

# CONSULTORES Y CONTRATISTAS DE EXPLORACIONES GEOFISICAS

•

PETROLEO

MINERALES

AGUA SUBTERRANEA

Y

APLICACION A LA INGENIERIA CIVIL

•

SERVICIOS GEOFISICOS, S. A. DE C. V.

AV. JUAREZ 97 DESPACHO 302

TELS. - 18 - 41 - 41 Y 12 - 89 - 70

MEXICO 1, D. F.

# COMPAÑIA MEXICANA AEROFOTO, S. A.



## ESPECIALIDADES

Cartografía  
Catastro urbano y rural.  
Cálculo electrónico  
Diseño fotogramétrico electrónico  
de obras de Ingeniería.  
Estudios preliminares  
Fotointerpretación.  
Fotografía aérea: pancromática,  
Infrarroja y a color.  
Fotografía comercial aérea  
Fotomurales.  
Levantamientos fotogramétricos  
Localización de obras.  
Mosaicos fotográficos.  
Programación electrónica.  
Topografía

132 empleados especializados.

## EQUIPO

- |  |   |
|--|---|
| 1 Avion Queen Air A-80 Mat. XB-XAK       | 4 Cámaras de Reproducción                             |
| 1 Avion Riley Rocket, Mat. XB-SAR        | 3 Unidades de Telurómetro MRA-3                       |
| 1 Avion Beech Craft Mat. XB-VIG          | 4 Teodolitos Wild T-2                                 |
| 2 Aviones Piper Aztec Mat. XB-MOJ y NOO  | 2 Niveles automáticos Wild NAK-2                      |
| 1 Avion Cessna 185 Mat. XB-TIS           | 4 Camionetas doble tracción                           |
| Unidad Central de Proceso IBM 1131       | 2 Autógrafos Wild A-7 con Registradora de coordenadas |
| Lectora-perforadora de tarjetas IBM 1442 | 1 Estereo cartógrafo Wild A-8                         |
| Unidad Impresora, IBM, 1132              | 1 Autógrafo Wild A-9                                  |
| 1 Cámara Fotogramétrica Zeiss MRK-A      | 4 Autógrafos Wild B-8                                 |
| 1 Cámara Fotogramétrica Wild RC-9        | 1 Bauplex 760, de 7 proyectores                       |
| 1 Cámara Fotogramétrica Wild RC-8        | 2 Keish K-5, de 4 proyectores c. u.                   |
| 1 Cámara Fotogramétrica Wild RC-5        | 3 Keish K-1, de 2 proyectores c. u.                   |
| 3 Cámaras Fairchild                      | 2 Multiplex de 8 proyectores c. u.                    |
| 4 Cámaras para fotografía oblicua        |   |
| 5 Cámaras Rectificadoras                 |   |

### DIRECCION

Av. Obrero Mundial Num. 538 esq. con Pestalozzi.  
Teléfonos: 43 38-33 con tres líneas directas y 19-87-45.  
Cable: AEROFOTO, MEXICO MEXICO 12, D. F.  
Servicios Aéreos, Ave. Santos Dumont Num. 212

**SCHLUMBERGER**

# SCHLUMBERGER SURENCO, S. A.

## AGENCIA EN MEXICO

Av. Morelos 98, Desp. 306

Tels.: 46-85-25 y 46-13-85

MEXICO 6, D. F.

**GEOFISICOS CONSULTORES PARA  
PETROLEOS MEXICANOS**



*Seismograph Service Corporation  
of Mexico*

**AVE. JUAREZ 95 - 207 • MEXICO 1, D.F.  
TELEFONOS : 18-27-25 • 18-56-33**

**SUBSIDIARIA DE  
SEISMOGRAPH SERVICE CORPORATION  
6200 East 41st. St. • Box 1590 • Tulsa, Oklahoma, U.S.A.**

**ESPECIALIZADOS EN :**

**SERVICIO DE  
GEOFISICA**

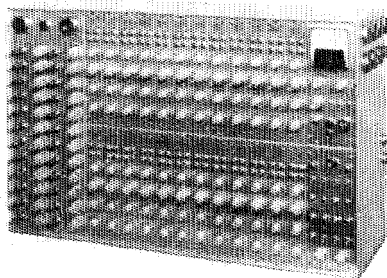
- Levantamientos :**
- Sismológicos
  - Gravimétricos
  - Magnetométricos
  - Procesado de Datos Magnéticos
  - LORAC - Levantamiento Electrónico

**SERVICIO DE  
REGISTRO DE POZOS**

- Registros para Evaluación de Formaciones
- Registros de Pozos de Producción
- Servicio de Terminación Permanente
- Registro Continuo de Velocidad

# INSTRUMENTAL GEOFISICO . . . . .

DA MEJOR  
RENDIMIENTO,  
MAYOR DURACION  
Y A UN COSTO MENOR



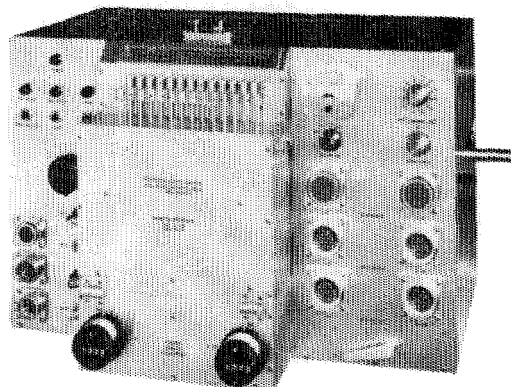
## FORTUNE T-1. SISTEMA DE AMPLIFICADORES SISMICOS TRANSISTORIZADOS PARA TRABAJOS DE REFLEXION Y REFRACCION.

**BAJO COSTO** — El modelo T-1 es el amplificador transistorizado más barato en el mercado.

**POCO PESO Y TAMAÑO REDUCIDO** — El equipo T-1 de 24 canales, completo, pesa únicamente 73 libras (33.1 Kgs.) y está contenido en una sola caja, cuyas dimensiones son: 25 3/8" de largo, 15 3/4" de alto y 8" de fondo.

**ALTA SENSIBILIDAD** — Como el ruido propio del equipo es muy bajo, es posible operar con altas ganancias. La relación de señal a ruido, en los amplificadores, es de 20 db a 0.5 microvolts de entrada.

**POTENCIA REQUERIDA** — 2 amperes, a 12 volts de corriente directa.



## FORTUNE DC-2B. SISTEMA DIRECTO DE GRABACION Y REPRODUCCION.

### COMPLETAMENTE TRANSISTORIZADO

El equipo DC-2B es capaz de aplicar, simultáneamente, correcciones estáticas y dinámicas a 24 trazas o más, empleando cintas normales de 6 1/2 ó 7" de ancho. Las correcciones dinámicas se aplican mediante una leva acoplada a la flecha del tambor y que puede ser referida a él. También es posible obtener levas previamente calibradas y ajustadas a determinada función analítica.

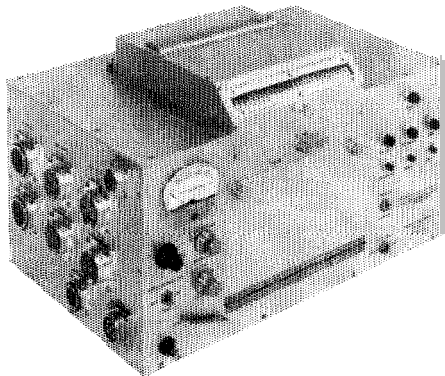
**SE AJUSTA A CUALQUIER SISTEMA DE TIRO** — No importa el sistema de tiro empleado, ya que mediante una barra universal de tendidos y gracias a medidores ajustables (calibrados en por ciento), es posible aplicar a cada traza la corrección dinámica adecuada.

### ESPECIFICACIONES DEL MODELO DC-2B.

Transportador de la cinta. Mediente tambor, cuyo diámetro es de 7.5".  
Número de canales. 24 sísmicos, 2 ó 4 auxiliares.  
Tamaño de la cinta. 6 1/2 ó 7" de ancho por 24 1/2" de largo.  
Distancia entre pistas. 1/4" (de centro a centro).  
Velocidad de la cinta. 3.59"/segundo.  
Tiempo útil de grabación. 6 seg. (el tambor da una vuelta completa en 6.6 seg.).  
Corrección dinámica máxima. 150 miliseg.  
Característica del motor. De histéresis de 400 ciclos.  
Corrección máxima. Acoplado al tambor.  
Rango de corrección estática. 700 miliseg/segundo.  
Polarización (bias). ± 50 miliseg.  
Respuesta. 8 miliamperos a 11 Kilociclos.  
Relación de señal a ruido. De 5 a 200 cps.  
Distorsión armónica total (a 100% el nivel de grabación). 50 db RMS a RMS.  
Alimentación cruzada (cross feed). 2.5%.  
Grado de exactitud del sistema de tiempo. 36 a 10 cps.  
Necesidades de entrada (a 100% el nivel de grabación). ± 1 miliseg.  
Salida (a 100% el nivel de grabación). 50 milivolts a través de 40 ohms.\*  
Potencia requerida. 0.5 amper en vacío y 14 amperes a 50 ohms.  
Tamaño del transportador de la cinta. 15 X 18 X 14".  
Peso. 90 libras (40.823 Kgs.).

\* Al ordenar un equipo, las necesidades de entrada pueden ser cambiadas al gusto del cliente. Esto puede hacerse sin cambiar las demás especificaciones.

# ....DE "FORTUNE ELECTRONICS"



## FORTUNE SR-5. SISTEMA DE GRABACION DIRECTA EN UNA UNIDAD "BUFFERLESS" (DE MENOR AMORTIGUAMIENTO).

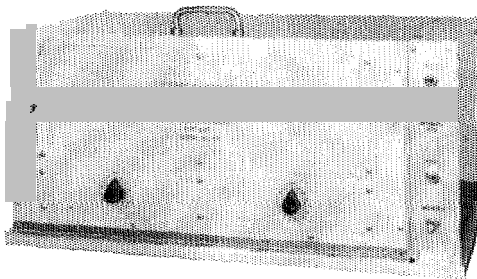
**TOTALMENTE TRANSISTORIZADO** — La grabadora SR - 5 ofrece los últimos adelantos en sencillez de manejo, presentando características iguales a las de sistemas más costosos y complicados.

**PRECISION Y SENCILLEZ** — Durante el proceso de grabación, las cabezas magnéticas están gobernadas desde la salida de los amplificadores sísmicos. Para las reproducciones, las cabezas son conectadas directamente a la entrada de los amplificadores. La reproducción queda compensada mediante una red pasiva. La ventaja de todo este tipo de operación es que se obtienen resultados con un mínimo de complicaciones y conexiones.

**UN SISTEMA COMPLETO** — El modelo SR - 5 está equipado con sistemas Fortune de polarización y manejo, los cuales han sido probados cientos de veces en diferentes partes del Mundo. La unidad contiene los amplificadores necesarios para grabar instante de explosión, tiempo vertical y escala de tiempo. Tiene conexiones exteriores para diversos circuitos, tales como la acción de la supresión a partir del instante de tiro, el arranque de la cámara, etc., todo ello a base de levas. Para acoplar el SR - 5 a un equipo convencional, lo único que se requiere es un juego de cables interconectores.

## ESPECIFICACIONES DEL MODELO SR-5.

Transporte de la cinta. Mediante tambor, cuyo diámetro es de 7.5".  
 Número de canales. 24 sísmicos y 2 ó 4 auxiliares.  
 Tamaño de la cinta. 6 1/2 ó 7" de ancho por 24 1/2" de largo.  
 Velocidad de la cinta. 3.59"/segundo.  
 Tiempo útil de grabación. 6 seg. (el tambor da una vuelta completa en 6.6 seg.)  
 Características del motor. De histéresis de 400 ciclos. Acoplado al tambor.  
 Polarización (bias). 8 miliamperes a 6 kilociclos.  
 Respuesta. De 5 a 200 cps.  
 Correcciones estáticas (opcional). ± 100 milliseq.  
 Relación de señal a ruido. 50 db RMS a RMS.  
 Distorsión armónica total. (A 100% el nivel de grabación. 2.5%  
 Alimentación cruzada. (Cross feed). Con entrada de 100%. -36 db a 10 cps.  
 Nivel de grabación. 50 millivolts a través de 40 ohms.  
 Potencia requerida. 0.5 amper en vacío y 6.5 amperes con carga.  
 Medida del transportador de la cinta. 11 x 18 1/2 x 11 1/4".  
 Peso. 53 libras (24.040 kgs.).



## FORTUNE — LDR.

### MICROPISTA - 1 (UNIDAD DE DOS TAMBORES)

**PARA USARSE EN OFICINAS O EN EL CAMPO**  
 La serie LDR se obtiene en uno, dos o tres tambores. También existe el tipo de un solo tambor ancho, con 54 cabezas de micropista, capaz de manejar, simultáneamente, una cinta ancha o dos cintas angostas.

Cada cabeza de micropista graba sobre un ancho de 0.006", teniendo para su control lateral hasta 20 posiciones, en forma manual o automática.

Actualmente los modelos LDR llevan 15, 12 y 6 pasos, pudiendo instalarles cabezas de doble micropista, para grabación simple o doble.

Si se desean combinar los resultados de diferentes pozos de tiro, para puntos de reflexión común (common depth point), es posible agregarle al equipo conexiones programadas y amplificadores de transcripción.

Para el sistema anterior (de punto común) o trabajos de caídas de peso (weight drop), pueden combinarse los modelos LDR - 1 y DC - 2B, obteniendo así un equipo sísmico completísimo.

*Fortune  
Electronics, Inc.*

H. H. HAPPEL -- H. H. HAPPEL, Jr.

2505 SOUTH BOULEVARD, HOUSTON, TEXAS

Representante en Europa:

Techmation

113 Rue Lamarck, Paris, Francia.

Carlos Alemán A.

EXPLORACION

y

PERFORACION

Iturbide No. 36 Desp. 201. Tel. 10-15-64

MEXICO 1, D. F.

# BOLETIN

de la

## Asociación Mexicana de Geofísicos de Exploración

---

### S U M A R I O

Principios Teórico-Básicos de Modernos Sistemas de Control Automático para Equipos Sísmicos, por el Ing. *A. J. Hermont.*

“FORO ABIERTO”

Carta al Editor: “Una Aplicación Ejemplar del Algebra de los Sistemas”, por el Ing. *F. Neri España.*

Nuevos Socios.

# ASOCIACION MEXICANA DE GEOFISICOS DE EXPLORACION

## *MESA DIRECTIVA PARA EL PERIODO 1965-1966*

Presidente: Alfonso Cornejo Toledo.

Vice-Presidente: Armando Eguía Huerta.

Vice-Presidente Especial: José Coffin Otero.

Secretario: Jorge Lázaro Nájera Villa.

Tesorero: Roberto Oñate Espinosa.

Vocal de Minas: Jorge Suárez Rodríguez.

Vocal de Petróleo: Antonio Cordero Limón.

Vocal de Ingeniería: Mariano Hernández Moedano.

Editor: Daniel Gutiérrez Gutiérrez.

Presidente Saliente: Guillermo Hernández Moedano.

---

Este Boletín se publica cada tres meses y se distribuye gratuitamente a los socios.

El precio de subscripción para no socios es de \$ 150.00 m/n al año y  
de \$ 50.00 m/n número suelto.

---

Para todo asunto relacionado con el Boletín: manuscritos, asuntos editoriales, subscripciones, descuentos especiales a bibliotecas públicas o de Universidades, publicaciones, anuncios, etc., dirigirse a:

ING. DANIEL GUTIERREZ GUTIERREZ

Av. Juárez No. 97, Despacho 302.

Teléfonos 18-41-41 y 12-89-70

México 1, D. F.



# PRINCIPIOS TEORICO-BASICOS DE MODERNOS SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO PARA EQUIPOS SISMICOS \*

Por *A. J. Hermont* \*\*

## RESUMEN

Se estudian los aspectos teóricos relativos al control de los amplificadores sísmicos modernos, con el objeto de apreciar mejor y evaluar críticamente su funcionamiento en el campo.

Se explican el principio básico de la retroalimentación y sus elementos, y se establecen las especificaciones para un sistema sísmico ideal. Se supone de manera heurística que existe una relación logarítmica entre la función controlante y la magnitud física controlante, y se estudia el establecimiento del concepto de referencia.

Con esta base, el estudio del diagrama de bloque del “modelo” sísmico real da como resultado una relación entre la función controlante y el nivel de entrada.

Este es el fundamento de la ecuación diferencial del sistema, la cual se da en sus formas exacta y aproximada.

Para mayor generalidad, desde el principio se supone un sistema con dos constantes de tiempo.

---

\* N. del E. Este artículo se publica en traducción española por cortesía y con la autorización de la SHELL DEVELOPMENT COMPANY, Compañía a la cual expresamos nuestro agradecimiento.

\*\* Shell Development Company (A Division of Shell Oil Company), Exploration and Production Research Division, Houston, Texas (Publication No. 398).

La solución de la ecuación diferencial aproximada se ha basado en el método de la transformación de Laplace. Para facilitar la comprensión del texto, algunos de los teoremas fundamentales, cuando han sido aplicados, se enuncian sin demostración.

La función de control (del tiempo) se refiere a las dos constantes de tiempo, a las diversas ganancias, y a la función de entrada.

Entonces se desarrolla la respuesta para el estado de régimen permanente, y se presenta un ejemplo numérico. Después se estudia la respuesta a un pulso en forma de escalón (step function), y el examen de la porción violenta o estallido ("burstout") conduce al estudio del concepto "velocidad de reacción", basado en la respuesta al pulso escalón

Inmediatamente después se desarrolla la respuesta a funciones de entrada con decrecimiento exponencial, examinándose un ejemplo que se aplica de modo realista a la práctica de la sismología, y luego se estudian en detalle las razones del mal funcionamiento del sistema bajo las condiciones supuestas.

Finalmente, y aunque el modelo sea esencialmente estable, se estudia el fundamento del importantísimo criterio de estabilidad, y luego se examina la estabilidad de un sistema de tres constantes de tiempo.

