VIDEREGÅENDE LINEÆR ALGEBRA

Ulrik Skre Fjordholm

21. august 2025

Om dette notatet

Jeg har skrevet dette notatet med en forventning om at du som student kommer på forelesninger og at du jobber aktivt med stoffet. Du vil finne hele *MAT1125*-pensum i notatet, men du vil ikke finne utførlige forklaringer eller *motivasjoner* for stoffet. For dette må du komme til forelesning. Det vil være en fordel å ha lest (eller i alle fall skumlest) de relevante seksjonene før forelesning.

I hvert kapittel finner du flere oppgaver spredt rundt om i teksten, markert med en rød boks. Hver gang du ser en slik oppgave i teksten, må du stoppe opp og prøve å løse den! Du vil finne løsninger på de fleste oppgavene i Tillegg E bakerst i dette notatet. Om du står fast på en oppgave, ta en rask kikk på løsningsforslaget, og forsøk å løse oppgaven på nytt.

Matematisk tekst er ikke noe man bare *leser*, det er noe man må *jobbe seg gjennom*; det er bare ved å trene på stoffet at du faktisk vil forstå det. Så finn fram penn og papir og sett i gang!

Symboloversikt

Symbol	Forklaring	Se side
α, β	Navn på skalarer	2
A, B, C	Navn på matriser	
u, v, w, x, y, z	Navn på vektorer	2
U, V, W	Navn på vektorrom	2
$\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{C}, \mathscr{C}'$	Navn på basiser	8
$\Re(x)$, $\Im(x)$	Reell og imaginær del av et komplekst tall x	vii
$[u]_{\mathscr{B}}$	Basisrepresentasjonen av u i basisen $\mathscr{B}$	8
S, T	Navn på lineære avbildninger	17
$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$	Basisrepresentasjonen av T med hensyn på basisene $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$	24
A^{T}	Den transponerte av matrisen A	iv, viii
T^*	Den adjungerte til en lineær avbildning T	52
V'	(Det algebraiske) dualrommet til vektorrommet V	17
$u \cdot v$	Prikkproduktet mellom euklidske vektorer u og v	v, 42
$\langle u, v \rangle$	Indreproduktet mellom vektorene u og v	42
$(A_{ij})_{ij}$	En matrise med komponenter A_{ij}. Dimensjonen til matrisen bør være tydelig ut fra kontekst.	viii
$\mathrm{im}(T)$	Bildet av en lineær avbildning T	19
$\ker(T)$	Kjernen av en lineær avbildning T	19
$\mathrm{span}(E)$	Spennet av vektorene i mengden E	5
$\sigma(T)$	Spekteret til en lineær operator T	62
$E_T(\lambda)$	Egenrommet til en egenverdi λ av T	62
$\gamma_T(\lambda)$	Geometrisk multiplisitet til en egenverdi λ av T	63
$\mu_T(\lambda)$	Algebraisk multiplisitet til en egenverdi λ av T	63
$p_T(\lambda)$	Karakteristisk polynom til T	63
$\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$	Diagonalmatrisen med elementer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$	65
$A^\dagger$	Pseudoinversen til A	79, 98
$\cong$	To vektorrom er isomorfe	22

INNHOLD

0 REPETISJON OG NOTASJON

0.1 Repetisjon fra MAT1105

0.1.1 Matriser og vektorer

En *reell n-tuppel* (eller bare *n-tuppel*) er en ordnet liste av reelle tall $(x_1, \dots, x_n)$. Vi betegner ofte n-tupler som $x = (x_1, \dots, x_n)$. I *MAT1105* uthevet vi gjerne vektorer slik $\mathbf{x}$ eller slik $\vec{x}$, men fra nå av kommer vi ikke til å utheve vektorer. Du må derfor selv holde rede på om et symbol refererer til et tall, en vektor, eller noe annet. (Men det vil nesten alltid være tydelig ut ifra sammenhengen hva slags objekt et symbol refererer til.)

En *reell matrise* (eller bare *matrise*) er en rektangulær tabell av reelle tall,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{0.1.1}$$

En *$m \times n$-matrise* er en matrise med m rader og n kolonner (eller *søyler*); vi sier den har *dimensjon $m \times n$*. En *kvadratisk matrise* er en matrise med like mange rader som kolonner. Tallene $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{m,n}$ er *komponentene* eller *elementene* til matrisen. Indeksene $_{j,k}$ i subskriptene angir posisjonen til et element: Første indeks er radnummer og andre indeks er kolonnenummer. Vi sløyfer ofte kommaet når det ikke kan lede til misforståelser: a_{jk}.

En *kolonnevektor* (eller *søylevektor*) er en n-tuppel skrevet vertikalt:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

En kolonnevektor av dimensjon n er dermed en $n \times 1$-matrise. *Dimensjonen* av en n-tuppel er antall komponenter i tuppelen (altså n).

Diagonalen i en matrise er de komponentene som ligger langs den diagonalen som begynner øverst til venstre og går nedover mot høyre. I matrisen (0.1.1) er dette elementene $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, og så videre, opp til enten $a_{n,n}$ eller $a_{m,m}$ (avhengig av om $n < m$ eller $n > m$). Den *transponerte* av en matrise er den nye matrisen vi får ved å speile matrisen om diagonalen. For matrisen A i (0.1.1) er den transponerte dermed den nye $n \times m$-matrisen

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Vi lar altså radene i A bli til kolonner i A^{T}, og vice versa.

To matriser er spesielt viktige: nullmatrisen og identitetsmatrisen. *Nullmatrisen av dimensjon $m \times n$* er $m \times n$-matrisen kun bestående av 0-er:

$$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Når dimensjonen $m \times n$ er tydelig ut fra kontekst, skriver vi ofte bare "0". *Identitets-matrisen* av dimensjon n er $n \times n$-matrisen med 1-ere langs diagonalen, og 0-er ellers:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

På samme måte som med relle tupler og matriser, kan vi definere *komplekse n-tupler* og *komplekse matriser*, der komponentene kan være vilkårlige komplekse tall.

Vi kan addere og subtrahere vektorer med hverandre og matriser med hverandre, såfremt de har lik dimensjon. Addisjon og subtraksjon gjøres komponentvis:

$$\big(A+B\big)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \qquad \big(A-B\big)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij}.$$

Vi kan multiplisere matriser med *skalarer*, altså reelle tall (eller komplekse tall for komplekse matriser):

$$\big(\alpha A\big)_{ij} = \alpha (A)_{ij}$$

for en skalar α og en matrise A.

Produktet av en $m \times n$-matrise A og en kolonnevektor x er en lineærkombinasjon av kolonnene i A med koeffisienter $(x)_k$:

$$\big(Ax\big)_j = \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk} (x)_k.$$

Produktet Ax er dermed en m-tuppel. På samme måte er *produktet av to matriser* A og B av dimensjon hhv. $m \times n$ og $n \times p$ matrisen vi får ved å gange hver kolonne i B med A:

$$\big(AB\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (B)_{kj}.$$

Produktet AB er dermed en $m \times p$-matrise. Et relatert produkt er *prikkproduktet* av to n-tupler $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

En (kvadratisk) $n \times n$-matrise A er *inverterbar* dersom det finnes en $n \times n$-matrise A^{-1} slik at

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Matrisen A^{-1} kalles *inversmatrisen til A*.

0.1.2 Determinanter

Determinanten er en nyttig funksjon som tar en kvadratisk matrise som argument og gir tilbake et reelt tall (eller et komplekst tall, om matrisen er kompleks). Determinanten av en 1×1 matrise er definert slik:

$$A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det(A) = a.$$

For større matriser definerer vi $\det(A)$ rekursivt på følgende måte. For en $n \times n$-matrise A og indekser $j, k \in \{1, \dots, n\}$, lar vi $\widehat{A}_{jk}$ være $(n-1) \times (n-1)$-matrisen vi får ved å fjerne rad j og kolonne k i A. Vi har da

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (A)_{j1} \det\big(\widehat{A}_{j1}\big).$$

For eksempel er determinanten av en 2×2-matrise gitt ved

$$\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21},$$

mens determinanten av en 3×3-matrise gitt ved

$$\begin{aligned} \det(A) = A_{11}\big(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}\big) - A_{21}\big(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}\big) \\ + A_{31}\big(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}\big). \end{aligned}$$

Determinanten har flere nyttige egenskaper. Vi nevner noen av de viktigste:

(i) $\det(I_n) = 1$ for enhver n

(ii) A er inverterbar hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$; isåfall er $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

(iii) $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det(A)$

(iv) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ for $n \times n$-matriser A og B

(v) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ for en $n \times n$-matrise A og en skalar α.

0.1.3 Lineære systemer

Et *lineært system* er en ligning på formen

$$Ax = b \tag{0.1.2}$$

der A er en kjent $m \times n$-matrise, b er en kjent m-tuppel, og x er en *ukjent* n-tuppel. Å *løse* systemet (0.1.2) vil si å finne en n-tuppel x slik at (0.1.2) stemmer.

Systemet (0.1.2) har alltid enten ingen, én, eller uendelig mange løsninger, avhengig av verdien av A og b. For kvadratiske systemer — det vil si når $m = n$ — kan vi finne ut om systemet har én løsning på flere måter. De følgende utsagnene er ekvivalente:

(i) systemet (0.1.2) har én og bare én løsning for enhver n-tuppel b

(ii) A er inverterbar

(iii) $\det(A) \neq 0$

(iv) hver kolonne i A er en pivotkolonne

(v) om y er en n-tuppel slik at $Ay = 0$, så må $y = 0$.

I alle tilfeller er løsningen gitt ved $x = A^{-1}b$.

0.1.4 Egenverdier og egenvektorer

Om A er en (kvadratisk) $n \times n$-matrise og λ er en skalar, sier vi at λ er en *egenverdi av A* dersom det finnes en n-tuppel x *som ikke er null-vektoren* og som er slik at

$$Ax = \lambda x.$$

Vi kan (i prinsippet) finne alle egenverdier til A ved hjelp av det *karakteristiske polynomet til A*. Dette er definert som

$$p(t) := \det(A - tI_n) \qquad \text{for skalarer } t.$$

Det karakteristiske polynomet er alltid et n-tegradspolynom. Et tall λ er en egenverdi av A hvis og bare hvis $p(\lambda) = 0$ (dette følger av ekvivalensen *(iii)* $\Leftrightarrow$ *(v)* i forrige seksjon). Om vi kan finne alle røttene til p (det vil si alle skalarer λ der $p(\lambda) = 0$), har vi dermed funnet alle egenverdier til A. Merk at det kun finnes formler for røttene av n-tegradspolynomer for $n < 5$, så denne framgangsmåten fungerer kun for relativt små matriser.

0.2 Notasjon

0.2.1 Komplekse tall

Om $x = a + ib$ er et komplekst tall, er $\Re(x) = a$ den reelle delen og $\Im(x) = b$ den imaginære delen av x.

0.2.2 Definisjoner

Vi bruker symbolet := (uttales "definert som") for å definere nye symboler. Uttrykket

$$x := 2\pi$$

(uttales "x er definert som to pi") betyr at hver gang vi skriver "x", mener vi "2π". Dette må ikke forveksles med *utsagnet*

$$x = 2\pi$$

som betyr "x har verdien 2π". Det sistnevnte kan være sant eller usant, avhengig av den faktiske verdien til x.

0.2.3 Restriksjon

Om $f : A \to B$ er en funksjon, og $E \subseteq A$ er en delmengde av A, er $f\big|_E$ den nye funksjonen $f\big|_E : E \to B$ gitt ved

$$f\big|_E(x) := f(x) \qquad \text{for } x \in E.$$

Funksjonen $f\big|_E$ er *restriksjonen av f til E*.

0.2.4 Indeksering

En *$m \times n$-matrise A* er en tabell med m rader og n kolonner. Komponenten i rad j og kolonne k betegnes som $(A)_{j,k}$ eller (når det ikke kan lede til misforståelser) $(A)_{jk}$. Motsatt, om $a_{j,k}$ er gitte tall for alle $j = 1, \dots, m$ og $k = 1, \dots, n$, kan vi bygge $m \times n$-matrisen med disse komponentene med notasjonen

$$A := \left(a_{j,k}\right)_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} \tag{0.2.1}$$

eller (når dimensjonen $m \times n$ er klar fra kontekst)

$$A := \left(a_{j,k}\right)_{j,k}.$$

Kommaene kan sløyfes om det ikke kan lede til misforståelser.

På samme måte som med matriser, skriver vi $(a_j)_{j=1,\dots,n}$ når vi mener kolonnevektoren av dimensjon n med komponenter $a_1, \dots, a_n$. Vi skriver noen ganger istedet $(a_j)_{j=1}^n$.

Med denne notasjonen kan vi skrive nullmatrisen som

$$0_{m\times n} = \left(0\right)_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}.$$

Den transponerte av matrisen A i (0.2.1) er $n \times m$-matrisen

$$A^\top := \left(a_{k,j}\right)_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}.$$

0.2.5 Mengder av matriser

Vi lar $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ betegne mengden av alle $m \times n$-matriser med reelle elementer. (I *MAT1105* betegnet vi denne mengden $\mathbb{R}^{m\times n}$.) Mer generelt, for en kropp $\mathbb{K}$ (se Definisjon 1.1.1) lar vi $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ betegne mengden av alle $m \times n$-matriser med elementer i $\mathbb{K}$. For kvadratiske matriser (som har like mange kolonner som rader) skriver vi $M_n(\mathbb{K}) := M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

0.2.6 Kronecker delta

Kronecker delta (må ikke forveksles med *Dirac* delta!) er funksjonen gitt ved

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{om } j = k \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi skriver δ_{jk} om det ikke kan misforstås. Med denne notasjonen kan vi enkelt definere identitetsmatrisen i $M_n(\mathbb{R})$ som

$$I_n := \left(\delta_{jk}\right)_{j,k=1,\dots,n}.$$

Kronecker delta må ikke forveksles med *Dirac delta* (også kalt "Dirac-funksjonen", "Dirac-målet" og "Dirac-distribusjonen"), som er noe helt annet.

0.2.7 Blokkmatriser

Gitt matriser A, B, C, D kan vi bygge en større matrise ved hjelp av *blokkmatrise-notasjon*:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).$$

For at dette skal gi mening, må A og B ha samme antall rader; C og D ha samme antall rader; A og C samme antall kolonner; og B og D ha samme antall kolonner. Om for eksempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

blir

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_2 \\ \hline 0_{2\times 3} & D \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

0.2.8 Standardbasisen

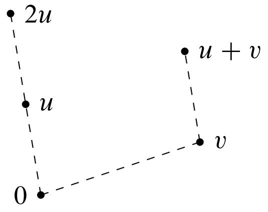
Standardbasisen i $\mathbb{R}^n$ består av vektorene $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ gitt ved

$$e_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

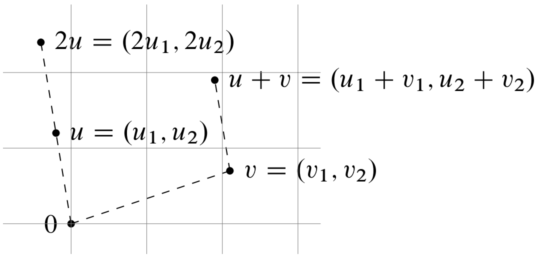
der 1-tallet er i rad j. Dette kan også skrives som $e_j = \left(\delta_{jk}\right)_{k=1}^{n}$. Vektorene $e_1, \ldots, e_n$ kalles også ofte *enhetsvektorene* eller *koordinatvektorene* i $\mathbb{R}^n$.

1 VEKTORROM

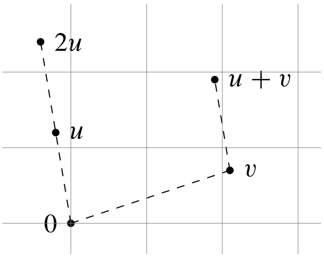
For vektorer i $\mathbb{R}^n$ har du lært å addere vektorer og å multiplisere dem med skalarer:

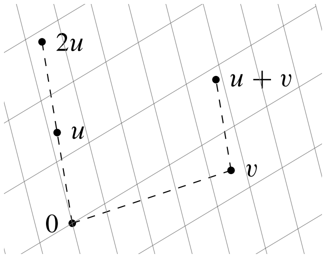


Vi uttrykker vektorene i et koordinatsystem, og adderer respektive komponenter, eller ganger hver komponent med skalaren:



Vi definerer altså addisjon og skalarmultiplikasjon i $\mathbb{R}^n$ *ut fra koordinatsystemet de er uttrykt i.* Men det viser seg at disse operasjonene er uavhengig av hvilket koordinatsystem vi velger:





Det essensielle er ikke selve koordinatsystemet, men at operasjonene defineres relativt til et fast punkt, et origo. Enhver generalisering av $\mathbb{R}^n$ og konseptet “vektorer” må derfor inkludere et objekt “0”, og en konsistent definisjon av vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon relativt til objektet “0”.

I dette kapittelet introduserer vi generelle *vektorrom*. Vi skal se at mange (men ikke alle) vektorrom har en *basis*, og at hver basis svarer til et koordinatsystem for vektorrommet. Vi skal også se at basiser gir opphav til en grunnleggende karakteristikk ved et vektorrom, *dimensjonen*, som vil være et viktig verktøy senere.

1.1 Vektorrom og underrom

1.1.1 Definisjon (Kropp)**.** En *kropp* er en mengde $\mathbb{K}$ utstyrt med to operasjoner $+$ ("*addisjon*") og $\cdot$ ("*multiplikasjon*") fra $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ til $\mathbb{K}$ som tilfredsstiller:

(i) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ og $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ for alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

(ii) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ og $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(iii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ for alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

(iv) Det eksisterer to elementer $0 \in \mathbb{K}$ og $1 \in \mathbb{K}$ (den *additive* og *multiplikative identiteten*) slik at $\alpha + 0 = \alpha$ og $\alpha \cdot 1 = \alpha$ for alle $\alpha \in \mathbb{K}$

(v) For alle $\alpha \in \mathbb{K}$ eksisterer et element $-\alpha \in \mathbb{K}$ slik at $\alpha + (-\alpha) = 0$

(vi) For alle $\alpha \neq 0$ eksisterer et element $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ slik at $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

Elementene i $\mathbb{K}$ kalles *skalarer*. Vi skriver ofte $\alpha\beta$ istedenfor $\alpha \cdot \beta$ og α/β istedenfor $\alpha \cdot \beta^{-1}$. Når vi skriver $\alpha - \beta$ mener vi $\alpha + (-\beta)$.

1.1.2 Oppgave. Fra *MAT1100* husker du mengdene

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{\text{alle naturlige tall}\} = \big\{1, 2, 3, \ldots\big\},\\
\mathbb{Z} &:= \{\text{alle heltall}\} = \big\{\ldots, -2, 1, 0, 1, 2, \ldots\big\},\\
\mathbb{Q} &:= \{\text{alle rasjonale tall}\} = \big\{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \text{ og } q \neq 0\big\},\\
\mathbb{R} &:= \{\text{alle reelle tall}\},\\
\mathbb{C} &:= \{\text{alle komplekse tall}\}.
\end{aligned}$$

Forklar hvorfor $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er kropper. Er $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{Z}$ kropper?

1.1.3 Definisjon (Vektorrom over $\mathbb{K}$)**.** La $\mathbb{K}$ være en kropp. Et *vektorrom over $\mathbb{K}$* er en mengde U utstyrt med en operasjon $+$ fra $U \times U$ til U ("*vektoraddisjon*") og en operasjon $\cdot$ fra $\mathbb{K} \times U$ til U ("*skalarmultiplikasjon*") som tilfredsstiller:

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ for alle $u, v, w \in U$

(ii) $u + v = v + u$ for alle $u, v \in U$

(iii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ for alle $\alpha \in \mathbb{K}$ og $u, v \in U$

(iv) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ og $u \in U$

(v) $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$ for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ og $u \in U$

(vi) $1 \cdot u = u$ for alle $u \in U$

(vii) Det eksisterer et element $0_U \in U$ (*nullelementet*) slik at $u + 0_U = u$ for alle $u \in U$

(viii) For alle $u \in U$ eksisterer et element $-u \in U$ slik at $u + (-u) = 0_U$.

Elementene i U kalles *vektorer*. Som med kropper skriver vi ofte αu istedenfor $\alpha \cdot u$. Når det ikke kan lede til misforståelser skriver vi 0 for nullelementet 0_U. Når vi skriver $u - v$ mener vi $u + (-v)$.

Ved hjelp av egenskapene *(i)–(viii)* (også kalt *aksiomene for vektorrom*) kan vi bevise andre "naturlige" egenskaper:

1.1.4 Proposisjon. *La U være et vektorrom.*

(i) Det finnes kun ett nullelement.

(ii) For enhver $u \in U$ er elementet $-u$ unikt.

(iii) *Om* $u + v = w$, *er* $u = w - v$.
(iv) $\alpha \cdot 0_U = 0_U$ *for alle* $\alpha \in \mathbb{K}$.
(v) $0 \cdot u = 0_U$ *for alle* $u \in U$.
(vi) $(-1) \cdot u = -u$ *for alle* $u \in U$

Bevis. Vi viser bare *(i)* og *(iv)*, og overlater resten som oppgaver til leseren.

(i) Anta at både 0_U og $0'_U$ er nullelementer. Da er

$$0_U \overset{(vii)}{=} 0_U + 0'_U \overset{(ii)}{=} 0'_U + 0_U \overset{(vii)}{=} 0'_U,$$

så nullelementene er like.

(iv)

$$\begin{aligned} 0_U &\overset{(viii)}{=} \alpha \cdot 0_U - (\alpha \cdot 0_U) \overset{(vii)}{=} \alpha \cdot (0_U + 0_U) - (\alpha \cdot 0_U) \\ &\overset{(iii)}{=} \big(\alpha \cdot 0_U + \alpha \cdot 0_U\big) - (\alpha \cdot 0_U) \overset{(i)}{=} \alpha \cdot 0_U + \big(\alpha \cdot 0_U - (\alpha \cdot 0_U)\big) \\ &\overset{(viii)}{=} \alpha \cdot 0_U + 0_U \overset{(vii)}{=} \alpha \cdot 0_U. \end{aligned}$$

■

Proposisjon 1.1.4, sammen med aksiomene for vektorrom, viser at vi kan gjøre "vanlig algebra" med vektoruttrykk — gange med en skalar på begge sider, flytte ledd til den andre siden av likhetstegnet, gange ut parenteser, og så videre.

1.1.5 Oppgave. Bevis følgende påstander. Husk at du også må sjekke at vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon er veldefinerte operasjoner — altså at hvis $u, v \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$, vil også $u + v \in U$ og $\alpha u \in U$.

(**a**) For enhver $n \in \mathbb{N}$ er $\mathbb{R}^n$ et vektorrom over $\mathbb{R}$, der vi definerer vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon komponentvis, som vi gjorde i MAT1105.

(**b**) Mengden $\mathbb{C}^n$ av alle n-tupler av komplekse tall er et vektorrom over $\mathbb{C}$.

(**c**) Mengden $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ av alle $m \times n$-matriser med elementer i $\mathbb{R}$, er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Likeledes er $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ et vektorrom over $\mathbb{C}$.

(**d**) La U være et vektorrom over $\mathbb{C}$. Vis at U da også er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Kan dette generaliseres til andre kropper?

(**e**) La $I \subseteq \mathbb{R}$ være et intervall (for eksempel $I = [0, 1]$ eller $I = \mathbb{R}$) og definer

$$C^0(I, \mathbb{R}) := \big\{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ er kontinuerlig}\big\}.$$

(Vi skriver ofte bare C istedenfor C^0, og ofte $C^0(I)$ istedenfor $C^0(I, \mathbb{R})$.) Da er $C^0(I, \mathbb{R})$ et vektorrom over $\mathbb{R}$, der vi definerer vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon punktvis: $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$ og $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$ for $t \in I$.

(**f**) Mengden

$$C^0(I, \mathbb{C}) := \big\{f : I \to \mathbb{C} : f \text{ er kontinuerlig}\big\}$$

er et vektorrom over $\mathbb{C}$.

(**g**) Mengden

$$\mathscr{P} := \big\{\text{alle reelle polynomer}\big\}$$

er et vektorrom over $\mathbb{R}$. (Et *reelt polynom* er en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på formen $f(x) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ for alle $t \in \mathbb{R}$, der $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.)

(**h**) Mer generelt er

$$\mathscr{P}(\mathbb{K}) := \{\text{alle polynomer over } \mathbb{K}\}$$

et vektorrom over $\mathbb{K}$, for enhver kropp $\mathbb{K}$. (Et *polynom over* $\mathbb{K}$ er en funksjon $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ på formen $f(x) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ for alle $t \in \mathbb{K}$, der $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$.)

(**i**) La $m \in \mathbb{N}_0$ og definer

$$\mathscr{P}_m := \{\text{alle reelle polynomer av grad høyst } m\}.$$

Da er $\mathscr{P}_m$ et vektorrom over $\mathbb{R}$. (*Graden til et polynom* $f(x) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ er det største tallet $j \in \mathbb{N}_0$ som er slik at $a_j \neq 0$. Vi definerer graden til nullfunksjonen til å være 0.)

(**j**) *Det trivielle vektorrommet*

$$U := \{0\}$$

er et vektorrom over en hvilken som helst kropp $\mathbb{K}$. (Her har det ingenting å si hva slags objekt "0" er, så lenge man definerer $0 + 0 = 0$ og $\alpha 0 = 0$ for alle $\alpha \in \mathbb{K}$.)

(**k**) For et tall $p \in [1, \infty)$ og enten $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, er $\ell^p(\mathbb{K})$ et vektorrom. Her definerer vi $\ell^p(\mathbb{K})$, eller bare ℓ^p (uttales "lille ell-pe"), som mengden

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \left\{\text{alle følger } (a_1, a_2, \ldots) \text{ i } \mathbb{K} \text{ slik at } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty\right\}.$$

For eksempel ligger følgen $\left(k^{-1}\right)_{k=1}^{\infty}$ i $\ell^2(\mathbb{R})$, men ikke i $\ell^1(\mathbb{R})$. (Beviset for at summen av to følger fra ℓ^p også ligger i ℓ^p er vanskelig når $p > 1$, men forsøk med tilfellet $p = 1$.)

(**l**) For $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, er

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) := \left\{\text{alle følger } (a_1, a_2, \ldots) \text{ i } \mathbb{K} \text{ slik at } \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < \infty\right\}$$

et vektorrom over $\mathbb{K}$.

1.1.6 Definisjon (Underrom)**.** La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$. En ikke-tom delmengde $V \subseteq U$ er et *underrom av U* dersom V er lukket under vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon, det vil si

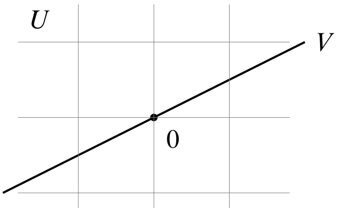
(i) $u + v \in V$ for alle $u, v \in V$

(ii) $\alpha u \in V$ for alle $u \in V$ og $\alpha \in \mathbb{K}$.

1.1.7 Eksempel. La

$$U := \mathbb{R}^2 \quad \text{og} \quad V := \left\{ \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da er U et vektorrom over $\mathbb{R}$, og V et underrom av U (bevis dette!). $\square$



1.1.8 Oppgave. La U være et vektorrom.

(**a**) La V være et underrom av U. Bevis at V i seg selv er et vektorrom.

(**b**) La V_1 og V_2 være underrom av U, og la $W := V_1 \cap V_2$. Vis at W også er et underrom av U.

1.2 Lister av vektorer

1.2.1 Definisjon. La U være et vektorrom. En *liste av vektorer* er en tuppel $(u_1, \dots, u_n)$ av vektorer $u_1, \dots, u_n \in U$. Om $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ og $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_m)$ er to lister av vektorer, skriver vi $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$ dersom

$$u_i \in \{v_1, \dots, v_m\} \text{ for alle } i = 1, \dots, n,$$

altså at hver vektor i $\mathscr{B}$ også forekommer i $\mathscr{C}$. Vi sier at *$\mathscr{C}$ er en større liste enn $\mathscr{B}$.* Merk at alle lister må inneholde minst én vektor, og kan inneholde kun endelig mange vektorer.

1.3 Lineær uavhengighet

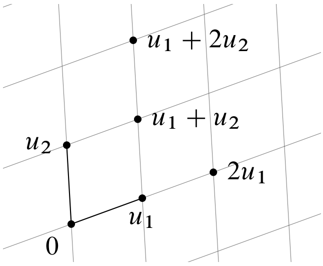
1.3.1 Definisjon. La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$, og la $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ være en liste av vektorer i U. En *lineærkombinasjon* av $\mathscr{B}$ er et uttrykk på formen

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, \qquad \text{der } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Spennet til $\mathscr{B}$ er mengden av alle lineærkombinasjoner av $\mathscr{B}$,

$$\operatorname{span}(\mathscr{B}) := \left\{ \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Om $V \subseteq U$ er en delmengde sier vi at *$\mathscr{B}$ utspenner V* dersom $\operatorname{span}(\mathscr{B}) = V$.



1.3.2 Oppgave. La U være et vektorrom og $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ en liste av vektorer i U. Vis at $\operatorname{span}(\mathscr{B})$ et underrom av U.

1.3.3 Definisjon (Lineær uavhengighet)**.** La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$ og la $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$. Vi sier at $\mathcal{B}$ *er lineært uavhengig* dersom følgende implikasjon er sann for alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Vi sier at $\mathcal{B}$ *er lineært avhengig* hvis den ikke er lineært uavhengig, det vil si at det finnes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ som ikke alle er lik 0, og som er slik at

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$$

1.3.4 Oppgave. La $\mathbb{K}$ være en kropp, for eksempel $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

(**a**) La $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vis at listen (e_1, e_2) er lineært uavhengig i $\mathbb{K}^2$.

(**b**) Generaliser forrige oppgave til listen $(e_1, \ldots, e_n)$ i $\mathbb{K}^n$, der $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^n$ (se Seksjon 0.2.8).

1.3.5 Oppgave. La $\mathcal{P}_1$ være vektorrommet bestående av alle reelle polynomer av grad 1 eller lavere (se Oppgave 1.1.5 (i)).

(**a**) La $p(t) := 1$ og $q(t) := t$. Vis at (p, q) er lineært uavhengig.
Hint: Anta at $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ er slik at $\alpha_1 p + \alpha_2 q = 0$, og sett inn forskjellige verdier for t for å vise at $\alpha_1, \alpha_2 = 0$.

(**b**) La $p(t) := t + 3$ og $q(t) := t - 3$. Vis at (p, q) er lineært uavhengig.

(**c**) La $p(t) := t + 1$, $q(t) := 3t + 5$ og $r(t) := 2t - 4$. Vis at (p, q, r) er lineært *avhengig*.

1.3.6 Oppgave. Vi sier at to vektorer u og v i et vektorrom er *parallelle* dersom en av vektorene er en multippel av den andre vektoren (så $u = \alpha v$ eller $v = \alpha u$ for en skalar α). Forklar hvorfor dette er ekvivalent med at listen (u, v) er lineært avhengig.

