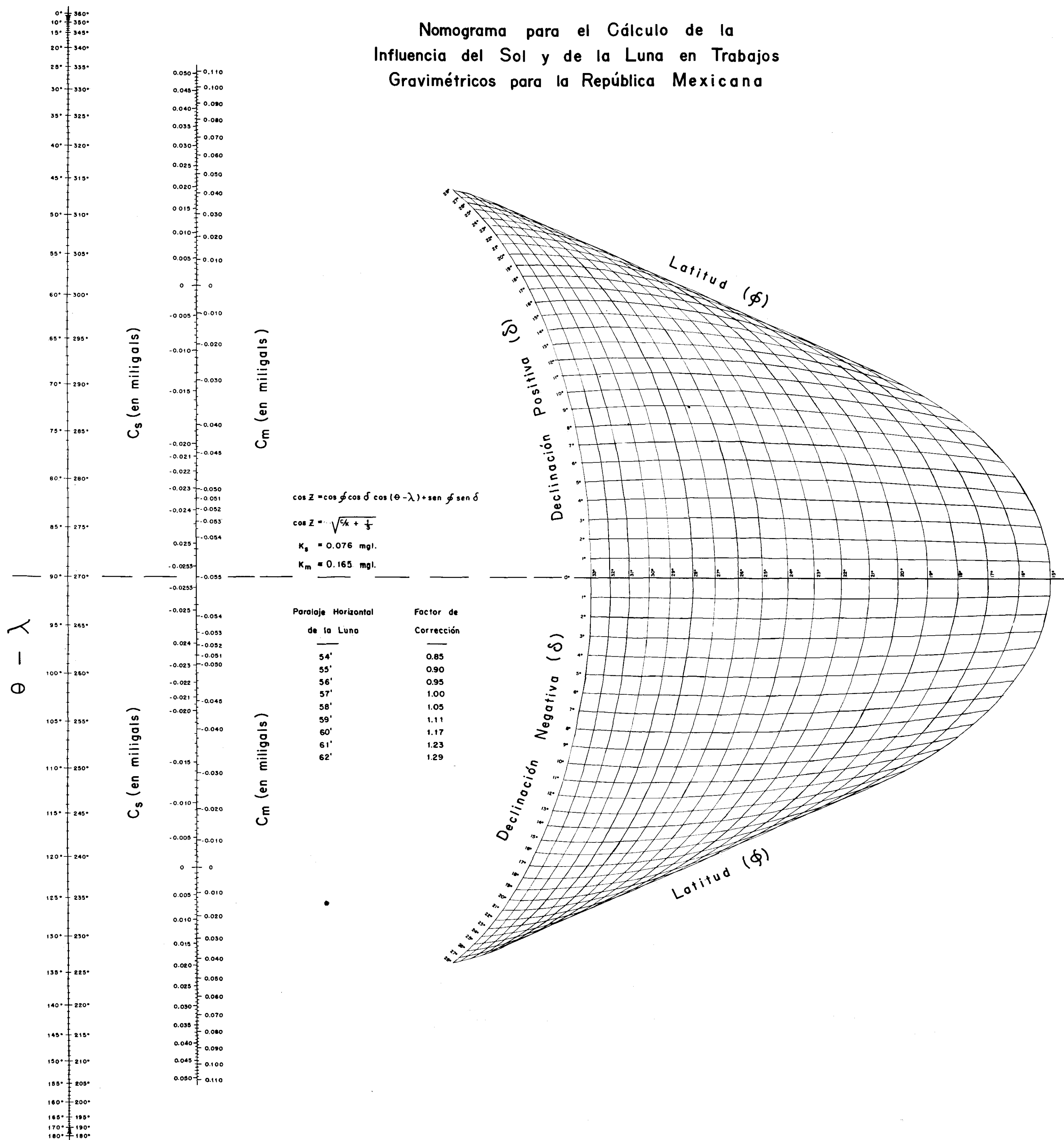
$\lambda$  la longitud del lugar de observación.

