REGLA DE LA SUMA PARA CALCULAR PROBABILIDADES DE DOS O MÁS EVENTOS

Sum rule for calculating the odds of two or more events

PAULA ANDREA RODAS RENDÓN
Ingeniera Industrial Esp.
Profesora Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
parodas@utp.edu.co

LUZ MARÍA OSPINA GUTIÉRREZ
Ingeniera Industrial.
Profesora Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
lmaus@utp.edu.co

ANGELA MARÍA LANZAS DUQUE
Ingeniera Industrial M.Sc
Profesora Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
amlanzas@utp.edu.co

UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DE PEREIRA

RESUMEN
Este artículo presenta los aspectos fundamentales para aplicar la ley aditiva de la probabilidad en la unión de 2 ó más eventos, siendo un método utilizado para calcular probabilidades expresadas de la forma P(A o B), es decir, la probabilidad de que ocurra el suceso A ó B ó de que ocurran ambos, como el resultado de un experimento.

Un procedimiento se descompone en eventos mutuamente excluyentes, permitiendo listar los puntos que conforman el espacio muestral relacionado con el experimento, utilizando diagramas de Venn y del árbol; procediendo a calcular la probabilidad de la unión de 2 ó más eventos.

PALABRAS CLAVES: Experimento, Espacio Muestral, Punto Muestral, Evento, Eventos Complementarios y Mutuamente excluyentes, Diagrama de Venn, Diagrama del Árbol, Unión e Intersección de Eventos.

ABSTRACT
This article presents the fundamentals to apply the addition law of probability in the union of 2 or more events, being a method used to calculate probabilities expressed in the form P (A or B), the probability of the event A, B or both occur as the result of an experiment.

A process is decomposed into mutually exclusive events, allowing the points list make up the sample space associated with the experiment, using Venn diagrams and tree proceeding to calculate the probability of the union of 2 or more events.

KEYWORDS: Experiment, sample space, sample point, events complementary and mutually exclusive, Venn diagram, tree diagram, Union and Intersection of events.

1. INTRODUCCIÓN

Para calcular probabilidades utilizando la regla de la suma, es de gran utilidad descomponer los eventos en otros que sean mutuamente excluyentes, ya que ésta, suma las áreas que no tienen puntos en común.

La metodología a seguir presenta cuatro pasos a saber:

1. Identificar los puntos muestrales, utilizando el diagrama del árbol.
2. Definir el espacio muestral.
3. Representar en un diagrama de Venn el espacio muestral.
4. Calcular la probabilidad de la unión de eventos.

La metodología utilizada en este artículo describe la unión para dos, tres y cuatro eventos, con el cálculo de sus respectivas probabilidades.

2. DEFINICIONES

Las definiciones y términos básicos y generales, citadas en el presente artículo son las siguientes: [1,2,3]

2.1 Experimento: Proceso que genera un conjuntos de datos o resultados.

2.2 Espacio muestral: Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico y se representa con el símbolo S.

2.3 Punto muestral: Cada uno de los resultados del espacio muestral.

2.4 Evento: Subconjunto de un espacio muestral.

2.5 El complemento de un evento A: Es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A.

Fecha de Recepción: 15 de Septiembre de 2009.
Fecha de Aceptación: 23 de Noviembre de 2009.

2.6 Eventos mutuamente excluyentes o disjuntos: Son los eventos que no tienen puntos en común. Es decir, no tienen puntos muestrales en común.

2.7 Diagrama de Venn: Es una representación gráfica de los eventos y el correspondiente espacio muestral de un experimento. Se representa el espacio muestral como un rectángulo y los eventos como círculos trazados dentro del rectángulo.

2.8 Diagrama de árbol: Es una representación gráfica que resulta útil para entender un experimento y enumerar los resultados de varias etapas.

2.9 Unión de dos eventos: Se denota con el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos.

2.10 Intersección de dos eventos: Se denota con el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene todos los elementos que son comunes a A y a B.

3. REGLA DE LA SUMA O LEY ADITIVA DE LA PROBABILIDAD

Las leyes simplifican el cálculo de probabilidades, la primera, denominada regla aditiva, se aplica a uniones de 2 ó más eventos. [4,5]

- La ley aditiva o regla de la suma para eventos mutuamente excluyentes o desarticulados, es decir, que no pueden suceder al mismo tiempo y que no tienen puntos en común, se aplica sumando las probabilidades de los eventos considerados (véase Cuadro 1).