1.3.7 Oppgave.

(**a**) Vis at hvis $(u_1, \ldots, u_n)$ er lineært uavhengig, er ingen av vektorene $u_1, \ldots, u_n$ lik nullvektoren.

(**b**) Vis at følgende er ekvivalent med at $(u_1, \ldots, u_n)$ er lineært uavhengig:

$$\text{minst én av } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ er ulik } 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \neq 0.$$

(**c**) Vis at følgende er ekvivalent med at $(u_1, \ldots, u_n)$ er lineært avhengig:

en av vektorene $u_1, \ldots, u_n$ er en lineærkombinasjon av de andre.

(Se også Lemma 1.3.8.)

Følgende resultat vil være nyttig for å bestemme om en liste er lineært uavhengig.

1.3.8 Lemma. *La $(u_1, \ldots, u_n)$ være en liste av ikke-null vektorer i U. Da er følgende ekvivalent:*

(i) $(u_1, \dots, u_n)$ *er lineært uavhengig*

(ii) $u_k \notin \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$ *for* $k = 2, \dots, n$.

Bevis. Dersom $n = 1$ er begge utsagn automatisk sanne. Vi antar derfor at $n \geqslant 2$.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*** Anta motsatt at $u_k \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$ for en $k \in \{2, \dots, n\}$, slik at det finnes skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ slik at

$$u_k = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{k-1} u_{k-1}.$$

Da er

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$$

der $\alpha_k = -1$, som motsier at $(u_1, \dots, u_n)$ er lineært uavhengig.

(i) $\Leftarrow$ ***(ii)*** La $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ være skalarer slik at

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$$

Enten er alle skalarene lik 0, eller så er $\alpha_k \neq 0$ for en $k \in \{1, \dots, n\}$. La k være den største slike indeksen, slik at

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0, \qquad \text{og} \qquad \alpha_k \neq 0.$$

Denne indeksen k må minst være lik 2, for ellers er $\alpha_1 \neq 0$ men $\alpha_1 u_1 = 0$, slik at $u_1 = 0$, som motsier antagelsen om at vektorene er ulik 0. Løser vi for u_k får vi

$$u_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} u_1 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} u_{k-1}.$$

Men da er $u_k \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$, som motsier *(ii)*.

∎

1.3.9 Proposisjon. *La* $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ *være en liste av* $n \geqslant 2$ *vektorer i* U*, og anta at én av vektorene er en lineærkombinasjon av de andre:* $u_k \in \operatorname{span}(\mathscr{B}')$*, der* $\mathscr{B}' := (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$*. Da er*

$$\operatorname{span} \mathscr{B}' = \operatorname{span} \mathscr{B}. \tag{1.3.1}$$

Som et korollar gjelder det at for enhver liste av vektorer $\mathscr{B}$ *slik at* $\operatorname{span} \mathscr{B} \neq \{0\}$*, finnes en mindre liste* $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$ *som er lineært uavhengig og som er slik at* $\operatorname{span} \mathscr{B} = \operatorname{span} \mathscr{C}$.

Bevis. Vi trenger kun å vise at $\operatorname{span} \mathscr{B}' \subseteq \operatorname{span} \mathscr{B}$, for "$\supseteq$" følger av at $\mathscr{B}$ er en større liste enn $\mathscr{B}'$. Om $w \in \operatorname{span} \mathscr{B}$, finnes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ slik at

$$w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j.$$

Siden u_k er en lineærkombinasjon av $\mathscr{B}'$, finnes skalarer $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n$ slik at $u_k = \sum_{j \neq k} \beta_j u_j$. Dermed er

$$w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = \sum_{j \neq k} \alpha_j u_j + \alpha_k \sum_{j \neq k} \beta_j u_j = \sum_{j \neq k} \gamma_j u_j$$

der $\gamma_j := \alpha_j + \alpha_k \beta_j$. Altså er $w \in \operatorname{span} \mathcal{B}'$. Dette beviser (1.3.1).

Det gjenstår å bevise korollaret. Dersom $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig, lar vi $\mathcal{C} := \mathcal{B}$ og vi er ferdig.

Om $\mathcal{B}$ er lineært avhengig, finnes det (av negasjonen av Lemma 1.3.8) en $k \in \{2, \dots, n\}$ slik at $u_k \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$. Dermed er også

$$u_k \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_1), \qquad \text{der} \qquad \mathcal{B}_1 := (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Av (1.3.1) er da $\operatorname{span} \mathcal{B} = \operatorname{span} \mathcal{B}_1$. Om $\mathcal{B}_1$ er lineært avhengig gjentar vi prosedyren flere ganger og får lister $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{B}_m$ med samme spenn. Siden $\mathcal{B}$ har ikke-trivielt spenn, inneholder den minst én ikke-null vektor, så denne prosedyren må ende etter høyst $m < n$ steg. Vi kommer da til slutt fram til en ikke-tom, lineært uavhengig, mindre liste $\mathcal{C} := \mathcal{B}_m$ med samme spenn som $\mathcal{B}$. ■

1.4 Basis og dimensjon

1.4.1 Definisjon (Basis)**.** La U være et vektorrom. En *basis for U* er en liste $(u_1, \dots, u_n)$ av vektorer i U som er lineært uavhengig og som utspenner U.

1.4.2 Oppgave. Vis at standardbasisen $(e_1, \dots, e_n)$ er en basis for $\mathbb{K}^n$. (Se Oppgave 1.3.4.)

1.4.3 Definisjon. Et vektorrom er *endeligdimensjonalt* hvis det utspennes av endelig mange vektorer; ellers er det *uendeligdimensjonalt*. Det trivielle vektorrommet $\{0\}$ defineres som endeligdimensjonalt.

Sagt med andre ord: Et vektorrom U er endeligdimensjonalt om det eksisterer en liste $(u_1, \dots, u_n)$ av vektorer i U slik at

$$U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n).$$

1.4.4 Oppgave. La U være et ikke-trivielt vektorrom. Bevis at følgende er ekvivalent:

(i) U er endeligdimensjonalt

(ii) U har en basis.

1.4.5 Teorem. *La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$ med en basis $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$. For enhver $u \in U$ finnes da en* unik *n-tuppel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ slik at*

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n. \tag{1.4.1}$$

Vi betegner denne n-tuppelen $[u]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$, som kalles basisrepresentasjonen av u i basisen $\mathcal{B}$.

Bevis. Oppgave til leseren. ■

1.4.6 Oppgave.

(**a**) La $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen i $\mathbb{K}^n$ (se Seksjon 0.2.8). Vis at

$$[x]_{\mathscr{C}} = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}^n.$$

(**b**) La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$ med en basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Vis at

$$[u_j]_{\mathscr{B}} = e_j \qquad \forall\, j = 1, \dots, n.$$

1.4.7 Lemma. *La $(u_1, \dots, u_n)$ og $(v_1, \dots, v_m)$ være lister av vektorer i vektorrommet U. Anta at $(u_1, \dots, u_n)$ utspenner U, og $(v_1, \dots, v_m)$ er lineært uavhengig. Da er $m \leqslant n$.*

Bevis. Anta motsatt at $m > n$. Siden $(u_1, \dots, u_n)$ utspenner U, finnes skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ slik at

$$v_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j. \tag{$*$}$$

Siden $v_1 \neq 0$ (se Oppgave 1.3.7 (a)), må minst én av skalarene være ikke-null, la oss si $\alpha_k \neq 0$. Løser vi $(*)$ for u_k, får vi

$$u_k = \alpha_k^{-1} v_1 - \sum_{j \neq k} \alpha_k^{-1} \alpha_j u_j.$$

Altså ligger u_k i spennet til

$$\big(v_1, u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n\big), \tag{$**$}$$

så fra Proposisjon 1.3.9 kan vi da si at listen $(**)$ også utspenner U. Vi gjentar dette nå $n - 1$ ganger, og finner at listen

$$(v_1, \dots, v_n)$$

utspenner U. Men det betyr at v_{n+1} er en lineærkombinasjon av $(v_1, \dots, v_n)$, som motsier antagelsen om at $(v_1, \dots, v_n, \dots, v_m)$ er lineært uavhengig. Vi konkluderer med at antagelsen $m > n$ må være usann. ∎

1.4.8 Teorem. *La U være et endeligdimensjonalt vektorrom. Da er alle basiser for U like store (det vil si: de inneholder like mange vektorer).*

Bevis. Oppgave til leseren. Bruk Lemma 1.4.7. ∎

1.4.9 Definisjon (Dimensjon)**.** La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$. Dersom U er endeligdimensjonalt, sier vi at *dimensjonen til U over $\mathbb{K}$* (eller bare *dimensjonen til U*), forkortet $\dim(U)$, er antall vektorer i en basis for U. I grensetilfellet $U = \{0\}$ definerer vi $\dim(U) := 0$. Dimensjonen til et uendeligdimensjonalt vektorrom U definerer vi som $\dim(U) := \infty$.

1.4.10 Oppgave.

(**a**) La $\mathbb{K}$ være en kropp og la $n \in \mathbb{N}$. Vis at dimensjonen til $\mathbb{K}^n$ over $\mathbb{K}$ er n. (Se Oppgave 1.4.2.)

(**b**) Som vi så i Oppgave 1.1.5 (d), kan ethvert vektorrom over $\mathbb{C}$ også ses på som et vektorrom over $\mathbb{R}$. Vis at dimensjonen til $\mathbb{C}^n$ over $\mathbb{R}$ er $2n$.

(**c**) Generaliser forrige oppgave til et vilkårlig vektorrom U over $\mathbb{C}$.

1.4.11 Proposisjon. *La U være et vektorrom og V et underrom av U. Da er* $\dim(V) \leqslant \dim(U)$. *Om U er endeligdimensjonalt, er* $\dim V = \dim U$ *hvis og bare hvis* $V = U$.

Bevis. Om U er uendeligdimensjonalt, er påstanden at $\dim(V) \leqslant \infty$, som alltid er sant. Anta derfor at U er endeligdimensjonalt, og la $n := \dim(U)$. Dersom $V = V_0 := \{0\}$ er $\dim(V) = 0 \leqslant n$, og vi er ferdige. Ellers finnes en vektor $u_1 \in V \setminus V_0$. Dersom $V = V_1 := \operatorname{span}(u_1)$, er $\dim(V) = 1 \leqslant n$, og vi er ferdige, ellers finnes en vektor $u_2 \in V \setminus V_1$. Listen (u_1, u_2) må være lineært uavhengig, siden $u_2 \notin \operatorname{span}(u_1)$. Dersom $V = V_2 := \operatorname{span}(u_1, u_2)$, er $\dim(V) = 2 \leqslant n$, og vi er ferdige. Hvis ikke fortsetter vi denne prosessen. Siden vektorene $(u_1, \ldots, u_m)$ vi har funnet etter m steg er lineært uavhengige, må vi på grunn av Lemma 1.4.7 ha $m \leqslant n$. Altså må prosessen ende etter høyst n steg. Vi får da $V = V_m := \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m)$ og $\dim(V) = m \leqslant n = \dim(U)$.

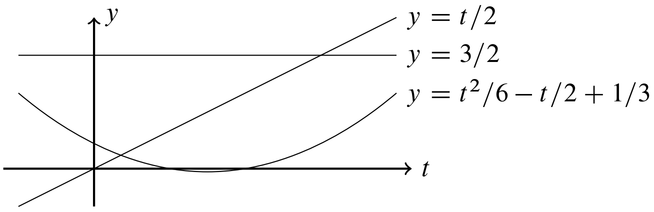
Dersom $\dim(V) = \dim(U)$, har V en basis med n elementer $(u_1, \ldots, u_n)$. Dersom $V \neq U$ finnes en vektor $u_{n+1} \in U \setminus V$. Men da er $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ lineært uavhengig, noe som (av Lemma 1.4.7) er umulig i et n-dimensjonalt vektorrom. Altså må $U = V$. ■

1.5 Polynombasiser

Fra Oppgave 1.1.5 husker vi mengden av polynomer av grad høyst n,

$$\mathscr{P}_n := \{\text{alle reelle polynomer av grad høyst } n\}.$$

(Et *reelt polynom* er en funksjon $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ på formen $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ for alle $t \in \mathbb{R}$, der $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. *Graden* til polynomet p er det største tallet $j \in \mathbb{N}_0$ som er slik at $a_j \neq 0$. Graden til nullfunksjonen definerer vi som 0.)



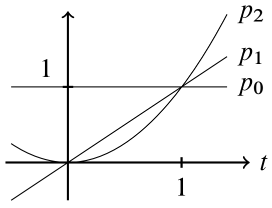
Figur 1.1: Grafen til forskjellige reelle polynomer i $\mathscr{P}_2$.

1.5.1 Den kanoniske polynombasisen

1.5.1 Proposisjon. *Definer* $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *som*

$$p_0(t) = 1, \qquad p_k(t) := t^k \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n.$$

Da er $(p_0, \ldots, p_n)$ *en basis for* $\mathscr{P}_n$.



Bevis. Siden $\mathscr{P}_n$ er definert som alle funksjoner på formen

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n = \alpha_0 p_0(t) + \alpha_1 p_1(t) + \cdots + \alpha_n p_n(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

altså lineærkombinasjoner av $\big(p_0, \dots, p_n\big)$, finner vi at $\mathscr{P}_n = \operatorname{span}\big(p_0, \dots, p_n\big)$. Det gjenstår å vise lineær uavhengighet. For hver $k = 2, \dots, n$ vil rommet $\operatorname{span}\big(p_0, \dots, p_{k-1}\big)$ bestå av polynomer av grad høyst $k-1$, mens p_k er et k-tegradspolynom, så $p_k \notin \operatorname{span}\big(p_0, \dots, p_{k-1}\big)$. Av Lemma 1.3.8 er dermed $\big(p_0, \dots, p_n\big)$ lineært uavhengig. ■

1.5.2 Oppgave. Vis at

(**a**) $\dim \mathscr{P}_n = n + 1$

(**b**) $\dim \mathscr{P} = \infty$

(**c**) $\dim C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

1.5.2 Newton-basisen

Det finnes flere nyttige polynombasiser. Fra *MAT1105* husker vi *Newton-formen* på interpolasjonspolynomer: Polynomet av grad n som interpolerer en funksjon f i $n+1$ forskjellige punkter $t_0, \dots, t_n$ er

$$p(t) := \alpha_0 + \alpha_1(t - t_0) + \alpha_2(t - t_0)(t - t_1) + \cdots + \alpha_n(t - t_0)\cdots(t - t_{n-1}),$$

der koeffisientene er gitt som dividerte differanser av f:

$$\alpha_k = f[t_0, \dots, t_k], \qquad \text{der} \qquad \begin{cases} f[t_i] := f(t_i), \\ f[t_i, \dots, t_j] := \dfrac{f[t_{i+1}, \dots, t_j] - f[t_i, \dots, t_{j-1}]}{t_j - t_i}. \end{cases}$$

Om for eksempel $n = 2$ får vi

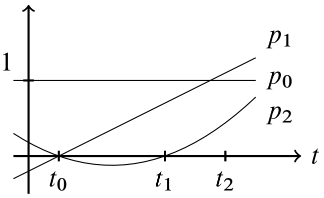
$$p(t) = f(t_0) + (t - t_0)\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} + (t - t_0)(t - t_1)\frac{\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} - \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}}{t_2 - t_0}.$$

Newton-formen på interpolasjonspolynomet gir et hint om at polynomer på formen $(t - t_0)\cdots(t - t_k)$ utgjør en polynombasis.

1.5.3 Proposisjon. *La* $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ *være* $n+1$ forskjellige *tall, og definer* $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *som*

$$p_0(t) = 1, \qquad p_k(t) := (t - t_0)\cdots(t - t_{k-1}) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ k = 1, \dots, n. \quad (1.5.1)$$

Da er $\big(p_0, \dots, p_n\big)$ *en basis for* $\mathscr{P}_n$.



Bevis. Av Korollar 1.5.2 er $\dim \mathscr{P}_n = n + 1$, og siden $\big(p_0, \dots, p_n\big)$ inneholder $n+1$ elementer, holder det (av Proposisjon 1.4.11) å vise at denne listen er lineært uavhengig.

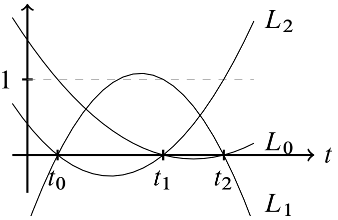
Om vi ganger ut uttrykket for p_k, ser vi at p_k er et polynom av grad k, for hver $k = 0, 1, \dots, n$. Dermed er $p_k \notin \operatorname{span}(p_0, \dots, p_{k-1})$ for hver k. Av Lemma 1.3.8 er derfor $(p_0, \dots, p_n)$ lineært uavhengig. ■

1.5.3 Lagrange-polynomer

En annen måte å uttrykke polynomet som interpolerer en funksjon f er ved hjelp av *Lagrange-polynomer*. La $t_0, \ldots, t_n$ være $n+1$ forskjellige reelle tall. De tilhørende Lagrange-polynomene er funksjonene

$$L_k(t) := \frac{\prod_{j \neq k}(t - t_j)}{\prod_{j \neq k}(t_k - t_j)} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n. \tag{1.5.2}$$

(Produktet i teller og nevner går over alle $j = 0, \ldots, n$ bortsett fra $j = k$.)



Merk at

(i) siden tallene $t_0, \ldots, t_n$ er forskjellige, vil nevneren i (1.5.2) aldri være lik 0

(ii) $L_0, \ldots, L_n$ er polynomer av grad n

(iii) $L_k(t_\ell) = \delta_{k\ell}$ for $k, \ell \in \{0, \ldots, n\}$

(oppgave til leseren). *Lagrange-formen* av polynomet av grad n som interpolerer f i punktene $t_0, \ldots, t_n$ er da

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n} f(t_k) L_k(t). \tag{1.5.3}$$

Dette er en lineærkombinasjon av n-tegradspolynomer, så p er selv et n-tegradspolynom. Videre er

$$p(t_j) = \sum_{k=0}^{n} f(t_k) \underbrace{L_k(t_j)}_{=\delta_{jk}} = f(t_j),$$

så p interpolerer faktisk f i $t_0, \ldots, t_n$.

1.5.4 Proposisjon. *La $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ være $n+1$ forskjellige tall, og definer $L_0, \ldots, L_n$ som i (1.5.2). Da er $(L_0, \ldots, L_n)$ en basis for $\mathcal{P}_n$.*

Bevis. Som i beviset for Newton-polynomene, består listen $(L_0, \ldots, L_n)$ av $n+1$ elementer, og $\dim \mathcal{P}_n = n+1$, så det holder å vise at $(L_0, \ldots, L_n)$ er lineært uavhengig. Anta at $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ er slik at $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$. Evaluer dette uttrykket i $t = t_j$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \underbrace{L_k(t_j)}_{=\delta_{kj}} = \alpha_j.$$

Siden dette gjelder for $j = 0, \ldots, n$, får vi $\alpha_0, \ldots, \alpha_n = 0$, som var det vi ønsket. ■

1.5.5 Korollar. *For $n+1$ forskjellige tall $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ og tilhørende verdier $y_0, \ldots y_n \in \mathbb{R}$, finnes et unikt polynom $p \in \mathcal{P}_n$ slik at $p(t_k) = y_k$ for $k = 0, \ldots, n$.*

Bevis. $\boxed{\text{Oppgave til leseren.}}$ Bruk (1.5.3) for eksistens og Proposisjon 1.5.4 for unikhet. ■

1.5.6 Korollar. *La $p \in \mathcal{P}_n$ være et polynom med $n+1$ forskjellige røtter — det finnes $n+1$ forskjellige tall $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ slik at $p(t_0), \dots, p(t_n) = 0$. Da er $p = 0$.*

Bevis. $\boxed{\text{Oppgave til leseren.}}$ Bruk Korollar 1.5.5. ■

1.5.4 Legendre-polynomer

En siste polynombasis, som vi skal komme tilbake til i Kapittel 4, er *Legendre-polynomene*. Disse kan defineres på forskjellige måter, men vi skal bruke en *rekursiv formel*:

$$\begin{aligned} p_0(t) &:= 1, \\ p_1(t) &:= t, \\ p_k(t) &:= \tfrac{2k-1}{k} t p_{k-1}(t) - \tfrac{k-1}{k} p_{k-2}(t) \qquad \text{for } k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

for $t \in \mathbb{R}$.

1.5.7 Oppgave. Vis at de fire første Legendre-polynomene er gitt ved

$$p_0(t) = 1, \qquad p_1(t) = t, \qquad p_2(t) = \tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}, \qquad p_3(t) = \tfrac{5}{2}t^3 - \tfrac{3}{2}t$$

for $t \in \mathbb{R}$.

Det vil bli tydelig først mye senere hvorfor Legendre-polynomene er interessante. Vi nøyer oss her med å vise at Legendre-polynomene utgjør en basis.

1.5.8 Proposisjon. *For enhver $n \in \mathbb{N}_0$ er p_n et n-tegradspolynom, og $(p_0, \dots, p_n)$ er en basis for $\mathcal{P}_n$.*

Bevis. Vi påstår at p_k har grad k for enhver $k \in \mathbb{N}_0$. Det er klart at p_0 og p_1 har grad henholdsvis 0 og 1. Om utsagnet gjelder for $n = 0, \dots, k-1$ for en $k \geqslant 2$, får vi at

$$p_k(t) = \underbrace{\frac{2k-1}{k}}_{\text{konstant}} \underbrace{t p_{k-1}(t)}_{\text{grad } k} - \underbrace{\frac{k-1}{k}}_{\text{konstant}} \underbrace{p_{k-2}(t)}_{\text{grad } k-2},$$

så p_k har grad k. Beviset for at $(p_0, \dots, p_n)$ er en basis for $\mathcal{P}_n$ følger nå samme argument som for Newton- og Lagrange-polynomene. ■

1.6 Sum og direktesum

1.6.1 Definisjon. La U være et vektorrom og la V og W være underrom av U. *Summen av V og W* er da mengden $V + W \subseteq U$ definert ved

$$V + W := \{v + w : v \in V, w \in W\}.$$

1.6.2 Oppgave. La U være et vektorrom og la V og W være underrom av U.

(**a**) Vis at $V + W$ er et underrom av U.

(**b**) Vis at V og W er underrom av $V + W$.

(**c**) Vis at $\dim(V + W) \leqslant \dim V + \dim W$.

1.6.3 Oppgave. La U være et vektorrom og la V og W være underrom av U.

(**a**) Vis at $V \cup W$ ikke nødvendigvis ikke er et underrom av U.

Hint: La $V = \operatorname{span}(u_1)$ *og* $W = \operatorname{span}(u_2)$ *for to lineært uavhengige vektorer* $u_1, u_2 \in U$.

(**b**) Vis at alle underrom $Z \subseteq U$ som inneholder $V \cup W$, også inneholder $V + W$.

Unionen $V \cup W$ er den "minste" mengden som inneholder både V og W, men av oppgave (a) er ikke $V \cup W$ nødvendigvis et vektorrom. Oppgave (b) viser derimot at summen $V + W$ er det "minste" vektorrommet som inneholder både V og W. Dette viser at summen $V + W$ kan ses på som lineæralgebraens svar på unionen mellom V og W.

1.6.4 Definisjon. La V og W være vektorrom over en kropp $\mathbb{K}$. *Direktesummen av V og W* er da et vektorrom $V \oplus W$ bestående av alle ordnede par

$$V \oplus W := \{(v, w) : v \in V, w \in W\}.$$

Vi utstyrer $V \oplus W$ med nullelementet $(0_V, 0_W)$ og operasjonene

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w') \qquad \text{og} \qquad \alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$$

for $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ og $\alpha \in \mathbb{K}$.

1.6.5 Oppgave.

(**a**) Vis at $V \oplus W$ er et vektorrom.

(**b**) Vis at dersom $(v_1, \ldots, v_n)$ er en basis for V og $(w_1, \ldots, w_m)$ er en basis for W, er

$$\mathscr{B} := \big((v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_m)\big)$$

en basis for $V \oplus W$.

(**c**) Vis at $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

1.7 Moteksempler i uendeligdimensjonale rom

Flere av resultatene i dette kapittelet — særlig i Seksjon 1.4 — gjelder kun for *endeligdimensjonale* vektorrom, altså de vektorrom som spennes av endelig mange vektorer. I denne seksjonen tar vi med noen eksempler på uendeligdimensjonalt vektorrom og hva som kan være anderledes i disse. Denne seksjonen er ikke pensum i *MAT1125*.

1.7.1 Eksempel (Uendeligdimensjonale vektorrom)**.** Du har sett i Oppgave 1.5.2 at $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ er uendeligdimensjonal. Vi skal se her at også rommet $U := \ell^p(\mathbb{R})$ (se Oppgave 1.1.5 (k)) er uendeligdimensjonalt for enhver $p \in [1, \infty]$. Trikset vi bruker (som vi skal bruke igjen senere; se også Oppgave 1.8.3) er å vise at for enhver $n \in \mathbb{N}$ finnes et underrom $V \subseteq U$ med dimensjon $\dim V = n$. Konklusjonen følger da av at $\dim U \geqslant \dim V$ (se Proposisjon 1.4.11) for ethvert underrom V.

La derfor $n \in \mathbb{N}$, og la $a_1, \ldots, a_n \in U$ være følgene

$$a_j := (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}},$$

altså følgen der element nummer j er lik 1, og alle andre elementer er lik 0. Listen $(a_1, \ldots, a_n)$ er lineært uavhengig, for om $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ er slik at $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j = 0$, må

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}} = \left(\textstyle\sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{jk}\right)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots).$$

Altså er $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$. Dermed har $V := \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$ dimensjon lik n. □

1.7.2 Bemerkning (Basiser for uendeligdimensjonale vektorrom)**.** Vi har definert en *basis* til å være en endelig liste med lineært uavhengige vektorer $(u_1, \ldots, u_n)$ som spenner vektorrommet. Ifølge denne definisjonen har ikke uendeligdimensjonale vektorrom en basis. Kan vi likevel utvide basisbegrepet til å omfatte slike vektorrom?

Som vi har sett, er basisdefinisjonen vår ekvivalent med at det for enhver vektor u eksisterer *unike* skalarer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ slik at

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j.$$

En naturlig utvidelse til et uendeligdimensjonalt vektorrom ville derfor være å si at en uendelig lang liste $(u_1, u_2, \ldots)$ er en basis dersom det for enhver vektor u finnes unike skalarer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \in \mathbb{K}$ slik at

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j. \tag{$*$}$$

Men her må vi være forsiktig. Du har lært i *MAT1100* at en "uendelig sum" som i $(*)$ er det vi kaller en *rekke*, og at en rekke kun er definert dersom rekken *konvergerer*, altså at grenseverdien

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j$$

eksisterer. For å gi mening til en slik grenseverdi, trenger vi en måte å måle konvergens på (noe vi kommer tilbake til i Kapittel 3). Og i motsetning til endeligdimensjonale vektorrom, kan det til og med hende at et uendeligdimensjonalt vektorrom ikke engang har en slik basis. (Rommet $\ell^\infty(\mathbb{R})$ er et eksempel — det er på en måte "for stort" til å ha en basis.)

Poenget her er at studien av basiser for uendeligdimensjonale vektorrom er mye vanskeligere enn for de endeligdimensjonale. Vi skal derfor ikke bruke tid på dem her, men heller komme tilbake til dem i *MAT2400*.

Vi nevner til slutt at slike basiser som i $(*)$ kalles *Schauder-basiser*. En annen type basis er *Hamel-basiser*, der man insisterer på at hver vektor skal kunne uttrykkes som en (unik) *endelig* lineærkombinasjon av basisvektorer. En slik basis må nødvendigvis inneholde et ikketellbart uendelig antall vektorer. □

1.7.3 Eksempel (Et vektorrom med flere "like store" underrom)**.** Om V er et underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom U, vet vi av Proposisjon 1.4.11 at $\dim U = \dim V$ hvis og bare hvis $U = V$. Hva om U er uendeligdimensjonalt?

La $U := \ell^p(\mathbb{R})$ for en $p \in [1, \infty]$ (se Eksempel 1.7.1 og Oppgave 1.1.5 (k)), og la $V \subseteq U$ være underrommet

$$V := \{a \in U : (a)_{2k} = 0 \text{ for alle } k \in \mathbb{N}\},$$

altså mengden av alle følger i $\ell^p(\mathbb{R})$ hvor alle partallselementene er lik 0. Ved å bruke samme triks som i Eksempel 1.7.1 kan man da se at $\dim V = \infty$. Altså har U og V "lik dimensjon", men de er helt tydelig forskjellige. □

1.8 Flere oppgaver

1.8.1 Oppgave. Bevis at

(**a**) $\mathcal{P}_m$ er et underrom av $\mathcal{P}_n$ når $m \leqslant n$

(**b**) $\mathcal{P}_m$ er et underrom av $\mathcal{P}$

(**c**) $\mathcal{P}_m$ og $\mathcal{P}$ er underrom av $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.8.2 Oppgave.

(**a**) Vis at vektorrommet $\mathbb{K}^n$ har dimensjon n.

(**b**) Vis at vektorrommet $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ har dimensjon mn.

1.8.3 Oppgave. La U være et vektorrom. Bevis at følgende utsagn er ekvivalente:

(i) $\dim U = \infty$

(ii) for enhver $n \in \mathbb{N}$ finnes et underrom U_n av U med dimensjon n.

Hint: For implikasjonen (i) $\Rightarrow$ (ii) er du nesten ferdig om du har bevist at det for enhver $n \in \mathbb{N}$ finnes en lineært uavhengig liste $(u_1, \ldots, u_n)$. Gjør dette med induksjon.

2 LINEÆRE AVBILDNINGER

Da du lærte om lineæralgebra over $\mathbb{R}^n$, var hovedfokuset på *matriser*. Du har blant annet lært å gange matriser, å løse matriseligninger, å invertere matriser, og å finne matrisens egenverdier og -vektorer.

Det vil vise seg at når vi generaliserer $\mathbb{R}^n$ til et generelt vektorrom U, er *lineære avbildninger* den korrekte generaliseringen av matriser; i Seksjon 2.5 skal vi faktisk se at på endeligdimensjonale vektorrom er matriser og lineære avbildninger én og samme ting.

At en matrise er inverterbar vil svare til at en lineær avbildning er en *isomorfi* (som bare betyr at avbildningen er inverterbar). Isomorfier mellom to vektorrom U og V er spesielt nyttige fordi den gjør oss i stand til å gå fram og tilbake mellom U og V — om en beregning er vanskelig å gjøre i U, kan vi bruke isomorfien til å avbilde til V, gjøre beregningen der, og så avbilde tilbake igjen.

2.1 Definisjoner

2.1.1 Definisjon. La U og V være vektorrom over $\mathbb{K}$. En funksjon $T: U \to V$ kalles en *lineær avbildning* (eller kortere: T er *lineær*) dersom

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ for alle $u, v \in U$

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ for alle $u \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$.