Se espera que con la mejor comprensión de los sistemas de control, se apreciarán mejor las notables características de funcionamiento de algunos de los amplificadores sísmicos de alta calidad que ahora produce la industria, y que se aclaren las causas de las deficiencias de otros.

## INTRODUCCION

El control automático de ganancia de los amplificadores sísmicos presenta problemas singulares al arte de la sismología y ha estado en desarrollo durante más de 30 años. El desarrollo aun se encuentra en proceso. Es una cuestión relativamente fácil la de inventar y construir uno de estos sistemas de control, pero cuando se le investiga experimentalmente, los resultados pueden ser decepcionantes en uno o en varios aspectos. Además, el estudio adicional puramente experimental, en general no proporciona una solución satisfactoria. Solamente los estudios experimental y teórico simultáneos pueden lograr éxito

al desarrollar una visión profunda de los problemas generales específicos del control.

La reciente tendencia general de la industria a ofrecer sofisticados y nuevos sistemas sismológicos se basa no solamente en la novedad y mejoramiento de ciertos elementos (especialmente el transistor), sino también en nuevos conceptos.

Este conocimiento teórico ha sido adquirido en el campo afín de los sistemas de control a retroalimentación lineal, el cual ha estado bajo una investigación intensiva durante el período en que los amplificadores fueron desarrollados.

Vale la pena entonces estudiar los aspectos teóricos del sistema de control de los modernos amplificadores sísmicos, para poder apreciar mejor y evaluar críticamente su comportamiento en el campo.

### DIAGRAMA BASICO EN BLOQUE

Partiendo de los conceptos del control a retroalimentación y aceptando por el momento una completa linealidad, tenemos la situación que se muestra en la figura 1. En el amplificador sísmico, se aplica un voltaje de referencia a la entrada de un dispositivo sensible al error o comparador (punto sumador), y el error alimenta un sistema de control capaz de tener variaciones. La entrada modificada o "controlada" se aplica al amplificador (sistema controlado).

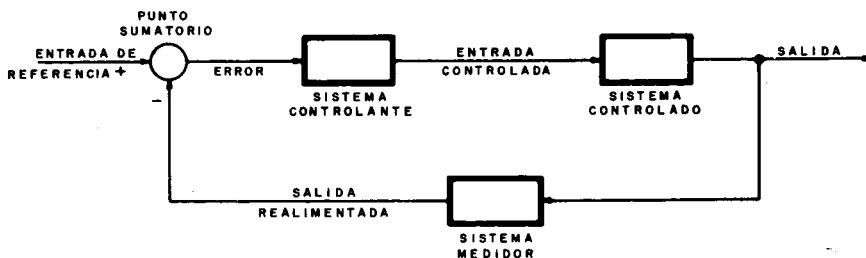


Fig. 1 - Diagrama en bloque de la realimentación

La salida es retroalimentada hacia el dispositivo sensible al error (o comparador) por medio del sistema medidor que, dicho en general, consiste de un amplificador, un rectificador, y un dispositivo para el almacenamiento de energía, el cual entrega una corriente directa pulsatoria como salida realimentadora al dispositivo sensible al error. Idealmente, cuando la salida es correcta, el error es cero, y cuando la salida no es correcta, el error actúa sobre el sistema de control en forma correctiva.

Sin retroalimentación, el sistema de control se desentiende de su acción controlante; pero con el circuito de retroalimentación en operación, la salida es medida, y la salida realimentadora es automáticamente comparada con la entrada para establecer el error correctivo.

Para comparación, un buen ejemplo tomado de la vida cotidiana puede ser el de una persona que maneja un automóvil. Aquí la entrada de referencia es la dirección del camino que ha de mantener el conductor y ésta se establece en su cerebro (dispositivo sensible al error). La salida es la dirección instantánea del vehículo. Si la dirección se desvía, los ojos del conductor (sistema medidor) aprecian la desviación y transmiten esta información al cerebro, el cual establece el error y ordena a las manos (sistema controlante) hacer girar el volante a manera de corregir la desviación del automóvil (sistema controlado).

## ESPECIFICACIONES BASICAS

Contrariamente a lo esperado, las especificaciones básicas para un sistema ideal de A. V. C. son bien conocidas. ¿Cuál debe ser su rango de capacidades?

Supongamos que el sismómetro más cercano al punto de tiro se encuentre a una distancia de 30 metros. Supongamos además que la primera reflexión se reciba a 0.1 seg., y que la velocidad de la capa inconsolidada (aluvión) sea de 1500 m/seg., mientras que la velocidad de la capa consolidada, la cual podría ser del período Eoceno, digamos, sea de 2260 m/seg. Supongamos también que las densidades permanecen constantes.

La situación se ilustra en la figura 2. Debido al contraste de las impedancias acústicas, la relación de amplitudes entre la onda incidente y reflejada es de

$$\frac{2260 - 1500}{2260 + 1500} \approx 0.2$$

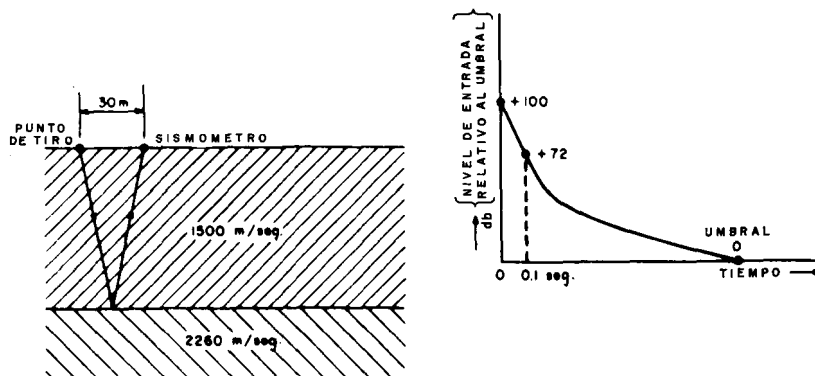


Fig. 2 - Requerimientos para el rango de control

A causa de la geometría, siendo la trayectoria total de 150 m. y como las amplitudes son inversamente proporcionales a la distancia, la relación de amplitud reflejada a directa es:  $30/150 = 0.2$ .

De este modo, puede suponerse que la primera reflexión está 28 db por abajo del primer arribo.

Si se supone además que la reflexión a umbral de control se encuentra 72 db por debajo de la primera reflexión legítima, llegamos a la conclusión de que el rango de control debe ser de 100 db.

Este cálculo está basado en experiencia real.

Es evidentemente deseable que la característica de control del estado estacionario muestre una "meseta" de máximo aplanamiento, lo cual es de especial importancia cuando se graba en cinta magnética.

La rapidez del control debe ser lo suficientemente veloz para adaptarse a la más rápida extinción de señal que pueda esperarse, sin que haya una apreciable "reducción" de la salida, y al mismo tiempo, lo bastante lenta para

conservar la evidencia de la existencia de un estallido (burst) de energía (reflejo).

Estas son las especificaciones más difíciles de llenar por un instrumento verdaderamente universal. Es en esta etapa que se necesita un compromiso apoyado en la experiencia. Podría demandarse una operación perfecta para una rapidez máxima de extinción de la señal de entrada de 200 db/seg. (expansión), y al mismo tiempo, la capacidad para controlar un estallido (burst) de 10 db en 0.1 seg., es decir, a una velocidad de reacción de 100 db/seg. (compresión). Además, la rapidez de control debe ser esencialmente independiente del nivel.

### HIPOTESIS BASICAS

Un tipo de sistema de control que se considera básico se ilustra en la figura 3, donde se indican los elementos dentro de la caja figurativa del sistema controlante.\*

Este último es, en realidad, un arreglo tipo potenciómetro, con  $R$  fija y  $P$  variable. Si se supone  $R \gg P_{m\acute{a}x}$ , se establecen las siguientes relaciones:

$$\text{Salida} \cong \text{Entrada} \times \frac{P}{R}$$

y

$$\text{Atenuación} \cong \frac{R}{P}$$

Adoptando ahora una marcha totalmente heurística, supongamos que  $P$  sea una función exponencialmente decreciente de  $v$ , el voltaje controlante, y que su representación sea

---

\* La entrada se supone ser la señal sísmica después del filtrado y amplificación preliminares.

$$P = P_0 e^{-Kv} = P_{\text{máx}} \cdot e^{-K(v - v_{\text{min}})}$$

en donde  $K$ , dimensionalmente, es  $\text{volt}^{-1}$ . Afortunadamente, tal relación existe en la naturaleza con una buena aproximación. Por ejemplo, si se mira a  $P$  como un diodo polarizado hacia adelante, la resistencia dinámica se aproxima a esta ley, con el voltaje a través del diodo como el exponente.

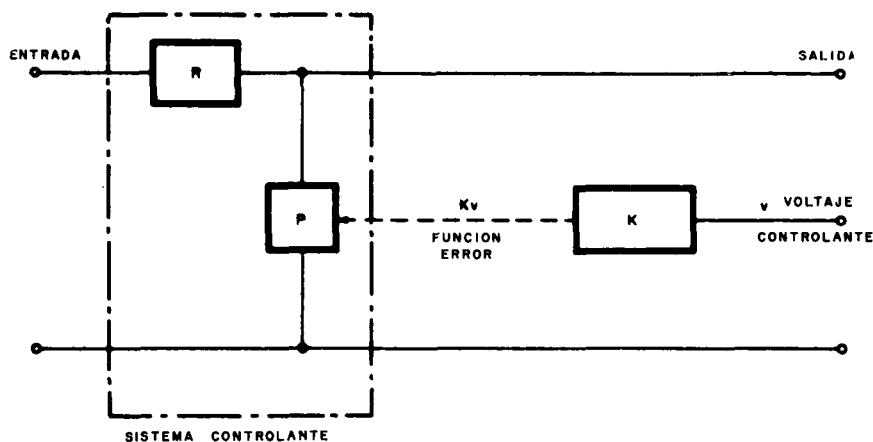


Fig. 3 - Sistema controlante básico.

Supongamos que la resistencia dinámica  $r$  siga la relación abajo expresada con  $u$ , el voltaje a través del diodo:

$$r = r_0 \cdot e^{-u/u_0}$$

la cual está basada en los principios físicos que rigen al flujo de electrones a través de semiconductores. Si el voltaje de control es  $v$ , y  $S$  la resistencia interna del circuito que entrega la corriente  $i$  a través del diodo, entonces

$$v = i S + u$$

ahora solamente en el caso de que la corriente tenga una relación lineal con el voltaje  $v$ , digamos  $i = \alpha v$ , estará  $u$  relacionado linealmente con  $v$ , es decir:

$$u = v (1 - \alpha S)$$

Substituyendo arriba, resulta entonces

$$r = r_0 \exp. - \left[ \frac{1 - \alpha S}{u_0} v \right] = r_0 e^{-Kv},$$

y se ve que  $r$  es una exponencial decreciente, con el voltaje controlante  $v$  como exponente.  $K$  representa  $\text{volt}^{-1}$ , y  $Kv$  no tiene dimensiones.

Si  $P$  es un fotoconductor, la resistencia es una exponencial decreciente, con la densidad del flujo luminoso como exponente; o también  $P$  puede ser un termistor y la ley es aproximada teniendo a la temperatura como exponente.

Para estar más familiarizados con los aspectos cualitativos de la situación, consideremos la figura 4 ya que  $P$ , como función de  $kv$ , es una exponencial decreciente, y la atenuación,  $a$ , una exponencial creciente porque

$$a = \frac{R}{P_0} e^{Kv} = a_{\min} \cdot e^{K(v - v_{\min})}$$

También  $\ln a$  es una función linealmente creciente de  $Kv$ :

$$\ln a = \ln a_{\min} + K (v - v_{\min}),$$

y además

$$\frac{da}{dv} = Kv$$



Es el carácter lineal de la pendiente de la característica atenuación-voltaje, más bien que su disponibilidad en la naturaleza, lo que hace decisiva la elección de la ley exponencial. El significado de esto es que tanto la atenuación como la rapidez de atenuación con el voltaje controlante son, a excepción de un factor constante, la misma función.

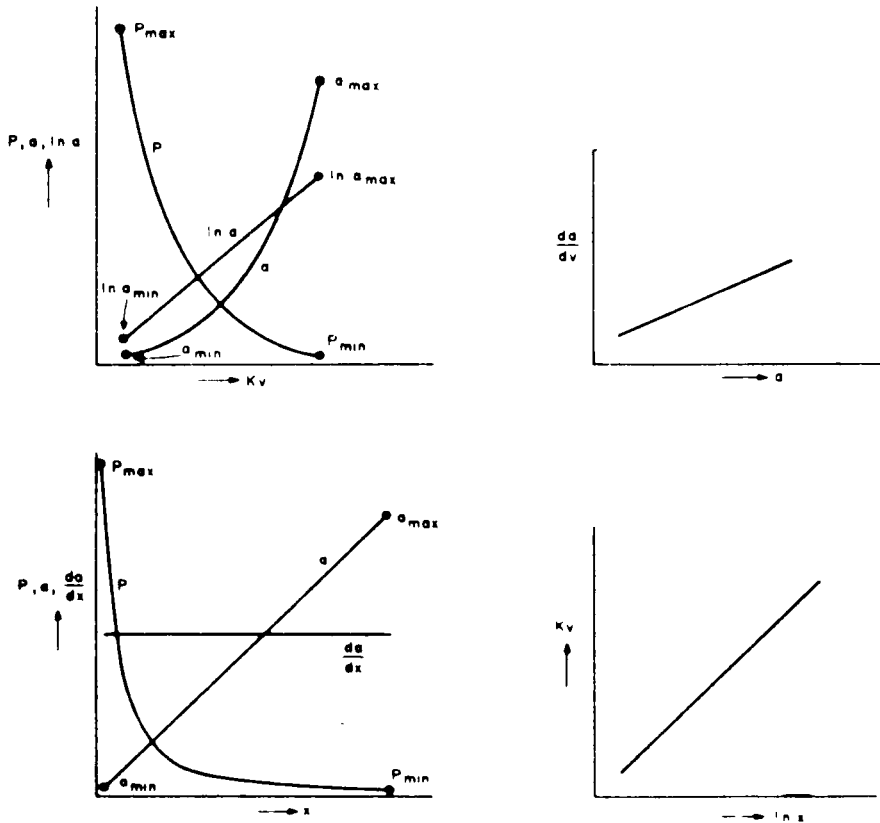


Fig.4 - Relaciones funcionales cualitativas básicas entre los parámetros.

Esto implica que el control tenderá a exhibir el mismo comportamiento para todos los niveles del voltaje de control.

Ahora definamos un parámetro sin dimensiones  $x$ , tal que

$$x = e^{Kv} ; \quad \ln x = Kv \quad (1)$$

así:

$$P = P_0 \frac{1}{x} = P_{m\acute{a}x} \cdot \left( \frac{x_{min}}{x} \right), \quad (2)$$

donde  $x_{min} = e^{Kv_{min}}$ . Además

$$a = \frac{R}{P_0} \cdot x = a_{min} \left( \frac{x}{x_{min}} \right) \quad (3)$$

y

$$\frac{da}{dx} = \frac{a_{min}}{x_{min}} \quad (4)$$

Nótese que la relación entre  $P$  y  $x$  es la ecuación de una hipérbola, y que la relación entre  $a$  y  $x$  es lineal, así como la que hay entre  $Kv$  y  $\ln x$ .

El voltaje de control  $v$  está efectivamente relacionado con la salida, debido a la retroalimentación y, como ya se mencionó, representa una corriente directa pulsante. Un amplificador constituye el sistema controlado, y se encuentra intercalado entre el potenciómetro y la salida.

Además supondremos que todos los amplificadores son simples dispositivos de ganancia, independientes de la frecuencia, esto es, amplificadores de Corriente Directa.

Esta es una hipótesis perfectamente válida para nuestros propósitos.

Otra suposición, implica la introducción del concepto de "nivel de referencia", que se ilustra en la figura 5. Existen muchas maneras de lograr esto, y nosotros meramente esbozaremos el principio. Si  $w_1 =$  señal de información (nivel de voltaje) la cual durante el medio ciclo positivo produce una corriente de información  $i$  (corriente rectificada), supongamos entonces que, esencialmente, esta corriente circula a través de  $S$  y  $R$ , si  $Q \gg S, R$ . Una batería de referencia  $E_r$  produce una corriente de referencia  $i_r$ , la cual circula esencialmente por  $Q$  y  $R$ . La corriente a través de  $R$  y  $C$  en paralelo, la cual determina el voltaje usado para control, es la corriente de error  $i = i_i - i_r$ , así que  $v_e = v_i - v_r$ . Suponiendo por el momento que  $i_i > i_r$  se ve que el condensador se carga positivamente con respecto a tierra. Así  $v_e > 0$  y el sistema tenderá a reajustarse a sí mismo hasta que  $v_e \rightarrow 0$ .

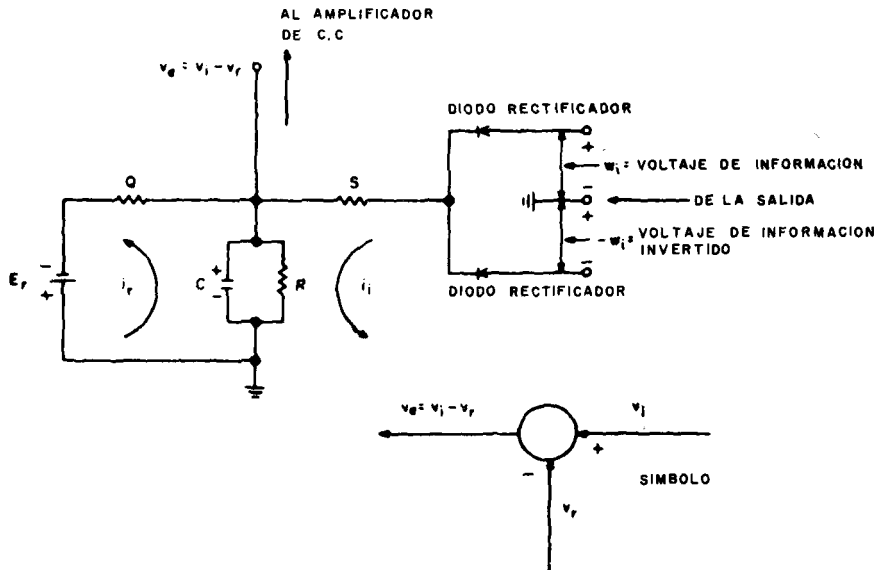


Fig. 5 - Concepto del "Nivel de Referencia"

Cuando relacionamos la señal informativa con la función error, (1) se interpreta como:

$$\ln x_{\epsilon} = Kv_{\epsilon} = (v_i - v_r),$$

y si además definimos

$$\ln x_{\epsilon} = \ln x_i - \ln x_r ; x_{\epsilon} = \frac{x_i}{x_r} \quad (5)$$

$v_{\epsilon}$  se transforma en:

$$v_{\epsilon} = \frac{1}{K} (\ln x_i - \ln x_r) \quad (6)$$

El condensador —como principal dispositivo almacenador de energía— es absolutamente necesario porque, sobre todo, el control nunca debe degenerar a control de amplitud, sino que debe mantener su cualidad de control de volumen.