Eventos	*Probabilidad de la Unión*
A, B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A,B,C	$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
A,B,C,D	$P(A \cup B \cup C \cup D) =$ $P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$

Cuadro 1. Unión de eventos mutuamente excluyentes

- Cuando los eventos tienen puntos en común, es decir pueden suceder al mismo tiempo y tienen intercepto, se pueden descomponer en eventos mutuamente excluyentes para aplicar la ley aditiva, sumando las probabilidades de estos.

3.1 Unión de dos eventos.

Si A y B son dos eventos, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Los puntos muestrales que pertenecen a A o B están incluidos en los tres conjuntos mutuamente excluyentes de la Figura 1 y en el diagrama del árbol de la Figura 2. donde los resultados de los dos eventos A y B, generan un conjunto de resultados posibles que se pueden encontrar tomando todas las trayectorias en el diagrama del árbol indicado.

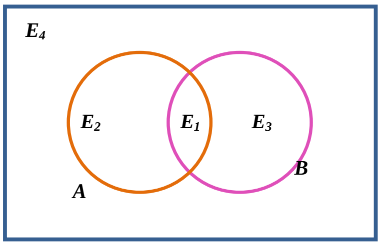

Figura 1. Diagrama de Venn, que muestra la unión de dos eventos A y B.

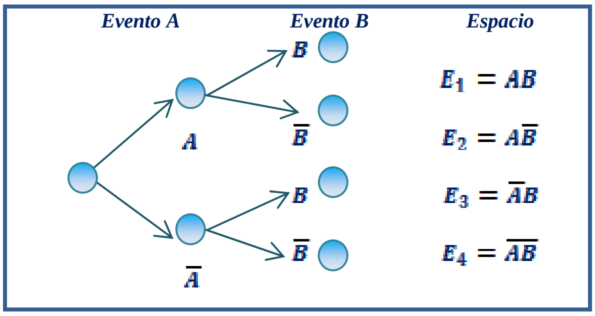

Figura 2. Diagrama de árbol, que muestra el espacio muestral para dos eventos A y B

La probabilidad: $P(A \cup B)$ utilizando el espacio muestral, es la suma de las probabilidades de los puntos muestrales en $(A \cup B)$, considerando la suma de eventos mutuamente excluyentes, así:

Puntos	*Espacio*	*P(E$_i$)*
E_1	AB	$P(AB)$
E_2	$A\bar{B}$	$P(A) - P(AB)$
E_3	$\bar{A}B$	$P(B) - P(AB$
$P(A \cup B) =$ $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) =$		$= P(A) + P(B) - P(AB)$

Cuadro 2. Puntos muestrales en $A \cup B$

3.2 Unión de tres eventos.

Si A, B y C son tres eventos, entonces:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) +$$

Los puntos que pertenecen a A o B o C, están incluidos en los siete conjuntos mutuamente excluyentes de la Figura 3 y en el diagrama del árbol de la Figura 4.

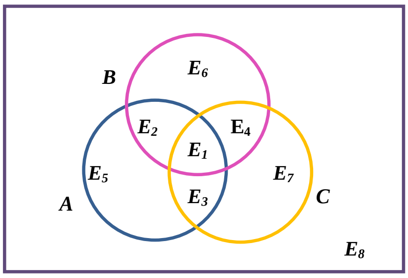

Figura 3. Diagrama de Venn, que muestra la unión de tres eventos A, B y C

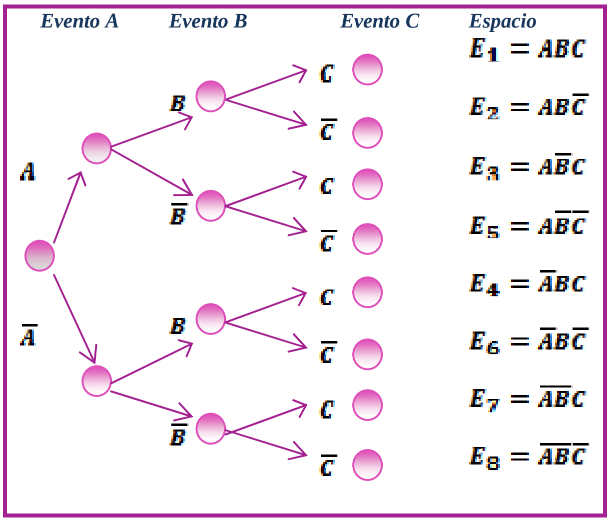

Figura 4. Diagrama de árbol. Espacio muestral para tres eventos A,B y C

La probabilidad: $P(A \cup B \cup C)$ utilizando el espacio muestral, es la suma de las probabilidades de los puntos muestrales en $(A \cup B \cup C)$, considerando la suma de eventos mutuamente excluyentes, así:

Puntos	*Espacio*	*P(E_i)*
E_1	ABC	$P(ABC)$
E_2	$AB\bar{C}$	$P(AB) - P(ABC)$
E_3	$AC\bar{B}$	$P(AC) - P(ABC)$
E_4	$BC\bar{A}$	$P(BC) - P(ABC)$
E_5	$A\overline{BC}$	$P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC)$
E_6	$B\bar{A}\bar{C}$	$P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC)$
E_7	$C\overline{AB}$	$P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
$P(A \cup B \cup C) = \sum$		$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) -$

Cuadro 3. Puntos muestrales en $A \cup B \cup C$

3.3 Unión de cuatro eventos.

Si A, B, C y D son cuatro eventos, entonces:

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(AB) - P(AC) - P(AD) - P(BC) - P(BD) - P(CD) + P(ABC) + P(ABD)$$

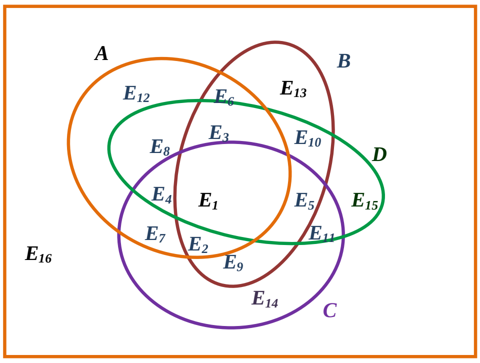

Figura 5. Diagrama de Venn, que muestra la unión de cuatro eventos A, B, C y D

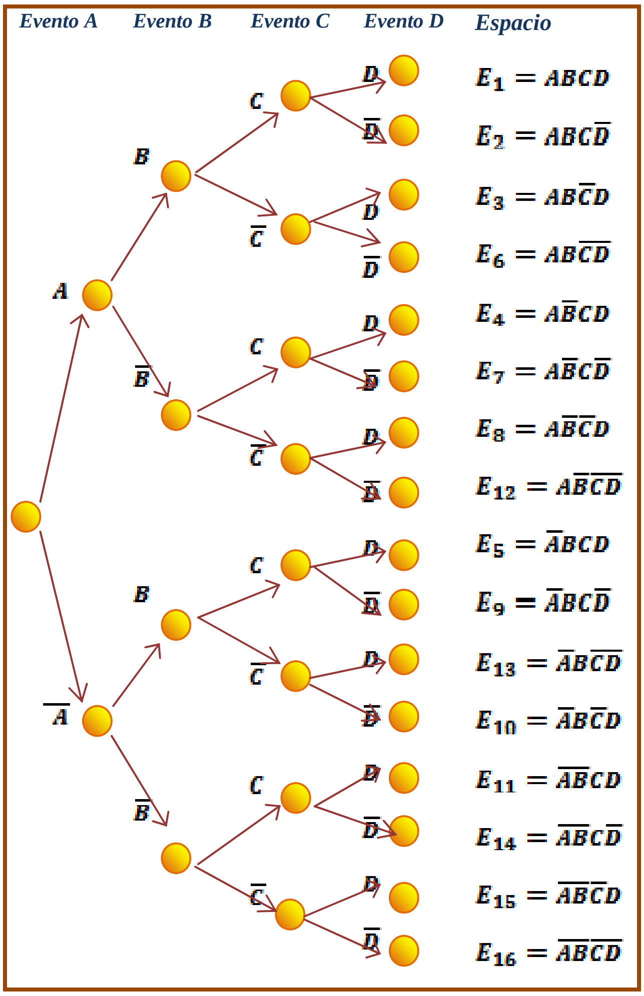

Figura 6. Diagrama de árbol. Espacio muestral para cuatro eventos A,B,C y D.

Los puntos que pertenecen a A o B o C o D, están incluidos en los quince conjuntos mutuamente excluyentes de la Figura 5 y en el diagrama del árbol de la Figura 6.