Vi skriver

$$\mathscr{L}(U, V) := \{\text{alle lineære avbildninger } T: U \to V\}.$$

To viktige spesialtilfeller er

$$\mathscr{L}(U) := \mathscr{L}(U, U),$$

mengden av alle *operatorer* på U, og

$$U' := \mathscr{L}(U, \mathbb{K}),$$

mengden av alle *funksjonaler* på U. Mengden U' kalles *dualrommet* til U.

Når T er en lineær avbildning kommer vi ofte til å skrive Tu istedenfor $T(u)$. Uttrykket Tu betyr altså "T evaluert i u", og *ikke* "T ganger u". Om S og T er to lineære avbildninger, er ST komposisjonen mellom S og T, definert ved $ST(u) := S(T(u))$. Se Figur 2.1 for en illustrasjon.

2.1.2 Oppgave. Bevis at $T(0_U) = 0_V$ for enhver lineær avbildning $T: U \to V$.

2.1.3 Oppgave. Vis at de følgende funksjonene er lineære.

(a) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved $Tx := Ax$ for en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (der vi med "Ax" mener "A ganger x").

(b) La $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, og definer $T : C^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ved

$$Tf := \int_a^b f(t)\,dt \qquad \forall\ f \in C^0([a,b], \mathbb{R}).$$

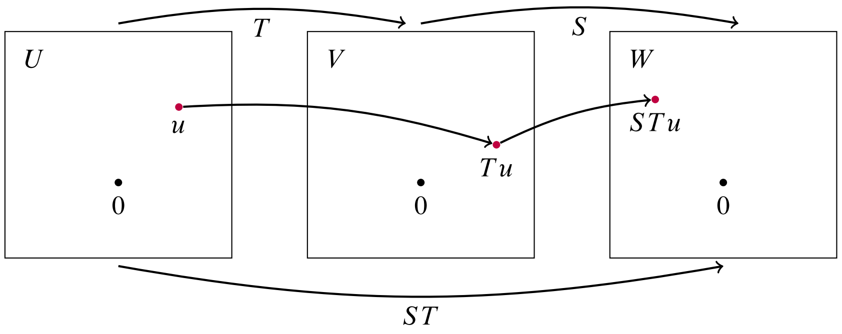
(c) La $g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ være en gitt funksjon, og definer $T : C^0([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ved

$$Tf := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \qquad \forall\ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}).$$

(d) $T : \mathscr{P} \to C^0([a,b], \mathbb{R})$ gitt ved

$$Tp := p\big|_{[a,b]},$$

altså restriksjonen av p til intervallet $[a,b]$ (se Seksjon 0.2.3).



Figur 2.1: Lineære avbildninger $T \in \mathscr{L}(U, V)$ og $S \in \mathscr{L}(V, W)$.

2.1.4 Proposisjon. *$\mathscr{L}(U, V)$ er et vektorrom over $\mathbb{K}$.*

Bevis. Oppgave til leseren. Du trenger ikke sjekke alle vektorromaksiomene i detalj, men pass på at du forstår hva som menes med vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon og hvorfor disse operasjonene gir lineære avbildninger; hva det er som gjør at vektorromaksiom *(i)–(vi)* er sanne; hva nullelementet er; og hva den additive inversen er. ■

2.1.5 Proposisjon. *La U, V være vektorrom over $\mathbb{K}$, la $(u_1, \ldots, u_n)$ være en basis for U, og la $w_1, \ldots, w_n \in V$. Da finnes en unik $T \in \mathscr{L}(U, V)$ som er slik at*

$$Tu_i = w_i \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.1.1}$$

Bevis. Siden $\mathscr{B}$ er en basis, har enhver $u \in U$ en unik representasjon

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n. \tag{$*$}$$

Om T oppfyller (2.1.1) får vi da

$$Tu = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 Tu_1 + \cdots + \alpha_n Tu_n = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

For en vilkårlig $u \in U$ definerer vi derfor

$$Tu := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n,$$

der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ er skalarene i $(*)$. Denne funksjonen er veldefinert fordi skalarene $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ er unikt bestemt av u. Vi overlater til leseren å bevise at denne funksjonen T oppfyller (2.1.1) og er lineær. ■

2.2 Bilde og kjerne

Vi skal her definere to viktige underrom relatert til en lineær operator.

2.2.1 Definisjon. Vi definerer *kjernen* til $T \in \mathscr{L}(U, V)$ som

$$\ker(T) := \{u \in U : T(u) = 0\}$$

og *bildet* til T som

$$\operatorname{im}(T) := \{T(u) : u \in U\}.$$

Rangen til T er gitt ved $\operatorname{rank}(T) := \dim(\operatorname{im}(T))$.

Et annet navn for kjerne er *nullmengde*, mens et annet navn for bilde er *verdimengde*. Vi kommer ofte til å utelate parentesene og skrive $\ker T$, $\operatorname{im} T$ og $\operatorname{rank} T$.

2.2.2 Proposisjon. *La $T \in \mathscr{L}(U, V)$. Da er*

(i) $\ker(T)$ *et underrom av* U

(ii) $\operatorname{im}(T)$ *et underrom av* V

(iii) $\operatorname{rank}(T) \leqslant \min\bigl(\dim(U), \dim(V)\bigr)$.

Bevis. Vi overlater bevisene for *(i)* og *(ii)* til leseren, og beviser kun *(iii)*. Siden $\operatorname{im}(T)$ er et underrom av V, må nødvendigvis $\operatorname{rank}(T) \leqslant \dim(V)$ (se Proposisjon 1.4.11). Det gjenstår dermed å vise at $\operatorname{rank}(T) \leqslant \dim(U)$.

Dersom $\dim(U) = \infty$ er det ingenting å bevise, så la oss anta at U er endeligdimensjonalt, med en basis $(u_1, \ldots, u_n)$. Da er

$$\operatorname{im}(T) = \operatorname{span}(Tu_1, \ldots, Tu_n),$$

så $\operatorname{im}(T)$ er spennet av endelig mange vektorer, og er dermed endeligdimensjonalt, med dimensjon høyst n. ■

2.2.3 Teorem (Dimensjonssatsen)**.** *La U, V være vektorrom over $\mathbb{K}$, og la $T \in \mathscr{L}(U, V)$. Da er*

$$\dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) = \dim(U).$$

2.2.4 Bemerkning. Tallet $\dim(\operatorname{im} T)$ er rangen til T, og tallet $\dim(\ker T)$ kalles noen ganger *nulliteten* til T. Dimensjonssatsen kalles derfor også *rang–nullitetssatsen* (eller *rank–nullity theorem* på engelsk). □

Bevis. Vi antar først at $\dim U < \infty$. Dersom $\operatorname{im} T = \{0_V\}$, er $\ker T = U$, og resultatet følger automatisk. Ellers er $m := \dim(\operatorname{im} T) > 0$. La $(v_1, \ldots, v_m)$ være en basis for $\operatorname{im} T$. For hver $i = 1, \ldots, m$ er $v_i \in \operatorname{im} T$, så det finnes en $u_i \in U$ slik at $Tu_i = v_i$. La

$(w_1, \dots, w_k)$ være en basis for $\ker T$. (En basis eksisterer fordi $\dim(\ker T) \leqslant \dim U < \infty$.) For en vilkårlig $u \in U$ er $Tu \in \operatorname{im} T$, så det finnes $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ slik at

$$Tu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T u_i = Tu', \qquad \text{der } u' := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i.$$

Altså er $0 = Tu - Tu' = T(u - u')$, så $u - u' \in \ker T$, så det finnes $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$ slik at $u - u' = \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j$. Vi har dermed vist at enhver $u \in U$ kan skrives som en lineærkombinasjon av listen $\mathcal{B} := (u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_k)$, så denne listen utspenner U. Vi påstår at denne listen er lineært uavhengig. Dersom $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$ er slik at

$$u := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0,$$

er $0 = Tu = T\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, så $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ (siden $(v_1, \dots, v_m)$ er lineært uavhengig). Men da er $\sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$, så $\beta_1 = \dots, \beta_k = 0$. Altså er $\mathcal{B}$ en basis for U. Vi får dermed $\dim U = m + k = \dim \operatorname{im} T + \dim \ker T$.

Vi behandler til slutt tilfellet $\dim U = \infty$. For enhver $n \in \mathbb{N}$ finnes et underrom $U_n \subseteq U$ av dimensjon n (se Oppgave 1.8.3). Anvend det vi har vist på $T_n := T\big|_{U_n} : U_n \to V$ og få

$$\dim(\operatorname{im} T_n) + \dim(\ker T_n) = \dim U_n = n.$$

Men $\operatorname{im} T_n \subseteq \operatorname{im} T$ og $\ker T_n \subseteq \ker T$, så $\dim(\operatorname{im} T_n) \leqslant \dim(\operatorname{im} T)$ og $\dim(\ker T_n) \leqslant \dim(\ker T)$ (av Proposisjon 1.4.11). Dermed er

$$\dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) \geqslant n$$

for enhver $n \in \mathbb{N}$. Altså må $\dim(\operatorname{im} T) + \dim(\ker T) = \infty = \dim U$. ∎

2.2.5 Oppgave. La $T : \mathcal{P}_8 \to \mathbb{R}$ være den lineære avbildningen

$$T(p) := \int_0^1 p(t)\,dt \qquad \forall\, p \in \mathcal{P}_8.$$

(**a**) Vis at $\operatorname{im} T = \mathbb{R}$.

(**b**) Bruk dimensjonssatsen til å finne dimensjonen til kjernen til T. Vil du si at kjernen til T er "stor" eller "liten"?

2.3 Injektiv, surjektiv, bijektiv

2.3.1 Definisjon. La A og B være mengder. En funksjon $f : A \to B$ er *injektiv* dersom $f(u) = f(u')$ kun når $u = u'$. Funksjonen er *surjektiv* dersom det for alle $v \in B$ finnes en $u \in A$ slik at $f(u) = v$. Funksjonen er *bijektiv* (eller *inverterbar*) om den både er injektiv og surjektiv.

Vi husker fra *MAT1105* at $f : A \to B$ er bijektiv hvis og bare hvis det finnes en *inversfunksjon* $f^{-1} : B \to A$ slik at $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ og $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$.

2.3.2 Lemma. *La $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da er følgende ekvivalent:*

(i) T *er surjektiv*

(ii) $\operatorname{im}(T) = V$.

Bevis. Oppgave til leseren. ■

2.3.3 Lemma. *La* $T \in \mathcal{L}(U, V)$*. Da er følgende ekvivalent:*

(i) T *er injektiv*

(ii) $T(v) = 0$ *kun dersom* $v = 0$

(iii) $\ker T = \{0\}$

(iv) om $(u_1, \ldots, u_n)$ *er en lineært uavhengig liste i* U*, er også* $(Tu_1, \ldots, Tu_n)$ *lineært uavhengig.*

Bevis. Vi beviser implikasjonene

$$\begin{tikzcd} & \text{(ii)} & \\ \text{(i)} \arrow[ur, Rightarrow] & \text{(iii)} \arrow[u, Leftrightarrow] & \text{(iv)} \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

(ii) ⇔ (iii) Egenskap *(ii)* er bare en omskrivning av *(iii)*.

(i) ⇒ (ii) Siden både $T(v) = 0$ og $T(0) = 0$ må da $v = 0$, siden T er injektiv.

(ii) ⇒ (i) Om $u, v \in U$ er slik at $Tu = Tv$, er også $T(u - v) = 0$, av linearitet. Da er $u - v = 0$, det vil si $u = v$, som var det vi ønsket.

(ii) ⇒ (iv) La $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ være slik at $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j T u_j = 0$. Da er

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T u_j = T\big(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\big),$$

så $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0$. Men $(u_1, \ldots, u_n)$ er lineært uavhengig, så $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

(iv) ⇒ (ii) Anta motsatt at $Tv = 0$ men $v \neq 0$. Siden listen (v) er lineært uavhengig er da også listen (Tv) lineært uavhengig, som er en selvmotsigelse siden $Tv = 0$. Dermed må $v = 0$.

■

2.3.4 Oppgave. La $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ være gitt ved

$$Tp := \frac{dp}{dt} \qquad \forall\ p \in \mathcal{P}_3,$$

den deriverte til polynomet p.

(a) Forklar hvorfor T er en veldefinert lineær avbildning.

(b) Er T injektiv? Surjektiv? Bijektiv?

(c) Generaliser de foregående oppgavene til avbildningen $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ definert ved $Tp := \frac{dp}{dt}$, for en vilkårlig $n \in \mathbb{N}$.

2.3.5 Proposisjon. *La U og V være vektorrom over samme kropp $\mathbb{K}$.*

(i) *Om det eksisterer en surjektiv $T \in \mathcal{L}(U, V)$, er* $\dim U \geqslant \dim V$.

(ii) *Om det eksisterer en injektiv $T \in \mathcal{L}(U, V)$, er* $\dim U \leqslant \dim V$.

(iii) *Om det eksisterer en bijektiv $T \in \mathcal{L}(U, V)$, er* $\dim U = \dim V$.

Bevis. Oppgave til leseren. Bruk dimensjonssatsen. ■

2.3.6 Proposisjon. *Dersom $T : U \to V$ er lineær og bijektiv, er dens inversfunksjon $T^{-1} : V \to U$ også lineær. Med andre ord: Om $T \in \mathcal{L}(U, V)$ har en inversfunksjon T^{-1}, så er $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$.*

Bevis. Siden $T : U \to V$ er bijektiv er dens inversfunksjon $T^{-1} : V \to U$ veldefinert. La nå $u, v \in V$; vi vil vise at $T^{-1}(u + v) = T^{-1}u + T^{-1}v$. Vi har nå

$$u + v = T\big(T^{-1}u\big) + T\big(T^{-1}v\big) = T\big(T^{-1}u + T^{-1}v\big).$$

Anvender vi T^{-1} på begge sider får vi

$$T^{-1}(u + v) = T^{-1}u + T^{-1}v,$$

som er det vi ville ha. Vi overlater beviset for at $T^{-1}(\alpha u) = \alpha T^{-1}u$ til leseren. ■

2.4 Isomorfier

2.4.1 Definisjon. En *isomorfi* er en bijektiv lineær avbildning. Vi sier at to vektorrom U og V er *isomorfe* dersom det eksisterer en isomorfi $T : U \to V$. Vi skriver da

$$U \cong V.$$

2.4.2 Oppgave. La $V := \{x \in \mathbb{R}^3 : (x)_3 = 0\}$. Vis at $\mathbb{R}^2 \cong V$. (Med andre ord: x_1-x_2-planet i $\mathbb{R}^3$ er isomorft med $\mathbb{R}^2$.)

2.4.3 Oppgave. La U, V og W være vektorrom over $\mathbb{K}$. Bevis at

(i) $U \cong U$

(ii) hvis $U \cong V$, er $V \cong U$

(iii) hvis $U \cong V$ og $V \cong W$, er $U \cong W$.

(Dermed er $\cong$ en *ekvivalensrelasjon*.)

2.4.4 Teorem. *La U og V være endeligdimensjonale vektorrom over $\mathbb{K}$ med* lik dimensjon. *La $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Da er følgende ekvivalent:*

(i) *T er en isomorfi*

(ii) $\ker(T) = \{0\}$

(iii) *T er injektiv*

(iv) *T er surjektiv.*

Bevis. Vi beviser implikasjonene

$$\begin{array}{ccc} \text{(i)} & & \text{(iii)} \\ \Downarrow & \nwarrow\!\!\searrow & \Updownarrow \\ \text{(iv)} & \Longrightarrow & \text{(ii)} \end{array}$$

Implikasjonen (i) $\Rightarrow$ (iv) er automatisk (hvorfor er det slik?). Ekvivalensen (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) beviste vi i Lemma 2.3.3.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) At T er surjektiv er det samme som at $\operatorname{im}(T) = V$. Av dimensjonssatsen får vi da $\dim(\ker(T)) = \dim(U) - \dim(V) = 0$, slik at $\ker(T) = \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Vi må vise at T er injektiv og surjektiv. For å se at T er injektiv, la $u, v \in U$ være slik at $T(u) = T(v)$. Da er $T(u - v) = 0$, så $u - v \in \ker(T) = \{0\}$, så $u = v$.

For å se at T er surjektiv viser vi at $\operatorname{im}(T) = V$. Siden $\ker(T) = \{0\}$ er $\dim(\ker(T)) = 0$, så av dimensjonssatsen er $\dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(U)$. Men $\dim(U) = \dim(V)$, så av Proposisjon 1.4.11 er $\operatorname{im}(T) = V$.

■

2.4.5 Oppgave. Teorem 2.4.4 er ikke annet enn en "abstrakt" versjon av et teorem som gir en lang liste av ekvivalente betingelser for at et lineært ligningssystem $Ax = b$ har en unik løsning (se Seksjon 0.1.3). Forsøk å "oversette" Teorem 2.4.4 til betingelser på matrisen A.

2.4.6 Bemerkning. Teorem 2.4.4 er *ikke* sant i uendeligdimensjonelle rom. La $U = V := \ell^1(\mathbb{R})$ (se Oppgave 1.1.5). Da er U og V uendeligdimensjonale, så de har "lik" dimensjon. Definer $T : U \to V$ ved

$$Ta := (0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \dots) \qquad \forall\, a \in \ell^1(\mathbb{R}).$$

Da er T veldefinert, og *(ii)* og *(iii)* i Teorem 2.4.4 er sanne, men ikke *(i)* og *(iv)* (oppgave til leseren). □

2.5 Lineære avbildninger i koordinater

2.5.1 Teorem. *La $n \in \mathbb{N}$. Alle n-dimensjonale vektorrom over $\mathbb{K}$ er isomorfe med $\mathbb{K}^n$. Om $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ er en basis for et vektorrom, er avbildningen $u \mapsto [u]_{\mathscr{B}}$ en slik isomorfi. (Her er $[u]_{\mathscr{B}}$ vektoren gitt i Teorem 1.4.5.)*

Bevis. La U være et n-dimensjonalt vektorrom med basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Vi påstår at funksjonen $T : U \to \mathbb{K}^n$ gitt ved $T(u) = [u]_{\mathscr{B}}$ er en isomorfi. Av Teorem 1.4.5 er T veldefinert. Om $u, v \in U$ har koordinater $[u]_{\mathscr{B}} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ og $[v]_{\mathscr{B}} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, og $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ er gitt, er

$$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i u_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha x_i + \beta y_i\big) u_i.$$

Dermed er

$$T(\alpha u + \beta v) = [\alpha u + \beta v]_{\mathscr{B}} = \alpha [u]_{\mathscr{B}} + \beta [v]_{\mathscr{B}} = \alpha T(u) + \beta T(v),$$

så T er lineær.

For å konkludere med at T er en isomorfi, er det ifølge Teorem 2.4.4 nok å vise at T er surjektiv. La derfor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ være vilkårlig, og definer $u := x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$. Da er $T(u) = x$, som vi ville vise. ■

2.5.2 Oppgave. Bevis følgende korollar: Alle n-dimensjonale vektorrom over $\mathbb{K}$ er isomorfe med hverandre.

2.5.3 Oppgave. I vektorrommet $\mathscr{P}_2$ (se Oppgave 1.1.5 (i)) lar vi $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen (se Seksjon 1.5.1) og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (se Seksjon 1.5.2). Finn $[p]_{\mathscr{B}}$ og $[p]_{\mathscr{C}}$, der $p(t) = 2 - t + 3t^2$.

2.5.4 Teorem. *La U, V være ikke-trivielle vektorrom over $\mathbb{K}$ av endelig dimensjon $n := \dim(U)$ og $m := \dim(V)$, og la $T \in \mathscr{L}(U, V)$. La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være basiser for hhv. U og V. Da finnes en unik matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ slik at*

$$[T(u)]_{\mathscr{C}} = A[u]_{\mathscr{B}} \qquad \forall\, u \in U \tag{2.5.1}$$

(der $A[u]_{\mathscr{B}}$ betegner matrisen A multiplisert med n-tuppelen $[u]_{\mathscr{B}}$). Vi betegner denne matrisen $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = A$.

Bevis. La $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ betegne kolonnene i A, og kall basiselementene $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Vi definerer $a_j := [Tu_j]_{\mathscr{C}}$. For en vilkårlig $u \in U$ med basisrepresentasjon $[u]_{\mathscr{B}} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$) er da

$$[Tu]_{\mathscr{C}} = \big[T\big(\textstyle\sum_{j=1}^n x_j u_j\big)\big]_{\mathscr{C}} = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j [Tu_j]_{\mathscr{C}} = \sum_{j=1}^n x_j a_j = A[u]_{\mathscr{B}},$$

der vi i andre steg brukte linearitet av T og av $[\cdot]_{\mathscr{B}}$.

For å vise unikhet lar vi A og A' være to matriser som oppfyller (2.5.1), og kaller kolonnene deres henholdsvis a_j og a'_j for $j = 1, \dots, n$. Vi har $[u_j]_{\mathscr{B}} = e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^n$, så

$$a_j = Ae_j = A[u_j]_{\mathscr{B}} = [Tu_j]_{\mathscr{C}} = A'[u_j]_{\mathscr{B}} = A'e_j = a'_j$$

for $j = 1, \dots, n$. Altså er $A = A'$. ■

2.5.5 Definisjon. Matrisen $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$ i forrige teorem er *basisrepresentasjonen av T i basisene $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$*, også kalt *den tilhørende matrisen til T*.

Beviset for Teorem 2.5.4 forteller oss hvordan vi finner basisrepresentasjonen $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$: For hvert basiselement u_j i $\mathscr{B}$ beregner vi Tu_j, finner basisrepresentasjonen $[Tu_j]_{\mathscr{C}}$ av denne vektoren i basisen $\mathscr{C}$, og setter denne i kolonne j. Vi får da $m \times n$-matrisen

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} [Tu_1]_{\mathscr{C}} & [Tu_2]_{\mathscr{C}} & \cdots & [Tu_n]_{\mathscr{C}} \end{pmatrix}.$$

2.5.6 Oppgave. La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være standardbasisene i henholdsvis $\mathbb{K}^n$ og $\mathbb{K}^m$, og la $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. La $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ være den tilhørende avbildningen $T(x) := Ax$. Vis at

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = A.$$

Hint: Se Oppgave 1.4.6.

2.5.7 Teorem. *Under samme betingelser som i Teorem 2.5.4, er avbildningen* $T \mapsto [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ *en isomorfi. Vektorrommene* $\mathscr{L}(U, V)$ *og* $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *er dermed isomorfe.*

Bevis. Vi overlater til leseren å vise at avbildningen er lineær, det vil si $[T+S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} + [S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ og $[\alpha T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \alpha [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ for alle $T, S \in \mathscr{L}(U, V)$ og alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

Vi bruker Lemma 2.3.3 *(ii)* for å vise injektivitet. Om $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = 0$, er $[Tu]_{\mathscr{C}} = 0$ for alle $u \in U$. Men da er $Tu = 0$ for alle $u \in U$, det vil si $T = 0$.

Om $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ er en vilkårlig matrise, lar vi

$$Tu := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j, \qquad \text{der } (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^{\mathsf{T}} := A[u]_{\mathscr{B}}.$$

Da er T en lineær avbildning og $[Tu]_{\mathscr{C}} = A[u]_{\mathscr{B}}$ for alle $u \in U$, så $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = A$. Altså er $[\cdot]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ surjektiv. ∎

2.5.8 Proposisjon. *La* U*,* V*, og* W *være vektorrom over* $\mathbb{K}$ *med basiser* $\mathscr{B}$*,* $\mathscr{C}$ *og* $\mathscr{D}$*. La* $S \in \mathscr{L}(U, V)$ *og* $T \in \mathscr{L}(V, W)$*. Da er*

$$[TS]_{\mathscr{D}}^{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}} [S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}.$$

Bevis. For $u \in U$ er

$$[(TS)u]_{\mathscr{D}} = [T(Su)]_{\mathscr{D}} = [T]_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}} [Su]_{\mathscr{C}} = [T]_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}} [S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} [u]_{\mathscr{B}}.$$

Resultatet følger. ∎

2.5.9 Oppgave. La U og V være endeligdimensjonale vektorrom av lik dimensjon, og la $T \in \mathscr{L}(U, V)$. La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være basiser for henholdsvis U og V. Vis at T er en isomorfi hvis og bare hvis den kvadratiske matrisen $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar.

2.5.10 Oppgave. La $T : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$ være gitt ved

$$Tp := \frac{dp}{dt} \qquad \forall\, p \in \mathscr{P}_3,$$

den deriverte til polynomet p. (Se Oppgave 2.3.4.)

(**a**) La $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ og $\mathscr{C} = (p_0, p_1, p_2)$ være de kanoniske basisene for henholdsvis $\mathscr{P}_3$ og $\mathscr{P}_2$ (se Seksjon 1.5.1). Finn basisrepresentasjonen $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

(**b**) Generaliser den forrige oppgavene til avbildningen $T : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_{n-1}$ definert på samme måte, for en vilkårlig $n \in \mathbb{N}$.

2.6 Basisskifte

2.6.1 Proposisjon. *La* U *være et endeligdimensjonalt vektorrom med to basiser* $\mathscr{B}$ *og* $\mathscr{C}$*. Da er*

$$[u]_{\mathscr{C}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} [u]_{\mathscr{B}} \qquad \forall\, u \in U \tag{2.6.1}$$

der $\mathrm{id}\colon U \to U$ *er identitetsavbildningen* $\mathrm{id}(u) = u$*. Matrisen* $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ *er inverterbar med inversmatrise* $[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$*.*

2.6.2 Definisjon. Matrisen $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er *basisskiftematrisen fra $\mathscr{B}$ til $\mathscr{C}$*.

Bevis for Proposisjon 2.6.1. Vi overlater til leseren å vise (2.6.1). La $n := \dim U$. For alle $u \in U$ er

$$[u]_{\mathscr{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}[u]_{\mathscr{C}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}},$$

så $[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = I_n$. Likeledes er $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = I_n$. ■

2.6.3 Proposisjon. *La $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ være en basis for $\mathbb{K}^n$ og la $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen på $\mathbb{K}^n$. Da er*

$$[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}.$$

Bevis. Merk først at $[u]_{\mathscr{C}} = u$ for enhver $u \in \mathbb{K}^n$. Dermed er

$$[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}} = [u]_{\mathscr{C}} = u = \sum_{j=1}^{n} \big([u]_{\mathscr{B}}\big)_j u_j = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix} [u]_{\mathscr{B}}.$$ ■

2.6.4 Oppgave. I vektorrommet $\mathbb{R}^2$ lar vi $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ være basisen gitt ved $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ være standardbasisen $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finn basisskiftematrisene $[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ og $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

2.6.5 Oppgave. På vektorrommet $\mathscr{P}_2$ (se Oppgave 1.1.5 (i)) lar vi $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen (se Seksjon 1.5.1) og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ (se Seksjon 1.5.2). Finn basisskiftematrisene $[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ og $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

2.7 Determinanter

2.7.1 Definisjon. La U være et endeligdimensjonalt vektorrom med basis $\mathscr{B}$, og la $T \in \mathscr{L}(U)$. *Determinanten* til T er tallet $\det(T) := \det([T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}})$.

2.7.2 Proposisjon. *Determinanten til en lineær operator er uavhengig av basisen den beregnes i.*

Bevis. La $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ være to basiser. Da er

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}.$$

Siden $[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \big([\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\big)^{-1}$ er $\det\big([\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\big) = 1/\det\big([\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\big)$, så

$$\det\big([T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}\big) = \det\big([\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\big)\det\big([T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}\big)\det\big([\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\big) = \det\big([T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}\big),$$

som var det vi ville vise. ■

2.7.3 Proposisjon. *La U være et ikke-trivielt, endeligdimensjonalt vektorrom og la $T \in \mathscr{L}(U)$. Da er T en isomorfi hvis og bare hvis* $\det(T) \neq 0$.

Bevis. La $\mathscr{B}$ være en basis for U. Vi vet at T er en isomorfi hvis og bare hvis den har en inversavbildning T^{-1}. Da er

$$I_n = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [TT^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} \overset{2.5.8}{=} [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}[T^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}},$$

så $[T^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ er en høyreinvers for $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$. På samme måte finner vi at $[T^{-1}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ er en venstreinvers for $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$, så $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ er derfor en inverterbar matrise, og har dermed ikke-null determinant. Den motsatte implikasjonen er nesten helt lik. ■

2.8 Direktesummer igjen

2.8.1 Teorem. *La U være et vektorrom med underrom V og W. Da er følgende ekvivalent:*

(i) $V \cap W = \{0\}$.

(ii) Vektorrommene $V \oplus W$ og $V + W$ er isomorfe, og avbildningen

$$T\colon V \oplus W \to V + W, \qquad T\big((v, w)\big) = v + w$$

er én slik isomorfi.

(iii) Enhver $u \in V + W$ kan skrives som $v + w$ for unike *$v \in V$ og $w \in W$.*

(iv) (I tilfellet der V og W er endeligdimensjonale) $\dim(V + W) = \dim V + \dim W$.

Bevis. Vi beviser implikasjonene

$$\begin{tikzcd} (i) \arrow[dr, Rightarrow] & (iii) \arrow[l, Rightarrow] \\ (iv) \arrow[r, Leftrightarrow] & (ii) \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Vi overlater implikasjonene *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)* og *(ii)* $\Rightarrow$ *(iv)* til leseren.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Vi vil vise at T er lineær, surjektiv og injektiv. Beviset for at T er lineær og surjektiv overlater vi til leseren. Av Lemma 2.3.3 trenger vi bare å vise at $\ker T = \{(0, 0)\}$. Om $(v, w) \in \ker T$, er

$$0 = T\big((v, w)\big) = v + w.$$

Dermed er $w = -v \in V$, så $w \in V \cap W = \{0\}$, og derfor er $w = 0$. Siden $v + w = 0$ må da også $v = 0$, og vi får $(v, w) = (0, 0)$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Fra Seksjon 1.6 husker vi at

$$\dim(V + W) \leqslant \dim V + \dim W \quad \text{og} \quad \dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W.$$

Punkt *(iv)* kan derfor omskrives som $\dim(V + W) = \dim(V \oplus W)$. Siden rommene har lik dimensjon, er det (av Teorem 2.4.4) nok å vise at T er surjektiv. Om $u \in V + W$, finnes (per definisjon) $v \in V$ og $w \in W$ slik at $u = v + w$, og da er $T((v, w)) = v + w = u$, så T er surjektiv. Dette viser *(ii)*. ■

Basert på bemerkningene ovenfor, kommer vi til å "misbruke" notasjonen $\oplus$ som følger: Om U er et vektorrom med underrom V og W, sier vi at *U er direktesummen av V og W* og skriver

$$U = V \oplus W$$

dersom alle $u \in U$ kan skrives som $v + w$ for *unike* $v \in V$ og $w \in W$. På samme måte sier vi at U er direktesummen av underrommene $V_1, \ldots, V_m$ og skriver

$$U = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$$

dersom alle $u \in U$ kan skrives som $v_1 + \cdots + v_m$ for *unike* $v_j \in V_j$ (for $j = 1, \ldots, m$). Merk at med denne bruken av symbolet $\oplus$, har ikke uttrykket "$V \oplus W$" en betydning i seg selv — det brukes kun i utsagn på formen "$U = V \oplus W$" for å uttrykke den ovennevnte sammenhengen mellom U, V og W.