### ESQUEMA EN BLOQUE DE UN AVC MODELO

El sistema real que será estudiado se ilustra en la figura 6 la cual, en términos generales, está conforme con el diagrama básico de la figura 1.

Las funciones de entrada y salida  $W_1$  y  $W_2$  respectivamente, son funciones del tiempo y se consideran más bien como niveles que como valores instantáneos.

$A_1$  incluye un amplificador, un inversor de fase, y un rectificador de onda completa.

La salida retroalimentada, ya filtrada por ondulación (esto es, promediada en el tiempo), o señal de información, es  $v_i$ . El circuito para realizar el promedio en el tiempo tiene una función de transferencia  $g_1(t)$ . La salida

del dispositivo sensible al error es  $v_{e1}$ , la cual es además usada en el sistema de medida II. El segundo circuito para realizar el promedio en el tiempo, con la función de transferencia  $g_2(t)$ , ha sido introducido porque es inevitable físicamente.

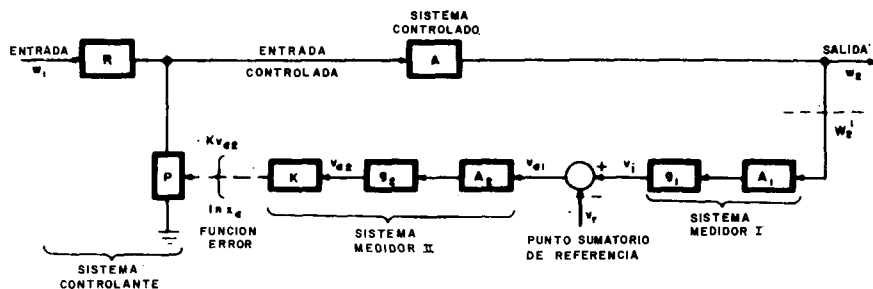


Fig. 6 - Esquema en bloques del AVC modelo para equipos sísmicos.

Podría imaginarse como el tiempo de retraso inherente al mecanismo que transforma a  $v_{e2}$  en la función de control  $Kv_{e2}$  (digamos, el tiempo de retraso en el filamento de la lámpara que produce la iluminación para el fotoconductor).

También ha sido introducido como un dispositivo de almacenamiento adicional, tal vez deliberadamente complicado, para ayudar a efectuar el promedio en el tiempo, y puede llegar a ser significativo cuando se considere la estabilidad. Nuevamente, relacionando la señal informativa con la función error nos da

$$ln x_e = Kv_{e2}, \quad (7)$$

donde

$$v_{e2} = v_{e1} g_2 A_2 \quad \text{y} \quad v_{e1} = v_i - v_r$$

$$\ln x_{\epsilon} = K A_2 g_2 (v_i - v_r)$$

Con la definición (5), ésta se transforma en

$$\ln x_i - \ln x_r = K A_2 g_2 (v_i - v_r)$$

Suprimiendo el subíndice  $i$  de  $x_i$  y de  $\ln x_i$ , resulta:

$$\ln x - \ln x_r = K A_2 g_2 (v_i - v_r) \quad (8)$$

Por otra parte, si seguimos la trayectoria adelante, resulta

$$W_2 = W_1 \frac{P}{R} A = W_1 \frac{P_0 e - K v_{\epsilon_2}}{R} = W_1 \frac{P_0}{R} \frac{1}{x_{\epsilon}} A$$

Por lo tanto

$$V_i = A A_1 g_1 \frac{P_0}{R} \frac{1}{x_{\epsilon}} W_1 \quad (9)$$

Suponiendo  $v_r = v_{ik}$ , es decir que el voltaje de referencia es igual al voltaje de información pulsatorio que se realimenta, a umbral de control, vemos que

$$v_r = W_{ik} A A_1 g_1 \frac{P_0}{R} ,$$

por lo tanto, (8) puede escribirse:

$$\ln x - \ln x_r = K A A_1 A_2 g_1 g_2 \frac{P_0}{R} \left[ \frac{W_1(t)}{x_e} - W_{1k} \right] ,$$

o, con (5),

$$\ln x - \ln x_r = K A A_1 A_2 g_1 g_2 \frac{P_0}{R} \frac{x_r}{x} \left[ W_1(t) - \frac{x}{x_r} W_{1k} \right] \quad (10)$$

El significado de la función error (ecuación 7) no puede ser recalcado en demasía: El sistema de medida convierte al voltaje en salida  $W_2(t)$  en una cantidad física que reacciona sobre la resistencia variable  $P$  de tal manera que su valor disminuye al crecer  $W_2(t)$ , y aumenta cuando disminuye  $W_2(t)$ , de acuerdo con la ley prescrita (ecuación 7). Otro modo de decirlo, es que el voltaje  $v_i$  genera, a través de una transferencia física, una cantidad sin dimensiones  $x_e$ , tal que la atenuación  $a$  del circuito es una función linealmente creciente de  $x_e$ .

### LA ECUACION DIFERENCIAL

Ahora es conveniente pasar desde el dominio del tiempo al dominio complejo  $S$ , donde

$$\mathcal{L} \left( \frac{d}{dt} \right) \rightarrow S = \sigma + j \omega \quad (11)$$

siendo  $\mathcal{L}$  el símbolo de la transformación de Laplace de una función del tiempo. Si una función del tiempo contiene un factor que es aprovechable en el dominio  $S$ , ¿es lícito substituir el operador diferencial  $d/dt$  por  $S$ , y al mismo tiempo continuar en el dominio del tiempo? La validez de este paso queda demostrada por el argumento que se da a continuación:

Supongamos  $f(t) = Bg(t) w(t)$ , de tal manera que  $F(S) = BG(S) w(S)$ .

Sea  $\mathcal{L} [ w(t) ] \rightarrow \frac{w}{S}$ , o sea que se supone que  $w(t)$  es una

función escalón ("Step function"). Supongamos

$$\mathcal{L} [ g(t) ] \rightarrow \alpha / (S + \beta) ;$$

entonces

$$F(S) = B w \alpha \frac{1}{S(S + \beta)},$$

y el par de transformación que se requiere es conocido, ya sea mediante tablas o por algún otro medio. Tenemos entonces, en el dominio del tiempo

$$f(t) = B w \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t})$$

Ahora, en la ecuación original de  $f(t)$  sustituimos el operador  $d/dt$  por  $S$  en  $G(S)$ , dejando a las otras cantidades en el dominio del tiempo. Así

$$f(t) = B w(t) \frac{\alpha}{d/dt + \beta}$$

Por consiguiente, para  $w(t) = w = \text{constante}$ ,



$$\frac{d}{dt} f(t) + \beta f(t) = B \alpha w ,$$

cuya solución general es

$$f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} \left( \int_0^t e^{\beta t} \cdot B \alpha w dt + C \right)$$

Supongamos que  $f(t) = 0$  para  $t = 0$ .

Entonces

$$0 = \frac{\alpha}{\beta} B w + C,$$

y por lo tanto

$$C = - \frac{\alpha}{\beta} B w$$

Por consiguiente, la solución es

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\beta t} \left( \int_0^t e^{\beta t} B \alpha w dt - \frac{\alpha}{\beta} B w \right) = \\ &= B w \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \end{aligned}$$

exactamente como antes.

Del análisis de circuitos en el dominio  $S$ , las funciones de transferencia del circuito de la figura 5 y de otro circuito semejante para la realización del promedio en el tiempo, son:

$$\left. \begin{aligned} G_1(S) &= \frac{1/T_{11}}{1/T_1 + S} \quad \text{y} \quad G_2(S) = \frac{1/T_{21}}{1/T_2 + S}, \\ \text{donde} \\ \frac{1}{T_1} &= \frac{1}{T_{11}} + \frac{1}{T_{12}} = \frac{1}{C_1 S_1} + \frac{1}{C_1 R_1} \\ \text{y} \\ \frac{1}{T_2} &= \frac{1}{T_{21}} + \frac{1}{T_{22}} = \frac{1}{C_2 S_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

de manera que (10) puede escribirse

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_1} \right) \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{T_2} \right) (\ln x_1 - \ln x_r) \\ &= K A A_1 A_2 \frac{P_0}{R} \frac{1}{T_{11} T_{21}} \frac{x_r}{x} \left[ w_1(t) - \frac{x}{x_r} w_{1k} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \ln x + \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \frac{d}{dt} \ln x + \frac{1}{T_1 T_2} (\ln x_1 - \ln x_r) \\ &= K A A_1 A_2 \frac{P_0}{R} \frac{1}{T_{11} T_{21}} \frac{x_r}{x} \left[ w_1(t) - \frac{x}{x_r} w_{1k} \right]. \end{aligned}$$

Por ser

$$\frac{dt}{dt} \ln x = \frac{1}{x} x'$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln x = \frac{1}{x} x'' - \left( \frac{x'}{x} \right)^2 ,$$

y si además definimos

$$M = P_0/R \cdot A \quad (\text{sin dimensiones})$$

y

$$N = KA_1 A_2 \frac{1}{T_{11} T_{21}} \quad (\text{volt}^{-1} \cdot \text{seg}^{-2}) \quad (13)$$

la ecuación diferencial exacta se transforma en

$$\begin{aligned} x'' - \frac{1}{x} x'^2 + \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) x' + \frac{1}{T_1 T_2} (\ln x - \ln x_r + \\ + MNT_1 T_2 w_{1k}) x = MN x_r w_1(t) . \end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden y segundo grado, en la que cada término tiene la dimensión  $\text{Seg}^{-2}$ . Previamente, en relación con (10), se demostró que  $v_r = MA_1 g_1 w_{1k}$ , y de (8) se infiere que  $\ln x_r = KA_2 g_2 v_r = MKA_1 A_2 g_1 g_2 W_{1k}$ , donde  $g_1, g_2$  son las funciones de transferencia del estado permanente, en el dominio del tiempo, mismas que, según (12) son  $g_1 = T_1/T_{11}$ ,  $g_2 = T_2/T_{21}$ . Así  $\ln x_r \equiv MNT_1 T_2 W_{1k}$ . Con esto, la ecuación diferencial exacta se transforma en

$$x'' - \frac{1}{x} x'^2 + \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) x' + \frac{1}{T_1 T_2} x \ln x = MN x_r W_1(t) \quad (14)$$

Es ahora necesario linealizar la cantidad  $x \ln x$ . Se supondrá que  $x$  tiende hacia un "valor neutral"  $x_n$  tal que

$$x = x_n + \Delta x \quad , \quad (15)$$

y se permite que  $x$  difiera de  $x_n$  solamente por una pequeña cantidad  $\Delta x$ .

En la iniciación de un transitorio,  $x_n = x(O)$ , pero  $x_n$  también representa el valor del estado permanente para una  $W_1 = \text{constante}$ , dada.

Así,

$$\begin{aligned} x \ln x &= (x_n + \Delta x) \ln (x_n + \Delta x) = \\ &= (x_n + \Delta x) \left[ \ln x_n \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_n} \right) \right] \cong (x_n + \Delta x) \cdot \\ &\quad \left( \ln x_n + \frac{\Delta x}{x_n} \right) \cong x_n \ln x_n + \Delta x + \Delta x \ln x_n + \frac{\Delta x^2}{x_n} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x \ln x \cong x (1 + \ln x_n) - x_n \quad (16)$$

y

$$x' \cong x'_n \quad .$$

Por consiguiente, la ecuación diferencial aproximada se transforma en

$$\begin{aligned}
 x'' + x' \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) + x (1 + \ln x_n) \frac{1}{T_1 T_2} = \\
 = MN x_r W_1(t) + \frac{1}{T_1 T_2} x_n
 \end{aligned}$$

Es de inmediato aparente que por ser  $(1 + \ln X_n) > 1$ , y que si además se considera invariante a la segunda constante de tiempo  $T_2$ ,  $T_1$  ha sido, en efecto, reducido por la realimentación, lo cual es un hecho observable experimentalmente. El segundo miembro de esta ecuación puede ser transformado más aún.

$$\begin{aligned}
 MN x_r W_1(t) + \frac{1}{T_1 T_2} x_n &= \frac{1}{T_1 T_2} [MN T_1 T_2 x_r W_1(t) + x_n] \\
 &= \frac{1}{T_1 T_2} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n \right] :
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 x'' + \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) x' + \frac{1}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n) x = \\
 = \frac{1}{T_1 T_2} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

La validez de (17) debe ser examinada. Si en (14) añadimos a ambos miembros los términos indeseables  $(1/x) - (x')^2$  y  $-x/T_1 T_2 \ln x$ , y también agregamos los términos deseables  $-(x'_n/x_n)x'$  y  $(x/T_1 T_2) \cdot (1 + \ln x_n)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 x'' - \frac{x'_n}{x_n} x' + \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) x' + \frac{x}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n) &= \\
 = MN x_r W_1(t) + \left( \frac{x'}{x} - \frac{x'_n}{x_n} \right) x' + \frac{x}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n - \ln x),
 \end{aligned}$$

Si hacemos

$$\mu = \left( \frac{x'}{x} - \frac{x'_n}{x_n} \right) x' + \frac{x'}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n - \ln x),$$

otra forma de la ecuación exacta es

$$\begin{aligned}
 x'' + x' \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) + \frac{x}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n) &= \\
 = MN x_r W_1(t) + \mu = MN x_r W_1(t) + \frac{x_n}{T_1 T_2} + \mu - \frac{x_n}{T_1 T_2} &= \\
 = \frac{1}{T_1 T_2} [MNT_1 T_2 x_r W_1(t) + x_n] + \mu - \frac{x_n}{T_1 T_2} &= \\
 = \frac{1}{T_1 T_2} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n \right] + \mu - \frac{x_n}{T_1 T_2} &= \\
 = \frac{1}{T_1 T_2} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n \right] \left[ 1 + \frac{\mu T_1 T_2 - x_n}{x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n} \right]
 \end{aligned}$$

y el error  $\epsilon$  es pequeño si

$$\epsilon = \frac{\mu T_1 T_2 - x_n}{x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n} \ll 1 \quad (18)$$

### SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

La solución por el método de la transformada de Laplace es la más conveniente para nuestros propósitos.

Si  $\mathcal{L} [x(t)]$  designa la transformada de una función del tiempo  $x(t)$  a la función  $x(s)$  en el plano complejo  $s$ , (17) se transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [x''] + \mathcal{L} \left[ x' \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) \right] + \\ + \mathcal{L} \left[ x \left( 1 + \ln x_n \right) \frac{1}{T_1 T_2} \right] \\ = \frac{1}{T_1 T_2} \mathcal{L} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n \right] \end{aligned}$$

El teorema sobre diferenciación real establece que

$$\mathcal{L} [x'] \rightarrow sX(s) - x_n,$$

$$\mathcal{L} [x''] \rightarrow s^2 X(s) - s x_n - x'_n$$

así que

$$S^2 X(s) - S x_n - x'_n + \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) [S X(s) - x_n] +$$

$$+ \frac{1}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n) x(s) = \frac{1}{T_1 T_2} \mathcal{L} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_{1k}}{W_1(t)} + x_n \right]$$

y

$$X(s) = \frac{\frac{1}{T_1 T_2} \mathcal{L} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_1(t)}{W_{1k}} + x_n \right] + x_n \left[ S + \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \right]}{S^2 + S \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) + \frac{1}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n)} =$$

$$= X_1(s) + X_2(s) \quad (19)$$

Los límites de (19) deberían ser verificados de inmediato por su significado físico. El teorema del valor inicial establece que

$$\lim_{S \rightarrow \infty} S X(s) \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} x(t)$$

y que da como resultado  $x(0) = x_0$ , correctamente.

El teorema del valor final establece que

$$\lim_{S \rightarrow 0} S X(s) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

y representa al valor de  $x(t)$  en el estado permanente. Para esta condición,

$$\frac{1}{T_1 T_2} \mathcal{L} \left( x_r \ln x_r \frac{W_1}{W_{1k}} + x_n \right) = \frac{1}{S} \frac{1}{T_1 T_2} \left( x_r \ln x_r \frac{W_1}{W_{1k}} + x_n \right),$$



de modo que

$$x_{ss} = \frac{x_r \ln x_r \frac{W_1}{W_{1k}} + x_n}{(1 + \ln x_n)} \quad (20)$$

$X_2(S)$  es una simple fracción racional, y su par de transformación está dado por

$$X(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

$$x(t) = \sum_{K=1}^2 \frac{A(S_K)}{B'(S_K)} e^{S_K t}$$

donde  $S_K$  son las raíces de  $B(S) = 0$ .

Si se hace

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \\ \beta^2 &= \frac{1}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n) \end{aligned} \right\} \quad , \quad (21)$$

las raíces son

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{\alpha}{2} + \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \beta^2 \right]^{1/2} = -\gamma_1 \\ S_2 &= -\frac{\alpha}{2} - \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \beta^2 \right]^{1/2} = -\gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad , \quad (22)$$

y por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 - \gamma_1 &= 2 \left[ \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \beta^2 \right]^{1/2} \\ \gamma_2 + \gamma_1 &= \alpha \\ \gamma_2 \gamma_1 &= \beta^2 \end{aligned} \right\}$$

así que

$$\begin{aligned} x_2(t) = x_n & \left[ \frac{(-\gamma_1 + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}) e^{-\gamma_1 t}}{\gamma_2 - \gamma_1} + \right. \\ & \left. + \frac{(-\gamma_2 + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}) e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_1 - \gamma_2} \right] = \frac{x_n}{\gamma_2 - \gamma_1} \\ & \left[ \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \gamma_1 \right) e^{-\gamma_1 t} - \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \gamma_2 \right) e^{-\gamma_2 t} \right]. \end{aligned}$$

La otra parte,  $X_1(S)$ , se resuelve por el teorema de la convolución, el cual pertenece a la multiplicación compleja.