Nomográficamente, esta expresión puede representarse por dos rectas paralelas de los valores  $c_{m,s}$  y  $(\Theta - \lambda)_{m,s}$  y las familias de curvas de los valores  $\phi$  y  $\delta$ , según la fórmula clásica

$$f_1(\alpha_1) \frac{f_3(\alpha_3, \beta_3)}{\varphi_3(\alpha_3, \beta_3)} + f_2(\alpha_2) + \frac{\psi_3(\alpha_3, \beta_3)}{\varphi_3(\alpha_3, \beta_3)} = 0$$

poniendo

# Nomograma para el Cálculo de la Influencia del Sol y de la Luna en Trabajos Gravimétricos para la República Mexicana



$$\begin{aligned}
 f_1 (\alpha_1) &= \cos (\Theta - \lambda)_{m, s} \\
 f_2 (\alpha_2) &= -\cos z_{m, s} = -\sqrt{(c_{m, s}/K_{m, s}) + 1/3} \\
 f_3 (\alpha_3, \beta_3) &= \cos \phi \cos \delta \\
 \psi_3 (\alpha_3, \beta_3) &= \sin \phi \sin \delta \\
 \psi_3 (\alpha_3, \beta_3) &= 1
 \end{aligned}$$

Escogiendo los límites convenientes del nomograma, las co-ordenadas de sus escalas se calculan según las expresiones

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 44.44 \cos (\Theta - \lambda)_{m, s} \\
 y_2 &= 40 \sqrt{(c_{m, s}/K_{m, s}) + 1/3} \\
 x_3 &= \frac{10}{1 - 0.9 \cos \phi \cos \delta_{m, s}} \\
 y_3 &= \frac{40 \sin \phi \sin \delta_{m, s}}{1 - 0.9 \cos \phi \cos \delta_{m, s}}
 \end{aligned}$$

Para usar el nomograma:

- 1) En la gráfica de familias de curvas se encuentra el punto de intersección de los valores  $\phi$  y  $\delta$ ;
- 2) Por medio del índice se conecta este punto con el valor  $(\Theta - \lambda)$ , y
- 3) se lee la corrección  $c_m$  o  $c_s$ .

La corrección total será

$$c = f \ c_m + c_s$$

Esta corrección debe aumentarse 20% debido a la deformación de la Tierra y de acuerdo con la teoría de Love y Jeffreys.

## NOTAS SOBRE DOS NUEVOS METODOS DE EXPLORACION SISMICA

Por el *Ing. Santos Figueroa \**

Desde hace unos años se ha estado intentando encontrar un método sísmico de exploración petrolera que supla en alguna forma la necesidad de emplear pozos de tiro, ya sea por motivo de la dificultad de perforar en rocas muy duras, en áreas desérticas o bien por las limitaciones que originan los centros de población, las zonas agrícolas, la proximidad de carreteras, canales, tuberías o cualquier otro tipo de instalación que pueda resultar dañada con las explosiones habituales de los puntos de tiro.

El problema de la perforación y de las explosiones de dinamita se vuelve más crítico en partes en donde es necesario utilizar técnicas con pozos y explosiones múltiples. Tal es en general el caso común en la extensa zona petrolera del poniente de Texas, en donde las formaciones del Cretácico que afloran, son calizas, yeso, gravillas o arenas sueltas.

Estas rocas, cuando se encuentran en la superficie, tienen una característica “ruido-señal” muy alta y constituyen un medio pobre de conducción de los movimientos sísmicos, originando con esto una gran dificultad para obtener reflejos. Las compañías petroleras y contratistas de exploración resolvieron por muchos años el problema, utilizando técnicas de cancelación o eliminación de ruido, mediante el uso de sismos múltiples, pozos de tiro múltiples y observación desplazada (offset shooting). La técnica dió suficientes resultados para descubrir los numerosos yacimientos, principalmente del Pérmico, que forman el distrito poniente de Texas.

A partir de hace unos cinco años, gracias a la nueva técnica del registro magnético, se ha estado intentando el uso de dos métodos que evitan la perforación de pozos de tiro y sus respectivas explosiones. Estos dos métodos que se conocen en los Estados Unidos de Norteamérica por Métodos del Martinete (THUMPER) y del Vibrador (VIBROSEIS) utilizan un equipo que

---

\* Gerencia de Exploración, Petróleos Mexicanos.

produce sobre el terreno, ya sea impactos o bien vibraciones, en substitución de las explosiones de los pozos de tiro.