2.8.2 Eksempel. La $V := \{x \in \mathbb{R}^3 : (x)_3 = 0\}$ og $W := \{x \in \mathbb{R}^3 : (x)_1 = (x)_2 = 0\}$. Vi påstår at

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus W.$$

For det første: Når vi skriver "$\mathbb{R}^3 = V \oplus W$", mener vi at enhver $x \in \mathbb{R}^3$ kan skrives som $v + w$ for unike $v \in V$ og $w \in W$.

Vi overlater til leseren å vise at V og W er underrom av $\mathbb{R}^3$ og at $V \cap W = \{0\}$. Av Teorem 2.8.1 *(iii)* kan vi konkludere at enhver $u \in V + W$ kan skrives som $v + w$ for unike $v \in V$ og $w \in W$. Av punkt *(iv)* i samme teorem kan vi også konkludere med at $\dim(V + W) = \dim V + \dim W = 2 + 1 = 3$. Rommet $V + W$ er da et tredimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^3$, men siden $\mathbb{R}^3$ også er tredimensjonalt, må $V + W = \mathbb{R}^3$ (se Proposisjon 1.4.11). Dermed er $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$. $\square$

3 Analyse i vektorrom

Analyse er den delen av matematikken som handler om konvergens, kontinuitet, derivasjon, integrasjon, og andre begreper som følger naturlig fra disse. For å kunne gjøre analyse på en samling objekter, er det et minimumskrav at vi har en måte å måle *avstand* mellom objektene: For å bestemme om en gitt følge konvergerer mot et punkt, for eksempel, må vi kunne måle avstanden mellom punktet og elementene i følgen. For eksempel har vi på $\mathbb{R}$ målt avstander mellom punkter x og y med absoluttverdifunksjonen $|x-y|$, og på $\mathbb{R}^n$ har vi målt avstander med den euklidske normen $\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

På mer generelle vektorrom kan vi beregne lengder og avstander ved hjelp av *normer*. En norm er en funksjon som oppfyller visse minimumskrav for at den skal svare til vår idé om en “avstand”. Når vi har introdusert normbegrepet (Seksjon 3.1) kan vi definere konvergens av følger av vektorer (Seksjon 3.2) og kontinuitet av funksjoner på vektorrom (Seksjon 3.3). Kontinuitet av lineære avbildninger viser seg å være spesielt enkelt å jobbe med.

Vi skal bevise tre viktige satser på *endeligdimensjonale* vektorrom (Seksjon 3.4). Vi skal generalisere ekstremalverdisetningen; vi skal vise at alle normer er *ekvivalente* (at de i bunn og grunn måler det samme, bare i “andre måleenheter”), og at alle lineære avbildninger er kontinuerlige. Det viser seg at ingen av disse satsene er sanne på uendeligdimensjonale rom (se moteksempler i Seksjon 3.6). Til slutt skal vi introdusere en norm på vektorrommet bestående av matriser (Seksjon 3.5).

3.1 Normer

3.1.1 Definisjon. La U være et vektorrom over enten $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ eller $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. En *norm på U* er en funksjon $\|\cdot\|\colon U\to\mathbb{R}$ som er slik at

(i) $\|u\|\geqslant 0$ for alle $u\in U$, og $\|u\|=0$ hvis og bare hvis $u=0$

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ for alle $\alpha\in\mathbb{K}$ og $u\in U$

(iii) $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$ for alle $u,v\in U$.

Et *normert vektorrom* er et par $\big(U,\|\cdot\|\big)$ bestående av et vektorrom U og en norm $\|\cdot\|$ på U. Når det ikke kan lede til misforståelser skriver vi bare U istedenfor $\big(U,\|\cdot\|\big)$. *Lengden* til en vektor $u\in U$ er tallet $\|u\|$. *Avstanden* mellom vektorer $u,v\in U$ er tallet $\|u-v\|$.

3.1.2 Eksempler.

(a) *Absoluttverdifunksjonen* $|\cdot|$ på $\mathbb{R}$, definert som

$$|x| := \begin{cases} x & \text{om } x\geqslant 0,\\ -x & \text{om } x<0\end{cases} \qquad \text{for } x\in\mathbb{R},$$

er en norm på $\mathbb{R}$. Vi bruker samme notasjon for *lengdefunksjonen* på $\mathbb{C}$,

$$|x| := \sqrt{x\overline{x}} \qquad \text{for } x\in\mathbb{C},$$

som er en norm på $\mathbb{C}$.

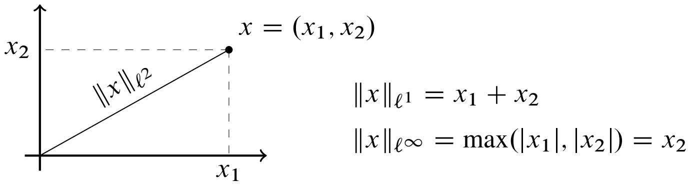
(**b**) Den *euklidske normen* på $\mathbb{R}^n$ (eller $\mathbb{C}^n$) er gitt ved

$$\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^n.$$

For en generell $p \in [1,\infty)$ er *ℓ^p-normen* på $\mathbb{K}^n$ (for $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) gitt ved

$$\|x\|_{\ell^p(\mathbb{K}^n)} := \Big(\textstyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^n.$$

Vi skriver ofte bare $\|x\|_{\ell^p}$ eller $\|x\|_p$. Om vi formelt setter $p = \infty$ får vi *∞-*



Figur 3.1: ℓ^p-normene i $\mathbb{R}^2$.

normen (eller “maksnormen”):

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \max_{k=1,\dots,n} |x_k| \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^n.$$

Det andre ytterpunktet, $p = 1$, kalles ofte *manhattanmetrikken*,

$$\|x\|_{\ell^1} := \sum_{k=1}^n |x_k| \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^n.$$

(“Metrikk” er et annet navn for “avstand”. En taxisjåfør på Manhattan må bruke manhattanmetrikken for å beregne avstanden mellom to punkter.)

Prøv å vise at ℓ^1- og ℓ^∞-normene er normer! Beviset for at ℓ^p-normene er normer når $p \in (1,\infty)$ er vanskeligere; du finner beviset i Appendiks C.

(**c**) La $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ være et intervall. *Supremumsnormen* på $C^0([a,b],\mathbb{R})$ (se Oppgave 1.1.5 (e)) er gitt ved

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

(**d**) La $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ være et intervall og la $p \in [1,\infty)$. *L^p-normen* på $C^0([a,b],\mathbb{R})$ (se Oppgave 1.1.5 (e)) er gitt ved

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

(**e**) For et tall $p \in [1,\infty)$ og en følge $a = (a_k)_{k=1}^\infty$ i $\mathbb{R}$ definerer vi *ℓ^p-normen*

$$\|a\|_{\ell^p} := \Big(\textstyle\sum_{k=1}^\infty |a_k|^p\Big)^{1/p},$$

mens ℓ^∞-normen er gitt ved

$$\|a\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Vektorrommet $\ell^p(\mathbb{R})$ fra Oppgave 1.1.5 (k) er definert nettopp som mengden av alle følger a med endelig ℓ^p-norm. □

3.1.3 Oppgave. La $x, y \in \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$x := \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \qquad y := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Beregn lengden av x og y og avstanden mellom x og y i hver av de tre normene $\|\cdot\|_{\ell^1}$, $\|\cdot\|_{\ell^2}$ og $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.

3.1.4 Oppgave. La U være et vektorrom med basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$, og definer

$$\|u\| := \big\|[u]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} \qquad \text{for } u \in U.$$

Vis at $\|\cdot\|$ en norm på U.

Hint: Du kan (og må) bruke at $\|\cdot\|_{\ell^2}$ er en norm på $\mathbb{R}^n$.

3.1.5 Proposisjon (Den omvendte trekantulikheten)**.** *For alle vektorer u, v i et normert vektorrom er*

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leqslant \|u - v\|. \tag{3.1.1}$$

Bevis. Av trekantulikheten er

$$\|u\| = \big\|(u - v) + v\big\| \leqslant \|u - v\| + \|v\|$$

så

$$\|u\| - \|v\| \leqslant \|u - v\|. \tag{$*$}$$

Bytter vi om rollen til u og v i $(*)$ får vi

$$\|v\| - \|u\| \leqslant \|v - u\| = \|u - v\|. \tag{$**$}$$

Ulikhetene $(*)$ og $(**)$ gir sammen (3.1.1). ■

3.2 Konvergens

3.2.1 Definisjon. En *følge* av vektorer i et vektorrom U er en uendelig lang liste $(u_1, u_2, \dots)$ av vektorer $u_1, u_2, \dots \in U$.

3.2.2 Definisjon. La U være et normert vektorrom. La $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge av vektorer, og la $u \in U$. Vi sier at *følgen konvergerer mot u* og skriver $u_k \to u$ eller $\lim_{k\to\infty} u_k = u$, dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$k \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \|u_k - u\| < \varepsilon.$$

3.2.3 Oppgave. Forklar hvorfor følgende er ekvivalent:

(i) følgen av vektorer $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot u

(ii) følgen av reelle tall $\big(\|u_k - u\|\big)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot 0.

3.2.4 Oppgave. Vi betrakter vektorrommet $\ell^1(\mathbb{R})$ (se Oppgave 1.1.5 (k)) med normen $\|\cdot\|_{\ell^1}$ (se Eksempel 3.1.2 (e)). La $u_1, u_2, \dots \in \ell^1(\mathbb{R})$ være vektorene

$$u_k := \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \dots, \tfrac{1}{2^k}, 0, 0, \dots\right) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Konvergerer følgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$? Hva er isåfall grensen?

Hint: Du må skille mellom objektene $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$, som er elementer (vektorer) i ℓ^1, og objektene $(u_k)_1, (u_k)_2, \dots$, som for enhver $k \in \mathbb{N}$ er reelle tall.

3.2.5 Definisjon. La U være et normert vektorrom, $u \in U$ og $r > 0$. *Den åpne kula sentrert i u med radius r* er mengden

$$B_r(u) := \{v \in U : \|u - v\| < r\}.$$

Den lukkede kula sentrert i u med radius r er mengden

$$\overline{B}_r(u) := \{v \in U : \|u - v\| \leqslant r\}.$$

3.2.6 Definisjon. La U være et normert vektorrom og la $E \subseteq U$ være en delmengde.

(i) Vi sier at E er *åpen* om det for enhver $u \in E$ finnes en $\delta > 0$ slik at $B_\delta(u) \subseteq E$. Med andre ord: For enhver $u \in E$ finnes en $\delta > 0$ slik at for enhver $v \in U$ med $\|u - v\| < \delta$, er også $v \in E$.

(ii) Vi sier at E er *lukket* om det for enhver konvergent følge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ av vektorer $u_k \in E$, er slik at også $\lim_{k\to\infty} u_k \in E$.

(iii) Vi sier at E er *begrenset* om det finnes en $r > 0$ slik at $E \subseteq B_r(0)$.

3.2.7 Oppgave. Vis at

(**a**) alle kuler er begrensede

(**b**) alle åpne kuler $B_r(u)$ er åpne mengder

(**c**) alle lukkede kuler $\overline{B}_r(u)$ er lukkede mengder.

*Hint: I (**b**) lar du $v \in B_r(u)$ og må finne en $s > 0$ slik at $B_s(v) \subseteq B_r(u)$. I alle tre oppgaver må du bruke trekantulikheten.*

3.2.8 Oppgave. La U være et normert vektorrom. Vis at U

(**a**) er en åpen delmengde av U

(**b**) er en lukket delmengde av U

(**c**) er begrenset kun dersom $U = \{0\}$.

3.3 Kontinuitet

3.3.1 Definisjon. La U og V være normerte vektorrom og la $E \subseteq U$ være en delmengde. Vi sier at en funksjon $f : E \to V$ er *kontinuerlig i et punkt $u \in E$* dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$v \in E,\ \|u - v\|_U < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|f(u) - f(v)\|_V < \varepsilon. \tag{3.3.1}$$

Vi sier at f er *kontinuerlig overalt*, eller bare *kontinuerlig*, dersom f er kontinuerlig i alle punkter $u \in E$. Mengden av alle kontinuerlige funksjoner fra U til V kalles $C^0(U, V)$, eller bare $C(U, V)$.

3.3.2 Oppgave. En funksjon $f : E \to V$ er *Lipschitz-kontinuerlig* dersom det finnes et tall $L > 0$ slik at

$$\|f(u) - f(v)\|_V \leqslant L\|u - v\|_U \qquad \forall\, u, v \in E.$$

Vis at alle Lipschitz-kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige.

3.3.3 Proposisjon. *La U, V, E og f være som i Definisjon 3.3.1. Da er f kontinuerlig i $u \in E$ hvis og bare hvis følgende gjelder:*

> *Om $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge i E som konvergerer mot $u \in E$,*
> *vil også $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergere mot $f(u)$.*

Bevis. Anta først at f er kontinuerlig i u, og la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være som i utsagnet. La $\varepsilon > 0$, og la $\delta > 0$ være slik at (3.3.1) holder. La $N \in \mathbb{N}$ være slik at $\|u - u_n\|_U < \delta$ når $n \geqslant N$. Da vil

$$\|f(u) - f(u_n)\|_V < \varepsilon \qquad \forall\, n \geqslant N,$$

så $f(u_n) \to f(u)$.

Anta nå at utsagnet i proposisjonen er sant, men at f *ikke* er kontinuerlig i u. Det finnes da en $\varepsilon > 0$ slik at for enhver $\delta > 0$ finnes en $v \in E$ slik at $\|u - v\|_U < \delta$, men $\|f(u) - f(v)\|_V \geqslant \varepsilon$. Velg u_n til å være et vilkårlig punkt i E slik at $\|u - u_n\|_U < 1/n$, men $\|f(u) - f(u_n)\|_V \geqslant \varepsilon$. Da vil $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergere mot u, men $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer *ikke* mot $f(u)$ — en motsigelse. Altså er f kontinuerlig i u. ■

3.3.4 Oppgave. Bevis følgende:

(**a**) Om $f : U \to V$ og $g : V \to W$ er kontinuerlige, er også $g \circ f$ kontinuerlig.

(**b**) Funksjonen $f : U \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(u) := \|u\|_U$ er kontinuerlig. (Her betrakter vi $\mathbb{R}$ som et vektorrom med normen $|\cdot|$; se Eksempel 3.1.2 (a).)

(**c**) Om $f : U \to V$ er kontinuerlig og $F \subseteq V$ er åpen, er også

$$f^{-1}(F) := \{u \in U : f(u) \in F\}$$

åpen.

(**d**) Om $f : U \to V$ er kontinuerlig og $F \subseteq V$ er lukket, er også $f^{-1}(F)$ lukket.

3.3.5 Teorem (Ekstremalverdisetningen)**.** *La U være et endeligdimensjonalt normert vektorrom over $\mathbb{R}$, $E \subseteq U$ en lukket, begrenset mengde, og $f : E \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funksjon. Da eksisterer punkter $u_{\min}, u_{\max} \in E$ slik at*

$$f(u_{\min}) = \min_{u\in E} f(u) \qquad \textit{og} \qquad f(u_{\max}) = \max_{u\in E} f(u).$$

Bevis. Du så beviset for ekstremalverdisetningen for $U = \mathbb{R}$ i *MAT1100* og for $U = \mathbb{R}^n$ i *MAT1110*. Vi utsetter beviset for generelle vektorrom til Seksjon 3.4. ■

3.3.6 Teorem. *La $T : U \to V$ være en lineær avbildning mellom normerte vektorrom U og V. Da er følgende ekvivalent:*

(i) T er kontinuerlig

(ii) *T er kontinuerlig i* 0

(iii) *det finnes et tall $c \geqslant 0$ slik at*

$$\|Tu\|_V \leqslant c\|u\|_U \qquad \forall\, u \in U \tag{3.3.2}$$

(iv) *det finnes et tall $c \geqslant 0$ slik at*

$$\|Tu\|_V \leqslant c \qquad \forall\, u \in U \text{ med } \|u\|_U = 1. \tag{3.3.3}$$

3.3.7 Bemerkning. En lineær avbildning som oppfyller (3.3.2) kalles en *lineær avbildning*. Merk at "begrenset" her brukes på en annen måte enn det du lærte i *MAT1100*, altså at funksjonsverdiene ikke kan bli vilkårlig store. □

Bevis for Teorem 3.3.6. Implikasjonen *(i)* ⇒ *(ii)* følger direkte av definisjonen. Vi beviser implikasjonene *(ii)* ⇒ *(iii)* ⇒ *(iv)* ⇒ *(i)*.

(ii)* ⇒ *(iii) Om vi lar $u = 0$ og $\varepsilon = 1$ i definisjonen av kontinuitet, finner vi at det finnes en $\delta > 0$ slik at $\|T0 - Tv\|_V < 1$ når $\|0 - v\|_U < \delta$, det vil si $\|Tv\|_V < 1$ når $\|v\|_U < \delta$. Definer nå $c := 2/\delta$, og la $u \in U$ være vilkårlig. Da har vektoren $v := \frac{\delta}{2\|u\|}u$ norm mindre enn δ, så $\|Tv\|_V < 1$. Men da er

$$\|Tu\|_V = \left\| T\underbrace{\left(\tfrac{2\|u\|}{\delta}v\right)}_{=u} \right\| = \frac{2\|u\|_U}{\delta}\underbrace{\|Tv\|_V}_{<1} < c\|u\|_U.$$

(iii)* ⇒ *(iv) Følger direkte.

(iv)* ⇒ *(i) La $u \in U$ være vilkårlig, og la $\varepsilon > 0$. Om $v \in U$ er slik at $\|u - v\|_U < \delta$ for en $\delta > 0$, er da

$$\begin{aligned}\|T(u) - T(v)\|_V = \|T(u - v)\|_V &= \|u - v\|_U \left\| T\underbrace{\left(\tfrac{u-v}{\|u-v\|_U}\right)}_{\text{norm}=1} \right\|_V \\ &\leqslant c\|u - v\|_U < c\delta.\end{aligned}$$

Om vi velger $\delta := \varepsilon/c$, vil da $\|T(u) - T(v)\|_V < \varepsilon$. ■

3.4 Ekvivalens mellom normer

3.4.1 Definisjon. La U være et vektorrom over enten $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og la $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$ være to normer på U. Vi sier at de to normene er *ekvivalente* dersom det eksisterer tall $c_1, c_2 > 0$ slik at

$$\|u\|_1 \leqslant c_1\|u\|_2 \qquad \text{og} \qquad \|u\|_2 \leqslant c_2\|u\|_1 \qquad \forall\, u \in U. \tag{3.4.1}$$

3.4.2 Eksempel. Normene $\|\cdot\|_{\ell^1}$ og $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ på $\mathbb{R}^n$ er ekvivalente. Merk først at for enhver $j = 1, \dots, n$ er

$$|(u)_j| \leqslant \|u\|_{\ell^1} \qquad \text{og} \qquad |(u)_j| \leqslant \|u\|_{\ell^\infty}$$

(oppgave til leseren). For enhver $u \in \mathbb{R}^n$ er dermed

$$\|u\|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^n \underbrace{|(u)_j|}_{\leqslant \|u\|_{\ell^\infty}} \leqslant \sum_{j=1}^n \|u\|_{\ell^\infty} = n\|u\|_{\ell^\infty}.$$

Motsatt er

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \max_{j=1,\dots,n} \underbrace{|(u)_j|}_{\leqslant \|u\|_{\ell^1}} \leqslant \max\big(\|u\|_{\ell^1}, \dots, \|u\|_{\ell^1}\big) = \|u\|_{\ell^1}.$$

Vi skal snart se at ikke bare disse to normene, men *alle* normer på $\mathbb{R}^n$, er ekvivalente. □

3.4.3 Oppgave. Vi betrakter normene $\|\cdot\|_{\ell^1}$ og $\|\cdot\|_{\ell^2}$ på $\mathbb{R}^2$.

(**a**) Vis at

$$\|u\|_{\ell^1} \leqslant 2\|u\|_{\ell^2} \qquad \text{og} \qquad \|u\|_{\ell^2} \leqslant \|u\|_{\ell^1}$$

for alle $u \in \mathbb{R}^2$.

(**b**) Vettakollen er en topp nord for Blindern. Etter en løpetur fra foten av Vettakollen til toppen, viser GPS-klokken din at du har løpt 1100 meter i *horisontal* retning, og steget 145 meter i *vertikal* retning. (Stien opp er veldig ujevn, men den går aldri nedover.) Forklar hvorfor den faktiske løpeavstanden din ligger et sted mellom 1100 og $1100 + 145 = 1245$ meter.

3.4.4 Oppgave. La U være et vektorrom med normer $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ og $\|\cdot\|_3$. Bevis at

(i) enhver norm er ekvivalent med seg selv

(ii) hvis $\|\cdot\|_1$ er ekvivalent med $\|\cdot\|_2$, er også $\|\cdot\|_2$ ekvivalent med $\|\cdot\|_1$

(iii) hvis $\|\cdot\|_1$ er ekvivalent med $\|\cdot\|_2$ og $\|\cdot\|_2$ er ekvivalent med $\|\cdot\|_3$, er også $\|\cdot\|_1$ ekvivalent med $\|\cdot\|_3$.

(Dermed er normekvivalens en *ekvivalensrelasjon*.)

3.4.5 Oppgave. La U være et vektorrom med to ekvivalente normer $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_2$.

(**a**) Vis at en følge konvergerer med hensyn på den ene normen hvis og bare hvis den konvergerer med hensyn på den andre, og grensene er det samme.

(**b**) La $B_r(u)$ betegne åpne kuler med hensyn på normen $\|\cdot\|_1$, og $B'_r(u)$ med hensyn på normen $\|\cdot\|_2$. Vis at

$$B_r(u) \subseteq B'_{rc_2}(u) \qquad \text{og} \qquad B'_r(u) \subseteq B_{rc_1}(u),$$

der c_1 og c_2 er konstantene i (3.4.1).

(**c**) Vis at en delmengde $E \subseteq U$ er åpen/lukket/begrenset med hensyn på den ene normen hvis og bare hvis den er åpen/lukket/begrenset med hensyn på den andre.

3.4.6 Lemma. *La $\big(U, \|\cdot\|_U\big)$ være et normert vektorrom over $\mathbb{K}$. La $u_1, \dots, u_n \in U$ og definer $S : \mathbb{K}^n \to U$ ved $Sx := \sum_{j=1}^n x_j u_j$. Da finnes konstanter $c_1, c_2 \geqslant 0$ slik at*

$$c_1\|x\|_{\ell^2} \leqslant \|Sx\|_U \leqslant c_2\|x\|_{\ell^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}^n. \tag{3.4.2}$$

Hvis $(u_1, \dots, u_n)$ er lineært uavhengig, er $c_1, c_2 > 0$.

Bevis. Definer enhetssfæren i $\mathbb{K}^n$ som $E := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_{\ell^2} = 1\}$. Definer funksjonen $f : E \to \mathbb{R}$ som $f(x) := \|Sx\|_U$. Vi påstår at f er kontinuerlig. Merk først at

$|x_j| \leqslant \|x\|_{\ell^2}$ for alle komponenter x_j av x. Om $x, y \in \Omega$, er

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \big|\|Sx\|_U - \|Sy\|_U\big| \overset{3.1.5}{\leqslant} \|Sx - Sy\|_U \\
&= \big\|\textstyle\sum_{j=1}^n x_j u_j - \sum_{j=1}^n y_j u_j\big\|_U = \big\|\sum_{j=1}^n (x_j - y_j) u_j\big\|_U \\
&\overset{\text{(trekantulikheten)}}{\leqslant} \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j - y_j|}_{\leqslant \|x-y\|_{\ell^2}} \|u_j\|_U \leqslant L\|x - y\|_{\ell^2},
\end{aligned}$$

der $L := \sum_{j=1}^n \|u_j\|_U$. Altså er f Lipschitz-kontinuerlig (se Oppgave 3.3.2), så den er kontinuerlig. Av ekstremalverdisetningen i $\mathbb{R}^n$ (som du lærte i *MAT1110*) finnes punkter y og z i E der f antar sitt minimum og maksimum. Definer

$$c_1 := f(y), \qquad c_2 := f(z).$$

Hvis $c_1 = 0$ er

$$0 = f(y) = \|Sy\|_U = \big\|\textstyle\sum_{j=1}^n y_j u_j\big\|_U,$$

så $\sum_{j=1}^n y_j u_j = 0$. Dersom $(u_1, \dots, u_n)$ er lineært uavhengig må da $y_1 = \cdots = y_n = 0$, men dette er umulig siden $\|y\|_{\ell^2} = 1$. Altså må $c_1 > 0$ (og dermed også $c_2 > 0$, siden $c_2 \geqslant c_1$) når $(u_1, \dots, u_n)$ er lineært uavhengig.

Om $x = 0$ er (3.4.2) sant uansett hva c_1, c_2 er, så vi konsentrerer oss om ikke-null $x \in \mathbb{K}^n$. Da er $\frac{x}{\|x\|_{\ell^2}} \in E$, så

$$\|Sx\|_U = \Big\|S\big(\tfrac{x}{\|x\|_{\ell^2}}\big)\Big\|_U \|x\|_{\ell^2} = f\big(\tfrac{x}{\|x\|_{\ell^2}}\big)\|x\|_{\ell^2} \begin{cases} \geqslant f(y)\|x\|_{\ell^2} = c_1\|x\|_{\ell^2} \\ \leqslant f(z)\|x\|_{\ell^2} = c_2\|x\|_{\ell^2}. \end{cases}$$

Dermed er (3.4.2) bevist. ∎

3.4.7 Teorem. *La U være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Da er alle normer på U ekvivalente.*

Bevis. Om U er det trivielle vektorrommet, er nullfunksjonen den eneste normen på U, så utsagnet er tomt. Vi kan derfor anta at U er ikke-trivielt.

La $\|\cdot\|$ være en vilkårlig norm på U. Vi skal konstruere en ny norm $\|\cdot\|_2$ på U og vise at $\|\cdot\|$ og $\|\cdot\|_2$ er ekvivalente. Siden normen $\|\cdot\|$ er vilkårlig, er alle normer ekvivalent med $\|\cdot\|_2$, og dermed også med hverandre (se Oppgave 3.4.4).

La $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ være en basis for U, og la $[u]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{K}^n$ være basisrepresentasjonen av en $u \in U$ (se Teorem 1.4.5). Av Teorem 2.5.1 er avbildningen $u \mapsto [u]_{\mathcal{B}}$ en isomorfi, og dens inverse er avbildningen $Sx := \sum_{j=1}^n x_j u_j$ — med andre ord er $S^{-1}u = [u]_{\mathcal{B}}$. Definer

$$\|u\|_2 := \big\|[u]_{\mathcal{B}}\big\|_{\ell^2} \qquad \text{for } u \in U, \tag{$*$}$$

som ifølge Oppgave 3.1.4 er en norm på U. Av Lemma 3.4.6 finnes $c_1, c_2 > 0$ slik at

$$c_1\|x\|_{\ell^2} \leqslant \|Sx\| \leqslant c_2\|x\|_{\ell^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}^n.$$

Sett $x = S^{-1}u = [u]_{\mathcal{B}}$ for en $u \in U$; da er

$$c_1\big\|[u]_{\mathcal{B}}\big\|_{\ell^2} \leqslant \|u\| \leqslant c_2\big\|[u]_{\mathcal{B}}\big\|_{\ell^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}^n.$$

Bruker vi $(*)$ og stokker om, får vi

$$\|u\| \leqslant \tilde{c}_1\|u\|_2 \qquad \text{og} \qquad \|u\|_2 \leqslant \tilde{c}_2\|u\| \qquad \forall\, u \in U$$

der $\tilde{c}_1 := c_2$ og $\tilde{c}_2 := 1/c_1$. ∎

3.4.8 Teorem. *La $T: U \to V$ være en lineær avbildning mellom normerte vektorrom U og V, der U er endeligdimensjonal. Da er T kontinuerlig.*

Bevis. Som i forrige teorem er utsagnet trivielt når U er det trivielle vektorrommet, så vi kan anta at U er ikke-trivielt. Vi skal vise at punkt *(iii)* i Teorem 3.3.6 holder. La $\mathbb{K}$ være kroppen tilhørende U og V. La $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ være en basis for U, og definer $v_j := Tu_j$ for $j = 1, \dots, n$. La $S_1: \mathbb{K}^n \to U$ og $S_2: \mathbb{K}^n \to V$ være funksjonene

$$S_1 x := \sum_{j=1}^n x_j u_j \qquad \text{og} \qquad S_2 x := \sum_{j=1}^n x_j v_j.$$

Av Lemma 3.4.6 finnes da $c_1, c_2 > 0$ og $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \geqslant 0$ slik at

$$c_1\|x\|_{\ell^2} \leqslant \|S_1 x\|_U \leqslant c_2\|x\|_{\ell^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}^n, \tag{$*$}$$

$$\tilde{c}_1\|x\|_{\ell^2} \leqslant \|S_2 x\|_V \leqslant \tilde{c}_2\|x\|_{\ell^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{K}^n. \tag{$**$}$$

La $u \in U$ være vilkårlig og la $x := S_1^{-1}u$, slik at $u = S_1 x$. Da er

$$\begin{aligned}\|Tu\|_V &= \|T(S_1x)\|_V = \big\|T\big(\textstyle\sum_{j=1}^n x_j u_j\big)\big\|_V = \big\|\textstyle\sum_{j=1}^n x_j \underbrace{Tu_j}_{=v_j}\big\|_V \\ &= \big\|S_2 x\big\|_V \overset{(**)}{\leqslant} \tilde{c}_2\|x\|_{\ell^2} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{\tilde{c}_2}{c_1}\|S_1 x\|_U = \frac{\tilde{c}_2}{c_1}\|u\|_U.\end{aligned}$$

Altså oppfyller T punkt *(iii)* i Teorem 3.3.6. ■

Bevis for ekstremalverdisetningen (Teorem 3.3.5). La $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ være en basis for U og la $g: \mathbb{R}^n \to U$ være gitt ved $g(x) := \sum_{j=1}^n (x)_j u_j$. Da er g en isomorfi, og $g^{-1}(u) = [u]_{\mathscr{B}}$ for alle $u \in U$. Siden U er endeligdimensjonal, følger det av Teorem 3.4.8 at g er kontinuerlig. Spesielt er mengden

$$F := g^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \in E\}$$

lukket (av Oppgave 3.3.4 (d)). Siden g^{-1} er kontinuerlig og lineær, finnes en $c > 0$ slik at $\|g^{-1}(u)\|_{\ell^2} \leqslant c\|u\|_U$ for alle $u \in E$ (Teorem 3.3.6). Dermed er

$$\sup_{x \in F} \|x\|_{\ell^2} = \sup_{u \in E} \|g^{-1}(u)\|_{\ell^2} \leqslant c \sup_{u \in E} \|u\|_U < \infty,$$

siden E er begrenset. Dermed er også F begrenset.