Si miramos a  $X_1(S)$  como el producto de

$$X_{11}(s) = \frac{1}{T_1 T_2} \mathcal{L} \left[ x_r l_n x_r \frac{W_1(t)}{W_{1K}} + x_n \right]$$

y

$$X_{12}(s) = \frac{1}{S^2 + S \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) + \frac{1}{T_1 T_2} (1 + l_n x_n)},$$

entonces

$$X_{11}(s) X_{12}(s) \rightarrow \int_0^t \frac{1}{T_1 T_2} [x_r \ln x_r \frac{W_1(\lambda)}{W_{1k}} + x_n] x_{12}(t - \lambda) d\lambda$$

Pero  $x_{12}(t - \lambda)$  es la transformada de una simple fracción racional polinomial que ya fue tratada; esto es:

$$x_{12}(t - \lambda) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} [e^{-\gamma_1(t - \lambda)} - e^{-\gamma_2(t - \lambda)}]$$

Por lo tanto

$$x_1(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \int_0^t \frac{1}{T_1 T_2} [x_r \ln x_r \frac{W_1(\lambda)}{W_{1k}} + x_n]$$

y la solución completa es:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\{ x_n \left[ \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \gamma_1 \right) e^{-\gamma_1 t} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \gamma_2 \right) e^{-\gamma_2 t} \right] + \int_0^t \frac{1}{T_1 T_2} [x_r \ln x_r \frac{W_1(\lambda)}{W_{1k}} + \right. \\ & \left. + x_n] [e^{-\gamma_1(t - \lambda)} - e^{-\gamma_2(t - \lambda)}] d\lambda \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

Esta puede resolverse para cualquier función  $W_1(t)$  por medio de una computadora. No presenta dificultades, sin embargo, para funciones  $W_1(t)$  simples.

Es conveniente aquí desarrollar también la solución para un sistema con una sola constante de tiempo. La ecuación exacta, por analogía con (14) es:

$$x' + \frac{x}{T} (l_n x) = MN x_r W_1(t) \quad (24)$$

donde  $N$ , por analogía con (13), es:

$$N = KA_1 \frac{1}{T_1}$$

La ecuación aproximada, con la aproximación (16), se toma, por analogía con (17):

$$x' + \frac{x}{T} (1 + l_n x_n) = \frac{1}{T} [x_r l_n x_r \frac{W_1(t)}{W_{1K}} + x_n] \quad (25)$$

Para la validez de (25), introducimos un término  $\mu$  análogo al término correspondiente al caso de dos constantes de tiempo, es decir:

$$\mu = \frac{x}{T} (1 + l_n x_n - l_n x) ,$$

y el error es, por analogía con (18)

$$\epsilon = \frac{\mu T - x_n}{x_r l_n x_r \frac{W_1(t)}{W_{1K}} + x_n} \ll 1 \quad (26)$$

La solución es, por analogía con (19):

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{\frac{1}{T} \mathcal{L} \left[ x_r l_n x_r \frac{W_1(t)}{W_{1K}} + x_n \right] + x_n}{S + \frac{1}{T} (1 + l_n x_n)} = \\
 &= X_1(s) + X_2(s) \quad (27)
 \end{aligned}$$

Procediendo como anteriormente se apuntó, y con

$$\gamma = \frac{1}{T} (1 + l_n x_n) \quad , \quad (28)$$

ésta se transforma en el dominio del tiempo como

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_n e^{-\gamma t} + \\
 &+ \int_0^t \frac{1}{T} \left[ x_r l_n x_r \frac{W_1(\lambda)}{W_{1k}} + x_n \right] \cdot [e^{-\gamma(t-\lambda)}] d\lambda \quad ,
 \end{aligned}$$

la cual se simplifica más aún como sigue:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_n e^{-\gamma t} + \frac{x_n}{T} e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma \lambda} d\lambda + \\
 &+ \frac{1}{T} x_r l_n x_r \frac{1}{W_{1k}} e^{-\gamma t} \int_0^t W_1(\lambda) e^{\gamma \lambda} d\lambda \quad .
 \end{aligned}$$

El resultado es

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{x_n}{1 + l_n x_n} [1 + l_n x_n e^{-\gamma t}] + \\
 & + \frac{1}{T} \frac{1}{W_{1k}} x_r l_n x_r e^{-\gamma t} \int_0^t W_1(\lambda) e^{\gamma \lambda} d\lambda \quad (29)
 \end{aligned}$$

### RESPUESTA DEL ESTADO PERMANENTE

La ecuación (20) se interpreta entendiendlo que  $x_{ss}$  se absorbe con  $x_n$ :

Así

$$x_n = \frac{x_r l_n x_r \frac{W_1}{W_{1k}} + x_n}{1 + l_n x_n},$$

de la cual

$$x_n l_n x_n = x_r l_n x_r \frac{W_1}{W_{1K}} \quad (30)$$

De aquí,  $x_n$  puede ser calculada para cualquier valor de  $(W_1/W_{1k})$ .

Como se hizo respecto de (9), y recordando (13) y (5), escribimos

$$W_2(t) = W_1(t) M \frac{x_r}{x_n}, \quad (31)$$

que para el estado permanente se transforma en

$$W_2 = W_1 M \frac{x_r}{x_n} \quad (32)$$

Si hacemos  $W_{2K} =$  salida de control (umbral), al cual corresponde  $x = x_r$ , entonces  $W_{2K} = W_{1K}M$ . Por lo tanto

$$\frac{W_2}{W_{2K}} = \frac{W_1}{W_{1K}} / \frac{x_n}{x_r}, \text{ cuando } \frac{W_1}{W_{1K}} > 1. \quad (33)$$

Obtendremos ahora numéricamente la respuesta del estado permanente.

Ejemplo 1: Haciendo  $P_0/R = 10^{-1}$ ;  $A = 10^5$ ;  $K = 10$  (Volt $^{-1}$ );  $A_1 = 10^2$ ;  $A_2 = 30$ ;  $W_{1K} = 10^{-7}$  Volts;  $W_{2K} = 10^{-3}$  Volts;  $R_1 = S_1$ ;  $R_2 = S_2$ ;  $T_1 = 1.25$  Seg.;  $T_2 = 0.01$  Seg.

Entonces,

$$M = 10^4, \text{ por (13),}$$

$$T_1/T_{11} = T_2/T_{21} = 1/2, \text{ por (12)}$$

y por lo tanto

$$N = KA_1 A_2 \frac{1}{4} \frac{1}{T_1 T_2} = 6 \times 10^5, \text{ por (13)}$$

Por la identidad para  $\ln x_r$  que se dedujo en relación con (14),  $\ln x_r = M N T_1 T_2 W_{1K} = 7.5$  de modo que  $x_r = 1.18 \times 10^3$  y (30) se transforma en  $x_n \ln x_n = 13.35 \times 10^3 (W_1/W_{1K})$ , la cual da  $x_n$  correspondiente a cada razón  $W_1/W_{1K}$ .

Para  $W_1/W_{1K} < 1$  el control es lineal ( $x_n/x_r = 1$ ), de manera que

$$\frac{W_2}{W_{2K}} = \frac{W_1}{W_{1K}}, \quad \frac{W_1}{W_{1K}} \leq 1 \quad (34)$$

La característica de control se ilustra en la figura 7.

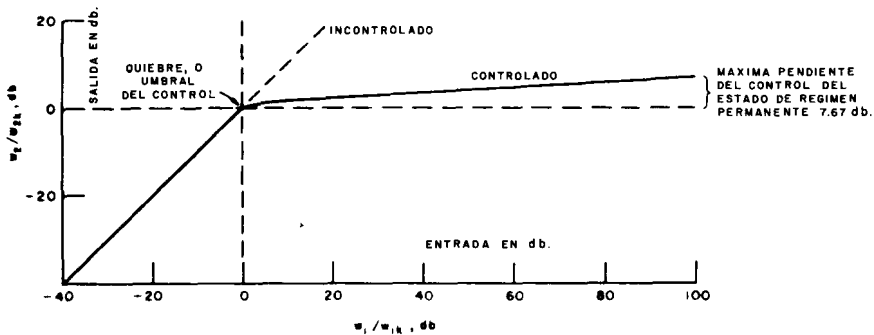


Fig. 7 - Características del control en el estado de régimen permanente.

El umbral de control, o “codo” está bien desarrollado a causa de las consideraciones idealizadas, (33) y (34).

La disminución (“taper”) del control es aproximadamente normal (7.67 db). Esta disminución (“taper”) decrece con la ganancia; así, por ejemplo, si se aumenta  $A_2$  por un factor 2,  $\ln x_r = 15$  y  $x_r = 3.16 \times 10^6$ , de modo que (30) requiere  $x_n \ln x_n = 4.75 \times 10^7 (W_1/W_{1K})$  que para el máximo da  $x_n = 1.825 \times 10^{11}$ , resultando en  $x_n/x_r = 5.78 \times 10^4$ , y en  $W_2/W_{2K} = 1.73 - 4.75$  db. Como las ganancias son ya elevadas, en la práctica no se contempla ninguna mejoría en aplanamiento. Una pequeña disminución (“taper”) residual, es teóricamente inevitable, como se verá más adelante. Como previamente se mencionó, en grabación en cinta, solamente un control plano utiliza todo el rango dinámico de la cinta.

Es en este punto interesante especular numéricamente acerca del rango requerido del voltaje de control  $v_i$  (Figura 6) y el de la resistencia  $P$ .

En este ejemplo, para  $A_1 = 10^2$  (el cual incluye el factor de forma  $2/\pi$  para la rectificación de onda completa), y para  $W_1 = W_{1K} = 10^{-7}$ , encontramos, de (9), que  $v_{1K} = v_r = MA_1 g_1 W_{1K} = 10^4 \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-7} = 0.05$  Volt. Por supuesto, se obtiene el mismo resultado empezando con  $W_2 = W_{2K} = 10^{-3}$ ;  $v_{1K} = A_1 g_1 W_{2K} = 0.05$  Volt. Para el nivel máximo, puesto que el decrecimiento (“taper”) es 7.67 db,  $W_2/W_{2K} = 2.42$ , de manera que  $v_{i \max} = A_1 g_1 \cdot 2.42 W_{2K} = 0.121$  Volt. A esto corresponde el máximo voltaje de control  $v_{e2 \max} = (v_{i \max} - v_r) A_2 g_2 = 0.071 \times 30 \times \frac{1}{2} = 1.065$  Volts.



Suponiendo  $P_0 = 10^6$  ohms, la ecuación (2) dice  $P = 10^6/x_e = 10^6/(x_n/x_r)$ .

Así, para  $x_n/x_r = 1$ ,  $P = 10^6$  ohms, y para  $x_n/x_r = 4.14 \times 10^4$ , correspondiendo al nivel máximo,  $P = 24.3$  ohms.

Debido a que tan grandes variaciones de resistencias difícilmente se pueden obtener en una sola unidad, es práctica común la de subdividir el elemento controlante en una pluralidad de elementos en cascada, todos operados por una sola función controlante.

Para nuestros propósitos, es necesario también deducir la función de transferencia del circuito cerrado ("closed loop transfer function", CLTF),  $G(S)$ , para el estado permanente. La función de transferencia del circuito cerrado (CLTF) en el dominio del tiempo es, según (31),

$$g(t) = \frac{W_2(t)}{W_1(t)} = M \frac{x_r}{x}$$

Puesto que para una constante,

$$\mathcal{L} [Mx_r] \rightarrow \frac{1}{S} Mx_r$$

la CLTF en el dominio  $S$  será

$$G(s) = \frac{\mathcal{L} [Mx_r]}{X(s)} = \frac{1}{S} Mx_r \frac{1}{X(s)} \quad (35)$$

por el teorema del valor final, (página 168).

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = g(t) = \frac{Mx_r}{[x(t)]_{t \rightarrow \infty}} = g_{ss} = CLTF \text{ para el estado permanente}$$

Pero  $[x(t)]_{t \rightarrow \infty} = x_{ss}$ , como se vio en la pág. 168 y  $x_{ss} \equiv x_n$ , como se mencionó en las págs. 172 a la 174.

Así:

$$g_{ss} = M/(x_n/x_r).$$

Para las condiciones del Ejemplo 1, y para un nivel de + 100 db,  $x_n/x_r = 4.14 \times 10^4$ , de modo que la operación ocurre a un valor bajo de CLTF, de  $g_{ss} = 0.242$ . En el umbral de control,  $x_n/x_r = 1$ , y  $g_{ss} = 10^4$ , indicando un valor alto de CLTF. Nótese que  $x$  no ha sido considerado constante, en vista de que estamos interesados en el comportamiento de  $G(S)$  con la frecuencia.

Substituyendo de (19), y recordando que  $W_1(t) = W_1 = \text{constante}$ , tenemos

$$G(s) = M x_r \frac{1}{s} \frac{s^2 + s \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{x'_n}{x_n} \right) + \frac{1}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n)}{\frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{s} \left[ x_r \ln x_r \frac{W_1}{W_{1K}} + x_n \right] + x_n \left[ s + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right]}$$

Así,

$$G(s) = M x_r T_1 T_2$$

$$\frac{s^2 + s \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{X'_n}{X_n} \right) + \frac{1}{T_1 T_2} (1 + \ln x_n)}{x_r \ln x_r \frac{W_1}{W_{1K}} + T_1 T_2 x_n \left[ s^2 + s \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) + \frac{1}{T_1 T_2} \right]}$$

Las raíces del numerador están dadas por (22), y las raíces de la función de  $s$  en el denominador son evidentemente:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{T_1} = -\zeta_1 \\ s_2 &= -\frac{1}{T_2} = -\zeta_2 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

de modo que (36), recordando que

$\ln x_r \equiv MNT_1T_2W_{1K}$ , puede traerse a la forma

$$G(s) = \frac{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)}{(s + \zeta_1)(s + \zeta_2)} \cdot \frac{M \frac{x_r}{x_n}}{1 + MNw_1 \frac{x_r}{x_n} \cdot \frac{1}{(s + \zeta_1)(s + \zeta_2)}} \quad (38)$$

¿Cuál es el significado físico de esta función de transferencia de circuito cerrado (CLTF)? Consideremos la Figura 8 a, la cual describe a un sistema de retroalimentación que posee dos entradas  $v_r$  y  $W_1(s)$ . Asociados con éstas se encuentran dos puntos de sumar separados.

El diagrama de bloques se refiere al dominio  $S$ . Evidentemente:

$$\{ [W_2(s) F_1(s) - V_r] F_2(s) \cdot C - W_1(s) B(s) \} A = -W_2(s),$$

de manera que

$$W_2(s) [1 + F_1(s) F_2(s) C A] = W_1(s) B(s) A + V_r F_2(s) C A.$$

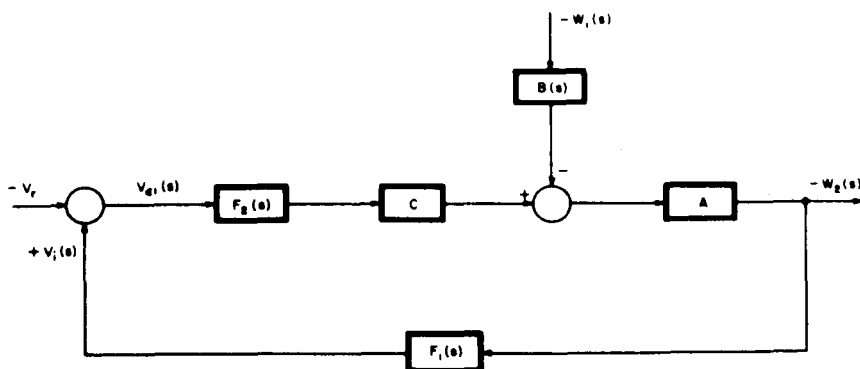


Fig. 8a - Esquema en bloque del sistema de realimentación con dos entradas y dos puntos sumadores.

En lo que concierne a la función de transferencia de  $W_1(S)$  a  $W_2(S)$ ,

$$G(s) = \frac{W_2(s)}{W_1(s)} = \frac{A B(s)}{1 + C A F_1(s) F_2(s)}$$

es la CLTF del sistema. La comparación de esta expresión con la (38), suministra la base para la identificación de los diversos bloques, de tal manera que el diagrama equivalente en bloques de todo el sistema, en nuestro caso, es el que se ilustra en la Figura 8b.

#### RESPUESTA A LA FUNCION ESCALON \* (STEP FUNCTION)

La ecuación (23) existe para  $t > 0$ , y las raíces  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  corresponden a las condiciones inmediatas después de ser aplicado el impulso escalón. Sea la función escalón

$$W_1(t) = U W_1, \quad t > 0. \quad U = \text{constante}$$

---

\* Nota del traductor.—Una función escalón unitaria (Unit Step Function) es una función que tiene valor cero para  $t < t_0$ , y que en  $t = t_0$ , asciende instantáneamente hasta un valor unidad y se mantiene constante para  $t > t_0$ . En un circuito eléctrico, podría representar a la f.e.m. de una batería que se aplicara al circuito.

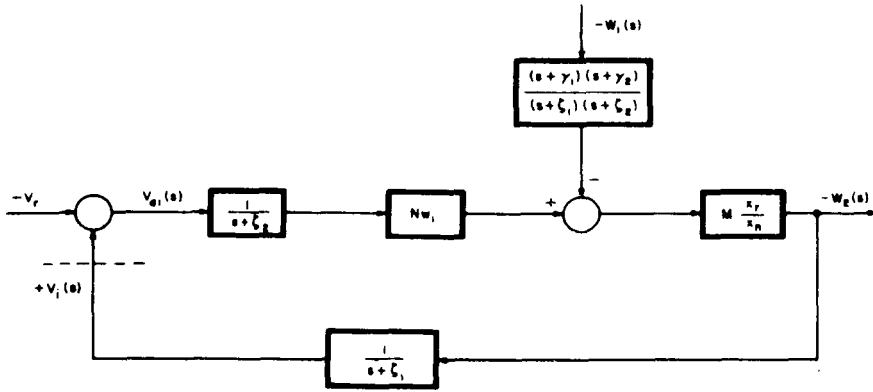


Fig.8 b- Esquema equivalente en bloques  
del AVC modelo.