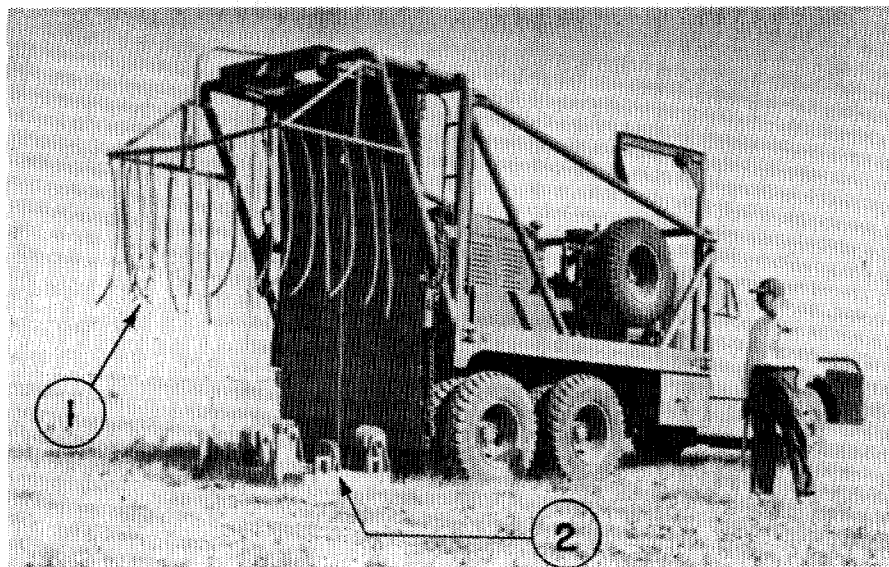


Fig. 1.—Fotografía del Martinete (THUMPER).

(1) Cuerdas de protección. (2) Placa de fierro de tres toneladas.

El Martinete es un camión en donde se ha instalado un peso de unas tres toneladas que, accionado mediante mecanismos eléctricos e hidráulicos, produce impactos en los lugares elegidos con anterioridad. Por su parte el Vibrador es también un camión con motores y mecanismos que generan una serie de impulsos en el terreno. Los dos aparatos cuentan desde luego con los aditamentos mecánicos, eléctricos y electrónicos requeridos para golpear o vibrar con la periodicidad que requiere la observación sísmológica.

Naturalmente que la cantidad de energía que estos aparatos comunican al terreno, es sin comparación muy inferior a la que puede producirse con una o varias explosiones simultáneas dentro de pozos de tiro. La ventajas de aprovechar la energía del Martinete o del Vibrador, proviene solamente del empleo del registro magnético que permite recoger señales sísmicas de muy pequeña amplitud en varias operaciones equivalentes, y sumarlas posteriormente para obtener un sismograma aprovechable, en el cual se logra la cancelación del ruido y el aumento de la señal de los reflejos.



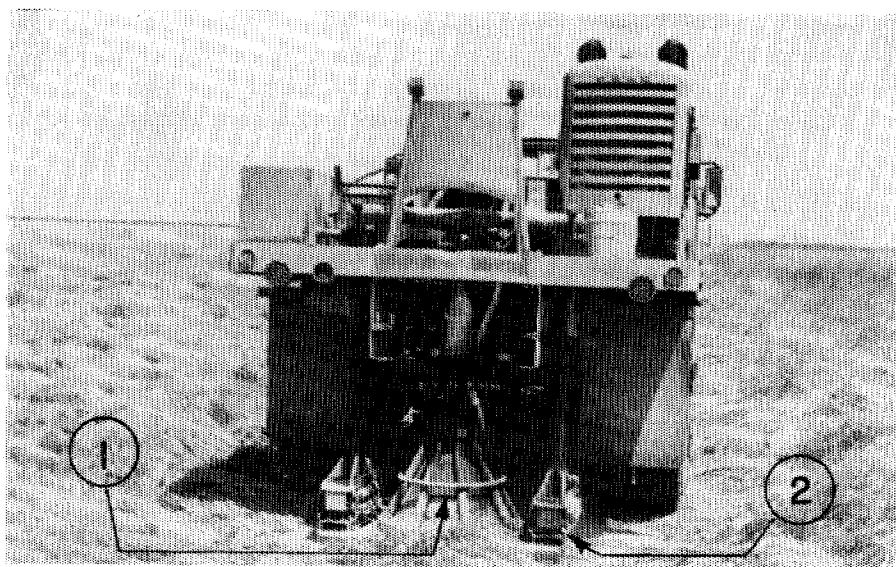


Fig. 2.—Fotografía del Vibrador (VIBROSEIS).

(1) Cono vibrador. (2) Cojines neumáticos para aislar los ruidos indeseables del camión.

Veamos a grandes rasgos en qué consisten los métodos del Martinete y del Vibrador y sus diferencias en el campo con el método convencional de pozos múltiples, habitualmente empleado en las áreas ya citadas. Supongamos que la disposición de las estaciones convencionales con detectores y pozos múltiples fuera de la figura 3.