La $h: F \to \mathbb{R}$ være gitt ved $h := f \circ g$, som er kontinuerlig (se Oppgave 3.3.4 (a)). Siden h er definert på en lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^n$, sier ekstremalverdisetningen på $\mathbb{R}^n$ at det finnes $x_{\min}, x_{\max} \in F$ slik at

$$h(x_{\min}) = \min_{x \in F} h(x) \qquad \text{og} \qquad h(x_{\max}) = \max_{x \in F} h(x).$$

Om $u_{\min} := g(x_{\min})$ og $u_{\max} := g(x_{\max})$, er dette ekvivalent med utsagnet i teoremet. ■

3.5 Matrisenormer

3.5.1 *Operatornormen til lineær avbildning*

3.5.1 Definisjon. La U og V være normerte vektorrom og $T \in \mathscr{L}(U,V)$. *Operatornormen til T* er tallet

$$\|T\|_{\mathscr{L}(U,V)} := \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{\substack{u\in U\\ \|u\|=1}} \|Tu\|_V. \tag{3.5.1}$$

Når det ikke kan lede til misforståelser skriver vi $\|T\|_{\mathscr{L}}$ istedenfor $\|T\|_{\mathscr{L}(U,V)}$.

3.5.2 Oppgave. Vis at de to supremumene i (3.5.1) er like.

3.5.3 Proposisjon. *La U, V, W være normerte vektorrom og $T \in \mathscr{L}(U,V)$.*

(i) T er kontinuerlig hvis og bare hvis $\|T\|_{\mathscr{L}} < \infty$.

(ii) Hvis T er kontinuerlig, er

$$\|Tu\|_V \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}}\|u\|_U \qquad \forall\ u \in U, \tag{3.5.2}$$

og $c := \|T\|_{\mathscr{L}}$ er det minste tallet slik at (3.3.2) *(og* (3.3.3)*) er sant.*

(iii) Hvis $T \in \mathscr{L}(U,V)$ og $S \in \mathscr{L}(V,W)$ er kontinuerlig, er

$$\|ST\|_{\mathscr{L}(U,W)} \leqslant \|S\|_{\mathscr{L}(V,W)}\|T\|_{\mathscr{L}(U,V)}.$$

Bevis. Oppgave til leseren. Bruk Teorem 3.3.6. ■

Vi så i Proposisjon 2.1.4 at $\mathscr{L}(U,V)$ er et vektorrom. Vi skal nå se at $\|\cdot\|$ er en norm på $\mathscr{L}(U,V)$, så lenge $\dim U < \infty$.

3.5.4 Proposisjon. *La U og V være normerte vektorrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og anta at U er endeligdimensjonalt. Da er $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ en norm på vektorrommet $\mathscr{L}(U,V)$.*

Bevis. Om U er det trivielle vektorrommet, er $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ nullfunksjonen, så utsagnet er automatisk sant. Vi antar derfor at U er ikke-trivielt. Av definisjonen er det klart at $\|T\|_{\mathscr{L}}$ enten er et ikke-negativt reelt tall, eller ∞. Av Teorem 3.4.8 er alle $T \in \mathscr{L}(U,V)$ kontinuerlige, og av Proposisjon 3.5.3 *(i)* er dermed $\|T\|_{\mathscr{L}} < \infty$ for alle $T \in \mathscr{L}(U,V)$.

Om $T \in \mathscr{L}(U,V)$ er slik at $\|T\|_{\mathscr{L}} = 0$, ser vi av (3.5.2) at $\|Tu\|_V = 0$ for alle $u \in U$, det vil si $Tu = 0_V$ for alle $u \in U$, det vil si $T = 0_{\mathscr{L}}$. Om $\alpha \in \mathbb{K}$, er

$$\|\alpha T\|_{\mathscr{L}} = \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|\alpha Tu\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{|\alpha|\|Tu\|_V}{\|u\|_U} = |\alpha| \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} = |\alpha|\|T\|_{\mathscr{L}}.$$

Om $S, T \in \mathscr{L}(U,V)$, er

$$\begin{aligned}\|S+T\|_{\mathscr{L}} &= \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|(S+T)u\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|Su+Tu\|_V}{\|u\|_U} \leqslant \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|Su\|_V+\|Tu\|_V}{\|u\|_U}\\ &\leqslant \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|Su\|_V}{\|u\|_U} + \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} = \|S\|_{\mathscr{L}} + \|T\|_{\mathscr{L}}.\end{aligned}$$

■

3.5.2 Operatornormen på matriser

3.5.5 Definisjon. La $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og la $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da er *operatornormen av A* tallet

$$\|A\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_{\ell^2}}{\|x\|_{\ell^2}} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\|_{\ell^2}.$$

Som for lineære avbildninger, skriver vi ofte bare $\|A\|_{\mathscr{L}}$ istedenfor $\|A\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$.

3.5.6 Teorem. *La $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ og la $m, n \in \mathbb{N}$.*

(i) $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ *er en norm på $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

(ii) Alle normer på $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ er ekvivalente.

(iii) Om $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ og $x \in \mathbb{K}^n$, er

$$\|Ax\|_{\ell^2} \leqslant \|A\|_{\mathscr{L}} \|x\|_{\ell^2},$$

og $c := \|A\|_{\mathscr{L}}$ er det minste tallet som er slik at $\|Ax\|_{\ell^2} \leqslant c\|x\|_{\ell^2}$ for alle x.

(iv) Om $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ og $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, er

$$\|AB\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|A\|_{\mathscr{L}} \|B\|_{\mathscr{L}}.$$

(v) Om $A \in M_n(\mathbb{K})$ er inverterbar, er

$$\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}} \geqslant \frac{1}{\|A\|_{\mathscr{L}}}.$$

Bevis.

(i) Om vi lar $T_A(x) := Ax$, operatoren tilhørende A, ser vi at $\|A\|_{\mathscr{L}} = \|T_A\|_{\mathscr{L}}$. Alle normegenskapene følger nå fra at operatornormen $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ er en norm (Proposisjon 3.5.4) og at avbildningen $A \mapsto T_A$ er en isomorfi (Teorem 2.5.7).

(ii) Vektorrommet $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ har dimensjon mn (se Oppgave 1.8.2), og er derfor endeligdimensjonalt. Av Teorem 3.4.7 er dermed alle normer på $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ekvivalente.

(iii) Dette er en omformulering av Proposisjon 3.5.3 *(ii)*.

(iv) Dette er en omformulering av Proposisjon 3.5.3 *(iii)*.

(v) Dette følger av

$$1 = \|I_n\|_{\mathscr{L}} = \|AA^{-1}\|_{\mathscr{L}} \overset{(iv)}{\leqslant} \|A\|_{\mathscr{L}} \|A^{-1}\|_{\mathscr{L}}.$$ ■

3.5.7 Oppgave. For $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definerer vi *maksimumsnormen*

$$\|A\|_\infty := \max_{i,j} |(A)_{ij}|.$$

Vis at $\|\cdot\|_\infty$ er en norm på $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

3.5.8 Oppgave. En *diagonalmatrise* er en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ som har ikke-null elementer kun langs diagonalen: $(A)_{ij} = 0$ for alle $i \neq j$. Vis at

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \max_i |(A)_{ii}|.$$

3.6 Moteksempler i uendeligdimensjonale rom

De fleste viktige resultatene i dette kapittelet gjelder kun for endeligdimensjonale vektorrom. I denne seksjonen tar vi med noen moteksempler som viser at resultatene er usanne for uendeligdimensjonale vektorrom. Denne seksjonen er ikke pensum i *MAT1125*.

3.6.1 Eksempel (Moteksempel til ekstremalverdisetningen)**.** Her er et moteksempel til ekstremalverdisetningen (Teorem 3.3.5) når U er uendeligdimensjonalt.

La $U := C^0([0,1],\mathbb{R})$ være utstyrt med supremumsnormen $\|f\|_{\sup} := \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$ (se Eksempel 3.1.2 (c)). La $E \subseteq U$ være delmengden

$$E := \bigl\{f \in U : \|f\|_{\sup} \leqslant 1 \text{ og } f(0) = 0,\ f(1) = 1\bigr\}.$$

Da er E begrenset, per definisjon, og den er lukket, for om $f_1, f_2, \dots \in E$ konvergerer mot $f \in U$, er også $\|f\|_{\sup} \leqslant 1$, og

$$|f(0)| = |f(0) - \underbrace{f_k(0)}_{=0}| \leqslant \|f - f_k\|_{\sup} \to 0$$

når $k \to \infty$, så $f(0) = 0$. På samme måte er

$$|f(1) - 1| = |f(1) - \underbrace{f_k(1)}_{=1}| \leqslant \|f - f_k\|_{\sup} \to 0,$$

så $f(1) - 1 = 0$, det vil si $f(1) = 1$. Altså ligger f i E, så E er lukket.

Vi konstruerer nå en kontinuerlig funksjon $F\colon E \to \mathbb{R}$ som ikke har et minimums- eller maksimumspunkt i E. Definer

$$F(f) := \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Da er F veldefinert, for når f er kontinuerlig, er også $|f|$ kontinuerlig, og alle kontinuerlige funksjoner er Riemann-integrerbare. Videre er F selv kontinuerlig — til og med Lipschitz-kontinuerlig — for om $f, g \in E$, er

$$\begin{aligned}|F(f) - F(g)| &= \left|\int_0^1 |f(t)| - |g(t)|\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \bigl||f(t)| - |g(t)|\bigr|\,dt \\ &\overset{\text{invers trekantulikhet}}{\leqslant} \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 \underbrace{\sup_{s\in[0,1]} |f(s) - g(s)|}_{=\|f-g\|_{\sup}}\,dt = \|f - g\|_{\sup}.\end{aligned}$$

Funksjonen F er aldri negativ, og kan heller aldri være lik 0, for om $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 0$, må nødvendigvis $f(t) = 0$ for alle $t \in [0,1]$, men $f(1) = 1$ for alle $f \in E$, en motsigelse. Likevel kan vi komme vilkårlig nærme funksjonsverdien 0, for om $f_k(t) := t^k$ for $k \in \mathbb{N}$, er $f_k \in E$ for alle $k \in \mathbb{N}$, og

$$F(f_k) = \int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1},$$

som kan være vilkårlig nærme 0 for store nok $k \in \mathbb{N}$. Vi konkluderer med at

$$\inf_{f \in E} F(f) = 0,$$

men at det ikke eksisterer en $f \in E$ slik at $F(f) = 0$.

Et lignende argument viser at $\sup_{f \in E} F(f) = 1$, men at det ikke eksisterer en $f \in E$ slik at $F(f) = 1$. □

3.6.2 Eksempel (Et annet moteksempel til ekstremalverdisetningen). Her er et annet moteksempel; vi overlater detaljene til leseren. La $U := \ell^\infty(\mathbb{R})$ være utstyrt med normen $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$, og definer

$$E := \big\{u \in U : \|u\|_{\ell^\infty} \leqslant 1 \text{ og } \lim_{k\to\infty}(u)_k \text{ eksisterer og er lik } 1\big\}.$$

Definer

$$F(u) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(u)_k|}{2^k}.$$

Da er E lukket og begrenset, og $F : E \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Funksjonen F tar verdier vilkårlig nærme 0, men er strengt positiv over hele E. Med andre ord er $\inf_{u \in E} F(u) = 0$, men det eksisterer ingen $u \in E$ slik at $F(u) = 0$. □

3.6.3 Eksempel (Moteksempel til ekvivalens av alle normer). La

$$U := \ell^1(\mathbb{R}) = \big\{(a_k)_{k=1}^\infty : \textstyle\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty\big\}$$

(se Oppgave 1.1.5 (k)) og la $\|\cdot\|_{\ell^p}$ være ℓ^p-normen fra Eksempel 3.1.2 (e). Da er både $\|\cdot\|_{\ell^1}$ og $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ normer på U. La $N \in \mathbb{N}$ være vilkårlig og definer

$$b := \big(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N \text{ ganger}}, 0, 0, \ldots\big).$$

Da er $b \in U$ og $\|b\|_{\ell^1} = N$, mens $\|b\|_{\ell^\infty} = 1$. Om det finnes en $c > 0$ slik at $\|a\|_{\ell^1} \leqslant c\|a\|_{\ell^\infty}$ for alle $a \in U$, må derfor $c \geqslant N$. Men N var vilkårlig, som motsier at $c \geqslant N$. Altså er ikke de to normene ekvivalente på U. □

3.6.4 Eksempel (Moteksempel til kontinuitet av alle lineære avbildninger). Vi lar $\ell^p(\mathbb{R})$ være det normerte vektorrommet av følger med endelig ℓ^p-norm (se Eksempel 3.1.2 (e)). La U være vektorrommet $\ell^1(\mathbb{R})$ utstyrt med ℓ^∞-normen, og la V være vektorrommet $\ell^1(\mathbb{R})$ utstyrt med ℓ^1-normen. La $T : U \to V$ være den lineære avbildningen $T(a) = a$. Fra Teorem 3.3.6 vet vi at T er kontinuerlig hvis og bare hvis det eksisterer en $c > 0$ slik at $\|T(a)\|_V \leqslant c\|a\|_U$ for alle $a \in U$. Dette er det samme som at

$$\|a\|_{\ell^1} \leqslant c\|a\|_{\ell^\infty} \qquad \forall\, a \in \ell^1(\mathbb{R}).$$

Men fra Eksempel 3.6.3 vet vi at ingen slik c eksisterer. Altså er T diskontinuerlig. □

4 INDREPRODUKTROM

Du har tidligere lært om *prikkproduktet* av vektorer $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

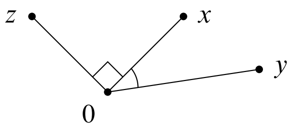
eller for komplekse n-tupler,

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

(der $\overline{y_k}$ er den komplekskonjugerte av y_k). Prikkproduktet lar oss studere *geometri* i $\mathbb{R}^n$ ved å koble sammen lengden på vektorer og vinkelen mellom vektorene: Om for eksempel x og y er vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, og α er vinkelen mellom vektorene, har vi identiteten

$$x \cdot y = \frac{\cos\alpha}{\|x\|_{\ell^2}\|y\|_{\ell^2}}$$

(der $\|\cdot\|_{\ell^2}$ er den euklidske normen).



$$x \cdot x = \|x\|^2$$
$$0 < x \cdot y < \|x\|\|y\|$$
$$x \cdot z = 0$$

Figur 4.1: Sammenheng mellom vektorer, vinkler, lengder og prikkprodukter.

I dette kapittelet skal vi generalisere prikkproduktet til vilkårlige vektorrom med såkalte *indreprodukter*. Som vi skal se, er indreprodukter et enormt kraftig verktøy i studien av vektorrom.

4.1 Indreprodukter

4.1.1 Definisjon. La U være et vektorrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Et *indreprodukt* på U er en funksjon $\langle\cdot,\cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{K}$ slik at for alle $u, v, w \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$ er

(i) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$, og $\langle u, u\rangle = 0$ kun dersom $u = 0$

(ii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

(iii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$

(iv) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ (den komplekskonjugerte av $\langle v, u\rangle$).

Et vektorrom som er utstyrt med et indreprodukt kalles et *indreproduktrom*.

4.1.2 Oppgave. Bevis følgende:

(**a**) Indreproduktet er additivt i andre argument: $\langle u, v + w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(**b**) Indreproduktet er konjugert-homogen i andre argument: $\langle u, \alpha v\rangle =$

$\overline{\alpha}\langle u, v\rangle$.

(**c**) Dersom $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, er indreproduktet symmetrisk: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

4.1.3 Oppgave. La $u \in U$ være slik at $\langle u, v\rangle = 0$ for alle $v \in U$. Vis at $u = 0$. Er det samme sant dersom $\langle v, u\rangle = 0$ for alle $v \in U$?

Hint: Prøv med $v = u$.

4.1.4 Definisjon. La U være et indreproduktrom. Vi sier at $u, v \in U$ er *ortogonale*, og skriver $u \perp v$, dersom $\langle u, v\rangle = 0$.

4.1.5 Oppgave. Vi lar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Vis at de følgende er indreprodukter.

(**a**) *Det kanoniske indreproduktet i $\mathbb{K}^n$* er prikkproduktet

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{K}^n} := x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

(**b**) La $A \in M_n(\mathbb{K})$ være en selvadjungert matrise (det vil si $(A)_{jk} = \overline{(A)_{kj}}$ for alle $j, k = 1, \ldots, n$) som er positiv definitt (det vil si $x \cdot (A\overline{x}) \geqslant 0$ for alle $x \in \mathbb{K}^n$, med "$= 0$" kun når $x = 0$). Da er

$$\langle x, y\rangle_A := x \cdot (A\overline{y}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j A_{jk} \overline{y_k}$$

et indreprodukt på $\mathbb{K}^n$.

(**c**) La $\ell^2(\mathbb{K}) := \left\{(a_1, a_2, \ldots) : \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty\right\}$ (se Eksempel 3.1.2). Vi definerer *ℓ^2-indreproduktet* som

$$\langle a, b\rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

(**d**) For $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$ (se Oppgave 1.1.5) definerer vi L^2-indreproduktet

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

(Vi kommer til å bruke L^2-indreproduktet mye i teorien om Fourier-rekker, i Kapittel 6.)

4.2 Normen indusert av et indreprodukt

4.2.1 Definisjon. La U være et vektorrom med indreprodukt $\langle\cdot, \cdot\rangle$. *Normen indusert av indreproduktet* er funksjonen $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ for $u \in U$.

4.2.2 Oppgave. Vis at L^2-normen $\|f\|_{L^2} := \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ (se Eksempel 3.1.2 (d)) er normen indusert av L^2-indreproduktet $\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ (se Oppgave 4.1.5 (d)).

4.2.3 Proposisjon. *Normen indusert av et indreprodukt er en norm.*

Før vi beviser proposisjonen, viser vi følgende veldig nyttige ulikhet:

4.2.4 Teorem (Cauchy–Schwarz-ulikheten)**.** *La $\|\cdot\|$ være normen indusert av et indreprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Da er*

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\| \qquad \forall\, u, v \in U.$$

Det er likhet i uttrykket ovenfor hvis og bare hvis u og v er parallelle (se Oppgave 1.3.6).

Bevis. Dersom u eller v er lik 0, er begge sider lik 0, og det er ingenting å vise. Anta derfor at både u og v er ulik 0. Vi får da

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \left\|u - \tfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\|^2 &= \left\langle u - \tfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v, u - \tfrac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \frac{\overline{\langle u, v\rangle}}{\|v\|^2}\langle u, v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\langle v, u\rangle + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^4}\langle v, v\rangle \\
&= \|u\|^2 - 2\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \\
&= \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2},
\end{aligned}$$

og stokker vi om på siste uttrykk får vi

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leqslant \|u\|^2\|v\|^2.$$

Tar vi kvadratrøtter på begge sider får vi den ønskede ulikheten.

Det er likhet i utregningen ovenfor hvis og bare hvis $u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v = 0$, det vil si $u = \beta v$, der $\beta := \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$. Men da er også u og v parallelle. Motsatt, om u og v er parallelle, er $u = \beta v$ for en $\beta \in \mathbb{K}$. Da er $u - \beta v = 0$, og tar vi indreproduktet med v får vi

$$0 = \langle u - \beta v, v\rangle = \langle u, v\rangle - \beta\langle v, v\rangle,$$

og løser vi for β får vi $\beta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$, som altså er ekvivalent med at det er likhet i utregningen ovenfor. ■

Bevis for Proposisjon 4.2.3. Vi må bevise betingelsene i Definisjon 3.1.1, men overlater Betingelse *(i)* og *(ii)* til leseren. For å vise Betingelse *(iii)* lar vi $u, v \in U$ og får

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle &= \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2 \\
&\leqslant \|u\|^2 + \|u\|\|v\| + \|v\|\|u\| + \|v\|^2 \\
&= \left(\|u\| + \|v\|\right)^2.
\end{aligned}$$

Tar vi kvadratrøtter på begge sider, får vi trekantulikheten. ■

4.2.5 Teorem (Pythagoras' setning)**.** *Dersom $u \perp v$, er*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Bevis. Siden $u \perp v$ får vi

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, u\rangle}_{=0} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

■

4.3 Ortogonal og ortonormal liste

4.3.1 *Definisjoner*

4.3.1 Definisjon. La U være et indreproduktrom. En liste $(u_1, \dots, u_n)$ av vektorer i U er *ortogonal* dersom ingen av vektorene er lik 0, og om $\langle u_j, u_k\rangle = 0$ for alle $j \neq k$. Vi sier at listen er *ortonormal* dersom den er ortogonal og om $\langle u_k, u_k\rangle = 1$ for alle k. En *ortogonal/ortonormal basis* er en basis som er ortogonal/ortonormal.

4.3.2 Oppgave. Vi betrakter $\mathbb{R}^2$ med standardindreproduktet. Vis at listene

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$$

er ortonormale. Tegn vektorene i hver av listene og forklar hvordan man kan se at de to listene er ortonormale.

4.3.3 Oppgave. Vis at en ortogonal liste $(u_1, \dots, u_n)$ automatisk er lineært uavhengig.

4.3.4 Bemerkning. Dersom $(u_1, \dots, u_n)$ er en ortogonal liste kan vi enkelt gjøre den orto*normal* ved å erstatte den med de *normaliserte* vektorene

$$v_k = \frac{1}{\|u_k\|} u_k \qquad \forall\, k = 1, \dots, n$$

der $\|\cdot\|$ er den induserte normen. □

4.3.5 Oppgave. Det viser seg at Legendre-polynomene (se Seksjon 1.5.4) utgjør en ortogonal liste for $C([-1, 1], \mathbb{R})$ med hensyn på L^2-indreproduktet (se Oppgave 4.1.5 (d)). Vis dette for de tre første polynomene (p_0, p_1, p_2). (Du finner uttrykk for disse i Oppgave 1.5.7.)

4.3.2 *Basisrepresentasjoner i ortonormale basiser*

4.3.6 Proposisjon. *La U være et indreproduktrom med en ortonormal basis $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$. For enhver $u \in U$ er da*

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, \qquad \text{der } \alpha_j = \langle u, u_j\rangle\ \forall\, j = 1, \dots, n. \tag{4.3.1}$$

Med andre ord er $[u]_{\mathcal{B}} = \big(\langle u, u_i\rangle\big)_{i=1,\dots,n}$.

Bevis. Siden $(u_1, \dots, u_n)$ er en basis, finnes skalarer $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ slik at

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j. \tag{$*$}$$

Tar vi indreproduktet mellom $(*)$ og u_k, får vi

$$\langle u, u_k \rangle = \left\langle \textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, u_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{=\delta_{jk}} = \alpha_k,$$

der vi har brukt linearitet i første argument og ortonormalitet. ■

4.3.7 Oppgave. La U være et indreproduktrom med en *ortogonal* basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Finn et uttrykk for u med hensyn på $\mathscr{B}$.

4.3.8 Teorem. *La U og V være indreproduktrom med ortonormale basiser $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ og $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_m)$, og la $T \in \mathscr{L}(U, V)$. Da er*

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \big(\langle Tu_j, v_i \rangle\big)_{ij}.$$

Bevis. Av Proposisjon 4.3.6 er $[u]_{\mathscr{B}} = \big(\langle u, u_j \rangle\big)_{j=1}^{n}$ og $[Tu]_{\mathscr{C}} = \big(\langle Tu, v_i \rangle\big)_{i=1}^{m}$. Setter vi inn (4.3.1) i sistnevnte identitet, får vi

$$\begin{aligned} [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}} = [Tu]_{\mathscr{C}} &= \Big(\big\langle T\big(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle u_j\big), v_i \big\rangle\Big)_{i=1}^{m} \\ &= \Big(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle \langle Tu_j, v_i \rangle\Big)_{i=1}^{m} = A[u]_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

der $A := \big(\langle Tu_j, v_i \rangle\big)_{ij}$. ■

4.3.9 Korollar. *La U være et indreproduktrom med to ortonormale basiser $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ og $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_n)$. Da kan basisskiftematrisen fra $\mathscr{B}$ til $\mathscr{C}$ skrives som*

$$[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \big(\langle u_j, v_i \rangle\big)_{ij}.$$

Bevis. Oppgave til leseren. ■

4.3.3 Indreprodukter og normer i ortonormale basiser

4.3.10 Lemma. *La U være et indreproduktrom med ortonormal basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Da er*

$$\langle u, v \rangle = [u]_{\mathscr{B}} \cdot [v]_{\mathscr{B}} = \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i \rangle \overline{\langle v, u_i \rangle} \qquad \forall\, u, v \in U. \tag{4.3.2}$$

Bevis. La $u, v \in U$. Av Proposisjon 4.3.6 er

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u, u_j \rangle u_j \qquad \text{og} \qquad v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, u_k \rangle u_k.$$

Dermed er

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \textstyle\sum_{j=1}^n \langle u, u_j\rangle u_j, \sum_{k=1}^n \langle v, u_k\rangle u_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle u, u_j\rangle \overline{\langle v, u_k\rangle} \underbrace{\langle u_j, u_k\rangle}_{=\delta_{jk}}$$

$$= \sum_{j=1}^n \langle u, u_j\rangle \overline{\langle v, u_j\rangle} = [u]_{\mathscr{B}} \cdot [v]_{\mathscr{B}}. \qquad \blacksquare$$

4.3.11 Teorem (Parsevals identitet)**.** *La U være et indreproduktrom med en ortonormal basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Da er*

$$\|u\|_U = \left\| [u]_{\mathscr{B}} \right\|_{\ell^2} = \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n |\langle u, u_k\rangle|^2} \qquad \forall\, u \in U,$$

der $\|\cdot\|_U$ er normen indusert av indreproduktet.

Bevis. $\boxed{\text{Oppgave til leseren.}}$ Bruk Lemma 4.3.10. ■

For uendeligdimensjonale indreproduktrom finnes en direkte generalisering av Parsevals identitet, men den krever en del tyngre maskineri som du først lærer i *MAT2400*. I Seksjon 4.5 skal vi bevise Bessels ulikhet, en delvis generalisering av Parseval.

4.3.12 Oppgave. Under de samme antagelsene som i Teorem 4.3.8, vis at

$$\|T\|_{\mathscr{L}(U,V)} = \left\| [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \right\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}.$$

4.4 Ortogonalisering

4.4.1 Teorem (Gram–Schmidt-ortogonalisering)**.** *La U være et indreproduktrom og la $(u_1, \dots, u_n)$ være en lineært uavhengig liste av vektorer i U. Definer*

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1,$$

$$v_k = \frac{1}{\|v_k'\|} v_k', \qquad \text{der } v_k' = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_k, v_j\rangle v_j \qquad \forall\, k = 2, \dots, n$$

(der $\|\cdot\|$ er den induserte normen). Da er $(v_1, \dots, v_n)$ en ortonormal liste med samme spenn som $(u_1, \dots, u_n)$.

Bevis. Vi bruker induksjon. Listen $(u_1, \dots, u_n)$ er lineært uavhengig, så u_1 er ulik 0. Dermed er v_1 veldefinert og har lengde 1, så (v_1) er ortonormal. Siden v_1 er parallell med u_1, har listen (v_1) samme spenn som (u_1).

Anta så at $(v_1, \dots, v_k)$ (der $1 \leqslant k < n$) er lineært uavhengig og har samme spenn som $(u_1, \dots, u_k)$. Siden $(u_1, \dots, u_{k+1})$ er lineært uavhengig, er

$$u_{k+1} \notin \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k),$$

så vektoren $v_{k+1}' := u_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle u_{k+1}, v_j\rangle v_j$ er ulik 0. For alle $\ell \leqslant k$ er

$$\langle v_{k+1}', v_\ell\rangle = \left\langle u_{k+1} - \textstyle\sum_{j=1}^k \langle u_{k+1}, v_j\rangle v_j, v_\ell \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle u_{k+1}, v_\ell \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle u_{k+1}, v_j \rangle \underbrace{\langle v_j, v_\ell \rangle}_{=\delta_{j\ell}} \\
&= \langle u_{k+1}, v_\ell \rangle - \langle u_{k+1}, v_\ell \rangle = 0,
\end{aligned}$$

så $v'_{k+1} \perp v_\ell$. Siden v_{k+1} er parallell med v'_{k+1} og har lengde 1, kan vi konkludere at $(v_1, \dots, v_{k+1})$ er ortonormal. ■

4.4.2 Oppgave. Utfør Gram–Schmidt-ortogonalisering på følgende lister av vektorer. Sjekk at listen du ender opp med er en ortonormal basis.

(**a**) $U = \mathbb{R}^2$ med prikkproduktet og listen $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(**b**) $U = \mathbb{R}^2$ med prikkproduktet og listen $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.4.3 Korollar. *Ethvert endeligdimensjonalt indreproduktrom har en ortonormal basis.*

Bevis. Oppgave til leseren. ■

4.4.4 Oppgave. Finn en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ (med prikkproduktet som indreprodukt) som inneholder vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vi skal komme tilbake til Gram–Schmidt-ortogonalisering i Seksjon 4.11.2.

4.5 Projeksjon og ortogonalkomplement

4.5.1 Definisjon. La U være et vektorrom. En *projeksjon* er en operator $P \in \mathcal{L}(U)$ som tilfredsstiller $P^2 = P$.

Vi kan tenke på en projeksjon P som å kaste en skygge ned på bildet $\operatorname{im}(P)$. Et punkt $u \in U$ kaster en skygge i punktet Pu. Punkter som allerede ligger i $\operatorname{im}(P)$ kaster bare skygge på seg selv, så for et punkt $Pu \in \operatorname{im}(P)$ vil $P(Pu) = P^2u = Pu$.

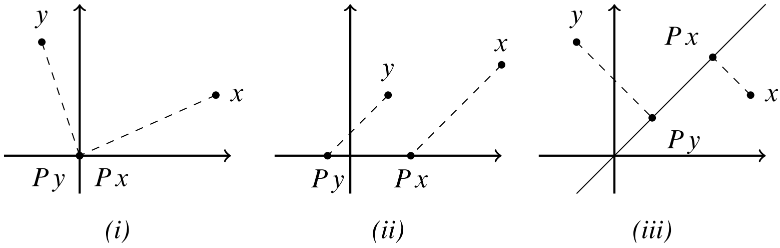
4.5.2 Oppgave.

(**a**) For $x = (x_1, x_2)$ definerer vi

$$P_1x := (x_1 - x_2, 0), \qquad P_2x := \left(\tfrac{x_1+x_2}{2}, \tfrac{x_1+x_2}{2}\right), \qquad P_3x := (0, 0).$$

Vis at P_1, P_2 og P_3 er projeksjoner på $\mathbb{R}^2$.

(**b**) Hvilken av følgende figurer svarer projeksjonene i forrige oppgave til?



(**c**) Hvorfor kaller vi projeksjoner for “projeksjoner”?