La probabilidad: $P(A \cup B \cup C \cup D)$ utilizando el espacio muestral, es la suma de las probabilidades de los puntos muestrales en $(A \cup B \cup C \cup D)$, considerando la suma de eventos mutuamente excluyentes, así:

Puntos	***Espacio***	***P(E$_i$)***
E_1	$ABCD$	$P(ABCD)$
E_2	$ABC\bar{D}$	$P(ABC) - P(ABCD)$
E_3	$AB\bar{C}D$	$P(ABD) - P(ABCD)$
E_4	$A\bar{B}CD$	$P(ACD) - P(ABCD)$
E_5	$\bar{A}BCD$	$P(BCD) - P(ABCD)$
E_6	$AB\overline{CD}$	$P(AB) - P(ABC) - P(ABD) + P(ABCD)$
E_7	$A\bar{B}C\bar{D}$	$P(AC) - P(ABC) - P(ACD) + P(ABCD)$
E_8	$A\overline{BC}D$	$P(AD) - P(ADB) - P(ADC) + P(ABCD)$
E_9	$\bar{A}BC\bar{D}$	$P(BC) - P(ABC) - P(BCD) + P(ABCD)$
E_{10}	$\bar{A}B\bar{C}D$	$P(BD) - P(ABD) - P(BDC) + P(ABCD)$
E_{11}	$\overline{AB}CD$	$P(CD) - P(ACD) - P(CBD) + P(ABCD)$
E_{12}	$A\overline{BCD}$	$P(A) - P(AB) - P(AC) - P(AD) + P(AB$
E_{13}	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$P(B) - P(AB) - P(BC) - P(BD) + P(AB$
E_{14}	$\overline{AB}C\bar{D}$	$P(C) - P(AC) - P(BC) - P(CD) + P(AB$
E_{15}	$\overline{ABC}D$	$P(D) - P(AD) - P(BD) - P(DC) + P(A$
$P(A \cup B \cup C \cup D) =$		$= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A$

Cuadro 4. Puntos muestrales en $A \cup B \cup C \cup D$

Los puntos que pertenecen a A o B o C o D, están incluidos en los quince conjuntos mutuamente excluyentes de la Figura 5 y en el diagrama del árbol de la Figura 6.

Ejemplo. Unión de cuatro eventos.
En un grupo de estudiantes la probabilidad de que tengan celular es ¾; IPOD es ½; computador portátil de 2/3; MP4 de 1/3.
¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante tenga IPOD o MP4 o computador portátil o celular o que tenga todos?

Definición de eventos:
A = evento de que el estudiante tenga IPOD.
B = evento de que el estudiante tengaMP4.
C = evento de que el estudiante tenga computador portátil.
D = evento de que el estudiante tenga celular.

$P(A)=1/2$ $P(B)=1/3$ $P(C)=2/3$ $P(D)=3/4$
$P(\bar{A})=1/2$ $P(\bar{B})=2/3$ $P(\bar{C})=1/3$ $P(\bar{D})=1/4$

Solución:
La probabilidad de que un estudiante posea IPOD o MP4 o portátil o celular se encuentra utilizando la regla de la suma para los 4 eventos, es decir, la P(A o B o C o D), así:

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(AB) - P(AC) - P(AD)$$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{8} - \frac{2}{9} - \frac{3}{12} - \frac{6}{12} + \frac{2}{18} + \frac{3}{24}$$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{35}{36}$$

La solución obtenida se puede demostrar utilizando el espacio muestral definido en el Cuadro 4.