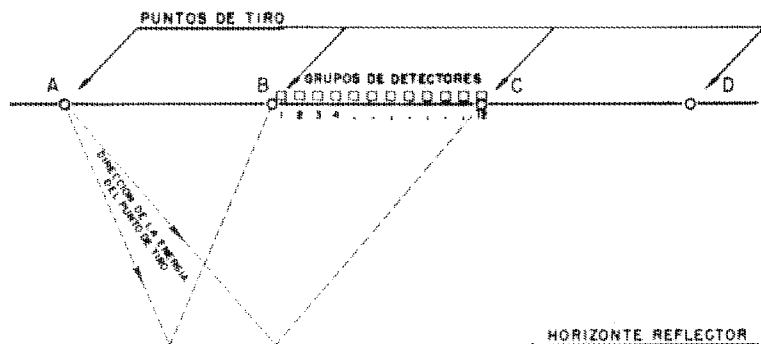


Fig. 3.—Disposición habitual de estaciones con detectores y pozos de tiro múltiples, en el poniente de Texas.—A, B, C, D son los puntos de tiro con 36 pozos múltiples de 10 m. de profundidad y cargas de 2.5 lb.—1, 2, 3....12 son grupos de 36 o más detectores, en cada una de las 12 trazas.

Las condiciones de tiro que en este caso se han elegido son las siguientes:

- Pozos de tiro múltiples para producir una onda intensa de frente plano.
- Detectores múltiples distribuidos convenientemente para cancelar el ruido característico de las formaciones del área, generalmente de alta frecuencia y muy intenso.
- Tiros desplazados (offset) para disminuir la interferencia del movimiento de baja frecuencia de la superficie.

El Martinete y el Vibrador podrían usarse en la misma estación, con las siguientes variantes:

En el caso del Martinete, para observar el mismo tramo B-C se instalarían 12 grupos de 36 o más detectores por traza. En el punto de tiro A, en lugar de una denotación múltiple, se producirían 100 golpes en un área que podría ser de unos 400 m<sup>2</sup>.

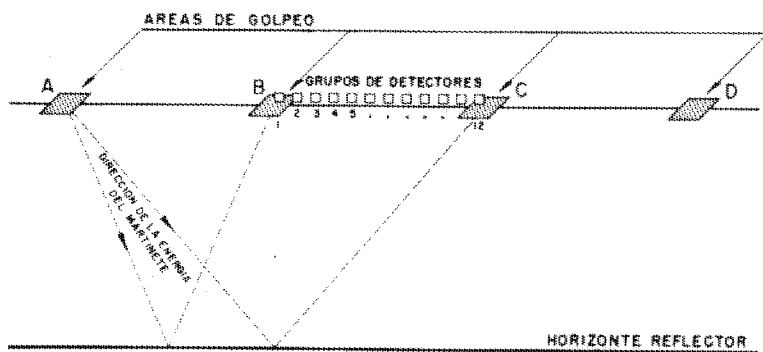


Fig. 4.—Disposición de estación equivalente a la habitual con detectores y pozos de tiro múltiples, para el caso de Martinete.—A, B, C, D son las áreas de golpeo.—1, 2, 3, 4...12 son grupos de 36 o más detectores por traza.

En cada golpe del Martinete se registraría una cinta magnética de 12 trazas. Las 100 cintas magnéticas de una estación, sumadas con el integrador magnético, producirían una sola cinta o sismograma de 12 trazas, en la cual se habrían reforzado las ondas reflejadas y el ruido se habría cancelado en gran parte.

Con el Vibrador las posiciones de los puntos de tiro y los puntos de observación quedarían invertidos, con objeto de no estar cambiando entre punto y punto de la estación, tan gran número de detectores, o de no tener que instalar cientos de detectores si se observan simultáneamente todas las trazas. Se instalarían entonces en el punto A, 100 o más detectores, y se vibraría 10 veces en cada uno de los 12 puntos de la estación.

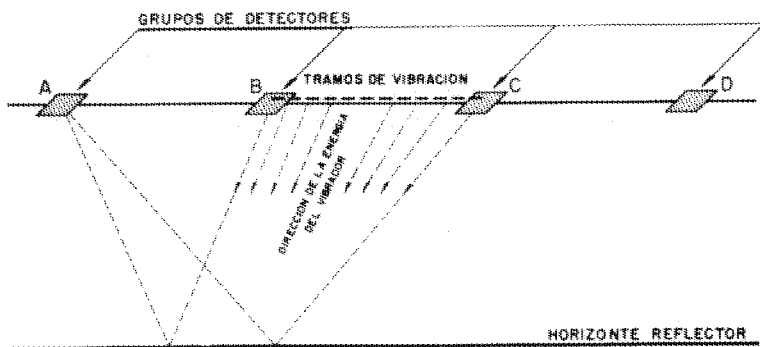


Fig. 5.—Disposición de estación equivalente a la habitual con detectores y pozos de tiro múltiples, para el caso del Vibrador.—A, B, C, D cambian ahora de ser puntos de tiro a áreas donde se reparte un gran número de detectores.—En cada "Tramo de Vibración" se aplican uno o varios camiones vibradores, simultáneamente.