4.5.3 Definisjon. La U være et indreproduktrom med underrom V. Da er *ortogonal-komplementet til V* mengden

$$V^{\perp} := \big\{u \in U : \langle u, v\rangle = 0 \text{ for alle } v \in V\big\}.$$

Med andre ord: $V^{\perp}$ er mengden av alle vektorer i U som står ortogonalt på alle vektorer i V.

4.5.4 Proposisjon. *La V være et underrom av U.*

(i) $V^{\perp}$ *er et underrom av* U

(ii) $V \cap V^{\perp} = \{0\}$

(iii) $\{0\}^{\perp} = U$

(iv) $U^{\perp} = \{0\}$.

Bevis. Oppgave til leseren. ■

4.5.5 Teorem. *La U være et indreproduktrom med et endeligdimensjonalt underrom V. Vi kan da dekomponere enhver $u \in U$ som*

$$u = v + w \qquad \text{for unike } v \in V \text{ og } w \in V^{\perp}.$$

Med andre ord: $U = V \oplus V^{\perp}$. Avbildningen $P : u \mapsto v$ er en projeksjon, og om $(v_1, \dots, v_n)$ er en ortonormal basis for V kan vi skrive

$$Pu = \sum_{j=1}^{n} \langle u, v_j\rangle v_j \qquad \forall\, u \in U. \tag{4.5.1}$$

4.5.6 Definisjon. Projeksjonen P i Teorem 4.5.5 kalles *ortogonalprojeksjonen på V*, og skrives ofte proj_V.

Bevis for Teorem 4.5.5. Vi observerer først at funksjonen P definert i (4.5.1) er en veldefinert lineær avbildning fra U til V. Dersom $u \in V$, er (4.5.1) bare representasjonen av u i basisen $(v_1, \dots, v_n)$ (se Proposisjon 4.3.6), så $Pu = u$. Altså er $P^2 = P$, så P er en projeksjon.

Av Proposisjon 4.5.4 er både V og $V^{\perp}$ underrom av U, og $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, så av Teorem 2.8.1 kan vi skrive alle $u \in V + V^{\perp}$ som $u = v + w$ for unike $v \in V$ og $w \in V^{\perp}$. Det gjenstår derfor å vise at $V + V^{\perp} = U$.

La $u \in U$ være vilkårlig. Om vi lar $w := u - Pu$ får vi $u = Pu + w$, og for enhver $v \in V$ er

$$\langle w, v\rangle = \langle u - Pu, v\rangle = \langle u, v\rangle - \big\langle \textstyle\sum_{j=1}^{n} \langle u, v_j\rangle v_j, v\big\rangle = \langle u, v\rangle - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle u, v_j\rangle \langle v_j, v\rangle$$

$$= \langle u, v\rangle - \left\langle u, \textstyle\sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j\right\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle = 0$$

(der vi har brukt Proposisjon 4.3.6 to ganger). Altså er $w \in V^{\perp}$. Vi har dermed vist at $V + V^{\perp} = U$. ■

4.5.7 Proposisjon. *La V være et endeligdimensjonalt underrom av U.*

(i) $(V^{\perp})^{\perp} = V$

(ii) $\dim V^{\perp} = \dim U - \dim V$

(iii) $V^{\perp} = \{0\}$ *hvis og bare hvis* $V = U$.

Bevis. **(i)** Om $u \in V$, er $\langle u, v\rangle = 0$ for alle $v \in V^{\perp}$. Dermed er $u \in (V^{\perp})^{\perp}$, så vi har vist at $V \subseteq (V^{\perp})^{\perp}$.

Motsatt lar vi $u \in (V^{\perp})^{\perp}$; vi vil vise at $u \in V$. Av Teorem 4.5.5 kan vi skrive $u = v + w$ for unike $v \in V$ og $w \in V^{\perp}$. Vi har $\langle u, w\rangle = \langle w, u\rangle = 0$ (siden $w \in V^{\perp}$ og $u \in (V^{\perp})^{\perp}$) og $\langle v, w\rangle = 0$ (siden $v \in V$ og $w \in V^{\perp}$). Dermed er

$$0 = \langle u, w\rangle = \langle v + w, w\rangle = \underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w, w\rangle}_{=\|w\|^2} = \|w\|^2.$$

Altså er $w = 0$, så $u = v \in V$. Vi har dermed vist at også $(V^{\perp})^{\perp} \subseteq V$.

(ii) Oppgave til leseren. Bruk dimensjonssatsen på ortogonalprojeksjonen proj_V.

(iii) Vi har allerede vist at $U^{\perp} = \{0\}$ i Proposisjon 4.5.4 *(iv)*. Anta motsatt at V er endeligdimensjonal og at $V^{\perp} = \{0\}$. Av *(ii)* er da $0 = \dim V^{\perp} = \dim U - \dim V$, så $\dim U = \dim V$. Siden V er endeligdimensjonal, følger det av Proposisjon 1.4.11 at $U = V$. ■

Med ortogonalprojeksjonen kan vi bevise følgende (delvise) generalisering av Parsevals identitet (Teorem 4.3.11) til uendeligdimensjonale rom.

4.5.8 Teorem (Bessels ulikhet)**.** *La U være et indreproduktrom og la $(e_1, e_2, \dots)$ være en ortonormal liste av vektorer i U. Da er*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, e_k\rangle|^2 \leqslant \|u\|^2 \qquad \forall\, u \in U. \tag{4.5.2}$$

Bevis. La $U_n := \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n)$ for en $n \in \mathbb{N}$. Av Teorem 4.5.5 kan vi skrive $u = u_n + v_n$ for $u_n = \mathrm{proj}_{U_n} u = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle e_k \in U_n$ og én eller annen $v_n \in U_n^{\perp}$. Av Pythagoras' setning (Teorem 4.2.5) er $\|u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|v_n\|^2$, og av Parsevals identitet (Teorem 4.3.11) er $\|u_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k\rangle|^2$. Dermed er

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle u, e_k\rangle|^2 = \|u\|^2 - \|v_n\|^2 \leqslant \|u\|^2.$$

Dette gjelder for enhver $n \in \mathbb{N}$, så ved å la $n \to \infty$ får vi (4.5.2). ■

Vi kan også bruke ortogonalprojeksjon i *minimeringsproblemer*:

4.5.9 Proposisjon. *La U være et indreproduktrom med et endeligdimensjonalt underrom V, la $u \in U$ og la $u_V := \operatorname{proj}_V u$ være ortogonalprojeksjonen av u på V. Da er*

$$\|u - u_V\| \leqslant \|u - v\| \qquad \forall\, v \in V,$$

og det er likhet i uttrykket ovenfor hvis og bare hvis $v = u_V$.

Bevis. Skriv $u = u_V + w$ for en $w \in V^\perp$. La $v \in V$ være vilkårlig. Siden $u - v = (u_V - v) + (u - u_V)$, der første ledd ligger i V og andre ledd i $V^\perp$, kan vi bruke Pythagoras' setning (4.2.5) og få

$$\|u - v\|^2 = \|u_V - v\|^2 + \|u - u_V\|^2.$$

Dette uttrykket er aldri mindre enn $\|u - u_V\|^2$, og er lik $\|u - u_V\|^2$ kun dersom $v = u_V$. ∎

4.5.10 Oppgave. La $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ være funksjonen $f(t) = \cos(\pi t)$. Vi skal finne andregradspolynomet p som ligger nærmest mulig f, og som dermed gir den beste mulige approksimasjonen av f. Vi skal måle avstanden mellom f og p med L^2-normen,

$$\|f - p\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} \left|f(t) - p(t)\right|^2 dt\right)^{1/2},$$

som er normen tilhørende L^2-indreproduktet (se Oppgave 4.2.2).

(**a**) Forklar hvorfor det finnes et unikt polynom $p \in \mathscr{P}_2$ som er slik at

$$\|f - p\|_{L^2} \leqslant \|f - q\|_{L^2} \qquad \forall\, q \in \mathscr{P}_2.$$

(**b**) Forklar hvorfor vi kan uttrykke dette polynomet som

$$p = \sum_{k=0}^{2} \frac{\langle f, p_k\rangle_{L^2}}{\langle p_k, p_k\rangle_{L^2}} p_k$$

der $p_0, \ldots, p_2$ er de tre første Legendre-polynomene (se Oppgave 4.3.5).

(**c**) Finn et uttrykk for p, enten ved å regne indreprodukter for hånd eller med et verktøy som Wolfram Alpha. Tegn en graf av p og f.

4.6 Riesz' representasjonsteorem

Følgende teorem har en uendeligdimensjonal variant, men den krever en del maskineri du først lærer i *MAT2400*. Vi viser derfor bare den endeligdimensjonale varianten.

4.6.1 Teorem (Riesz' representasjonsteorem)**.** *La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la $T \in U'$. Da finnes en unik $u \in U$ slik at*

$$Tv = \langle v, u\rangle \qquad \forall\, v \in U. \tag{4.6.1}$$

Bevis. Av Korollar 4.4.3 finnes en ortonormal basis $(v_1, \ldots, v_n)$ for U. Definer nå

$$u := \sum_{j=1}^{n} \overline{Tv_j}\, v_j.$$

Da er

$$\langle v,u\rangle = \left\langle v, \textstyle\sum_{j=1}^n \overline{Tv_j}v_j\right\rangle = \sum_{j=1}^n Tv_j\langle v,v_j\rangle = T\left(\sum_{j=1}^n \langle v,v_j\rangle v_j\right) = Tv,$$

der vi i siste steg har brukt Proposisjon 4.3.6. Dersom både u og u' oppfyller (4.6.1), er $\langle v,u-u'\rangle = 0$ for alle $v \in U$. Av Oppgave 4.1.3 må da $u-u' = 0$, så representasjonen er unik. ■

4.7 Den adjungerte

Om $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ er en reell matrise, er dens *transponerte* den nye matrisen $A^\mathsf{T} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ med komponenter $(A^\mathsf{T})_{ij} = (A)_{ji}$. Om $x \in \mathbb{R}^n$ og $y \in \mathbb{R}^m$ har vi da

$$(Ax)\cdot y = (Ax)^\mathsf{T} y = x^\mathsf{T}A^\mathsf{T}y = x\cdot(A^\mathsf{T}y),$$

eller skrevet med indreproduktnotasjon,

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\mathsf{T}y\rangle. \tag{4.7.1}$$

Som vi skal se, er den riktige generaliseringen av transponering til *komplekse* matriser den *konjugerttransponerte* $A^* = \overline{A}^\mathsf{T}$.

Vi skal nå generalisere transponering til en vilkårlig operator. Utgangspunktet er egenskapen (4.7.1).

4.7.1 Teorem. *La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom over en kropp $\mathbb{K}$, og la $T \in \mathscr{L}(U,V)$. Da finnes en unik lineær avbildning $T^* \in \mathscr{L}(V,U)$ (den* adjungerte til T*) slik at*

$$\langle Tu, v\rangle_V = \langle u, T^*v\rangle_U \qquad \forall\, u\in U,\ v\in V. \tag{4.7.2}$$

(Noen bruker termene hermiteadjungert *eller* hermitekonjugert*, og de engelske termene* Hermitian adjoint/Hermitian conjugate *eller bare* Hermitian*.)*

4.7.2 Bemerkning. Teorem 4.7.1 er faktisk (nesten) sant også for uendeligdimensjonale indreproduktrom, men å bevise det krever en del maskineri som er utenfor pensum i dette emnet. Den generelle versjonen av teoremet sier at om T er en *kontinuerlig* lineær avbildning mellom indreproduktrom U og V, finnes en kontinuerlig lineær avbildning T^* fra V til U slik at (4.7.2) holder. □

Bevis for Teorem 4.7.1. Fiksér en vektor $v \in V$ og definer $S_v : U \to \mathbb{K}$ som

$$S_v u := \langle Tu, v\rangle_V \qquad \text{for } u \in U.$$

Da er $S_v \in U'$ (hvorfor det?), så av Riesz' representasjonsteorem (Teorem 4.6.1) finnes en unik $u_v \in U$ slik at $S_v u = \langle u, u_v\rangle_U$ for alle $u \in U$. Definer $T^*v := u_v$. Vi får da

$$\langle u, T^*v\rangle_U = \langle u, u_v\rangle_U = S_v u = \langle Tu, v\rangle_V \qquad \forall\, u\in U.$$

Altså er (4.7.2) sann for akkurat denne vektoren v. Vi definerer på denne måten T^*v for alle $v \in V$ og får en veldefinert lineær avbildning fra V til U (hvorfor det?). ■

4.7.3 Oppgave. Vis at også

$$\langle v, Tu\rangle_V = \langle T^* v, u\rangle_U \qquad \forall\, u \in U,\ v \in V.$$

4.7.4 Oppgave. For tall $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$ lar vi $U := C_0^\infty([a,b],\mathbb{R})$, der

$$C_0^\infty([a,b],\mathbb{R}) := \left\{ f \in C_0^0([a,b],\mathbb{R}) : \tfrac{d^n f}{dt^n} \in C_0^0([a,b],\mathbb{R})\ \forall\, n \in \mathbb{N} \right\},$$

og der

$$C_0^0([a,b],\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) : f(a) = f(b) = 0 \right\}.$$

Vi utstyrer dette rommet med L^2-indreproduktet

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

La $T\colon U \to U$ være gitt ved $Tf := \frac{df}{dt}$.

(**a**) Forklar hvorfor T er en veldefinert lineær operator.

(**b**) Selv om U ikke er endeligdimensjonal, slik som Teorem 4.7.1 krever, har likevel T en adjungert. Finn denne.

4.7.5 Proposisjon. *La U og V være indreproduktrom med ortonormale basiser $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$, og la $T \in \mathscr{L}(U,V)$. Da er*

$$[T^*]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \left([T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\right)^*$$

(der uttrykket på høyre side er den konjugerttransponerte av $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$).

Bevis. La $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ og $\mathscr{C} = (v_1, \ldots, v_m)$ være basisvektorene. Av Teorem 4.3.8 er

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \left(\langle Tu_j, v_i\rangle\right)_{ij} \qquad \text{og} \qquad [T^*]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \left(\langle T^* v_j, u_i\rangle\right)_{ij}.$$

Dermed er

$$[T^*]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \left(\langle v_j, Tu_i\rangle\right)_{ij} = \left(\overline{\langle Tu_i, v_j\rangle}\right)_{ij} = \left(\overline{\langle Tu_j, v_i\rangle}\right)_{ij}^{\mathsf{T}} = \left(\overline{[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}}\right)^{\mathsf{T}} = \left([T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\right)^*.$$

∎

4.7.6 Proposisjon. *La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom og la $T \in \mathscr{L}(U,V)$. Da er*

(i) $\|T^*\|_{\mathscr{L}} = \|T\|_{\mathscr{L}}$

(ii) $(T^*)^* = T$

(iii) om T er bijektiv, er også T^* bijektiv, og $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

(iv) om $S \in \mathscr{L}(V,W)$ er $(ST)^* = T^*S^*$

(v) $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$

(vi) $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp$

(vii) $\dim\operatorname{im} T = \dim\operatorname{im} T^*$.

Bevis.

(i) Ved å bruke Cauchy–Schwarz' ulikhet (Teorem 4.2.4) og Proposisjon 3.5.3 *(iii)* får vi for enhver $u \in U$ at

$$\begin{aligned}\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \langle u, T^*Tu\rangle \leqslant \|u\|\|T^*Tu\| \\ \leqslant \|T^*T\|_{\mathscr{L}}\|u\|^2 \leqslant \|T^*\|_{\mathscr{L}}\|T\|_{\mathscr{L}}\|u\|^2.\end{aligned}$$

Dermed er $\|Tu\| \leqslant \sqrt{\|T^*\|_{\mathscr{L}}\|T\|_{\mathscr{L}}}\|u\|$ for alle $u \in U$, så $\|T\|_{\mathscr{L}} \leqslant \sqrt{\|T^*\|_{\mathscr{L}}\|T\|_{\mathscr{L}}}$, det vil si $\|T\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|T^*\|_{\mathscr{L}}$. Da er også $\|T^*\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|(T^*)^*\|_{\mathscr{L}} = \|T\|_{\mathscr{L}}$, så vi får likhet mellom $\|T\|_{\mathscr{L}}$ og $\|T^*\|_{\mathscr{L}}$.

(ii) Oppgave til leseren.

(iii) Om $T \in \mathscr{L}(U,V)$ er bijektiv, er $\dim U = \dim V$, av Proposisjon 2.3.5. Av Teorem 2.4.4 trenger vi da bare å vise at $\ker T^* = \{0\}$. La derfor $v \in V$ være slik at $T^*v = 0$. For alle $u \in U$ er da

$$0 = \langle T^*v, u\rangle_U = \langle v, Tu\rangle_V.$$

Sett $u = T^{-1}v$ og få $0 = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$, så $v = 0$.

(iv) Oppgave til leseren.

(v)

$$\begin{aligned} u \in \ker T^* \quad &\iff \quad \langle T^*u, v\rangle_U = 0 \ \forall\ v \in U \\ &\iff \quad \langle u, Tv\rangle_U = 0 \ \forall\ v \in U \quad \iff \quad u \in (\operatorname{im} T)^\perp. \end{aligned}$$

(vi) Oppgave til leseren. Bruk *(ii)*, *(v)* og Proposisjon 4.5.7 *(i)*.

(vii) Ved å bruke Dimensjonssatsen (Teorem 2.2.3), *(v)*, *(vi)* og Proposisjon 4.5.7 *(ii)* får vi

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{im} T &= \dim U - \dim\ker T = \dim U - \dim\big(\operatorname{im} T^*\big)^\perp \\ &= \dim U - \big(\dim U - \dim\operatorname{im} T^*\big)^\perp = \dim\operatorname{im} T^*.\end{aligned}$$

■

4.8 Normale operatorer

4.8.1 Definisjon. En operator T på et indreproduktrom U er *normal* dersom

$$TT^* = T^*T.$$

En kvadratisk matrise $A \in M_n(\mathbb{K})$ er *normal* dersom

$$AA^* = A^*A$$

(der A^* er den komplekskonjugerte av A).

4.8.2 Oppgave.

(**a**) Vis at alle kvadratiske diagonalmatriser er normale. (En diagonalmatrise er en matrise hvor alle elementer vekk fra diagonalen er lik 0.)

(**b**) Vis at alle unitære matriser er normale. (En unitær matrise er en kvadratisk matrise A slik at $A^{-1} = A^*$. Vi kommer tilbake til disse i Seksjon 4.10.)

4.8.3 Oppgave. Bevis at om T er normal, er $\|Tu\| = \|T^*u\|$ for alle $u \in U$. (Faktisk er det motsatte også sant, men det krever noe mer arbeid.)

4.8.4 Oppgave. La $U := C_0^\infty([a,b],\mathbb{R})$ og la $T \in \mathscr{L}(U)$ være gitt ved $Tf := \frac{df}{dt}$ (se Oppgave 4.7.4). Vis at T er normal.

4.8.5 Teorem. *La T være en normal operator på et indreproduktrom U over $\mathbb{K}$. Da gjelder følgende:*

(i) $\ker T = \ker T^*$

(ii) $\ker T = (\operatorname{im} T)^\perp$

(iii) $\operatorname{im} T = \operatorname{im} T^*$

(iv) $U = \ker T \oplus \operatorname{im} T$

(v) $T - \alpha\,\mathrm{id}$ *er normal for enhver* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Bevis.

(i) La $u \in \ker T$. Da er $T^*Tu = T^*0 = 0$, så

$$0 = \langle T^*Tu, u\rangle = \langle TT^*u, u\rangle = \langle T^*u, T^*u\rangle = \|T^*u\|^2.$$

Dermed er $T^*u = 0$, slik at $\ker T \subseteq \ker T^*$. På samme måte finner vi at $\ker T \supseteq \ker T^*$.

(ii) Vi har ekvivalensene

$$\begin{aligned} u \in (\operatorname{im} T)^\perp \quad &\iff \quad \langle Tv, u\rangle = 0 \ \forall\ v \in U \quad \iff \quad \langle v, T^*u\rangle = 0 \ \forall\ v \in U \\ &\iff \quad T^*u = 0 \quad \iff \quad u \in \ker T^* \quad \iff \quad u \in \ker T. \end{aligned}$$

(iii)–(v) Oppgave til leseren.

■

4.9 Selvadjungerte operatorer

4.9.1 Definisjon. En operator T på et indreproduktrom U er *selvadjungert* dersom $T^* = T$. En kvadratisk matrise $A \in M_n(\mathbb{K})$ er *selvadjungert* dersom $A^* = A$, og er *symmetrisk* dersom $A^\mathsf{T} = A$.

Merk at over kroppen $\mathbb{R}$ betyr "symmetrisk" og "selvadjungert" det samme.

4.9.2 Oppgave.

(**a**) Hvilke av følgende matriser er selvadjungerte?

$$I_3, \qquad 0_{4\times 2}, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 3i+1 \\ 1-3i & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(**b**) Vis at alle selvadjungerte operatorer er normale.

4.9.3 Lemma. *La U være et indreproduktrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og la $T \in \mathscr{L}(U)$ være selvadjungert. Da er alle egenverdier til T reelle.*

Bevis. La λ være en egenverdi med tilhørende egenvektor u. Da er

$$\begin{aligned}\lambda\|u\|^2 &= \lambda\langle u,u\rangle = \langle \lambda u,u\rangle = \langle Tu,u\rangle = \langle u,T^*u\rangle = \langle u,Tu\rangle \\ &= \langle u,\lambda u\rangle = \overline{\lambda}\langle u,u\rangle = \overline{\lambda}\|u\|^2.\end{aligned}$$

Del på $\|u\|^2$ på begge sider og få $\lambda = \overline{\lambda}$, slik at $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

4.10 Ortogonale matriser og unitære operatorer

4.10.1 Definisjon (Unitær operator)**.** La U være et indreproduktrom. En operator T på U er *unitær* dersom T er inverterbar og $T^{-1} = T^*$. En kvadratisk matrise $A \in M_n(\mathbb{K})$ er *unitær* dersom den er inverterbar og $A^{-1} = A^*$. Den er *ortogonal* dersom den er inverterbar og $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$.

Merk at for et vektorrom over kroppen $\mathbb{R}$ betyr “unitær” og “ortogonal” det samme, mens over $\mathbb{C}$ er de forskjellige.

4.10.2 Oppgave. La $A \in M_n(\mathbb{K})$. Forklar hvorfor følgende utsagn er ekvivalente.

(i) A er unitær.

(ii) Kolonnene $(a_1, \dots, a_n)$ til A er ortonormale.

4.10.3 Proposisjon. *La $T \in \mathscr{L}(U)$ være unitær.*

(i) T er normal.

(ii) T^* og T^{-1} er unitære.

(iii) For alle $u \in U$ er

$$\|Tu\| = \|T^{-1}u\| = \|T^*u\| = \|u\|.$$

(iv) T, T^* og T^{-1} har operatornorm lik 1.

(v) For alle $R \in \mathscr{L}(U,V)$ og $S \in \mathscr{L}(W,U)$ er

$$\|TS\|_{\mathscr{L}} = \|S\|_{\mathscr{L}} \qquad \text{og} \qquad \|RT\|_{\mathscr{L}} = \|R\|_{\mathscr{L}}$$

(for passende indreproduktrom V og W).

Bevis.

(i) Oppgave til leseren.

(ii) Oppgave til leseren.

(iii) Vi har

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \langle u, T^*Tu\rangle = \langle u, T^{-1}Tu\rangle = \|u\|^2.$$

De to andre identitetene er oppgaver til leseren.

(iv) Oppgave til leseren. Bruk *(iii)* og Proposisjon 4.7.6 *(i)*.

(v) Første identitet følger av at $\|TSw\|_U \overset{(iii)}{=} \|Sw\|_U$ for alle $w \in W$. For andre identitet har vi

$$\|RT\|_{\mathscr{L}} = \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|RTu\|_V}{\|u\|_U} \overset{v=Tu}{=} \sup_{\substack{v\in U\\ T^{-1}v\neq 0}} \frac{\|RT(T^{-1}v)\|_V}{\|T^{-1}v\|_U}$$
$$\overset{(iii)}{=} \sup_{\substack{v\in U\\ v\neq 0}} \frac{\|Rv\|_V}{\|v\|_U} = \|R\|_{\mathscr{L}}. \qquad \blacksquare$$

4.10.4 Oppgave. La U være et indreproduktrom med to ortonormale basiser $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ og $\mathscr{C} = (v_1, \ldots, v_n)$. Vis at basisskiftematrisen $[\mathrm{id}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$ er ortogonal.

4.10.5 Eksempel. En *rotasjonsmatrise* er en matrise som roterer vektorer i $\mathbb{R}^n$ rundt en gitt akse. I $\mathbb{R}^2$ ser rotasjonsmatriser slik ut:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Her er $\theta \in \mathbb{R}$ et gitt tall, og multiplikasjon av en vektor $x \in \mathbb{R}^2$ med A vil rotere x med vinkel θ mot klokken rundt origo, men bevare lengden. Merk at A har determinant lik 1.

Inversmatrisen til A får vi ved å rotere med en vinkel θ *med klokken*, eller med andre ord, rotere med vinkel $-\theta$ *mot klokken*. Om vi bruker identitetene $\cos(-\theta) = \cos\theta$ og $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, får vi at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(Du bør sjekke at dette faktisk er inversmatrisen til A.) Siden denne matrisen sammenfaller med den transponerte til A, konkluderer vi med at rotasjonsmatriser er ortogonale.

Det finnes også formler for rotasjonsmatriser i høyere dimensjoner. Generelt er en *rotasjonsmatrise i* $\mathbb{R}^n$ en matrise $A \in M_n(\mathbb{R})$ som er ortogonal og har determinant lik 1 (så $A^{-1} = A^\top$ og $\det A = 1$). Mengden av alle rotasjonsmatriser er den *spesielle ortogonale gruppen* og betegnes $\mathrm{SO}(n)$. Se også Oppgave 4.12.1.

$\square$

4.10.6 Eksempel. En *permutasjonsmatrise* er en kvadratisk matrise A der hvert element er enten 0 eller 1, og som er slik at hver rad og hver kolonne inneholder nøyaktig én 1. For eksempel er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alle permutasjonsmatrisene av dimensjon 2×2, mens permutasjonsmatrisene av dimensjon 3×3 er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om A er en permutasjonsmatrise, er også $A^* = A^\mathsf{T}$ en permutasjonsmatrise.

Alle permutasjonsmatriser er unitære: La $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^n$ være kolonnene i A, med komponenter $u_i = \big((u_i)_1, \ldots, (u_i)_n\big)^\mathsf{T}$. Da er

$$\big(A^* A\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (u_i)_k (u_j)_k.$$

Om $i \neq j$, vil enten $(u_i)_k = 0$ eller $(u_j)_k = 0$ for alle k, mens om $i = j$ vil $(u_i)_k = (u_j)_k = \delta_{ik}$, så summen over blir 1. Altså er A^* en venstreinvers til A. Argumentet for at A^* er en høyreinvers er nesten helt likt. $\square$

4.10.7 Oppgave.

(**a**) Hvor mange permutasjonsmatriser finnes av dimensjon $n \times n$?

(**b**) Hva skjer med en vektor $x \in \mathbb{K}^n$ når den ganges med en permutasjonsmatrise $A \in M_n(\mathbb{K})$?

(**c**) Hva skjer med en matrise B om den ganges fra venstre med en permutasjonsmatrise? Hva om den ganges fra høyre?

4.11 Triangulære matriser, LU- og QR-faktorisering

Til slutt i dette kapittelet tar vi for oss noen spesielle typer matriser, og måter å faktorisere generelle matriser i slike spesielle matriser.

4.11.1 Triangulære matriser og LU-faktorisering

4.11.1 Definisjon. En *øvre triangulær matrise* er en matrise U som er slik at $(U)_{jk} = 0$ for alle $j > k$. En *nedre triangulær matrise* er en matrise L som er slik at $(L)_{jk} = 0$ for alle $j < k$, eller med andre ord, L^T er øvre triangulær. En *triangulær matrise* er en matrise som er enten øvre eller nedre triangulær.

Du har allerede møtt på øvre triangulære matriser i *MAT1105* da du gjorde Gauss-eliminasjon. Om du skal løse det lineære systemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_2 + 3x_3 = -1, \end{cases}$$

skriver du systemet på matriseform, $Ax = b$, danner koeffisientmatrisen

$$B := \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

og utfører radoperasjoner for å få en matrise på trappeform,

$$B \sim U := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen U er en øvre triangulær matrise, siden alle elementer under diagonalen er lik 0. For å løse systemet gjør du nå *bakoversubstitusjon* på den øvre triangulære matrisen U for å ende opp med en matrise på formen

$$B \sim \begin{pmatrix} I_3 & x \end{pmatrix},$$

der kolonnevektoren x gir løsningen på systemet.

Fra *MAT1105* vet du også at alle elementære radoperasjoner kan skrives som produktet av den opprinnelige matrisen med en *elementærmatrise* R. I eksempelet over finnes det dermed elementærmatriser $R_1, \dots, R_k$ slik at

$$U = R_k \cdots R_1 B,$$

eller

$$B = (R_k \cdots R_1)^{-1} U = \underbrace{R_1^{-1} \cdots R_k^{-1}}_{=: L} U = LU.$$

Det viser seg at matrisen L er nedre triangulær!

4.11.2 Definisjon. En *LU-faktorisering* av en matrise $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ er en faktorisering på formen $A = LU$, der L er en nedre triangulær matrise og U en øvre triangulær matrise.

Siden triangulære matriser er spesielt enkle å invertere (ved hjelp av bakoversubstitusjon), er LU-faktorisering nyttig når vi skal løse lineære systemer:

4.11.3 Oppgave. La A ha LU-faktorisering $A = LU$, og betrakt systemet $Ax = b$. Vis at dersom y løser $Ly = b$ og x løser $Ux = y$, vil x også løse $Ax = b$.

Løsningsstrategien er altså å først beregne LU-faktoriseringen til A, og deretter løse de to triangulære systemene $Ly = b$ og $Ux = y$. Denne strategien er såpass effektiv at store programpakker som Matlab bruker den for å løse ligningssystemer og invertere matriser.

4.11.2 QR-faktorisering

4.11.4 Definisjon. En *QR-faktorisering* av en matrise $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ er en faktorisering på formen $A = QR$, der $Q \in M_m(\mathbb{K})$ er unitær og $R \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ er øvre triangulær.