Puntos	***Espacio***	***P(E$_i$)***	
E_1	$ABCD$	$\frac{6}{72}$	$\frac{6}{72}$
E_2	$ABC\bar{D}$	$\frac{2}{18} - \frac{6}{72}$	$\frac{2}{72}$
E_3	$AB\bar{C}D$	$\frac{3}{24} - \frac{6}{72}$	$\frac{3}{72}$
E_4	$A\bar{B}CD$	$\frac{6}{24} - \frac{6}{72}$	$\frac{12}{72}$
E_5	$\bar{A}BCD$	$\frac{6}{36} - \frac{6}{72}$	$\frac{6}{72}$
E_6	$AB\overline{CD}$	$\frac{1}{6} - \frac{2}{18} - \frac{3}{24} + \frac{6}{72}$	$\frac{1}{72}$
E_7	$A\bar{B}C\bar{D}$	$\frac{2}{6} - \frac{2}{18} - \frac{6}{24} + \frac{6}{72}$	$\frac{4}{72}$
E_8	$A\overline{BC}D$	$\frac{3}{8} - \frac{3}{24} - \frac{6}{24} + \frac{6}{72}$	$\frac{6}{72}$
E_9	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\frac{2}{9} - \frac{2}{18} - \frac{6}{36} + \frac{6}{72}$	$\frac{2}{72}$
E_{10}	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\frac{3}{12} - \frac{3}{24} - \frac{6}{36} + \frac{6}{72}$	$\frac{3}{72}$
E_{11}	$\overline{AB}CD$	$\frac{6}{12} - \frac{6}{24} - \frac{6}{36} + \frac{6}{72}$	$\frac{12}{72}$
E_{12}	$A\overline{BCD}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{8} + \frac{2}{18} + \frac{6}{24} + \frac{3}{24}$	$\frac{2}{72}$
E_{13}	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{2}{9} - \frac{3}{12} + \frac{2}{18} + \frac{3}{24} + \frac{6}{36}$	$\frac{1}{72}$
E_{14}	$\overline{AB}C\bar{D}$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} - \frac{2}{9} - \frac{6}{12} + \frac{2}{18} + \frac{6}{24} + \frac{6}{36}$	$\frac{4}{72}$
E_{15}	$\overline{ABC}D$	$\frac{3}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3}{12} - \frac{6}{12} + \frac{3}{24} + \frac{6}{24} +$ [illegible]	$\frac{6}{72}$
$P(A \cup B \cup C \cup D) =$		$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{8} - \frac{2}{9} -$	

Cuadro 4a. Solución al ejemplo $(A \cup B \cup C \cup D)$

Utilizar el espacio muestral y aplicar la ley multiplicativa de la probabilidad (eventos independientes) es otra forma de comprobar la solución obtenida (Véase Cuadro 5).

Puntos	***Espacio***	***P(E_i)***	
E_1	$ABCD$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{6}{72}$
E_2	$ABC\overline{D}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{2}{72}$
E_3	$AB\overline{C}D$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{3}{72}$
E_4	$A\overline{B}CD$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{12}{72}$
E_5	$\overline{A}BCD$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{6}{72}$
E_6	$AB\overline{CD}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{1}{72}$
E_7	$A\overline{B}C\overline{D}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{4}{72}$
E_8	$A\overline{BC}D$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{6}{72}$
E_9	$\overline{A}BC\overline{D}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{2}{72}$
E_{10}	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{3}{72}$
E_{11}	$\overline{AB}CD$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{12}{72}$
E_{12}	$A\overline{BCD}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{2}{72}$
E_{13}	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{1}{72}$
E_{14}	$\overline{AB}C\overline{D}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{4}{72}$
E_{15}	$\overline{AB}\overline{C}D$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=$	$\frac{6}{72}$
E_{16}	$\overline{AB}\overline{C}\overline{D}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$	$\frac{2}{72}$
$P(A\cup B\cup C\cup D)=$		$=\sum P(E_i)=P(E_1)P(E_2)+..P(E_{15}$ $=1-P(E_{16})=\ 1-\frac{2}{72}=\frac{35}{36}$	

Cuadro 5. Puntos muestrales en $A\cup B\cup C\cup D$

4. CONCLUSIONES

Existen reglas o leyes que pueden ayudar a calcular las probabilidades:

a. La aditiva, cuando los sucesos o eventos son mutuamente excluyentes
b. La multiplicativa, cuando los eventos son independientes o dependientes.

El uso de leyes o reglas de la probabilidad para calcular las probabilidades de eventos compuestos no es tan directo como el hacerlo a través de una lista de puntos muestrales, como se puede apreciar en el artículo; además, requiere de experiencia y creatividad para expresar los eventos compuestos de una manera que resulte sencilla para poder calcular la probabilidad de la unión, sumando los puntos muestrales del evento de interés. Es de anotar que representar en un diagrama de Venn y del árbol la unión de 4 ó más eventos, tiene cierto grado de dificultad pero no es imposible.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] M. F. Triola. Estadística. Pearson Educación. Novena edición. p.p.

[2] R.E..Walpole, R. H Myers, S.L Myers, K.Ye Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias., Pearson Educación. Octava edición. p.p 809, 2.007

[3] W. Mendenhall, J.E. Reinmuth. Estadística para Administración y Economía.. Grupo Editorial Iberoamérica. México. Tercera edición. p.p 801, 1.998

[4] H. Montgomery. Probabilidad y Estadística. CECSA. Tercera edición. p.p 811, 1993

[5] D.R. Anderson, D.J. Sweeney, T.A. Williams Estadística para Administración y Economía. Thomson. Octava edición. p.p 884. 2.003

.