Pero antes de la aplicación del impulso, el estado de régimen ha sido alcanzando, de manera que  $x(t) = x_{nb} =$  valor neutral “antes” del impulso escalón. Así  $x'_{nb} = 0$ , y (21) y (22) dan

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \gamma_1 = \gamma_2$$

y

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \gamma_2 = \gamma_1$$

Consecuentemente, (23) se transforma en

$$x(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\{ x_n (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{T_1 T_2} \ln x_r \frac{w_1}{w_{1k}} U \left[ \frac{1}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 t}) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 t}) ] + \frac{1}{T_1 T_2} x_n \left[ \frac{1}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 t}) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 t}) \right] \Bigg\} \\
x(t) = & \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{1}{T_1 T_2} \left[ x_r \ln x_r \frac{1}{w_{1k}} U + x_n \right] \\
& - \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}) \\
& \left[ \frac{1}{T_1 T_2} (x_r \ln x_r \frac{w_1}{w_{1k}} U + x_n) - x_n \right] \quad (39)
\end{aligned}$$

Se observa que  $[x'(t)]_{t=0} \rightarrow 0$  para  $t = 0$ , así que, en el primer instante, no hay variación de  $x(t)$ . Puede, por lo consiguiente, estipularse, que justo antes de la función escalón  $x_n \rightarrow x_{nb}$  y que para  $t \rightarrow \infty$ ,  $x_n \rightarrow x_{na}$ , es decir, correspondiente al nuevo nivel del estado permanente existente después del transitorio. Pero para  $t \rightarrow \infty$ , la ecuación (39) da

$$x(\infty) = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{1}{T_1 T_2} (x_r \ln x_r \frac{w_1}{w_{1k}} U + x_n) = x_{na}$$

Por consiguiente, (39) deberá ser interpretada como:

$$x(t) = x_{na} - (x_{na} - x_{nb}) \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}) \quad (40)$$

por (31):

$$w_2(t) = w_1 U M x_r \frac{1}{x(t)} = w_1 U \frac{M x_r}{x_{na}} \cdot \frac{1}{x(t)/x_{na}} =$$

$$= w_{2a} \frac{1}{x(t)/x_{na}},$$

de manera que

$$\frac{w_2(t)}{w_{2a}} = \frac{1}{1 + \left( \frac{x_{nb}}{x_{na}} - 1 \right) \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t})} \quad (41)$$

que es una relación universal para ambas maneras de actuar, compresión y expansión. Para  $t = 0$ ,

$$\frac{w_2(0)}{w_{2a}} = \frac{x_{na}}{x_{nb}}$$

de modo que

$$w_2(0) = w_1 U M x_r \frac{x_{na}}{x_{nb}} = w_1 U M x_r \frac{1}{x_{nb}} = U w_{2b}.$$

Para  $t \rightarrow \infty$ ,  $w_2(\infty) = w_{2a}$ . El modo de acción en compresión implica que la salida es, inicialmente, proporcional al incremento de escalón (inicialmente lineal) y que a medida que el tiempo aumenta, la salida es comprimida a un valor  $w_{2a} > w_{2b}$ , dependiendo del decrecimiento ("taper") estático inherente. Para la acción en expansión, la salida muestra primero una parte proporcional al decremento del escalón, y después se expande hacia  $w_{2a} < w_{2b}$ .

Para un sistema matemáticamente plano,  $w_{2a} = w_{2b} = w_{2K}$ , y  $x_{na} \equiv U x_{nb}$  para compresión, de modo que (41) pasa a ser:

$$\frac{w_2(t)}{w_{2K}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{U} - 1\right) \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t})} \quad (42)$$

Para expansión, existe una ecuación semejante cuando se substituye  $U$  por  $1/U$ .

Ejemplo 2.—Supongamos que el escalón sea de 10 db, esto es,  $U = 3.16$  para compresión; y que el nivel inicial corresponda a  $w_1 = 10^5$  Volt. Entonces, para las constantes del Ejemplo 1,  $x_{nb} = 1.142 \times 10^5$  y

$$x_{na} = 3.32 \times 10^3, \ln x_{na} = 12.75.$$

Por (21) y (22),  $\gamma_1 = 12.4$  y  $\gamma_2 = 88.4$ .

Para expansión,  $U = 0.316$ ,  $x_{na} = 3.99 \times 10^4$ ,  $\ln x_{na} = 10.6$ , de modo que  $\gamma_1 = 10.2$ ,  $\gamma_2 = 90.6$ .

La respuesta para los dos modos de acción se muestra en la Figura 9, y representa los estallidos (burstouts) de  $\pm 10$  db desde un nivel que corresponde a un nivel de estado permanente de + 40 db arriba del nivel de control.

En compresión, las constantes de tiempo de la retroalimentación son  $1/\gamma_1 = 0.0805$  segundos y  $1/\gamma_2 = 0.011$  segundos.

Así pues, la retroalimentación tiene el efecto de reducir significativamente la constante de tiempo mayor, y aumentar trivialmente a la menor.

Nótese en particular que la constante de tiempo dominante en expansión es mayor que la constante de tiempo en compresión: por consiguiente, la acción en expansión es inherentemente más lenta que en compresión. ¿Qué es lo que sucede para grandes estallidos (burstouts)? La Figura 9 muestra también un estallido de 40 db en compresión. El hecho notable es que la salida es comprimida aproximadamente en el mismo tiempo, sin importar la magnitud del estallido (de hecho, el tiempo es un poco menor debido a la reducción adicional de la constante de tiempo de la retroalimentación).

Volviendo a la Figura 5, podemos entender ahora el fenómeno físico de los estallidos. Para el estado permanente  $w_{1b}$ ,  $i_t$  se ha ajustado a sí mismo en algún valor  $i_t > i_r$ , en correspondencia con  $v_e$ , el cual produce  $x_{nb}$ . Si alte-



ramos abruptamente la entrada  $Uw_{1b}$  (compresión),  $v_1$  no puede cambiar instantáneamente, de modo que  $v_e$  permanece constante, y  $w_2(t)$  muestra un aumento, saltando por el factor  $U$ . Esto va seguido por un aumento gradual de  $\dot{u}$  hasta su nuevo nivel, y consecuentemente por un aumento de  $v_e$  y por lo tanto por el de  $x$ . Pero esto, según la Figura 4, está asociado con un aumento de la atenuación. Observaciones análogas se aplican a la acción en expansión.

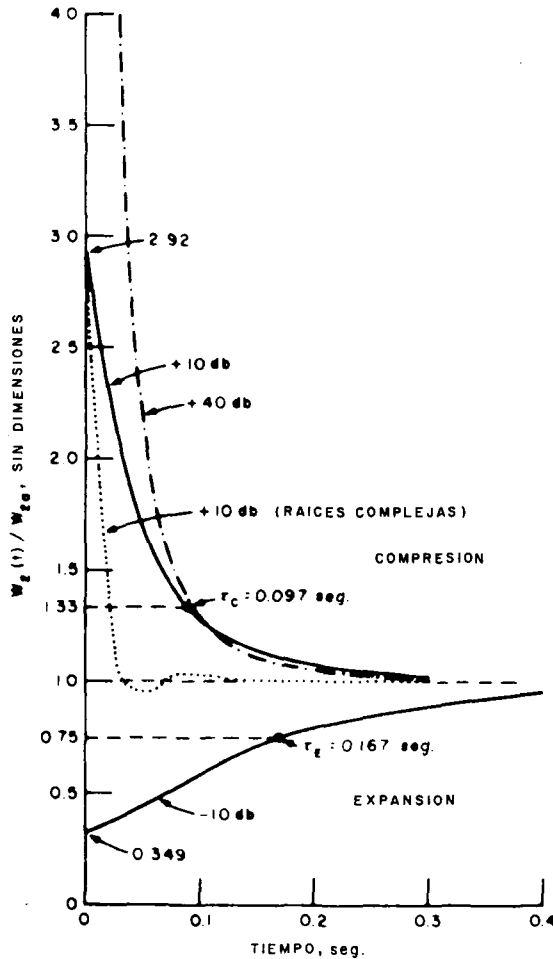


Fig. 9 - Respuesta al pulso en forma de escalón (Step function).

¿Qué sucede cuando las raíces son complejas? Según (22),

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\frac{\alpha}{2} + j\omega = -\gamma_1 \\ s_2 &= -\frac{\alpha}{2} - j\omega = -\gamma_2 \end{aligned} \right\} \text{ donde } \omega = [\beta^2 - (\frac{\alpha}{2})^2]^{1/2}.$$

entonces el término

$$\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t})$$

de la ecuación (41) se transforma en

$$\frac{1}{2j\omega} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} + j\omega \right) e^{j\omega t} - \left( \frac{\alpha}{2} - j\omega \right) e^{-j\omega t} \right]$$

y se puede reducir a

$$\frac{[ (\frac{\alpha}{2})^2 + \omega^2 ]^{1/2} - \frac{\alpha}{2} t}{\omega} e^{\text{Sen } (\omega t + \phi), \tan \phi = \frac{2\omega}{\alpha}}$$

Ejemplo 3.—Sean  $T_1 = 0.2$ ;  $T_2 = 0.01$  y  $U = 3.16$ .

Entonces, según (21),  $\alpha = 105$  y  $\beta^2 = 6880$ , siendo el resto de las constantes como en el Ejemplo 2. Así  $\gamma_1 = 52.5 - j 64.2$ , y  $\gamma_2 = 52.5 + j 64.2$ .

La respuesta está indicada en la Figura 9; es notablemente más rápida, cayendo definitivamente abajo de 1.

Esta es la respuesta de un sistema ligeramente subamortiguado.

El asunto de si tal respuesta es permisible, debe ser considerado desde el punto de vista de la estabilidad, la cual se discutirá posteriormente.

### RAPIDEZ DE REACCION A LA FUNCION ESCALON

Este importante aspecto es ambiguo. ¿Con que rapidez ocurre la acción correctiva? Un modo de expresarlo es terminar el transitorio a un tiempo razonable después de un estallido de 10 db. Por ejemplo, podríamos considerar (arbitrariamente) al transitorio como terminado cuando llega a  $\pm 2.5$  db de su valor final. En la Figura 9, se ve que el tiempo de compresión es  $\tau_c = 0.097$  Seg. y el tiempo de expansión  $\tau_e = 0.167$  Seg. Por lo tanto, la rapidez de compresión  $\rho_c = 103$  db/Seg. y la rapidez de expansión  $\rho_e = 60$  db/Seg.

Esta medición se puede hacer experimentalmente de modo fácil. Otro modo sería el de calcular (analítica o gráficamente) la rapidez para un tiempo dado  $\tau_1$ . De (41),

$$\frac{w'_2(t)}{w_{2a}} = \frac{\left( \frac{x_{nb}}{x_{na}} - 1 \right) \frac{\gamma_2 \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t})}{\left[ 1 + \left( \frac{x_{nb}}{x_{na}} - 1 \right) \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \gamma_2 (e^{-\gamma_2 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 t}) \right]^2} \quad (43)$$

Nótese que la derivada tiende a cero para  $t = 0$ , lo cual es una peculiaridad de cualquier sistema que poseé más de una constante de tiempo. Para la acción de compresión (Ejemplo 2) podemos elegir  $\tau_{1c} = 0.025$  Seg. (véase la Figura 9). El razonamiento entonces es que  $w_2 - w_{2a} = 1.92 w_{2a}$

está asociado con un escalón de 10 db. Por lo tanto,  $dw_2$  está asociado con  $[5.2 (dw_2/w_{2a})]$  db que ocurre en  $dt$  segundos. La rapidez entonces es  $[w'_2(t)/w_{2a}]$  db/Seg. De (43) y para  $\tau_{1c} = 0.025$  Seg.

$$\left[ \frac{w'_2(t)}{w_{2a}} \right]_{\tau_{1c}} = - \frac{1}{29 \text{ seg}},$$

de modo que  $\rho_{1c} = -151$  db/seg. Para la acción en expansión y para  $\tau_{1e} = 0.05$  seg., la rapidez calculada es  $\rho_{1e} = 37.8$  db/seg. Como esto no resulta prometedor, el primer método parece ser más adecuado.

La rapidez de compresión tiene aproximadamente el orden de magnitud, pero en cambio la rapidez de expansión es demasiado lenta para seguir una señal que se extinga rápidamente. Además, la rapidez de compresión excede a la rapidez de expansión. Sin embargo, en trabajos sísmicos de reflexión es importante que se tenga una buena indicación del arribo de energía que va generalmente asociado con una reflexión; entonces, la rapidez de compresión no debe ser demasiado rápida, y siempre más lenta que la rapidez de expansión. Para corregir esta situación, se colocan diodos convenientemente en el circuito rectificador-filtro, de tal manera que descarguen rápidamente al condensador (expansión), y lo carguen lentamente (compresión). Entonces, en efecto, operamos con constantes de tiempo asimétricas. De la ecuación (12) se deduce que para  $T_e < T_c$ , los diodos deberán garantizar la relación

$$\frac{1}{C_1 R_{1e}} + \frac{1}{C_1 S_{1e}} > \frac{1}{C_1 R_{1c}} + \frac{1}{C_1 S_{1c}}$$

Para el presente sistema, sin embargo: ¿cuál es la relación entre velocidades de reacción y nivel de entrada? Si en (41) sustituimos  $w_2(t)/w_2$  por  $\eta$ , que es el valor de  $w_2(t)/w_2$  para el tiempo de terminación  $\tau$ , y si se desprecia el efecto de la pequeña constante de tiempo (esto es,  $e^{-\gamma_2 \tau} \rightarrow 0$ ), se obtiene la relación

$$e^{-\gamma_1 \tau} = \frac{\left( \frac{1}{\eta} - 1 \right)}{\left( \frac{x_{nb}}{x_{na}} - 1 \right) \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}} \quad (44)$$

Para  $\eta_c = 1.33$  y  $\eta_e = 0.75$ , el tiempo de terminación  $\tau$  se calcula para todos los niveles y para las constantes de tiempo del Ejemplo 2.

Los resultados se muestran en la Figura 10. Desafortunadamente, las velocidades de reacción cambian apreciablemente con el nivel y la compresión es más rápida que la expansión, tal como ya se mencionó antes.

La razón principal para la lentitud de la velocidad de reacción a los bajos niveles, debe hallarse en el incremento efectivo de la constante de tiempo  $1/\gamma_1$  a los bajos niveles. Por ejemplo, para  $w_1 = +100$  db,  $1/\gamma_1 = 0.0535$  Seg., y para  $w_1 = 0$  db,  $1/\gamma = 0.139$  Seg.

Si se desea constancia en la rapidez de reacción, y consideramos que ésta es una meta razonable, debe tenerse presente que toda técnica que disminuya la reducción ("taper") estática, disminuirá también la variación de las velocidades de reacción con el nivel. Porque si existe un solo valor neutral  $x_n$ , existirá un solo par de raíces (ecuación 22), y por lo tanto, un solo par de constantes de tiempo "retro-alimentadas".