Ved hjelp av Gram–Schmidt-ortogonalisering (Seksjon 4.4 kan man vise at enhver matrise har en QR-faktorisering. La $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ha kolonner $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. Vi antar nå for enkelhets skyld at A er kvadratisk og inverterbar, slik at $(a_1, \dots, a_n)$ er lineært uavhengig. Vi kan da utføre Gram–Schmidt-algoritmen på $(a_1, \dots, a_n)$ (Teorem 4.4.1), som vi omskriver som følger:

$$a_k = v'_k + \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, v_j \rangle v_j \qquad \forall\, k = 1, \dots, n, \tag{$*$}$$

og der $v_k = \frac{1}{\|v'_k\|} v'_k$. Tar vi indreproduktet med v_k, finner vi at

$$\langle a_k, v_k \rangle = \langle v'_k, v_k \rangle + \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, v_j \rangle \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{=0} = \langle v'_k, v_k \rangle = \|v'_k\|$$

(der vi har brukt at $v_j \perp v_k$ for $j < k$). Siden $v'_k = \|v'_k\| v_k = \langle a_k, v_k \rangle v_k$, kan vi derfor skrive $(*)$ som

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} \langle a_k, v_j \rangle v_j \qquad \forall\, k = 1, \dots, n. \tag{$**$}$$

På matriseform kan vi skrive $(**)$ som $A = QR$, der

$$Q = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad R = \begin{pmatrix} \langle a_1, v_1 \rangle & \langle a_2, v_1 \rangle & \cdots & \langle a_n, v_1 \rangle \\ & \langle a_2, v_2 \rangle & \cdots & \langle a_n, v_2 \rangle \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \langle a_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Matrisen R er opplagt øvre triangulær, og Q er unitær siden $(v_1, \dots, v_n)$ er ortonormal. Vi har dermed funnet en QR-faktorisering av A.

QR-faktoriseringer er nyttige av flere grunner. Én grunn er at både unitære og triangulære matriser er enkle å invertere, slik at om vi har en QR-faktorisering $A = QR$, og vil løse systemet $Ax = b$, kan vi løse de to enklere systemene $Qy = b$ og $Rx = y$. Denne strategien brukes blant annet av Matlab for å løse bestemte typer lineære systemer.

4.12 Flere oppgaver

4.12.1 Oppgave. I Eksempel 4.10.5 så vi at den spesielle ortogonale gruppen (eller "mengden av rotasjonsmatriser") er definert som

$$\mathrm{SO}(n) := \left\{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ er ortogonal og } \det A = 1 \right\}.$$

(**a**) Forklar hvorfor $\mathrm{SO}(n)$ ikke er et underrom av $M_n(\mathbb{R})$.

(**b**) Forklar hvorfor $\mathrm{SO}(n)$ er en *gruppe*, altså at

(i) gruppen er lukket under multiplikasjon:

$$AB \in \mathrm{SO}(n) \text{ for alle } A, B \in \mathrm{SO}(n).$$

(ii) gruppen har et identitetselement:

$$I_n \in \mathrm{SO}(n), \text{ og } AI_n = I_n A = A \text{ for alle } A \in \mathrm{SO}(n).$$

(iii) gruppeoperasjonen er assosiativ:

$$(AB)C = A(BC) \text{ for alle } A, B, C \in \mathrm{SO}(n).$$

(iv) alle gruppeelementer har en invers:

$$\text{for alle } A \in \mathrm{SO}(n) \text{ er også } A^{-1} \in \mathrm{SO}(n).$$

5 SPEKTRALTEORI

5.1 Egenpar og egenrom

5.1.1 Definisjon. La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$ og la $T \in \mathscr{L}(U)$. Et *egenpar* for T er et par (λ, u) bestående av en skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ (*egenverdien*) og en vektor $u \neq 0$ (*egenvektoren*) som tilfredsstiller

$$Tu = \lambda u. \tag{5.1.1}$$

Spekteret til T er mengden $\sigma(T)$ bestående av alle egenverdier til T.

Siden Definisjon 5.1.1 krever at egenvektorer er ulik 0, må det nødvendigvis eksistere ikke-null elementer i U. Vi antar derfor heretter at alle vektorrommene er ikke-trivielle.

5.1.2 Oppgave. La λ være en egenverdi for T.

(**a**) Vis at hvis u er en tilhørende egenvektor og $\alpha \in \mathbb{K}$ er ulik 0, så er også αu en egenvektor tilhørende λ.

(**b**) Vis at hvis u og v begge er tilhørende egenvektorer og $u + v \neq 0$, så er også $u + v$ en egenvektor.

Mengden av alle egenvektorer tilhørende λ er altså "nesten" et underrom, bortsett fra at den ikke inneholder 0.

Vi kan omformulere (5.1.1) som

$$\big(T - \lambda\,\mathrm{id}\big)u = 0.$$

Altså ligger alle egenvektorer i kjernen til $T - \lambda\,\mathrm{id}$, og motsatt, alle vektorer i kjernen til $T - \lambda\,\mathrm{id}$ — bortsett fra nullvektoren — er egenvektorer.

5.1.3 Oppgave. La T være en operator med egenverdi λ. Forklar hvorfor følgende er ekvivalente:

(i) λ er en egenverdi for T

(ii) $\ker\big(T - \lambda\,\mathrm{id}\big) \neq \{0\}$

(iii) operatoren $T - \lambda\,\mathrm{id}$ er ikke injektiv.

5.1.4 Definisjon. La $T \in \mathscr{L}(U)$ ha egenverdi λ. Det tilhørende *egenrommet* til λ er

$$E_T(\lambda) := \ker\big(T - \lambda\,\mathrm{id}\big) = \big\{u \in U : Tu = \lambda u\big\}.$$

5.1.5 Bemerkning. En vektor $u \in U$ kan være egenvektor til høyst én egenverdi (hvorfor er det slik?). Om λ og λ' er to forskjellige egenverdier, vil de tilhørende egenrommene derfor kun snitte hverandre i origo:

$$E_T(\lambda) \cap E_T(\lambda') = \{0\}.$$

Om U er et indreproduktrom og T er normal kan vi si si enda mer: Underrommene $E_T(\lambda)$ og $E_T(\lambda')$ er ortogonale! Dette vil være en konsekvens av Spektralteoremet (Seksjon 5.5). □

5.1.6 Definisjon. La T være en operator på et vektorrom U, og la λ være en egenverdi for T. Den *geometriske multiplisiteten til T* er tallet

$$\gamma_T(\lambda) := \dim\big(E_T(\lambda)\big).$$

5.1.7 Oppgave. Forklar hvorfor hver egenverdi λ har nøyaktig $\gamma_T(\lambda)$ antall tilhørende lineært uavhengige egenvektorer.

5.2 Egenverdier på endeligdimensjonale rom

5.2.1 Oppgave. La T være en operator på et endeligdimensjonalt vektorrom U. Vis at

$$T \text{ er en isomorfi} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \text{ er ikke en egenverdi for } T.$$

5.2.2 Proposisjon. *La T være en operator på et endeligdimensjonalt vektorrom U med basis $\mathscr{B}$. Da er (λ, u) et egenpar for T hvis og bare hvis $(\lambda, [u]_{\mathscr{B}})$ er et egenpar for matrisen $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$.*

Bevis. Oppgave til leseren. ■

5.2.3 Definisjon. La T være en operator på et endeligdimensjonalt vektorrom U, og la λ være en egenverdi for T. *Det karakteristiske polynomet til T* er funksjonen

$$p_T(\lambda) := \det\big(T - \lambda\,\mathrm{id}\big) \tag{5.2.1}$$

(se Seksjon 2.7).

5.2.4 Proposisjon. *La T være en operator på et endeligdimensjonalt vektorrom U over $\mathbb{K}$, og la $\lambda \in \mathbb{K}$. Da er følgende ekvivalent:*

(i) λ en egenverdi for T

(ii) λ er en rot av det karakteristiske polynomet til T. (Tallet λ er en rot *av p dersom $p(\lambda) = 0$.)*

Bevis. Oppgave til leseren. ■

5.2.5 Definisjon. La T være en operator på et endeligdimensjonalt vektorrom U over $\mathbb{K}$, og la λ være en egenverdi for T. Den *algebraiske multiplisiteten $\mu_T(\lambda)$* til λ er multiplisiteten til λ i det karakteristiske polynomet til T. (*Multiplisiteten* til en rot λ^* av et polynom p er den høyeste $k \in \mathbb{N}$ slik at $p(\lambda)/(\lambda^* - \lambda)^k$ er et polynom.)

5.2.6 Eksempel (Ulik algebraisk og geometrisk multiplisitet)**.** La $U = \mathbb{R}^2$ og $T(u) := Au$, der $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Det karakteristiske polynomet er

$$p(\lambda) = \lambda^2,$$

som kun har roten 0. Altså har T kun egenverdien 0, og dens algebraiske multiplisitet er $\mu_T(0) = 2$. Alle tilhørende egenvektorer er skalarmultipler av $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Altså er $E_T(0) = \operatorname{span}\{u\}$, så egenverdien 0 har geometrisk multiplisitet $\gamma_T(0) = 1$. □

5.2.7 Oppgave. La $\mathscr{P}_3$ være det reelle vektorrommet av reelle polynomer av grad høyst 3 (se Oppgave 1.1.5 (i)). La $T : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_3$ være den lineære avbildningen $Tp := \frac{dp}{dt}$ for $p \in \mathscr{P}_3$ (se Oppgave 2.5.10).

(**a**) Vis at $\lambda = 0$ er den eneste egenverdien til T. Finn alle egenvektorer tilhørende $\lambda = 0$.

(**b**) Finn $\gamma_T(0)$, den geometriske multiplisiteten.

5.2.1 Komplekse egenverdier

Dersom skalarkroppen til U er $\mathbb{C}$, er p et n-tegradspolynom med koeffisienter i $\mathbb{C}$, og med høyesteordens ledd $(-1)^n\lambda^n$. Av algebraens fundamentalteorem vet vi dermed at p kan faktoriseres som

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \tag{5.2.2}$$

for $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Skalar λ_j forekommer nøyaktig $\mu_T(\lambda_j)$ ganger i listen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Fra nå av kommer vi til å mene listen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ når vi snakker om “egenverdiene til T”.

5.2.2 Reelle egenverdier

Om skalarkroppen til U er $\mathbb{R}$ kan vi definere p som i (5.2.1), men om vi bruker algebraens fundamentalteorem som over, kan det hende noen av røttene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i (5.2.2) er komplekse!

5.2.8 Eksempel. La $A \in M_2(\mathbb{R})$ være en rotasjonsmatrise (se Eksempel 4.10.5),

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ved hjelp av det karakteristiske polynomet finner man følgende egenverdier:

$$\lambda_1 = \cos\theta - i\sin\theta, \qquad \lambda_2 = \cos\theta + i\sin\theta$$

(oppgave til leseren!). Med mindre θ er en multippel av π, vil egenverdiene altså være komplekse.

□

I ett viktig spesialtilfelle er vi garantert at røttene i det karakteristiske polynomet er reelle:

5.2.9 Proposisjon. *La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og la $T \in \mathscr{L}(U)$ være selvadjungert. Da er alle røttene til p_T reelle.*

Bevis. Anta først at $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Om (λ, u) er et egenpar for T, er

$$\lambda\|u\|^2 = \lambda\langle u, u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle = \langle u, Tu\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \overline{\lambda}\langle u, u\rangle = \overline{\lambda}\|u\|^2.$$

Siden $u \neq 0$ kan vi dele på $\|u\|^2$ og få $\lambda = \overline{\lambda}$.

Om $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lar vi $\mathscr{B}$ være en basis for U og lar $A := [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$. Lar vi S være den selvadjungerte operatoren $S(x) := Ax$ for $x \in \mathbb{C}^n$, har vi $p_T = p_S$, men på den annen side kan vi anvende hva vi viste for $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ for å se at røttene til p_S alle er reelle — som var det vi ønsket. ■

5.3 Diagonalisering

5.3.1 Diagonalisering av operatorer

5.3.1 Definisjon. En kvadratisk matrise $D \in M_n(\mathbb{K})$ er en *diagonalmatrise* dersom $(D)_{ij} = 0$ når $i \neq j$. For skalarer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ definerer vi den tilhørende diagonalmatrisen

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Mer generelt, for $p, q \in \mathbb{N}$ er $\operatorname{diag}_{p\times q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en $p \times q$-matrise med elementer

$$\big(\operatorname{diag}_{p\times q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big)_{j,k} = \begin{cases} \alpha_j & \text{om } j = k \leqslant n \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

5.3.2 Oppgave. La $D = \operatorname{diag}\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\big)$ være en diagonalmatrise. Vis at D er inverterbar hvis og bare hvis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \neq 0$.

Hint: Vis at om $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \neq 0$, er D inverterbar, og motsatt at om minst én av $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ er lik 0, finnes en ikke-null $x \in \mathbb{R}^n$ slik at $Dx = 0$.

5.3.3 Definisjon. La U være et n-dimensjonalt vektorrom. En operator $T \in \mathscr{L}(U)$ er *diagonaliserbar* om det finnes en basis $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ for U slik at $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}$ er en diagonalmatrise.

5.3.4 Proposisjon. *La T være en operator på et n-dimensjonalt vektorrom. Da er følgende ekvivalent:*

(i) T er diagonaliserbar

(ii) T har n lineært uavhengige egenvektorer.

Om $u_1, \ldots, u_n$ er lineært uavhengige egenvektorer med egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, og $\mathscr{B} := (u_1, \ldots, u_n)$, er da $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Bevis. I begge tilfeller er $\mathscr{B}$ en basis for U, så fra Oppgave 1.4.6 vet vi at $[u_j]_{\mathscr{B}} = e_j$ for $j = 1, \ldots, n$.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*** Om T er diagonaliserbar finnes en basis $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ slik at vi kan skrive $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)$ for skalarer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så

$$[Tu_j]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}[u_j]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)e_j = \lambda_j e_j = [\lambda_j u_j]_{\mathscr{B}}.$$

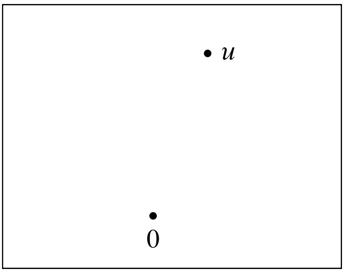
Dermed er $Tu_j = \lambda_j u_j$, så (λ_j, u_j) er et egenpar. Dette gjelder for $j = 1, \ldots, n$, og $(u_1, \ldots, u_n)$ er en basis, så vi har vist *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*** Om λ_j er egenverdien tilhørende u_j, er da

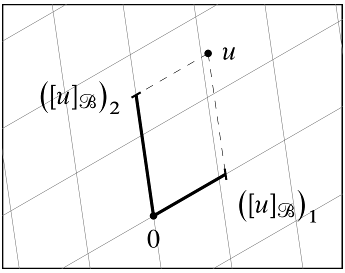
$$\begin{aligned}\big(\text{kolonne nr. } j \text{ i } [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}\big) &= [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}e_j = [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}[u_j]_{\mathscr{B}} = [Tu_j]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = [\lambda_j u_j]_{\mathscr{B}} \\ &= \lambda_j[u_j]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)e_j \\ &= \big(\text{kolonne nr. } j \text{ i } \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)\big)\end{aligned}$$

for $j = 1, \ldots, n$. Altså er $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)$, så T er diagonaliserbar.

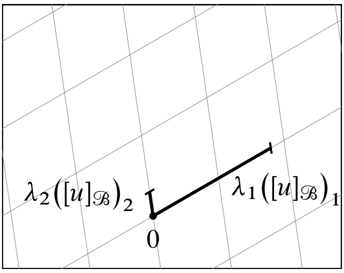
■



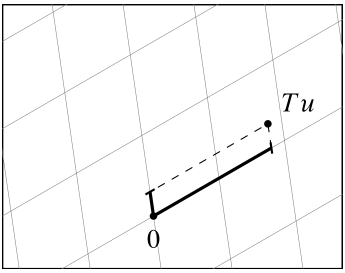
(a) En vektor u i et vektorrom.



(b) Vektoren uttrykkes i et koordinatsystem $\mathscr{B}$ bestående av egenvektorer.



(c) Koordinatkomponentene skaleres med egenverdiene.



(d) De beregnede koeffisientene gir oss funksjonsverdien Tu i det samme koordinatsystemet.

Figur 5.1: Illustrasjon av en diagonaliserbar operator T.

5.3.5 Oppgave. La T være en operator på et n-dimensjonalt vektorrom U, og anta at T har n *forskjellige* egenverdier. Vis at de tilhørende egenvektorene er lineært uavhengige. Konkluder med at T er diagonaliserbar.

Hint: Du vil få bruk for Bemerkning 5.1.5.

5.3.2 Diagonalisering av matriser

5.3.6 Definisjon. En kvadratisk matrise $A \in M_n(\mathbb{K})$ er *diagonaliserbar* dersom det eksisterer en inverterbar matrise $R \in M_n(\mathbb{K})$ og en diagonalmatrise $D \in M_n(\mathbb{K})$ slik at

$$A = RDR^{-1}. \tag{5.3.1}$$

Vi sier at faktoriseringen (5.3.1) er en *diagonalisering* av A.

5.3.7 Oppgave. Hva er sammenhengen mellom diagonaliserbarhet av en lineær operator og diagonaliserbarhet av en kvadratisk matrise?

Hint: Sammenlign definisjonene for en operator T og den tilhørende matrisen $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}$ (der $\mathscr{C}$ er standardbasisen i $\mathbb{K}^n$).

5.3.8 Proposisjon. *La $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

(i) Matrisen A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den tilhørende operatoren $T(x) := Ax$ er diagonaliserbar.

(ii) Om A er diagonaliserbar, består kolonnene i R av egenvektorene til A, og diagonalelementene i D er de tilhørende egenverdiene.

(iii) Matrisen A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer $u_1, \dots, u_n$.

Bevis.

(i) La $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen for $\mathbb{K}^n$. Fra Oppgave 2.5.6 vet vi at $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}} = A$. Operatoren $T \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ er diagonaliserbar hvis og bare hvis det eksisterer en basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ for $\mathbb{K}^n$ slik at $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Om $R := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$ (matrisen med kolonner $u_1, \dots, u_n$), er

$$A = [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}} = \underbrace{[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}}_{=R} \underbrace{[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}}_{=D} \underbrace{[\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}}_{=R^{-1}} = RDR^{-1}$$

(der vi har brukt Proposisjon 2.6.1 og 2.6.3). Altså er A diagonaliserbar.

Motsatt, om A er diagonaliserbar lar vi $u_1, \dots, u_n$ være kolonnene i R. Da er $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ en basis for $\mathbb{K}^n$, basisskiftematrisen er $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = R$, og

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}} [\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = R^{-1}AR = R^{-1}(RDR^{-1})R = D,$$

så T er diagonaliserbar.

(ii) La $u_1, \dots, u_n$ være kolonnene i R og $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ diagonalelementene i D. Siden R er inverterbar, er ingen av vektorene $u_1, \dots, u_n$ lik 0. Multipliser (5.3.1) med R fra høyre og få $AR = RD$. Kolonne k av denne ligningen er

$$Au_k = \lambda_k u_k,$$

så (λ_k, u_k) er et egenpar.

(iii) Vi så i *(ii)* at om A er diagonaliserbar, er kolonnene $u_1, \dots, u_n$ i R egenvektorer, og siden R er inverterbar, må $(u_1, \dots, u_n)$ være lineært uavhengig.

Motsatt, om egenvektorene $u_1, \dots, u_n$ er lineært uavhengige, er $R := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$ inverterbar. Som i *(ii)* har vi $AR = RD$, og ved å multiplisere med R^{-1} fra høyre får vi (5.3.1).

■

5.4 Anvendelser av diagonalisering

At en matrise $A \in M_n(\mathbb{K})$ er diagonaliserbar er svært nyttig i mange anvendelser. Årsaken viser seg å være følgende egenskap. Om $A = RDR^{-1}$ er en diagonalisering av A, er

$$A^2 = AA = RDR^{-1}RDR^{-1} = RDDR^{-1} = RD^2R^{-1}.$$

Mer generelt er

$$A^k = RD^kR^{-1} \qquad \text{for enhver } k \in \mathbb{N}. \tag{5.4.1}$$

For å beregne potenser av A, må vi altså kunne beregne potenser av diagonalmatriser. Men det er veldig enkelt:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \qquad \Rightarrow \qquad D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Det er altså svært enkelt å regne potenser av diagonaliserbare matriser.

5.4.1 Beregne inversmatriser

Selv om (5.4.1) bare gjelder for potenser $k \geqslant 1$, viser det seg at vi kan sette "$k = -1$" og slik beregne inversmatrisen A^{-1}.

La $A \in M_n(\mathbb{K})$ være diagonaliserbar, $A = RDR^{-1}$. Om A er inverterbar, vet vi av Oppgave 5.2.1 at 0 ikke er en egenverdi, så D er en diagonalmatrise med ikke-null diagonalelementer $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$. Dermed er D inverterbar med inversmatrise

$$D^{-1} = \operatorname{diag}\big(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n\big).$$

Dermed er A^{-1} lett å finne:

$$A^{-1} = \big(RDR^{-1}\big)^{-1} = \big(R^{-1}\big)^{-1} D^{-1} R^{-1} = RD^{-1}R^{-1}.$$

5.4.2 Differensligninger

5.4.1 Oppgave. La $A \in M_n(\mathbb{C})$ være diagonaliserbar og la $x \in \mathbb{C}^n$. Vis at differensligningen

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k & \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_0 = x \end{cases} \tag{5.4.2}$$

har løsningen $x_k = A^k x$ (for $k \in \mathbb{N}$).

5.4.2 Oppgave. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ og la $x \in \mathbb{R}^2$ være vilkårlig. Finn løsningen av differensligningen (5.4.2).

5.4.3 Differensialligninger

Vi ser så på *differensialligningen*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) & \text{for } t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.4.3}$$

for en matrise $A \in M_n(\mathbb{C})$ og en vektor $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Om $n = 1$ er A og x_0 bare tall, og du lærte i *Kalkulus* at (5.4.3) har løsning

$$x(t) = e^{tA}x_0. \tag{5.4.4}$$

Det viser seg at vi kan gi mening til (5.4.4) også når $n > 1$. Vi definerer først *matrise-eksponensialen*

$$\exp(B) := I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \qquad \text{for } B \in M_n(\mathbb{C}).$$

5.4.3 Teorem. *La $A \in M_n(\mathbb{C})$ og $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Da har differensialligningen* (5.4.3) *en unik løsning gitt ved*

$$x(t) = \exp(tA)x_0 \qquad \text{for } t \geqslant 0. \tag{5.4.5}$$

Om A er diagonaliserbar med diagonalisering $A = RDR^{-1}$, er

$$x(t) = R\operatorname{diag}\big(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}\big)R^{-1}x_0$$

(der $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er diagonalelementene i D).

Se Appendiks A for mer om differensialligninger og et bevis for Teorem 5.4.3.

5.5 Spektralteoremet

Som vist i Seksjon 5.4, er diagonaliserbarhet en nyttig egenskap. I denne seksjonen skal vi bevise *spektralteoremet*, som sier at alle normale operatorer er diagonaliserbare. Som korollarer finner vi at alle normale, kvadratiske matriser er diagonaliserbare, og at alle reelle, symmetriske matriser er diagonaliserbare.

5.5.1 Spektralteoremet for operatorer

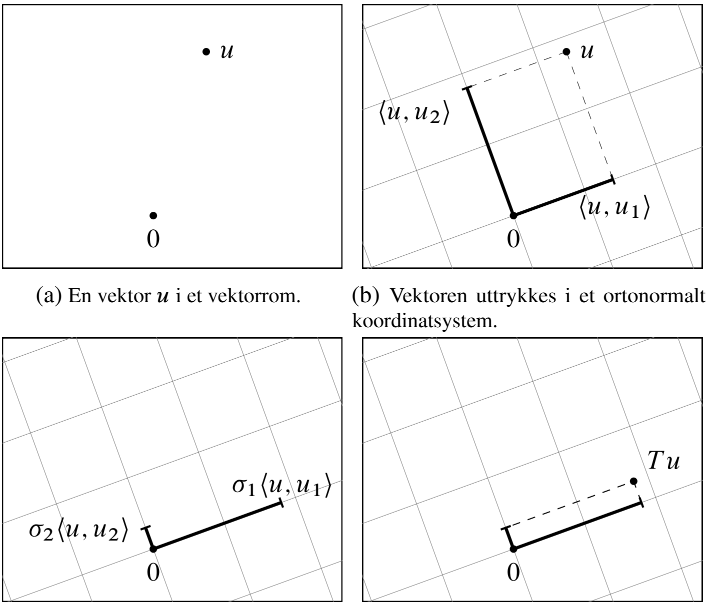
5.5.1 Lemma. *La $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og la T være en normal operator på et indreproduktrom U over $\mathbb{K}$. Om (λ, v) er et egenpar for T, er $(\overline{\lambda}, v)$ et egenpar for T^*.*

Bevis. Oppgave til leseren. Bruk Teorem 4.8.5. ■

5.5.2 Teorem (Spektralteoremet over $\mathbb{C}$)**.** *La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$ av dimensjon n, og la $T \in \mathcal{L}(U)$ være normal. Da finnes en ortonormal basis $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ for U bestående av egenvektorer for T. Med andre ord: Det finnes en ortonormal basis $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ for U slik at*

$$Tu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k \qquad \forall\, u \in U. \tag{5.5.1}$$

Uttrykket (5.5.1) *er* egendekomposisjonen *til T.*



(a) En vektor u i et vektorrom.

(b) Vektoren uttrykkes i et ortonormalt koordinatsystem.

(c) Koordinatkomponentene skaleres med singulærverdiene.

(d) De beregnede koeffisientene gir oss funksjonsverdien Tu i det samme koordinatsystemet.

Figur 5.2: Illustrasjon av egendekomposisjonen av en normal operator T.

Bevis. La (λ, u_1) være et egenpar, normalisert slik at $\|u_1\| = 1$. Definer $U_2 := \operatorname{span}(u_1)^\perp$. Vi påstår at om $w \in U_2$, er også $Tw \in U_2$. Av Lemma 5.5.1 er $(\overline{\lambda}, u_1)$ et egenpar for T^*, så

$$\langle Tw, u_1 \rangle = \langle w, T^* u_1 \rangle = \langle w, \overline{\lambda} u_1 \rangle = \lambda \langle w, u_1 \rangle = 0,$$

så $Tw \in U_2$. Vi kan dermed se på T som en selvadjungert operator på det $(n-1)$-dimensjonale rommet U_2. Vi velger på samme måte $u_2 \in U_2$ til å være en normalisert egenvektor av denne operatoren, lar $U_3 := \operatorname{span}(u_1, u_2)^\perp$, og itererer på denne måten n ganger. Dette gir en ortonormal liste $(u_1, \ldots, u_n)$ bestående av egenvektorer for T. Siden $\dim U = n$, må listen også være en basis for U.

For å se (5.5.1) skriver vi $u = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k$ og får

$$Tu = T\Big(\textstyle\sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle u_k\Big) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle T u_k = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle \lambda_k u_k. \qquad \blacksquare$$

5.5.3 Teorem (Spektralteoremet over $\mathbb{R}$)**.** *La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{R}$ av dimensjon n, og la $T \in \mathcal{L}(U)$ være selvadjungert. Da finnes en ortonormal basis $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ for U bestående av egenvektorer for T.*

Bevis. Av Proposisjon 5.2.9 har T minst én reell egenverdi λ (bare velg en av røttene til det karakteristiske polynomet) med tilhørende egenvektor u_1. Vi kan da iterere akkurat som i beviset for Teorem 5.5.2. $\blacksquare$

5.5.2 Spektralteoremet for matriser

5.5.4 Korollar (Spektralteoremet for matriser)**.** *La $A \in M_n(\mathbb{C})$ være en normal matrise. Da finnes en unitær matrise $R \in M_n(\mathbb{C})$ og en diagonalmatrise $D \in M_n(\mathbb{C})$ slik at*

$$A = RDR^*.$$

Kolonnevektorene i R er egenvektorer for A, og diagonalen i D inneholder de tilhørende egenverdiene.

5.5.5 Oppgave. Forklar hvorfor spektralteoremet for matriser kan omskrives slik:

> enhver normal matrise er diagonaliserbar, og egenvektorene kan velges til å være ortonormale.

Bevis. Operatoren $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ gitt ved $T(x) := Ax$ er normal, så av spektralteoremet finnes en ortonormal basis av egenvektorer $\mathcal{B} := (u_1, \ldots, u_n)$. Av Teorem 4.3.8 er da

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \big(\langle Tu_j, u_i \rangle\big)_{ij} = \big(\lambda_j \langle u_j, u_i \rangle\big)_{ij} = \big(\lambda_j \delta_{ij}\big)_{ij} =: D,$$

diagonalmatrisen med elementer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Av Korollar 4.3.9 er basisskiftematrisen mellom $\mathcal{B}$ og standardbasisen $\mathcal{C}$ gitt ved $[\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = R := \big(u_1 \ \cdots \ u_n\big)$, så

$$A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = RDR^{-1} = RDR^*,$$

der vi i siste steg har brukt at R er unitær, $R^* = R^{-1}$. $\blacksquare$

5.5.6 Korollar. *La $A \in M_n(\mathbb{R})$ være en symmetrisk matrise. Da finnes en ortogonal matrise $R \in M_n(\mathbb{R})$ og en diagonalmatrise $D \in M_n(\mathbb{R})$ slik at*

$$A = RDR^\mathsf{T}.$$

Kolonnevektorene i R er egenvektorer for A, og diagonalen i D inneholder de tilhørende egenverdiene.

5.6 Singulærverdidekomposisjon

Vi har sett at diagonaliserbarhet kan være en nyttig egenskap. Spektralteoremet garanterer at alle normale operatorer er diagonaliserbare, men for mer generelle lineære avbildninger kan vi ikke si det samme. Vi skal her se at enhver lineær avbildning har en *singulærverdidekomposisjon*, som på mange måter utfyller de samme rollene som en diagonalisering.

5.6.1 Operatoren T^*T

Vi utleder først noen egenskaper ved operatoren T^*T.

5.6.1 Lemma. *La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Operatoren $T^*T \in \mathcal{L}(U)$*

(i) er selvadjungert

(ii) har reelle, ikkenegative egenverdier (den er positiv semidefinit*)*

(iii) har samme kjerne som T, og samme bilde som T^*.

Bevis.

(i) $\boxed{\text{Oppgave til leseren.}}$

(ii) $\boxed{\text{Oppgave til leseren.}}$ *Hint: La (λ, u) være et egenpar og studer uttrykket $\|Tu\|^2$.*

(iii) Vi påstår først at $\ker T^*T = \ker T$. Hvis $Tu = 0$ er opplagt $T^*Tu = 0$. Motsatt, om $u \in \ker T^*T$ er

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \langle T^*Tu, u\rangle = 0,$$

så $Tu = 0$, det vil si $u \in \ker T$. Vi påstår så at $\operatorname{im} T^*T = \operatorname{im} T^*$. Av Proposisjon 4.7.6 *(vi)* er $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^\perp = (\ker T^*T)^\perp$. Siden T^*T er en normal operator er $\operatorname{im} T^* \overset{4.8.5\ (ii)}{=} (\operatorname{im} T^*T)^{\perp\perp} \overset{4.5.7\ (i)}{=} \operatorname{im} T^*T$.