Como puede notarse, con el Martinete y el Vibrador hay una gran complicación en la operación y tiene que procederse instalando gran número de detectores, golpeando o vibrando cientos de veces, y grabando en cinta magnética cuantas veces se produzcan golpes o vibraciones. El resultado en el caso del Martinete es que se tienen 100 cintas con grabación de 12 trazas, para obtener una sola de igual número de canales. Los equipos son por otra parte voluminosos y pesados y por lo tanto tienen muchas limitaciones para moverse libremente en terrenos quebrados o flojos.

Ante esta consideración cabe preguntar si estos nuevos métodos son realmente prácticos. Sin duda que, en términos generales, donde se puedan usar los métodos convencionales de pozos de tiro, el Vibrador y particularmente el Martinete, no ofrecerán mayores ventajas. Pero habrá casos en que por las circunstancias que se mencionan en el primer párrafo de este artículo, las exploraciones sismológicas que se lleven a cabo en determinadas áreas, se harán a expensas de la operación del Martinete y el Vibrador.

Pueden sin embargo preverse, en el caso del Vibrador, posibilidades que serán ventajas positivas sobre los métodos con puntos de tiro, pues se transmiten al terreno, en una forma muy efectiva, ondas de frecuencia escogida. En esta forma es posible comunicar al terreno el tipo de onda más conveniente para la transmisión de la señal deseable. En cambio el Martinete no es susceptible de controlar el tipo de onda que produce, y ésta es generalmente de muy baja frecuencia.

En conclusión, hasta donde se puede prever, parece que el Vibrador tendrá mejor aplicación que el Martinete y que este primer método será susceptible de emplearse con ventaja, en donde esté vedado el uso de puntos de tiro. Es probable que con la aplicación de un rango específico de frecuencias, el Vibrador pueda obtener resultados en donde no se obtienen con otro método. Igualmente podría anticiparse que si el procedimiento se adapta a exploraciones marinas y puede vibrarse con efectividad dentro del agua o en el fondo del mar, se evitarían los efectos de "Reverberación", de "Reflejos Múltiples" y de "Alta Frecuencia", que constituyen actualmente un problema en las exploraciones de este tipo.

#### BIBLIOGRAFIA

- NEITZEL, EDWIN B. Seismic Reflection Records Obtained by Dropping a Weight. GEOPHYSICS, Vol. XXIII, No. 1 (January 1958).
- DOMENICO, S. N. Generation of Seismic Waves by Weight Drops. GEOPHYSICS, Vol. XXV, No. (February 1958).

# “FORO ABIERTO”

## TEORIA DEL NIVEL

Por el *Dr. Honorato de Castro B.\**

Supongamos que un nivel de patas iguales se apoya sobre una línea horizontal. Supongamos que la burbuja tenga una longitud igual a  $2d$  divisiones del nivel, y que está el cero del mismo a una distancia igual a  $p$  divisiones del punto más alto y a su derecha. Si llamamos  $A$  y  $B$  a las lecturas hechas en los extremos de la burbuja,  $A$  la de la izquierda y  $B$  la de la derecha, serán:

$$\left. \begin{aligned} A &= d + p \\ B &= d - p \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

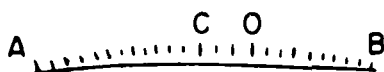


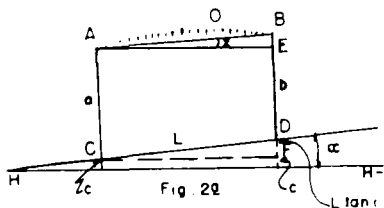
Fig. 1a.

Las lecturas hechas en los extremos  $A$  y  $B$  pueden variar o porque el nivel tenga las patas desiguales, o porque se apoye sobre una línea no horizontal, o por las dos razones a la vez. Lo general será que se cumpla esta última hipótesis y vamos, en tal caso, a determinar por medio de un nivel de patas desiguales el valor del ángulo  $\alpha$  que forma con el horizonte la línea sobre la que se apoya el nivel.

Supongamos que un nivel de patas desiguales  $a$  y  $b$  y longitud  $L$  se apoye sobre una línea  $C D$  (fig. 2a.) que forme con el horizonte un ángulo  $\alpha$ . En tal caso, si llamamos  $c$  a la altura del punto  $C$  sobre la horizontal  $H H'$  tendremos que las alturas de  $A$  y de  $B$  serán:

$$\text{La de } A \quad a + c \quad (2)$$

$$\text{La de } B \quad b + c + L \tan \alpha$$



\* Geofísico, Gerencia de Exploración, Petróleos Mexicanos.