## RESPUESTA A ENTRADAS EXPONENCIALES

Consideramos ahora  $w_1(t) = w_m e^{-\delta t}$ . Haciendo en (21)

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

la ecuación (23) se transforma en:

$$x(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\{ x_n [ (\alpha_1 - \gamma_1) e^{-\gamma_1 t} - (\alpha_1 - \gamma_2) e^{-\gamma_2 t} ] \right. \\ \left. + \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^t (x_r \ln \frac{w_{1n}}{w_{1k}} e^{-\delta \lambda} + x_n) [ e^{-\gamma_1 (t - \lambda)} - e^{-\gamma_2 (t - \lambda)} ] d\lambda \right\}$$

El término integral entonces se hace

$$\frac{x_n}{T_1 T_2} \left\{ \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma_1} \frac{1}{\delta - \gamma_2} [ e^{-\delta t} (\gamma_2 - \gamma_1) + \right. \\ \left. + e^{-\lambda_1 t} (\delta - \gamma_2) - e^{\gamma_2 t} (\delta - \gamma_1) ] + \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} [ (\gamma_2 - \gamma_1) - \right. \\ \left. - (\gamma_2 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}) ] \right\}$$

Colectando términos resulta:

$$x(t) = \frac{1}{T_2 T_1} \frac{x_n}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\{ \frac{1}{\gamma_1} (\gamma_2 - \gamma_1) + \right. \\ \left. + e^{-\delta t} \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma_1} \frac{1}{\delta - \gamma_2} (\gamma_2 - \gamma_1) \right. \\ \left. + e^{-\gamma_1 t} [ T_1 T_2 (\alpha_1 - \gamma_1) + \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1} ] \right\}$$

$$-e^{-\gamma_2 t} \left[ T_1 T_2 (\alpha_1 - \gamma_2) + \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} \right] \quad (45)$$

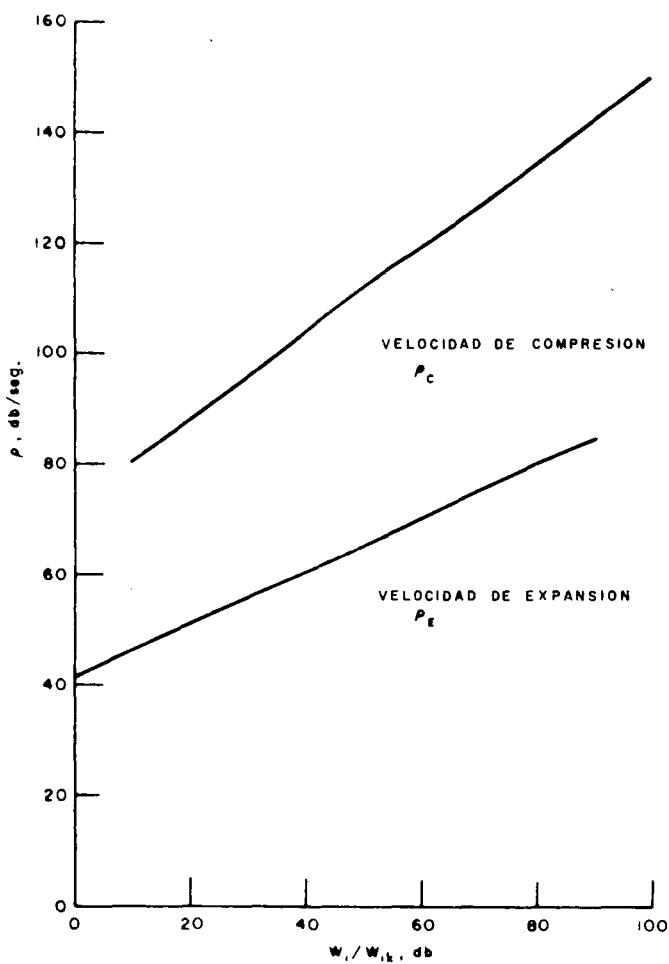


Fig.10 - Velocidades de reacción para estallidos (Burstouts) de 10 db

Definiendo

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2} , \\ K_1 &= T_1 T_2 (\alpha_1 - \gamma_1) + \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma_1} - \frac{1}{\gamma_1} , \\ K_2 &= T_1 T_2 (\alpha_1 - \gamma_2) + \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{k_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma_2} - \frac{1}{\gamma_2} , \\ K &= \frac{x_r}{x_n} \frac{x_{1n}}{x_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma_1} - \frac{1}{\delta - \gamma_2} (\gamma_2 - \gamma_1) , \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

resulta:

$$x(t) = \frac{1}{T_1 T_2} \frac{x_n}{\gamma_2 - \gamma_1} (K_0 + K e^{-\delta t} + K_1 e^{-\gamma_1 t} - K_2 e^{-\gamma_2 t}) \quad (47)$$

Puede fácilmente verificarse que  $x(0) = x_n$ . Diferenciando (47)

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= - \frac{x_n}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{1}{T_1 T_2} (K \delta e^{-\delta t} + K_1 \gamma_1 e^{-\gamma_1 t} - \\ &\quad - K_2 \gamma_2 e^{-\gamma_2 t}) \\ x'_n(t) &= \left[ \frac{d}{dt} x(t) \right]_{t=0} = \frac{-x_n}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{1}{T_1 T_2} (K \delta + K_1 \gamma_1 - \\ &\quad - K_2 \gamma_2) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

La respuesta puede ahora ser calculada. Sin embargo, el esfuerzo requerido para el cálculo es considerable si no se dispone de una computadora.



Debido a que el efecto de la segunda constante de tiempo no tiene gran significación en este caso particular, se calculará un ejemplo numérico para un sistema con una sola constante de tiempo, que a la vez servirá para demostrar un punto interesante.

De (29), el término integral se reduce a

$$-\frac{1}{T} x_r \ln x_r \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \frac{1}{\delta - \gamma} (e^{-\delta t} - e^{-\gamma t}) .$$

y por lo tanto

$$x(t) = \frac{x_n}{T} \left\{ \frac{T}{(1 + \ln x_n)} e^{-\delta t} \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma} + \right. \\ \left. + e^{-\gamma t} \left[ T \frac{\ln x_n}{(1 + \ln x_n)} + \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma} \right] \right\} \quad (49)$$

Estableciendo las definiciones

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{T}{1 + \ln x_n} , \\ K_1 &= T \frac{\ln x_n}{1 + \ln x_n} + \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma} , \\ K &= \frac{x_r}{x_n} \frac{w_{1n}}{w_{1k}} \ln x_r \frac{1}{\delta - \gamma} , \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

resulta

$$x(t) = \frac{x_n}{T} (K_0 + K_1 e^{-\gamma t} - K e^{-\delta t}) \quad (51)$$

La validez de la ecuación diferencial (25) ya fue establecida anteriormente, y en este caso, el error (26), toma la forma

$$\epsilon = \frac{\frac{x}{x_n} \ln \frac{x_n}{x} - (1 - \frac{x}{x_n})}{\frac{x_r}{x_n} \ln \frac{x_r}{x_n} - \frac{w_{1n}}{w_{1k}} e^{-\delta t} + 1} \ll 1 \quad (52)$$

Ejemplo 4: Como en el Ejemplo 1, sean  $w_{1k} = 10^{-7}$ ,  $w_{2k} = 10^{-3}$ ,  $R = S$ ,  $T = 1.25$  seg.

Entonces:  $M = 10^4$  Según (13),

$$T_1/T_2 = 1/2 \quad \text{Según (12),}$$

$$\text{y} \quad N = KA_1 \quad 1/T_1$$

como se mencionó respecto a (24).

Para producir una respuesta de estado permanente idéntica con la del Ejemplo 1, debemos, según (30), retener la misma  $x_r = 1.78 \times 10^3$ , de manera que  $\ln x_r = 7.5 = MNTw_{1k}$ , por analogía con la expresión correspondiente del Ejemplo 1. De aquí se sigue que  $N = 6 \times 10^3$  y por lo tanto  $A_1 = 1.5 \times 10^3$ . Si la señal máxima aplicada es  $w_{1n} = 10^{-2}$ , entonces, inicialmente  $x_n = 7.37 \times 10^7$  y  $\ln x_r = 18.1$ . Inicialmente, el decaimiento procede a razón de 200 db/seg., correspondiendo a  $\delta_1 = 23 \text{ seg}^{-1}$ .

En  $T = 0.2$  seg., supongamos que ocurra una discontinuidad en la rapidez de decaimiento, bajando abruptamente la señal a 50 db/S. que corresponde a  $\delta_2 = 5.7 \text{ seg}^{-1}$ .

Por lo tanto, la situación para este ejemplo es la siguiente:

$$w_1(t) = 10^{-2} e^{-23t}, \quad t < 0.2$$

$$w_1(0.2) = 10^{-4}, \quad t = 0.2$$

$$w_1(t) = 10^{-4} e^{-5.7t}, \quad t > 0.2$$

Se sabe, de la Figura 10, que la máxima rapidez de expansión es de solamente unos 85 db/seg. [La rapidez de reacción para el sistema de una sola constante de tiempo se calcula por la expresión:

$$e^{-\gamma t} = \frac{\frac{1}{\eta} - 1}{\frac{x_n b}{x_{na}} - 1}$$

en lugar de la ecuación (44), y para que las constantes deliberadamente escogidas den idéntica respuesta del estado permanente (dada ya en la Figura 7), han de ser substancialmente los mismos que los del sistema con dos constantes de tiempo]. Entonces no puede esperarse que el control sea capaz de manejar adecuadamente el rápido decaimiento; pero es interesante estudiar exactamente cómo es la falla del control para ilustrar un fenómeno que se observa comúnmente.

La técnica es la siguiente: Para las hipótesis iniciales, (51) se calcula para un incremento de tiempo  $t = \Delta t$ , en este caso para  $\Delta t = 0.05$  Seg. Entonces, por (52), se calcula  $\epsilon(\Delta t)$ , y si esta cantidad resulta ser aproximadamente 5 por ciento, (errores de 10 por ciento dan resultados completamente falsos), entonces hay que desplazar el origen: El nuevo valor neutral  $x_n$  se cambia en  $x(\Delta t)$ , justamente calculado, o sea el valor de  $x(t)$  al final del intervalo  $\Delta t$ ; esto genera un nuevo juego de constantes  $\gamma_0, k_0, k_1, k$  y un nuevo valor  $x(\Delta t)$  con error  $\epsilon(\Delta t)$ , etc. La transición a la segunda rapidez de decaimiento se logra naturalmente. Cuando se calcula  $x(t)$ ,  $w_2(t)$  se obtiene por la ecuación (31) y se expresa en db relativos a  $w_{2K} = 10^{-3}$  Volt. La

figura 11 representa el comportamiento del sistema bajo el proceso de expansión del ejemplo 4. El resultado es significativo. Como el valor neutral original correspondió a una señal de entrada de  $+ 100$  db, éste corresponde precisamente a una señal inicial de  $+ 100$  db que se aplique a un sistema de AVC que posea 100 db de supresión inicial. Por consiguiente, el valor inicial de salida corresponde a la salida del estado permanente para ese nivel, dado por la característica del control para el estado permanente (fig. 7). Tal como se esperaba, en vista de lo relativamente bajo de la rapidez de expansión, el sistema de control es demasiado lento. Realmente la salida cae unos 16 db por abajo del nivel de control, resultando en una "compresión" severa. El decrecimiento ("taper") dinámico puede entonces ser definido como la máxima caída por debajo del nivel de control —o cualquiera otro nivel arbitrario— para una función de entrada dada. El presente "taper dinámico" de 16 db, es completamente insatisfactorio. Sin embargo, a causa de la supuesta discontinuidad de la rapidez de la señal de entrada, la señal de salida, aunque débil, es recuperable. Pero si la alta rapidez de decaimiento hubiera continuado más de 0.2 segundos, la señal se habría perdido irremisiblemente.

Afortunadamente, en la práctica, la señal sísmica de entrada muestra alguna discontinuidad en sus regímenes de decaimiento.

Ya que se conocen la entrada y la salida, es posible calcular mediante la gráfica, la rapidez con que el sistema realmente actúa en expansión, es decir, su velocidad o "rapidez de reacción dinámica".

Esta ha sido incluida en la figura 11. Como  $w_2(t) = g(t) w_1(t)$ , la atenuación del circuito  $\alpha \text{ (db)} = w_2 \text{ (db)} - w_1 \text{ (db)}$ , queda en disponibilidad. De este diagrama, los regímenes reales de expansión se obtienen gráficamente, y han sido indicados en algunos puntos discretos.

Por lo tanto, dinámicamente el sistema adquiere regímenes más elevados que los previstos sobre la base de la función escalón. Hacia el final, la rapidez se aproxima al valor de 50 db/Seg., pero sin alcanzarlo.

Evidentemente, el sistema debe ser mejorado considerablemente.

La rapidez de 10 db en expansión, debe aumentarse a unos 150 db/Seg. si el sistema ha de operar bien en el manejo de una elevada rapidez de decaimiento en la entrada. Por otra parte, para velocidades de entrada moderadas, digamos con una rapidez de decaimiento de 80 db/Seg. el funcionamiento del sistema estudiado, en lo que al taper dinámico se refiere, sería satisfactorio.

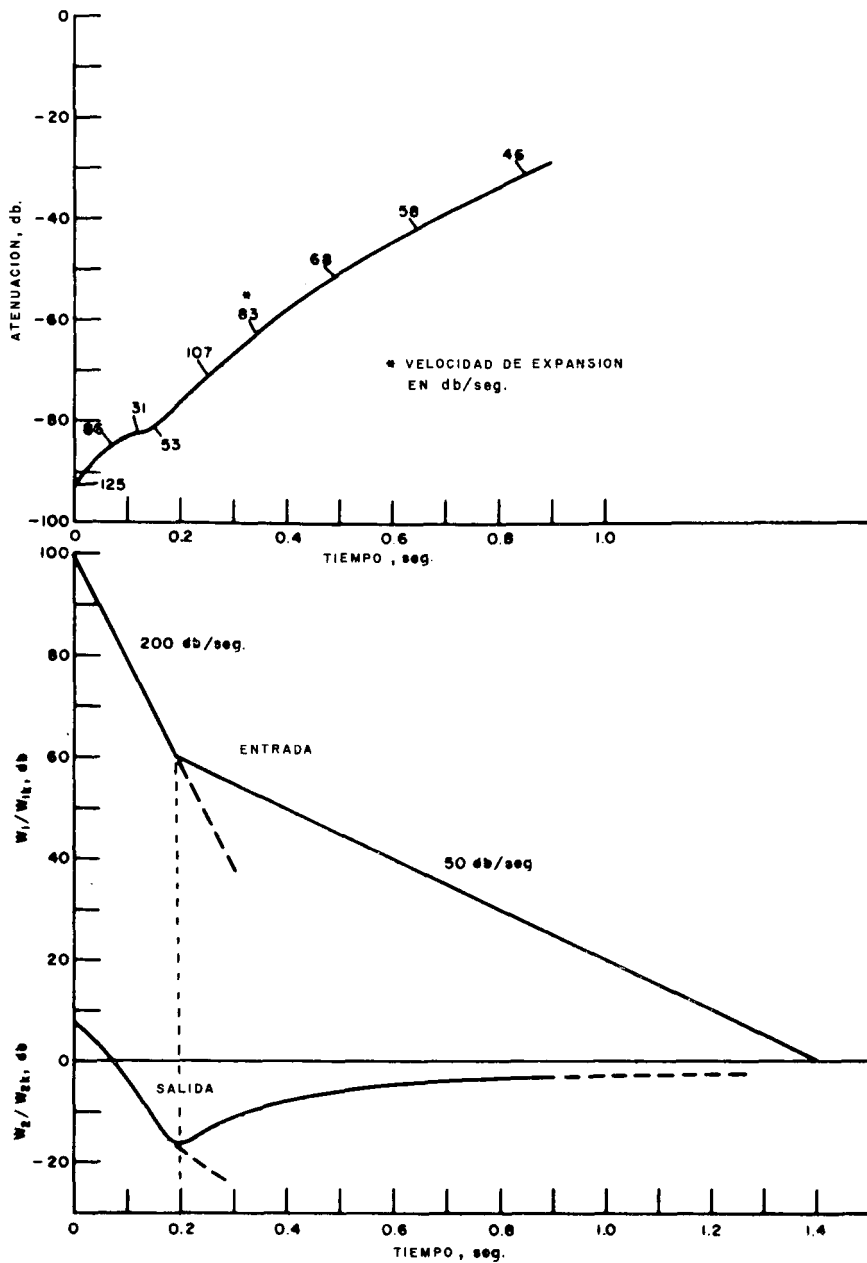


Fig.11 - Respuesta a entradas decrecientes en forma exponencial.

## CRITERIOS DE ESTABILIDAD

El concepto de estabilidad, que estudiaremos ahora, es de la mayor importancia en todo sistema a retroalimentación, y en el caso sísmico, no solamente gobierna al diseño mismo, sino que se pone de manifiesto en el funcionamiento real en el campo. A decir verdad, la comprensión de estos fenómenos no puede eludirse, y este trabajo quedaría incompleto si no se incluyera su discusión.

Es necesario, por supuesto, exigir que el sistema sea "absolutamente estable", lo que significa que las oscilaciones no se regeneran, sino que se extinguen con el tiempo.

La ecuación diferencial contiene toda la información necesaria. La solución es una suma de términos exponenciales. Mientras los exponentes sean reales y negativos, la estabilidad está garantizada. Si los exponentes son complejos, con la parte real negativa, un criterio de estabilidad pueden determinar si el sistema es o no estable.

Pero si uno de los exponentes es real y positivo, el sistema es definitivamente inestable. Esto significa simplemente que hay que investigar la existencia de raíces reales positivas. Esto, sin embargo, no siempre es posible. Los coeficientes de las ecuaciones diferenciales, después de todo, representan cantidades físicas y no pueden ser complejos: de aquí se sigue que las raíces deben presentarse en forma de complejos conjugados.

Supongamos que en  $\gamma^2 + a\gamma + b = 0$  las raíces sean  $\gamma_1 = -\alpha + j\beta$ , y  $\gamma_2 = -\alpha + j\gamma$  ( $\gamma \neq \beta$ ). Entonces  $a = 2\alpha - j(\beta + \gamma)$  y  $b = (\alpha^2 - \beta\gamma) - j\alpha(\beta + \gamma)$ , de donde se ve que solo en el caso de ser  $\gamma = -\beta$ , son reales  $a$  y  $b$ .

Además, todos los coeficientes deben tener el mismo signo, porque supóngase que la ecuación fuera  $\gamma^2 + a\gamma - b = 0$ . Entonces las raíces serían:

$$\gamma_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b \right]^{1/2},$$

es decir que no serían números complejos. Desafortunadamente, no siempre es seguro el examen de la ecuación diferencial, porque existen casos en los que los coeficientes tienen el mismo signo y que, sin embargo, pueden basarse en la existencia de raíces que tienen partes reales y positivas. Porque si la ecuación es  $\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$ , y las raíces son  $\gamma_1 = -\alpha$  y  $\gamma_{2,3} = \beta \pm j\gamma$ , la ecuación se hace  $\gamma^3 + \gamma^2 (\alpha - 2\beta) + \gamma (\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta) + \alpha(\beta^2 + \gamma^2) = 0$ , y todos los coeficientes son positivos si  $\alpha > 2\beta$  y  $\beta^2 + \gamma^2 > 2\alpha\beta$ .

Además, se necesita un método que se haga cargo de la situación cuando no se dispone de la ecuación diferencial misma, pero sí se dispone del diagrama de bloques, o cuando está indicado el procedimiento experimental.

Consideremos la Figura 8b, suponiendo que el circuito de retroalimentación esté interrumpido en el lugar que se indica por medio de la línea cortada, y que una señal error  $V_{ei}(s)$  alimenta al sistema de control. Se va a estudiar la señal  $V_i(s)$  retroalimentada.

Arreglando la ecuación (38), se obtiene la función de transferencia del circuito cerrado:

$$G(s) = F(s) \frac{1}{1 + K_0 G_0(s)} ,$$

donde  $K_0 G_0(s)$  es la función de transferencia del circuito abierto. Entonces, habrá inestabilidad siempre que

$$K_0 G_0(s) = -1 .$$

De la figura 8b, y por comparación con la  $G(s)$  de arriba, se ve que

$$V_i(s) = K_0 G_0(s) V_{ei}(s) ,$$

de manera que, físicamente, la función de transferencia del circuito abierto es

$$K_0 G_0(s) = \frac{V_i(s)}{V_{ei}(s)},$$

esto es, el cociente (señal retroalimentada)/(señal error). ¿Cuál es la naturaleza de la función de transferencia del circuito abierto que debería considerarse en el caso sísmico? En otras palabras, ¿cuál es el mecanismo por el que la energía se transmite alrededor del circuito?