Cuando el ángulo  $\alpha$  sea muy pequeño podremos, sin error sensible, sustituir el arco por la tangente con lo que tendremos para altura de B el valor:

$$(3) \quad b + c + L \alpha$$

El triángulo A B E nos permite deducir el valor del ángulo  $x$  por la expresión

$$(4) \quad \text{tag } x = \frac{B E}{L} = \frac{B F - E F}{L} = \frac{b + c + L \alpha - (a + c)}{L} = \frac{b - a}{L} + \alpha$$

y cuando el ángulo  $x$  sea muy pequeño, tendremos:

$$(5) \quad x = u + \alpha$$

en donde llamamos  $u$  al cociente  $\frac{b - a}{L}$

Supongamos ahora que invertimos el nivel de modo tal que la pata de longitud  $a$ , que suponíamos situada a la izquierda, pase a la derecha, y la  $b$ , que estaba a la derecha pase a la izquierda.

En tal caso el ángulo  $x$  se habrá transformado en otro  $x'$  que se obtendrá de las fórmulas (4) y (5) sin más que sustituir en ellas  $b$  por  $a$  y  $a$  por  $b$ . Así pues será

$$(6) \quad x' = \frac{a - b}{L} + \alpha = \alpha - u$$

Los valores (2) corresponden a las lecturas hechas en los extremos de la burbuja cuando el nivel se apoya sobre una línea horizontal; mas si damos a la línea A B de la figura primera una inclinación  $x$  para colocarla en la posición de la figura segunda, la burbuja se correrá hacia la derecha, recorriendo un arco que corresponderá al ángulo  $x$ . Si el radio del nivel fuese  $r$ , el movimiento de la burbuja será  $r x$  por ser el arco igual al radio por el

ángulo. Así pues, las lecturas de los extremos A y B de la burbuja, serán ahora:

$$\begin{aligned} A &= d + p - r x = d + (p - r u) - r \alpha \\ B &= d - p + r x = d - (p - r u) + r \alpha \end{aligned} \quad (7)$$

En la posición inversa del nivel haremos en los extremos de la burbuja lecturas semejantes a las (7) que se obtendrán cambiando x por x'. Así pues serán:

$$\begin{aligned} B' &= d - p - r x' = d - (p - r u) - r \alpha \\ A' &= d + p + r x' = d + (p - r u) + r \alpha \end{aligned} \quad (8)$$

Si en la primera posición del nivel estuviese B del lado del extremo círculo, en la segunda posición lo estaría A'. Si damos signo positivo a los valores B y A' y negativo a los B' y A, tendremos:

$$(B + A') - (B' + A) = (2d + 2r\alpha) - (2d - 2r\alpha) = 4r\alpha$$

de donde

$$\alpha = \frac{B - B' + A' - A}{4r} \quad (9)$$

El valor de  $\alpha$  de la (9) está expresado en radianes pues procede de haber tomado el arco por la tangente, y el numerador del segundo término está expresado en divisiones del nivel. Para tener expresado en segundos de arco el valor de  $\alpha$  habremos de multiplicar la (9) por 206 265, que es el número de segundos de un radiante, y por el valor en segundos de la división del nivel. Así pues, el valor de  $\alpha$  en divisiones del nivel será:

$$a = \frac{B - B' + A' - A}{4} \frac{206\ 265}{r}$$

El valor del último factor  $\frac{206\ 265}{r}$  que es igual al número de se-

gundos de una división del nivel, será preciso determinarlo utilizando el comparador de niveles.

Debemos hacer notar que si es B el extremo que en la primera posición está más alto, será A' el que lo estará en la posición invertida y como tanto B como A' figuran en la fórmula con signo positivo y las lecturas opuestas B' y A con signo negativo, podemos deducir la siguiente regla:

Hagamos las lecturas en la primera posición del nivel; demos signo positivo a una de ellas (por ejemplo a la que está más próxima al círculo de alturas) y negativo a las opuestas. Inviértase el nivel y dése ahora el signo positivo a la lectura del extremo que está ahora más cerca del extremo círculo y negativo a la opuesta. La altura sobre el horizonte del extremo círculo del eje de muñones será igual a la cuarta parte de la suma algébrica de los valores antedichos, expresada en divisiones del nivel.