Suponiendo que  $M$  contenga componentes reactivos, tales como condensadores de bloqueo (acoplamiento entre pasos de un amplificador de corriente alterna), ¿deberían éstos ser considerados en la función de transferencia? Para contestar a esta importante pregunta, volvamos a la figura 6, y consideremos el circuito interrumpido en otro lugar (indicado con la línea cortada) y supongamos  $w'_2(t) = w'_{20} \cos \omega_2 t$  aplicada a  $A_1$ , mientras que una constante  $w_1(t) = w_{10} \cos \omega_1 t$  alimenta la entrada. La salida  $w_2(t)$  se calcula, o se observa. ¿Qué forma adopta  $w_2(t)$ ? En lugar de una resistencia de equilibrio  $P_n$ , tenemos ahora, en efecto,  $P_n = P_{n0} + \Delta P_{n0} \cos \omega_2 t$ , de manera que

$$w_2(t) = w_{10} \frac{P_{n0}}{R} A \left( 1 + \frac{\Delta P_{n0}}{P_{n0}} \cos \omega_2 t \right) \cos \omega_1 t.$$

que se ve que representa a una onda modulada en su amplitud. Tal onda, por identidad trigonométrica, es transmitida en tres componentes de frecuencias  $\omega_1$ ,  $(\omega_1 + \omega_2)$  y  $(\omega_1 - \omega_2)$ . Afortunadamente, en el caso sísmico,  $\omega_2 \ll \omega_1$ , de manera que la energía sísmica se concentra en la frecuencia  $\omega_1$  para la cual el amplificador  $A$  está designado a representar un paso de banda. Por lo tanto, los condensadores de acoplamiento pueden ser, con seguridad, ignorados en el estudio de la estabilidad.

Una forma suficientemente generalizada de  $G_0(s)$  para nuestros propósitos es, por lo tanto, la fracción



$$\frac{V_i(s)}{V_{ei}(s)} = K_0 \frac{1}{s \tau_0 (s \tau_1 + 1) (s \tau_2 + 1) \dots},$$

cuyo denominador consiste en un producto de términos  $(s \tau_1 + 1)$  y, para los propósitos de la discusión, puede contener un término  $s \tau_0$ .

El teorema del valor final (página 168) implica que uno tiene que estudiar esta función cuando  $s \rightarrow 0$  ó  $\omega \rightarrow 0$  para el estado permanente. Si el error desaparece,

$$\frac{V_i(s)}{V_{ei}(s)} \rightarrow \infty$$

y

$$\left[ \frac{K}{s \tau_0} \right]_{s \rightarrow 0} \rightarrow \infty$$

lo cual revela un hecho interesante:

A menos de que la función de transferencia de circuito abierto posea un polo en el origen, es imposible esperar una respuesta del estado permanente que sea absolutamente plana.

Siempre habrá alguna disminución ("taper"), a menos de que específicamente sea creado un polo en el origen. Consultando (38), (37) y (11), vemos que la función de transferencia de circuito abierto en nuestro caso es

$$K_0 G_0(j\omega) = K_0 \frac{1}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} \quad (53)$$

Representando  $K_0 |G_0(j\omega)|$  como ganancia  $H_0$  en db y fase  $\phi_0$ , tenemos

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 20 \log K_0 - 20 \log |j \omega T_1 + 1| - 20 \log |j \omega T_2 + 1| \\ \text{y} \\ \phi_0 &= -\tan^{-1} \omega T_1 - \tan^{-1} \omega T_2 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Considerando un término

$$H_{01} = -20 \log |j \omega T_1 + 1|. \text{ Si } \omega T_1 \ll 1, H_{01} \cong 0,$$

$$\text{y si } \omega T_1 \gg 1, H_{01} = -20 \log |j \omega T_1| :$$

La duplicación de la frecuencia es equivalente a un cambio de  $-6$  db en  $H_{01}$ . La representación asintótica de tal función de transferencia, por consiguiente, se efectúa por medio de dos líneas rectas; una para la constante cero db; la otra con una pendiente de  $-6$  db por octava ó  $-20$  db/decada (ver figura 12). Si se necesita más exactitud, esta aproximación asintótica puede ser corregida dándose cuenta de que a la "frecuencia de corte", para la cual es  $\omega T_1 = 1$ , uno tiene  $H_{01} = -20 \log |j + 1| = -20 \log \sqrt{2} = -3$  db.

Similarmente, la desviación es 1 db para una frecuencia alejada una octava de la frecuencia de corte. No hay aproximación asintótica sencilla aprovechable para la fase, excepto en los límites, para los cuales la fase es cero, ó  $-\pi/2$ . Es bueno reconocer firmemente que un elemento de esta función de transferencia especial está asociado con una ganancia asintótica decreciente que tiene una "pendiente unitaria" de  $-6$  db/octava ó  $-20$  db/decada, y un cambio de fase neto, en atraso, de  $\pi/2$ .

Estas gráficas de logaritmo de la amplitud, y fase Vs. log frecuencia conducen a un simple criterio de estabilidad (diagrama de Bode). En la figura 13, que describe arbitrariamente la situación, la función de transferencia consiste de tres elementos; el primero tiene una frecuencia de corte  $\omega_1$ , el segundo  $\omega_2$ , y el tercero  $\omega_3$ . Para el caso A, se ha supuesto una ganancia constante  $K_A$ . Esta permanece constante hasta  $\omega_1$ , punto en el cual empieza a caer a razón de  $-6$  db/octava debido al primer elemento de la función de transferencia. Esta tendencia continúa hasta llegar a  $\omega_2$ , donde se suma otra pendiente de  $-6$  db/octava, debido al segundo elemento de la función de transferencia, de tal manera que la pendiente de la ganancia cambia a  $-12$  db/octava. Al llegar a  $\omega_3$ , el tercer elemento contribuye con otros  $-6$  db/octava

y hace que la pendiente cambie a  $-18$  db/octava. La fase correspondiente se muestra también. Ahora, cuando la ganancia ha sido reducida a cero (magnitud 1), punto  $G_{0A}$ , la fase aun no ha llegado a  $-180^\circ$  (lo que haría  $K_0 G_0 = -1$ ) y así hablamos de la existencia de un “margen de fase positiva”. El sistema es estable; la fase tiene que hacerse más negativa para producir inestabilidad. Cuando la fase llega a  $-180^\circ$ , punto  $P_0$ , la magnitud ya se encuentra por debajo de cero, es decir,  $< 1$ , de modo que podemos hablar de la existencia de un “margen de ganancia positiva”. El sistema es estable: La ganancia tiene que ser aumentada para producir inestabilidad. Sin embargo, en el caso B la situación es diferente. Los márgenes de fase y de ganancia son negativos a la vez, y el sistema es inestable.

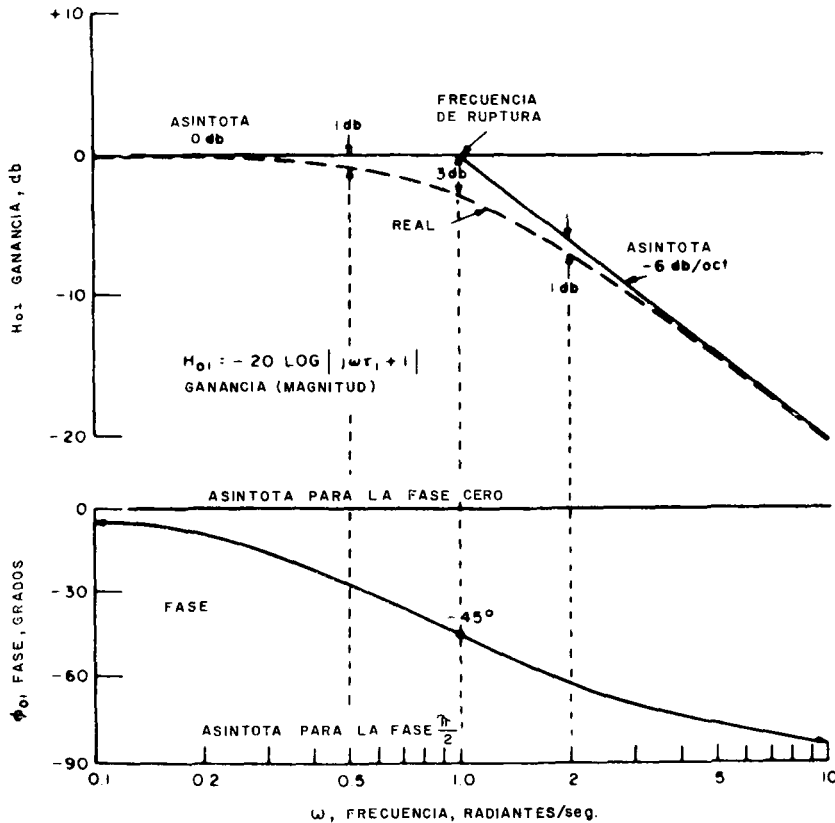


Fig. 12 - Representación logarítmica de la función de transferencia  $G_{01} = \frac{1}{j\omega\tau_1 + 1}$

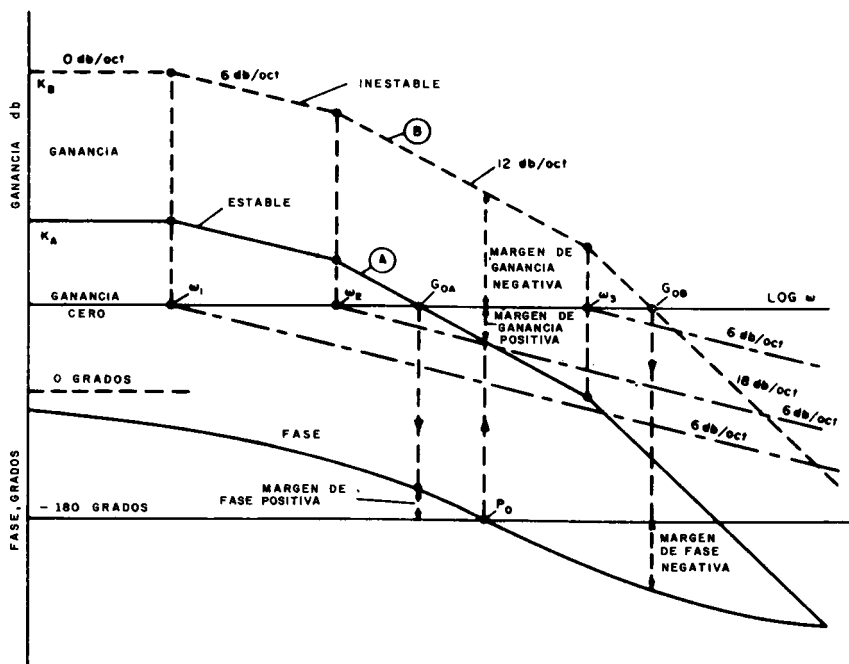


Fig. 13 - Fundamentos del diagrama de Bode.

La cantidad de margen de fase y de ganancia positiva que muestra un sistema, determina qué tan estable es. Para el margen de fases, la experiencia demuestra que el mínimo debe ser de unos  $30^\circ$ .

La ganancia alrededor del circuito debe decrecer aparentemente desde los grandes valores en la banda de paso del control, hasta cero a frecuencia infinita, sin producir un defasamiento que exceda de cierto valor prescrito.

Esto básicamente impone una limitación sobre la rapidez de reducción de la ganancia fuera de la banda de paso del control. ¿Qué papel desempeña la rapidez de ganancia en su efecto sobre la fase?

Para cierto tipo de circuitos, los llamados "circuitos de mínimo defasamiento" (los cuales gobiernan exclusivamente la porción de retroalimenta-

ción de los amplificadores sísmicos), existe un teorema \* que relaciona la fase con la rapidez de ganancia:

$$\begin{aligned}\varphi_r &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dA}{du} \ln \coth \frac{|u|}{2} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dA}{du} \ln \left| \frac{\omega + \omega_r}{\omega - \omega_r} \right| du,\end{aligned}$$

donde  $u$  es un parámetro de la frecuencia,  $u = \ln \omega/\omega_r$ , ( $\omega_r$  es la frecuencia de referencia),  $dA/du$  es la rapidez de decaimiento de la frecuencia, y  $\varphi_r$  es la fase a la frecuencia de referencia. Aquí  $A$  está dado en nepers, es decir, expresado como  $\ln$  de la relación de ganancia. Esto muestra que  $\varphi_r$  es proporcional a la rapidez a la cual la ganancia decrece a la frecuencia crítica, puesto que  $\ln \coth |u|/2$  es una "función ponderadora". Ahora, para un margen de fase de  $30^\circ$ , exigimos que el defasamiento sea  $150^\circ = (5/6)\pi$ . ¿Con qué rapidez constante deberá entonces decrecer la ganancia?

Tenemos

$$\frac{5}{6} \pi = \frac{1}{\pi} \frac{dA}{du} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \coth \frac{|u|}{2} du .$$

Sin embargo se sabe que la integral definida vale  $\pi^2/2$ , y por lo tanto  $dA/du = 5/3$ . Como la rapidez unitaria corresponde a 6 db/octava, la máxima rapidez de decaimiento permisible es de 10 db/octava. Cualquier cosa más rápida que esto, en el cruce, queda garantizada de poseer un alto grado de inestabilidad relativa. Estas observaciones son importantes si la ganancia al-

---

\* H. W. Bode, "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", Van Nostrand, 1945, pp. 314, 315.

rededor del circuito se toma experimentalmente, de modo que la representación asintótica no es posible.

Con base en lo anterior, volvamos a nuestro modelo de AVC. El diagrama de Bode implica al régimen de estado permanente, de modo que nuestro diagrama de bloques es el de la Figura 8b, y la función de transferencia de circuito cerrado está dada por (38).

La función de transferencia de circuito cerrado puede escribirse

$$K_0 G_0(j\omega) = MNw_1 \frac{x_r}{x_n} \frac{1}{\xi_1 \xi_2} \frac{1}{(j \frac{\omega}{\xi_1} + 1) (j \frac{\omega}{\xi_2} + 1)}$$

Por la discusión precedente, no es necesario desarrollar el diagrama de Bode: Sabemos que dos constantes de tiempo desarrollan  $180^\circ$  solamente cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , y así, el sistema es estable a priori, y el caso es trivial. Aún más, para demostrar un punto interesante, calcularemos el margen de fase a la ganancia en el cruce.

Para el Ejemplo 1, y para un nivel  $w_1 = 10^{-3}$  correspondiente a 80 db arriba del nivel de control,  $x_n = 8.38 \times 10^6$  y  $MNw_1(x_r/x_n) = 1.275 \times 10^3$  y, por (37),  $\xi_1 = 0.8$  y  $\xi_2 = 100$ . Por lo tanto  $K_0 = 15.95 \rightarrow 24.05$  db.

Así

$$H_0 = 24.05 = 20 \log |j\omega/0.8 + 1| - 20 \log |j\omega/100 + 1|$$

$$\phi_0 = 0 - \tan^{-1} \omega/0.8 - \tan^{-1} \omega/100$$

La "frecuencia de cruzamiento"  $\omega_c$  para ganancia cero se calcula por  $24.05 \cong 20 \log \omega_c/0.8$ , y resulta  $\omega_c = 12.8$ , y la fase para esa frecuencia es  $-93.7^\circ$ .

Así pues, operamos con un margen de fase positiva de  $86.3^\circ$ , y no hay duda acerca de la estabilidad. Pero en la página 186 y en la Figura 9 se examinó la respuesta a la función escalón en el caso de que la ecuación diferencial tiene raíces complejas. Uno podría cometer el error de condenar un sistema cuyas raíces son complejas tachándolo de inestable; y a decir verdad, ésta es una condición necesaria para la inestabilidad, pero no es una condición suficiente. Para las hipótesis del ejemplo 3, nótese que  $K_0$  permanece invariante debido a (12), (13) y (55).

Para  $\zeta_1 = 5$  y  $\zeta_2 = 100$ , obtenemos para la ganancia de cruzamiento  $24.05 \cong 20 \log \omega_c/5$ , lo cual da como resultado  $\omega_c = 80$ , y  $\phi_c = -125.1^\circ$ , lo que demuestra que todavía operamos a un margen cómodo de fase positiva, de  $54.9^\circ$ .

Así, la estabilidad relativa es indiscutible, lo cual se manifiesta por el carácter no oscilatorio de la respuesta a la función escalón que se da en la Figura 9. Esto ilustra entonces la facilidad con que se puede llegar a conclusiones prematuras en situaciones que no han sido entendidas plenamente.

Finalmente, el caso más interesante que involucra tres constantes de tiempo, será discutido cuantitativamente. Por analogía con (55), la función de transferencia de circuito abierto para tal sistema sería

$$K_0 G_0(j\omega) = MNw_1 \frac{x_r}{x_n} \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3} \cdot \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\zeta_1} + 1\right) \left(j\frac{\omega}{\zeta_2} + 1\right) \left(j\frac{\omega}{\zeta_3} + 1\right)} \quad (56)$$

La mayoría de los sistemas prácticos caen realísticamente en esta categoría, ya sea debido a parásitos o a la necesidad de utilizar dos constantes de tiempo para el almacenamiento de energía, o debido a la física del elemento controlador en sí.

Ejemplo 5.—Sean  $\zeta_1 = 5$ ,  $\zeta_2 = 10$ ,  $\zeta_3 = 30$  (dos constantes de tiempo rápidas para el almacenamiento de energía y un elemento controlador que actúa lentamente). Por analogía con (13)

$$N = KA_1 A_2 A_3 \frac{1}{T_{11} T_{21} T_{31}} = KA_1 A_2 A_3 \frac{1}{8} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \quad (57)$$

si se supone  $R = S$  para los tres circuitos.

Por (30),  $x_n$  es todavía la misma que para el caso de dos constantes de tiempo, o sea  $x_n = 8.38 \times 10^6$ . Y, como lo hemos observado,  $K_0$  continúa siendo la misma

$$K_0 = Mw_1 \frac{x_r}{x_n} KA_1 A_2 A_3 \frac{1}{8} = 15.95$$

Si  $M$ ,  $K$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  quedan como en el Ejemplo 1,  $A_3$  debe valer 2.