Si suponemos que durante la operación no cambia la temperatura, no cambiará tampoco la longitud de la burbuja y por tanto será

$$A + B = A' + B'$$

o sea

$$A - A' = B' - B$$

y teniendo en cuenta esta expresión en el valor de  $\alpha$  será:

$$\alpha = \frac{1}{4} (A' + B - A - B') = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (A' - A) + \frac{1}{2} (B - B') \right]$$

o sea

$$\alpha = \frac{1}{2} (A' - A) = \frac{1}{2} (B - B').$$

Cuando cambia la temperatura durante la observación, procede hacer tres nivelaciones de modo que en la primera y tercera el extremo A del nivel se halle al mismo lado del extremo círculo y en la segunda debe quedar del lado opuesto. Fórmense para lecturas de los extremos de la burbuja en una posición el promedio de las correspondientes a la primera y tercera y combínense estos promedios con las lecturas de la segunda para obtener el valor de  $\alpha$ .



**Honorato de Castro Bonel.**

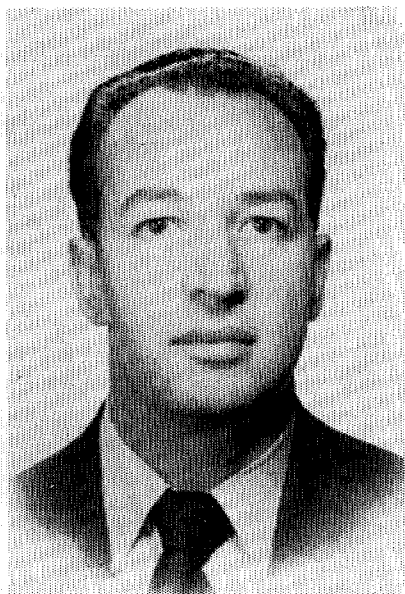
Doctor en Ciencias Exactas por la Universidad de Madrid. Fué astrónomo del Observatorio Astronómico de Madrid. Catedrático de las Cátedras de "Cosmografía y Física del Globo", de "Astronomía Esférica y Geodesia", de "Geografía matemática", de la Universidad de Madrid. Académico de la "Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid" y muchas Instituciones científicas. Actualmente Geofísico de Petróleos Mexicanos.

**Santos Figueroa H.**

Se graduó como Ingeniero Mecánico-Electricista en el Instituto Politécnico Nacional de México en 1935.

En 1936 empezó a trabajar con la Cía. Mexicana de Petróleo "El Aguila" como operador sísmico.

Después de la Expropiación de la Industria Petrolera trabaja como Geofísico en Petróleos Mexicanos y es actualmente el Jefe del Departamento Geofísico de esta Institución. Es Presidente de la A. M. G. E. desde el principio del año.



**SOCIO FUNDADOR**

Ing. Guillermo P. Salas Guerra.  
Sierra Gorda No. 12.  
Lomas de Chapultepec.  
México 10, D. F.

**NUEVOS SOCIOS**

Ing. Oscar Lozano Martínez.  
Calle 21 No. 114 Bis Depto. 2.  
San Pedro de los Pinos.  
México 18, D. F.

Ing. Fernando Ríos Macbeth.  
Odesa No. 902.  
México 13, D. F.

Ing. Teófilo Vera Reyes.  
Sur 71-B No. 142.  
México 13, D. F.

Ing. Ernesto López Ramos.  
Tehuantepec No. 71-A.  
México 7, D. F.

Ing. Rufino Sánchez López.  
Anémona No. 14, Col. Tlatilco.  
México 16, D. F.

Ing. Ricardo Acosta Estévez.  
Monte Albán No. 98.  
México 12, D. F.

Ing. Sergio de los Santos Vázquez.  
Multifamiliar para Maestros Depto. 12.  
Ciudad Universitaria.  
México 20, D. F.

Ing. Javier Meneses de Gyves.  
Parque España No. 3 Depto. 7.  
México 11, D. F.

Ing. Luis E. Lara Trujillo.  
Reforma 816 No. 3.  
Colonia Centinela.  
México 21, D. F.

# SCHLUMBERGER SURENCO - S. A.

---

AGENCIA EN MEXICO

Av. Morelos 98, Desp. 201

MEXICO 1, D. F.