La ganancia a la frecuencia de cruzamiento se calcula de

$$24.05 = 20 \log \frac{\omega_c}{5} + 20 \log \frac{\omega_c}{10} ;$$

por lo tanto

$$\omega_c = 28.2$$

El diagrama de Bode ha sido desarrollado en la Figura 14. Este indica operación a un margen de fase negativa, de cerca de  $15^\circ$  y un margen de ganancia negativa de unos 4 db, llegándose a la conclusión de que es inevitable la regeneración.

¿Cómo funciona el sistema en el umbral de control? Para  $w_1 = 10^{-7}$  Volt,  $x_r/x_n = 1$ , de modo que  $K_0 = 7.5 \rightarrow 17.5$  db. A este corresponde una



frecuencia de cruzamiento de  $\omega_c = 19.1$  y, según el diagrama de Bode, un margen de fase positiva de unos  $10^\circ$ . Esto indica que aunque el sistema no es regenerativo, es todavía inadecuado para trabajos sismológicos porque los transitorios oscilatorios requieren un tiempo relativamente largo para extinguirse.

La Figura 14 implica que pueden muy bien existir en ciertos casos, condiciones que puedan indicar una estabilidad de operación satisfactoria a bajos niveles, y muy pobre estabilidad a niveles máximos: El sistema es entonces llevado a una modalidad oscilatoria por los grandes estallidos ("burs-outs"), calificándosele de condicionalmente estable, y por consiguiente no satisfactorio para los trabajos sísmicos.

Nótese en la Figura 14 que el extremo inferior de la banda de frecuencias, digamos  $\omega = 60$ , está todavía por encima de la frecuencia de cruzamiento, en cuya cercanía pueden ocurrir transitorios oscilatorios, constituyendo una inter-relación favorable.

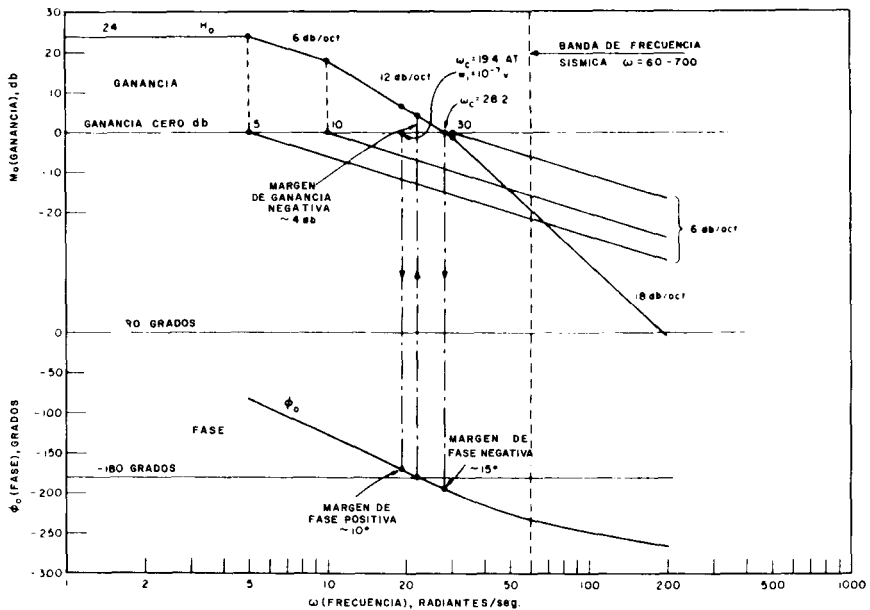


Fig. 14 - Diagrama de Bode para un AVC modelo con tres constantes de tiempo ( un nivel de entrada de un milivolt )

## C O N C L U S I O N

Se ha estudiado teóricamente un "modelo" matemático, más bien simple, de un sistema moderno de AVC, sin enfocar la atención en aspectos constructivos o de diseño particulares. La sencillez, debida en parte a hipótesis matemáticas simplificadoras que, sin embargo, se correlacionan firmemente con la práctica actual, y en parte a un proceso de linearización, dan como resultado un tratamiento casi lineal de este problema básico de control no lineal.

Con esto, el beneficio ganado de la filosofía del control a retro-alimentación, se sugiere de manera natural, y los descubrimientos han sido conectados con la forma "clásica" siempre que fue posible. A pesar de la simplicidad matemática, el modelo contiene todos los "ingredientes" que son responsables del comportamiento total de los sistemas AVC que se encuentran en la práctica.

Se tiene la esperanza de que la visualización lograda con lo expuesto mejorará la apreciación del notable funcionamiento de los amplificadores sísmicos de alta calidad que son ofrecidos por la industria, y aclarará las razones de las limitaciones de otros.

---

---

B I B L I O G R A F I A

BODE, H. W.—Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrand, 1945.

# ‘‘FORO ABIERTO’’

## CARTA AL EDITOR

‘‘Una aplicación ejemplar del Algebra de los Sistemas’’

Por medio de la presente, quiero manifestar a Ud. que al aplicar el método Sigma a las determinaciones de velocidades del subsuelo, se logra gran efectividad y precisión. Dicho método fue brillantemente expuesto por la Profa. G. Pérez Ruiz y el Ing. E. Elorduy Téllez, en el número 1 del volumen VI, de nuestro boletín AMGE.

A mi modo de ver, es muy meritorio que la Srita. Pérez Ruiz y el Ing. Elorduy logran desarrollar un método práctico de fácil aplicación (como lo es el de las Sigmas) y merecen aplauso. Las fórmulas encontradas —aunque de aspecto aparatoso— pueden arrojar resultados en pocos minutos de operación, si se manipulan o programan adecuadamente.

Intencionalmente, el método fue conducido por senderos matemáticos sencillos, pero los autores están de acuerdo en que su desarrollo se simplifica notablemente al emplear álgebra de sistemas, según demuestran las dos figuras anexas, en las cuales aparece la deducción completa de las fórmulas que gobiernan al caso lineal (partes I y II). Resulta tan eficaz y atractiva la notación algebraica de los sistemas (cuya culminación logró el Dr. Albert Einstein, mediante su famosa Convención Sumatoria), que se deja la tentación, a los aficionados a las ciencias matemáticas, para que por su cuenta ataquen las llamadas leyes parabólica y cúbica.

Atentamente.

Pro. F. Neri España\*

## BIBLIOGRAFIA

Matemática Superiores.	G. Terrazas.	Editorial ESIME.
Vector and Tensor Analysis.	H. V. Craig.	McGraw-Hill.
Higher Mathematics for Engineers and Physicists.	ISES. Sokolnikoff.	McGraw-Hill.

---

\* Servicios Geofísicos, S. A. de C. V. IPN.

# METODO "SIGMA"

## DESARROLLADO CON ALGEBRA DE SISTEMAS

PARTE I - Ley lineal. Determinación de "K" y "V<sub>0</sub>".

$$z = \frac{V_0}{K} (e^{K\tau} - 1)$$

$$z_n^n = z_a^n + z_b^n = \frac{V_0}{K} (e^{K\tau_n^n} - 1) \quad \begin{cases} z_a^n = \frac{V_0}{K} (e^{K\tau_a^n} - 1) \\ z_b^n = \frac{V_0}{K} (e^{K\tau_b^n} - 1) \end{cases}$$

$$\frac{V_0}{K} = \frac{z_a^n}{(e^{K\tau_a^n} - 1)} = \frac{z_b^n}{(e^{K\tau_b^n} - 1)}$$

$$\therefore z_a^n e^{K\tau_b^n} - z_b^n e^{K\tau_a^n} = z_a^n - z_b^n$$

$$\text{recordando} \quad e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x)^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{K\tau_n^n} = 1 + K\tau_n^n + K^2 \frac{(\tau_n^n)^2}{2!} + K^3 \frac{(\tau_n^n)^3}{3!} + K^4 \frac{(\tau_n^n)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^R \frac{(K\tau_n^n)^r}{r!} \quad \left. \vphantom{\sum_{r=1}^R} \right\} \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

$$z_a^n \left[ 1 + \sum_{r=1}^R \frac{(K\tau_b^n)^r}{r!} \right] - z_b^n \left[ 1 + \sum_{r=1}^R \frac{(K\tau_a^n)^r}{r!} \right] = z_a^n - z_b^n$$

$$z_a^n \sum_{r=1}^R \frac{(K\tau_b^n)^r}{r!} - z_b^n \sum_{r=1}^R \frac{(K\tau_a^n)^r}{r!} = 0$$

haciendo R=4

$$z_a^n \left[ K\tau_b^n + K^2 \frac{(\tau_b^n)^2}{2!} + K^3 \frac{(\tau_b^n)^3}{3!} + K^4 \frac{(\tau_b^n)^4}{4!} \right] - z_b^n \left[ K\tau_a^n + K^2 \frac{(\tau_a^n)^2}{2!} + K^3 \frac{(\tau_a^n)^3}{3!} + K^4 \frac{(\tau_a^n)^4}{4!} \right] = 0$$

$$\underbrace{\frac{z_a^n (\tau_b^n)^4 - z_b^n (\tau_a^n)^4}{4!}}_A K^4 + \underbrace{\frac{z_a^n (\tau_b^n)^3 - z_b^n (\tau_a^n)^3}{3!}}_B K^3 + \underbrace{\frac{z_a^n (\tau_b^n)^2 - z_b^n (\tau_a^n)^2}{2!}}_C K^2 + \underbrace{z_a^n \tau_b^n - z_b^n \tau_a^n}_D = 0$$

$$\frac{z_a^n (\tau_b^n)^4 - z_b^n (\tau_a^n)^4}{4!} (K)^{4-p} = 0$$

$$AK^4 + BK^3 + CK^2 + DK = 0 \dots \dots \text{fórmula (8)}$$

$$z_n^n = \frac{V_0}{K} (e^{K\tau_n^n} - 1)$$

$$V_0 = \frac{K z_n^n}{(e^{K\tau_n^n} - 1)} \dots \dots \text{fórmula (11)}$$

# PART E II.- Ley lineal

Determinación de "K" y "V<sub>0</sub>" en función de V<sub>m</sub>.

$$V_m = \frac{Z}{T} = \frac{V_0}{KT} (e^{KT} - 1)$$

$$V_{mn}^n = \frac{V_0}{KT_n} (e^{KT_n^n} - 1) \quad \begin{cases} V_{ma}^a = \frac{V_0}{KT_a} (e^{KT_a^a} - 1) \\ V_{mb}^b = \frac{V_0}{KT_b} (e^{KT_b^b} - 1) \end{cases}$$

$$\frac{V_0}{K} = \frac{V_{ma}^a}{\frac{(e^{KT_a^a} - 1)}{T_a}} = \frac{V_{mb}^b}{\frac{(e^{KT_b^b} - 1)}{T_b}}$$

$$V_{ma}^a \frac{(e^{KT_b^b} - 1)}{T_b} - V_{mb}^b \frac{(e^{KT_a^a} - 1)}{T_a} = 0$$

desarrollando los 5 primeros términos de e<sup>KT</sup>

$$e^{KT_j^n} - 1 = 1 + KT_j + K^2 \frac{T_j^2}{2!} + K^3 \frac{T_j^3}{3!} + K^4 \frac{T_j^4}{4!} - 1 = \frac{(KT_j^n)^f}{f!}$$

haciendo F=4.

$$\frac{e^{KT_j^n} - 1}{T_j} = K + K^2 \frac{T_j}{2!} + K^3 \frac{T_j^2}{3!} + K^4 \frac{T_j^3}{4!} \quad j \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

$$V_{ma}^a (K + K^2 \frac{T_b}{2!} + K^3 \frac{T_b^2}{3!} + K^4 \frac{T_b^3}{4!}) - V_{mb}^b (K + K^2 \frac{T_a}{2!} + K^3 \frac{T_a^2}{3!} + K^4 \frac{T_a^3}{4!}) = 0$$

$$\underbrace{\frac{V_{ma}^a T_b^3 - V_{mb}^b T_a^3}{4!}}_A K^3 + \underbrace{\frac{V_{ma}^a T_b^2 - V_{mb}^b T_a^2}{3!}}_B K^2 + \underbrace{\frac{V_{ma}^a T_b - V_{mb}^b T_a}{2!}}_C K + \underbrace{V_{ma}^a - V_{mb}^b}_D = 0$$

$$\frac{V_{ma}^a (T_b)^{p-1} - V_{mb}^b (T_a)^{p-1}}{p!} (K)^{p-1} = 0$$

$$AK^3 + BK^2 + CK + D = 0 \dots \dots \dots \text{fórmula } \textcircled{6}$$

$$V_{mn}^n = \frac{V_0}{KT_n} (e^{KT_n^n} - 1)$$

$$\therefore V_0 = \frac{KV_{mn}^n}{\frac{(e^{KT_n^n} - 1)}{T_n}}$$

si n=a se obtiene la fórmula de la página 32

**NUEVOS SOCIOS**

Ing. Bernardino E. Buttini Maestri.

General Paz 255.

Codoy Cruz, Mendoza, Argentina.

Sud América.

Luis Barbosa Flores.

Ayutla No. 18.

Villahermosa, Tab.

Ing. Carlos Bustamante Camacho.

Av. Argentina No. 786.

Lima, Perú.

Sud América.

Ing. Carlos Espinosa Sotelo.

Estafetas No. 133 Depto. 2.

México 13, D. F.

Mr. James W. Grimes.

5234 Glenmont Drive.

Houston, Texas.

U. S. A.

## NUEVOS SOCIOS

Mr. Harry Girard.  
1947 W. Gray Ave.  
Houston, Texas. 77019.  
U. S. A.

Ing. Jorge González Hernández.  
Istmo No. 3.  
Jesús Carranza, Ver.

Ing. Héctor Hernández Galicia.  
Lic. Genaro García.  
Retorno 1 No. 18.  
Col. Jardín Balbuena.  
México 9, D. F.

Ing. Juan Herrera Rojas.  
Cedro No. 56 Depto. 1.  
México 4, D. F.

Ing. Luis Madrigal Ugalde.  
Xola No. 1454.  
México 12, D. F.

## NUEVOS SOCIOS

Ing. Aldo Raúl Murut Giuliano.

Canalejas No. 1898.

Buenos Aires, Argentina.

Sud América.

Ing. E. Melitón Monroy Hernández.

San Quintín No. 225.

Col. Mitras.

Monterrey, N. L.

Ing. Armando Núñez Núñez.

Edificio Maracán Desp. 107.

Av. Juárez y Allende.

Monterrey, N. L.

Mr. Joe O. Parr, Jr.

202 Janis Rae.

San Antonio, Texas. 78201.

U. S. A.

Ing. Hugo Fernando Vilchez Fonseca.

Lord Cochrane 150 — E.

Isidro — Lima, Perú.

Sud América.

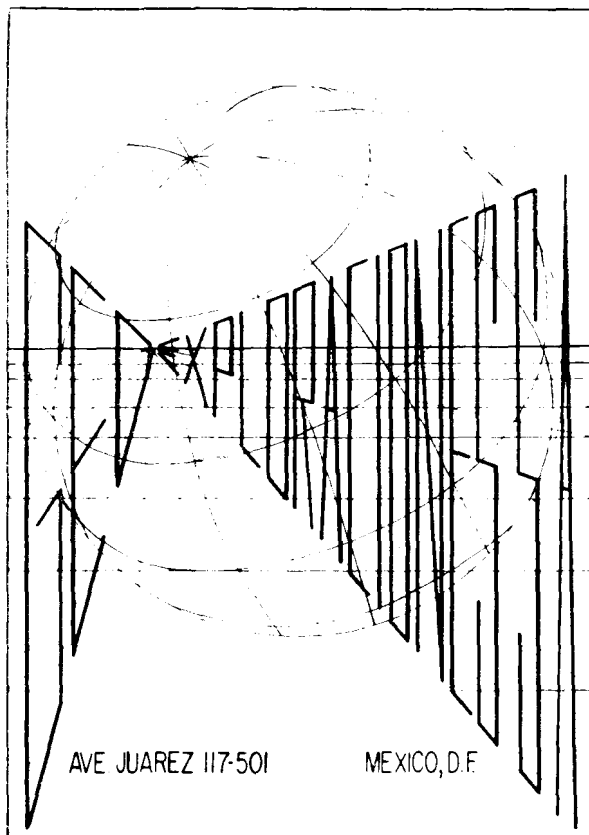


S E R V I C I O S

GEOFISICOS

GEOLOGICOS

FOTOGEOLOGICOS



AVE JUAREZ 117-501

MEXICO, D.F.

TEL. 46 - 11 - 81

GEOHIDROLOGICOS

RADIOACTIVOS

TOPOGRAFICOS

# **PERFORACIONES, S. A.**

**CONTRATISTA DE PERFORACION  
EXPLORATORIA DESDE 1950 PARA**

**PETROLEOS MEXICANOS**

**SECRETARIA DE MARINA**

**CONSTRUCTORA MALTA, S. A.**

**NATIONAL SOIL SERVICES, CO.**

**CIA. FUNDIDORA DE FIERRO Y  
ACERO DE MONTERREY, S. A.**

**Y PARTICULARES**

**AVENIDA JUAREZ No. 119 - 5o. PISO**

**Teléfonos: 21-37-25 y 21-36-42**

**MEXICO 1, D. F.**

# EXPLORACIONES,

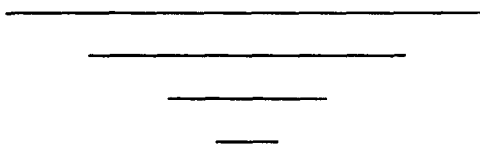
===== S. A. =====



Iturbide No. 36    Desp. 201

Tel. 10-15-64

MEXICO, D. F.



SOCIOS

\$100.00

NO SOCIOS

\$150.00



ADQUIERA UD. LOS VOLUMENES NUMEROS I - II -  
III - IV Y V CORRESPONDIENTES A LOS AÑOS DE 1960  
1961 - 1962 - 1963 Y 1964 EMPASTADOS EN KERATOL  
CON SUS INICIALES GRABADAS EN ORO.

PEDIDOS A LA  
ASOC. MEX. DE GEOF. DE EXPL.