Tels.: 46-85-25 y 46-13-85

## I. - CONVENCION DE LA ASOCIACION MEXICANA DE GEOFISICOS DE EXPLORACION

---

Fecha - Noviembre de 1961

---

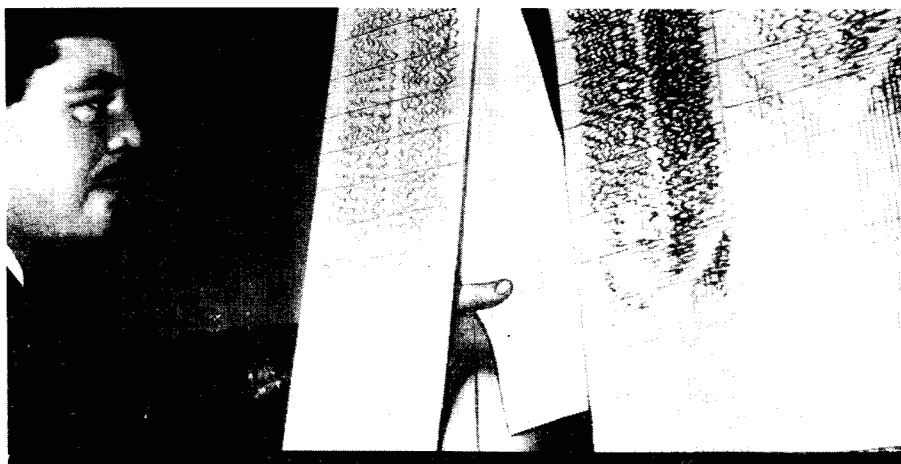
Agradeceremos su Cooperación enviándonos  
con oportunidad Artículos Técnicos.

La exploración sismológica se acelera con ...

# Seismo-Writ

Du Pont

**Papel foto-registrador  
de mayor rapidez y mejor contraste**



Ahora, las brigadas de exploración emplean menos tiempo en cada registro ... exploran áreas mayores y obtienen registros más claros y precisos, gracias a los adelantos que ofrece el papel foto-registrador Seismo-Writ, de Du Pont:



**MAYOR RAPIDEZ DE  
EXPOSICION Y REVELADO.**



**RESISTENCIA AL CALOR  
Y LA HUMEDAD.**



**INDEFORMABLE.  
NO SE AGRIETA.**



**NO TIENE  
MANCHAS.**

Además, el papel foto-registrador Seismo-Writ de Du Pont, viene en prácticos cilindros protegidos por una bolsa impermeable, de polietileno, que asegura el buen estado del papel aún en adversas condiciones de calor o humedad.

Para mayores informes dirijase a:

**Du Pont, S. A., de C. V.**

**Av. Juárez 117**

**México 1, D. F.**



**Cosas mejores para vivir mejor**

*... gracias a la Química*



SOCIOS

\$100.00

NO SOCIOS

\$150.00

ADQUIERA UD. SU VOLUMEN CON  
LOS 4 BOLETINES DEL AÑO 1960,  
EMPASTADO EN KERATOL, CON SUS  
INICIALES GRABADAS EN ORO

PEDIDOS A LA  
ASOC. MEX. DE GEOF. DE EXPL.

# GEOEXPLORACIONES, S. A.

SERVICIOS:

GEOFISICOS

GEOLOGICOS

RADIATIVOS

TOPOGRAFICOS

FOTOGEOLOGICOS

AVE. JUAREZ 117 - 502      TEL. 46 - 11 - 81

APDO. 20902      MEXICO 1. D. F.

# EXPLORACIONES, S. A.

AVE. JUAREZ 100      DESP. 315

TEL. 10 - 15 - 64

MEXICO 1, D. F.

# PERFORACIONES, S. A.

Av. Juárez 119 Desp. 53      Tel. 21-36-42

México l. D.F.

## "ROTENCO"

ROTARY ENGINEERING DE MEXICO, S. A.

AL SERVICIO DE PETROLEOS MEXICANOS

Av. Juárez 119 Desp. 31-32

Tels. 46-44-19  
21-58-36

México l. D.F.

**...SISMOLOGIA... GRAVIMETRIA... GEOQUIMICA... MAGNETOMETRIA...**

**...SUE\***

**...PROCESADO DE DATOS**

**MAE\*\***

**AREAS:—Grandes o pequeñas, marinas o terrestres.**

**PROBLEMAS:—Técnicos u operacionales.**

**INFORMACION:—Superficial o profunda.**

**FORMA:—Utilizando los métodos y equipos más modernos  
compatibles con áreas y presupuestos.**

**GEOPHYSICAL**

**SERVICE**

**INCORPORATED**

Exchange Bank Bldg.,  
100 Exchange Park North.  
DALLAS 35, TEXAS.  
Tel. Fleetwood 7-4311

Avenida Juárez No. 119,  
Despacho 42,  
Tels. 46-37-20 - 21-74-67  
MEXICO 1, D. F.

\* Seismic Underwater Exploder

\*\* Multiple Analyzer Eliminator.

# **CURSO DE SISMOLOGIA APLICADA**

**Por el Ing. V. A. OLHOVICH**



**En las principales librerías**

**o directamente en la**

**ASOCIACION MEXICANA DE GEOFISICOS DE EXPLORACION**

**Av. Juárez 97. Desp. 302.**

**México 1, D. F.**