∎

5.6.2 Oppgave. Bevis de samme (eller tilsvarende) egenskapene for operatoren $TT^* \in \mathcal{L}(V)$.

5.6.2 Singulærverdier

Ifølge Lemma 5.6.1 er operatoren T^*T selvadjungert (og dermed også normal), så Spektralteoremet garanterer at den har en ortonormal liste av egenverdier $(u_1, \ldots, u_n)$, med tilhørende egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da er

$$\|Tu_j\|_V^2 = \langle Tu_j, Tu_j\rangle_V = \langle T^*Tu_j, u_j\rangle_U = \lambda_j \underbrace{\langle u_j, u_j\rangle_U}_{=1} = \lambda_j.$$

Vi ser dermed at kvadratrøttene $\sqrt{\lambda_j} = \|Tu_j\|_V$ forteller oss hvor mye T "strekker" eller "krymper" hvert element i den ortonormale listen $(u_1, \ldots, u_n)$. Tallene $\sqrt{\lambda_j}$ er *singulærverdiene* til T.

5.6.3 Definisjon. La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$. *Singulærverdiene til T* er kvadratrøttene $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$ ($j = 1, \dots, n$) til egenverdiene til T^*T. *Multiplisiteten* til en singulærverdi σ_j er $\mu_{T^*T}(\lambda_j)$, multiplisiteten til λ_j.

Når vi snakker om "listen av singulærverdier til T" mener vi en liste $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (der $n = \dim U$) bestående av alle singulærverdier til T, ordnet i synkende rekkefølge ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$), og der hver singulærverdi er gjentatt $\mu_{T^*T}(\lambda_j)$ ganger.

5.6.4 Definisjon. For en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ (der $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) definerer vi *singulærverdiene til A* til å være singulærverdiene til den lineære avbildningen med matriserepresentasjon A.

5.6.5 Eksempel. Vi skal finne singulærverdiene til $A := \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være den lineære avbildningen $T(x) := Ax$. Da er

$$T^*T(x) = A^\mathsf{T} Ax = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix} x.$$

Matrisen $A^\mathsf{T} A$ har egenverdier $\lambda_1 = 360$, $\lambda_2 = 90$ og $\lambda_3 = 0$. Altså er singulærverdiene til A

$$\sigma_1 = \sqrt{360}, \quad \sigma_2 = \sqrt{90}, \quad \sigma_3 = 0.$$

Multiplisiteten til hver av singulærverdiene er 1. □

5.6.6 Oppgave. La A være matrisen fra Eksempel 5.6.5. Vis at kvadratrøttene til egenverdiene til matrisen AA^T også er $\sqrt{360}$ og $\sqrt{90}$.
(Siden AA^T er en mindre matrise enn $A^\mathsf{T} A$, er det enklere å beregne egenverdiene til førstnevnte. Vi skal snart se at disse to matrisene alltid har de samme egenverdiene, om vi ser bort fra egenverdien 0.)

5.6.7 Proposisjon. *La U og V være endeligdimensjonale indreproduktrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, og la $T \in \mathcal{L}(U, V)$.*

(i) *T er injektiv hvis og bare hvis 0 ikke er en singulærverdi.*

(ii) *Antall positive singulærverdier er lik* $\dim \operatorname{im} T$.

(iii) *Antall singulærverdier som er lik 0, er lik* $\dim \ker T$

(iv) *T er surjektiv hvis og bare hvis antall positive singulærverdier er lik* $\dim V$.

Bevis.

(i) Av Lemma 2.3.3 er T injektiv hvis og bare hvis $\ker T = \{0\}$, og av Lemma 5.6.1 *(iii)* er $\ker T = \ker T^*T$. Men $\ker T^*T = \{0\}$ hvis og bare hvis 0 ikke er en egenverdi av T^*T, som er ekvivalent med at 0 ikke er en singulærverdi av T.

(ii) Av spektralteoremet er $\dim \operatorname{im} T^*T$ lik antall ikke-null egenverdier av T^*T. Av Lemma 5.6.1 *(iii)* er $\dim \operatorname{im} T^*T = \dim \operatorname{im} T^*$, som av Proposisjon 4.7.6 *(vii)* er lik $\dim \operatorname{im} T$.

(iii) Oppgave til leseren.

(iv) Avbildningen T er surjektiv hvis og bare hvis $\operatorname{im} T = V$, som (av Proposisjon 1.4.11) er ekvivalent med $\dim \operatorname{im} T = \dim V$.

■

5.6.8 Oppgave. La U være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la $T \in \mathscr{L}(U)$ være selvadjungert. Forklar hvorfor singulærverdiene til T er lik absoluttverdien av egenverdiene til T.

5.6.3 Singulærverdidekomposisjon av lineære avbildninger

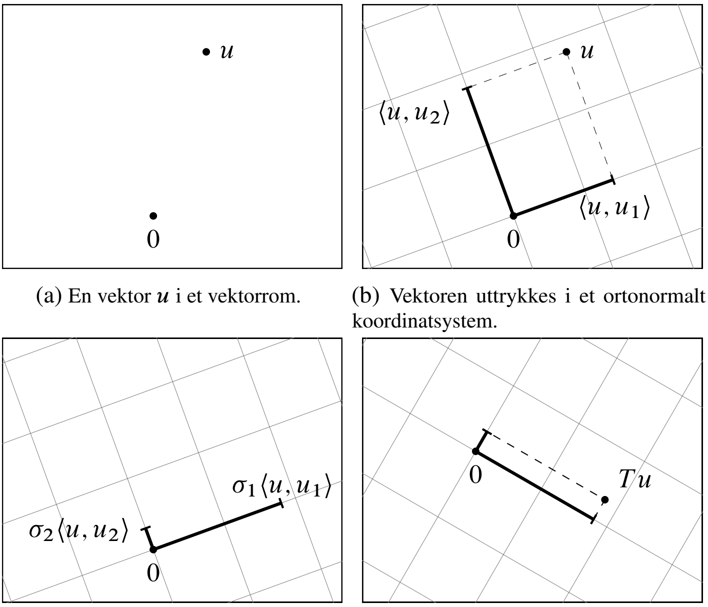
5.6.9 Teorem (Singulærverdidekomposisjon)**.** *La U og V være indreproduktrom over enten $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ med dimensjon henholdsvis n og m, og la $T \in \mathscr{L}(U, V)$. Da finnes ortonormale basiser $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ for U og $\mathscr{C} = (v_1, \ldots, v_m)$ for V slik at*

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}_{m \times n}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \tag{5.6.1}$$

eller ekvivalent,

$$Tu = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle u, u_k \rangle v_k \qquad \forall\, u \in U. \tag{5.6.2}$$

Uttrykket (5.6.2) *er* singulærverdidekomposisjonen *til T (sammenlign med* (5.5.1)*).*



(a) En vektor $\boldsymbol{u}$ i et vektorrom.

(b) Vektoren uttrykkes i et ortonormalt koordinatsystem.

(c) Koordinatkomponentene skaleres med singulærverdiene.

(d) De beregnede koeffisientene brukes i et nytt ortonormalt koordinatsystem, som gir funksjonsverdien $T\boldsymbol{u}$.

Figur 5.3: Illustrasjon av singulærverdidekomposisjonen av en lineær avbildning T.

Bevis. Om $T \equiv 0$ lar vi $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være vilkårlige ortonormale basiser. Ellers har T minst én, og høyst m, positive singulærverdier (av Proposisjon 5.6.7 *(ii)*), så la $r \leqslant n$ være slik at

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_r > 0, \qquad \text{og} \qquad \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0.$$

Av Spektralteoremet anvendt på den selvadjungerte operatoren T^*T, har U en ortonormal basis $(u_1, \ldots, u_n)$ bestående av egenvektorer, slik at

$$T^*Tu_j = \sigma_j^2 u_j \qquad \text{for } j = 1, \ldots, n.$$

Definer nå

$$v_j := \frac{1}{\sigma_j} Tu_j \qquad \text{for } j = 1, \ldots, r.$$

Da er

$$\langle v_j, v_k \rangle = \frac{1}{\sigma_j \sigma_k} \langle Tu_j, Tu_k \rangle = \frac{1}{\sigma_j \sigma_k} \langle T^*Tu_j, u_k \rangle = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j \sigma_k} \langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk},$$

så $(v_1, \ldots, v_r)$ er ortonormal. Om vi lar $(v_{r+1}, \ldots, v_m)$ være en ortonormal basis for $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r)^\perp$ (som eksisterer av Korollar 4.4.3), blir $(v_1, \ldots, v_m)$ en ortonormal basis for V.

For en vilkårlig $u \in U$ med representasjon $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$, får vi

$$Tu = \sum_{j=1}^n \alpha_j Tu_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sigma_j v_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sigma_j v_j$$

(der siste steg følger av at $\sigma_j = 0$ for $j = n+1, \ldots, m$), så

$$[Tu]_{\mathscr{C}} = \operatorname{diag}_{m \times n}\big(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\big)[u]_{\mathscr{B}},$$

som var det vi ønsket. ∎

5.6.10 Algoritme. Beviset ovenfor er *konstruktivt* — det forklarer oss hvordan vi skal finne singulærverdidekomposisjonen. Vi kan oppsummere algoritmen slik:

1. Finn T^*T.
2. Finn egenverdiene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tilhørende T^*T.
3. Beregn singulærverdiene $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$.
4. Finn en ortonormal liste $(u_1, \ldots, u_n)$ i U bestående av egenvektorer tilhørende $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Du kan gå fram slik:
   (a) Finn egenvektorer $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n$ tilhørende egenverdiene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på vanlig måte. Dersom en singulærverdi har multiplisitet 2 eller høyere (det vil si, tallet gjentas i listen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$), må du velge de tilhørende egenvektorene til å være ortogonale.
   (b) Normaliser egenvektorene, $u_j := \frac{1}{\|u_j\|} u_j$.

   (Siden T^*T er selvadjungert, vil egenvektorer tilhørende ulike egenverdier automatisk være ortogonale.)

5. Definer $v_j := \frac{1}{\sigma_j} T u_j$ for $j \leqslant r$, og la $v_{r+1}, \ldots, v_m$ være vilkårlige enhetsvektorer slik at $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_m)$ er ortonormal.

□

5.6.11 Korollar. *La U, V, T og r være som over.*

(i) $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$ *er en basis for* $\ker T$

(ii) $(v_1, \ldots, v_r)$ *er en basis for* $\operatorname{im} T$

(iii) *T har rang r*

(iv) *(σ_j^2, u_j) (for $j = 1, \ldots, n$) er egenparene til T^*T*

(v) *(σ_j^2, v_j) (for $j = 1, \ldots, m$) er egenparene til TT^**

Bevis.

(i) Lista $\mathscr{B} := (u_{r+1}, \ldots, u_n)$ er ortonormal og ligger i $\ker T^*T \overset{5.6.1\,(iii)}{=} \ker T$. Av Proposisjon 5.6.7 *(iii)* er

$$n - r = \text{antall singulærverdier som er lik } 0 = \dim \ker T,$$

så $\mathscr{B}$ utspenner hele $\ker T$.

(ii) Lista $\mathscr{C} := (v_1, \ldots, v_r)$ er ortonormal og ligger i $\operatorname{im} T$ (siden $v_j := \frac{1}{\sigma_j} T u_j$). Av Proposisjon 5.6.7 *(ii)* er

$$r = \text{antall positive singulærverdier} = \dim \operatorname{im} T,$$

så $\mathscr{C}$ utspenner hele $\operatorname{im} T$.

(iii) Oppgave til leseren.

(iv) Per konstruksjon er (σ_j^2, u_j) egenparene til T^*T.

(v) For $j = 1, \ldots, r$ er

$$TT^*v_j = \frac{1}{\sigma_j} TT^*Tu_j = \frac{1}{\sigma_j} T\big(\sigma_j^2 u_j\big) = \sigma_j^2 v_j,$$

så (σ_j^2, v_j) er egenpar til TT^* for $j = 1, \ldots, r$. For $j = r+1, \ldots, m$ er $\sigma_j = 0$, og de tilhørende vektorene v_j ligger i $(\operatorname{im} TT^*)^\perp$. Siden TT^* er normal, er $\ker TT^* = (\operatorname{im} TT^*)^\perp$, så vi finner at $v_{r+1}, \ldots, v_m \in \ker TT^*$, og derfor at

$$TT^*v_j = 0 = \sigma_j v_j \qquad \forall\, j = r+1, \ldots, m.$$

■

5.6.12 Oppgave. La $Tu = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \langle u, u_k \rangle v_k$ være en SVD av $T \in \mathscr{L}(U, V)$. Vis at T^* har SVD

$$T^*v = \sum_{k=1}^{r} \overline{\sigma_k} \langle v, v_k \rangle u_k \qquad \forall\, v \in V.$$

5.6.4 *Singulærverdidekomposisjon av matriser*

I hele denne seksjonen lar vi enten $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.6.13 Definisjon. *Singulærverdiene* til en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ er kvadratrøttene til egenverdiene til A^*A.

Som for lineære avbildninger, har A nøyaktig n singulærverdier $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, og de er alle ikkenegative reelle tall. Vi ordner dem i synkende rekkefølge, $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n$. Fra Korollar 5.6.11 finner vi at matrisene $A^*A \in M_n(\mathbb{K})$ og $AA^* \in M_m(\mathbb{K})$ har de samme egenverdiene. Om $m < n$ er det lurest å jobbe med sistnevnte matrise, siden denne er minst.

5.6.14 Teorem. *For enhver matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ finnes unitære matriser $C \in M_m(\mathbb{K})$ og $B \in M_n(\mathbb{K})$ slik at*

$$A = CDB^* \tag{5.6.3}$$

der $D := \operatorname{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. De første r kolonnene i C er en basis for im A*, og de siste $n - r$ kolonnene i B er en basis for* ker A.

Dekomposisjonen (5.6.3) er *singulærverdidekomposisjonen* (SVD) av A.

5.6.15 Algoritme. For å beregne singulærverdidekomposisjonen av A, lar du T være den tilhørende lineære avbildningen $T(x) := Ax$, finner singulærverdidekomposisjonen $T(x) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \langle x, u_j\rangle v_j$ av T, og lar

$$C := \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{pmatrix}, \quad D := \operatorname{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r), \quad B := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}.$$

□

5.6.16 Eksempel. Vi skal finne singulærverdidekomposisjonen til matrisen $A := \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ fra Eksempel 5.6.5. I dette eksempelet fant vi at

$$A^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$$

og at denne har egenverdier $\lambda_1 = 360$, $\lambda_2 = 90$ og $\lambda_3 = 0$, som gir singulærverdier $\sigma_1 = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$, $\sigma_2 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ og $\sigma_3 = 0$. Vi har

$$A^\mathsf{T} A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -280 & 100 & 40 \\ 100 & -170 & 140 \\ 40 & 140 & -160 \end{pmatrix},$$

og ved inspeksjon finner vi at vektoren $\tilde{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ligger i kjernen til sistnevnte matrise — med andre ord, $\tilde{u}_1$ er en egenvektor for λ_1. Vi fortsetter slik med λ_2 og λ_3 og får egenvektorene

$$\tilde{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Merk at disse er automatisk ortogonale.) Vi normaliserer vektorene og får den ortonormale listen

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Vi følger Algoritme 5.6.10 videre og definerer $v_j := \frac{1}{\sigma_j} A u_j$:

$$v_1 := \frac{1}{6\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$v_2 := \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Siden $m = 2$, har vi nå funnet alle v-vektorene. Vi ender dermed opp med singulærverdidekomposisjonen

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(Merk at B-matrisen er transponert.) □

5.6.17 Oppgave. Vis at om $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ er en diagonalmatrise, er singulærverdiene til A lik diagonalelementene til A.

5.6.5 Redusert SVD

I typiske anvendelser av SVD er enten $n \gg m$ eller $n \ll m$, slik at enten $m \times m$-matrisen C eller $n \times n$-matrisen B blir veldig stor (slik at det blir umulig å regne for hånd, eller beregningstungt for en datamaskin). Det finnes dog en variant, *redusert SVD*, som løser dette problemet.

La oss anta at $n > m$; sluttresultatet vil også gjelde når $n < m$. La $v_1, \dots, v_m$ være kolonnene i C og $u_1, \dots, u_n$ kolonnene i B. På blokkmatriseform er da

$$A = CDB^* = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_m & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \overline{u_1}^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \overline{u_n}^\mathsf{T} \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$DB^* = \left(\begin{array}{c} \sigma_1 \overline{u_1}^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \sigma_m \overline{u_m}^\mathsf{T} \\ \hline 0 \end{array} \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{K}).$$

Vi vet at $\sigma_j = 0$ for $j > r$, så de siste $n - r$ radene i DC^{-1} er lik 0. Når vi multipliserer DB^* med $C = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & v_m \end{pmatrix}$, vil de siste $m - r$ kolonnene i B ganges med 0, og dermed ikke ha noe å si for det endelige resultatet. Vi kan derfor ganske enkelt fjerne dem!

5.6.18 Teorem (Redusert singulærverdidekomposisjon)**.** *For enhver matrise* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *finnes matriser* $C_r \in M_{m\times r}(\mathbb{K})$ *og* $B_r \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ *med ortonormale kolonner, slik at*

$$A = C_r D_r B_r^*$$

der $D := \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

Bevis. Vi lar $C_r := \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r \end{pmatrix}$ og $B_r := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{pmatrix}$. Siden $\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2} \cdots = 0$, er det enkelt å vise at $C_r D_r B_r^* = CDB^*$. ■

5.7 Anvendelser av SVD

5.7.1 Beregne operatornormen

Fra Seksjon 3.5.1 husker vi at *operatornormen* til en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ er

$$\|A\|_{\mathscr{L}} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}. \tag{5.7.1}$$

La $A = CDB^*$ være singulærverdidekomposisjonen av A. Da har A operatornorm

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \|CDB^*\|_{\mathscr{L}} \overset{4.10.3}{=} \|D\|_{\mathscr{L}} \overset{3.5.8}{=} \max_i |(D)_{ii}| = \sigma_1,$$

den største singulærverdien. Om $C = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$ er kolonnene til C og B, og $e_1 := (\delta_{1k})_{k=1}^n$, er

$$Au_1 = CDB^*u_1 = CDe_1 = \sigma_1 Ce_1 = \sigma_1 v_1,$$

der vi har brukt at B er unitær. Dermed er

$$\|Au_1\|_2 = \sigma_1\|v_1\|_2 = \sigma_1$$

(siden $\|v_1\|_2 = 1$), så har vi vist at supremum i (5.7.1) oppnås i $x = u_1$, og at supremumsverdien er σ_1. Altså:

5.7.1 Proposisjon. *Operatornormen* $\|A\|_{\mathscr{L}}$ *til en matrise* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *er lik* σ_1*, den største singulærverdien til* A*, og supremum i* (5.7.1) *oppnås i* $x = u_1$.

5.7.2 Over- og underbestemte problemer

La $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ og $b \in \mathbb{R}^m$. Dersom A er inverterbar, vet vi at ligningen

$$Ax = b$$

har en unik løsning, nemlig $x = A^{-1}b$. Dersom $n < m$ kan det hende at det ikke finnes en løsning (vi sier at *ligningen er underbestemt*), og dersom $n > m$ vil det kunne finnes uendelig mange løsninger (vi sier at *ligningen er overbestemt*).

Om $n < m$, finnes ikke nødvendigvis noen $x \in \mathbb{R}^n$ slik at $Ax = b$, det vil si $Ax - b = 0$, men vi kan forsøke å finne vektoren x som gjør $Ax - b$ så "liten" som mulig. Om $n > m$ kan det finnes uendelig mange løsninger x, og det kan gi mening å plukke ut den "minste" av dem. Det viser seg at begge disse minimeringsproblemene kan løses ved hjelp av *pseudoinverser.*

Som før lar vi $A = CDB^*$ være singulærverdidekomposisjonen til A, der $D := \operatorname{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, og $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ er de ikke-null singulærverdiene til A.

5.7.2 Definisjon. La $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ha SVD $A = CDB^*$. Den *pseudoinverse til A* er matrisen $A^\dagger$ gitt ved

$$A^\dagger := BD^\dagger C^*,$$

der $D^\dagger := \operatorname{diag}_{n\times m}\big(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r\big)$.

5.7.3 Teorem. *La $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ og $b \in \mathbb{K}^m$.*

(i) Om det ikke finnes noen løsning av systemet $Ax = b$, vil $x := A^\dagger b$ være vektoren som minimerer $\|Ax - b\|_2$.

(ii) Om det finnes mer enn én løsning av systemet $Ax = b$, vil $x := A^\dagger b$ være løsningen som minimerer $\|x\|_2$.

Bevis. La $u_1, \dots, u_n$ og $v_1, \dots, v_m$ være kolonnene i henholdsvis B og C, og la $\mathscr{B} := (u_1, \dots, u_n)$ og $\mathscr{C} := (v_1, \dots, v_m)$. Merk at vi kan skrive basisskiftematrisene fra standardbasisen til basisene $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ som henholdsvis B^* og C^* (oppgave til leseren).

(i) Vi vil minimere $\|Ax - b\|_2$ over alle $x \in \mathbb{K}^n$, som er det samme som å minimere $\|y - b\|_2$ over alle $y \in \operatorname{im}(A)$, og deretter finne en $x \in \mathbb{K}^n$ slik at $Ax = y$. Lar vi $x := A^\dagger b$ har vi

$$Ax = \big(CDB^*\big)\big(BD^\dagger C^*\big)b = CDD^\dagger C^* b.$$

Her er $DD^\dagger = \operatorname{diag}_{m\times m}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ ganger}})$, så

$$CDD^\dagger = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Videre er

$$C^*b = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{pmatrix} b = \sum_{j=1}^m v_j^* b e_j = \sum_{j=1}^m \langle b, v_j\rangle e_j,$$

der $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^m$. Listen $(v_1, \dots, v_r)$ er en ortonormal basis for $\operatorname{im} A$, så vi konkluderer med at

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=1}^m \langle b, v_j\rangle e_j \\ &= \sum_{j=1}^r \langle b, v_j\rangle v_j = \operatorname{proj}_{\operatorname{im} A} b, \end{aligned}$$

der siste steg følger av Teorem 4.5.5. Ifølge Proposisjon 4.5.9 er $\operatorname{proj}_{\operatorname{im} A} b$ vektoren i $\operatorname{im} A$ som er nærmest b. Vi har dermed vist at $x := A^\dagger b$ minimerer $\|Ax - b\|_2$.

(ii) Enhver løsning av $Ax = b$ vil minimere $\|Ax - b\|_2$, med minimumsverdien 0. Av *(i)* vet vi dermed at om $x := A^\dagger b$, vil $Ax = b$. La $\tilde{x}$ også være slik at $A\tilde{x} = b$. Da er $D[\tilde{x}]_{\mathscr{B}} = [b]_{\mathscr{C}} = D[x]_{\mathscr{B}}$. Dermed er

$$\big([x]_{\mathscr{B}}\big)_i = \begin{cases} \big([\tilde{x}]_{\mathscr{B}}\big)_i & \text{for } i = 1, \dots, r, \\ 0 & \text{for } i > r, \end{cases}$$

så

$$\big\|[\tilde{x}]_{\mathscr{B}}\big\|^2 = \big\|[x]_{\mathscr{B}}\big\|^2 + \sum_{i=r+1}^n \big|\big([\tilde{x}]_{\mathscr{B}}\big)_i\big|^2 \geqslant \big\|[x]_{\mathscr{B}}\big\|^2. \qquad \blacksquare$$

5.7.3 Lavrangsapproksimasjon

Som før lar vi U og V være indreproduktrom med dimensjon henholdsvis n og m, og lar $T \in \mathscr{L}(U, V)$. Vi husker at *rangen* til T er tallet $\operatorname{rank} T := \dim \operatorname{im} T$. Enhver funksjonsverdi av T kan da representeres som en lineærkombinasjon av $\operatorname{rank} T$ antall vektorer, så $\operatorname{rank} T$ gir et mål på "hvor kostbart" det er å representere T.

I en *lavrangsapproksimasjon* ønsker vi å finne en avbildning $T_k \in \mathscr{L}(U, V)$ med $\operatorname{rank} T_k = k$, og som ligger nærmest mulig den opprinnelige T. Tanken er at om $k \ll \operatorname{rank} T$, vil vi spare lagringsplass og beregningskraft ved bare å lagre den enklere avbildningen T_k.

5.7.4 Proposisjon. *La* $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ *være singulærverdidekomposisjonen av* T*, der* $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ *og* $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_m)$*. La* $k < r$*, og definer* $T_k \in \mathscr{L}(U, V)$ *ved*

$$T_k u := \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \langle u, u_j \rangle v_j \qquad \forall\, u \in U. \tag{5.7.2}$$

Da har T_k *rang* k*, og om* $S \in \mathscr{L}(U, V)$ *er en annen avbildning med rang* k*, er*

$$\|T - S\|_{\mathscr{L}} \geqslant \|T - T_k\|_{\mathscr{L}} = \sigma_{k+1}.$$

Bevis. Vi overlater beviset for at T_k er lineær og har rang k som en oppgave til leseren. Avbildningen T_k har basisrepresentasjon

$$[T_k]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}_{m\times n}(\sigma_1, \dots, \sigma_k),$$

så

$$\|T - T_k\|_{\mathscr{L}} \overset{4.3.12}{=} \left\|[T - T_k]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\right\|_{\mathscr{L}} = \left\|\operatorname{diag}(0, \dots, 0, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)\right\|_{\mathscr{L}} \overset{3.5.8}{=} \sigma_{k+1}.$$

Om S har rang k, følger det av dimensjonssatsen at $\dim \ker S = n - k$. Siden rommet $U_k := \operatorname{span}(u_1, \dots, u_{k+1})$ har dimensjon $k + 1$, og både $\ker S$ og U_k er underrom av det n-dimensjonale rommet U, må

$$\ker S \cap U_k \supsetneqq \{0\}.$$

La derfor z være en vektor i snittet, normalisert slik at $\|z\|_U = 1$. Da er

$$\begin{aligned}
\|T - S\|_{\mathscr{L}} \geqslant \|(T - S)z\|_V = \|Tz\|_V &= \left\|\textstyle\sum_{j=1}^{r} \sigma_j \langle z, u_j \rangle v_j\right\|_V \\
&= \left\|\textstyle\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j \langle z, u_j \rangle v_j\right\|_V \\
&\overset{4.3.11}{=} \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^2 \langle z, u_j \rangle^2} \geqslant \underbrace{\min\{\sigma_1, \dots, \sigma_{k+1}\}}_{=\sigma_{k+1}} \underbrace{\sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{k+1} \langle z, u_j \rangle^2}}_{=\|z\|=1} \\
&= \sigma_{k+1} = \|T - T_k\|_{\mathscr{L}}.
\end{aligned}$$

■

Figur 5.4: Et svart-hvitt bilde av Niels Henrik Abels hus.

5.7.4 Billedkomprimering

Digitalbilder er satt sammen av *piksler* (fra engelsk *pixel*, som står for *picture element*), og hver piksel har en farge, for eksempel spesifisert i grader av rødt/grønt/blått (*RGB-fargemodellen*), eller i grader av svart-hvitt (*gråtoneskalaen*). Figur 5.4 viser et svart-hvitt bilde bestående av 1536×1178 piksler, og der hver piksel er et tall mellom 0 og 255, der 0 er helt svart og 255 er helt hvitt.

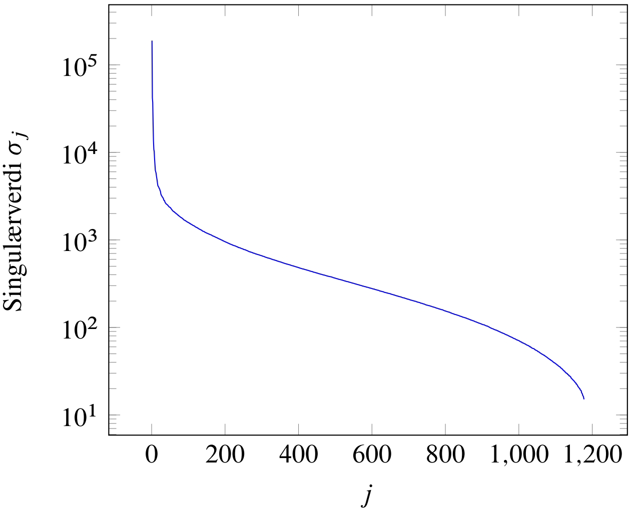
Selv om et bilde er noe helt annet enn en matrise, kan vi fint tenke på digitalbilder som store matriser. Bildet i Figur 5.4 ville da blitt en matrise A av dimensjon 1536×1178, der hvert element er et tall mellom 0 og 255. Figur 5.5 viser de 1178 singulærverdiene $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{1178}$ til denne matrisen, sortert i synkende rekkefølge. Vi ser at de første få singulærverdiene er i størrelsesorden 1000–10 000, men at de aller fleste singulærverdiene er langt mindre. Teorien i Seksjon 5.7.3 indikerer dermed at om vi fjerner alle bortsett fra de første få singulærverdiene, vil den resulterende "lavrangsapproksimasjonen" fremdeles være en god tilnærming til det opprinnelige bildet.

La $A = CDB^*$ være singulærverdidekomposisjonen til A, der $C \in M_{1536\times1536}(\mathbb{R})$, $B \in M_{1178\times1178}(\mathbb{R})$, og D er en diagonalmatrise med 1178 elementer. Vi velger et tall $k \in \{1, 2, \ldots, 1178\}$, og fjerner alle bortsett fra de første k kolonnene i B og C, og de første (og største) k elementene langs diagonalen i D. Om B_k, C_k og D_k er de resulterende matrisene, får vi da lavrangsapproksimasjonen

$$A_k := C_k D_k B_k^*.$$

Mens den opprinnelige matrisen A inneholdt $1536 \cdot 1178 = 1\,809\,408$ elementer, vil denne nye representasjonen inneholde langt færre elementer: Siden C_k inneholder $1536k$ elementer, B_k inneholder $1178k$ elementer, og diagonalen i D_k inneholder k elementer, vil vi trenge å lagre kun

$$1536k + 1178k + k$$



Figur 5.5: Singulærverdiene til matrisen tilhørende bildet i Figur 5.4. Den vertikale aksen er logaritmisk

tall. Så lenge k er mye mindre enn 1178, vil dette være mye mindre enn antall elementer i A.

Figur 5.6 viser de komprimerte bildene A_k med forskjellige valg av k. Allerede ved $k = 80$ er det komprimerte bildet av en akseptabel kvalitet, selv om det komprimerte bildet tar over 8 ganger mindre lagringsplass enn det opprinnelige bildet.

5.7.5 Prinsipalkomponentanalyse

5.7.6 Kondisjonstall

Anta at vi vil løse det lineære systemet

$$Ax = y$$

der $A \in M_n(\mathbb{K})$ er inverterbar og $y \in \mathbb{K}^n$. På grunn av målefeil, avrundingsfeil eller annet, vet vi bare hva y er opp til en liten feil:

$$\tilde{y} = y + e \qquad \text{for en “feil” } e \in \mathbb{K}^n.$$

Den nøyaktige løsningen er $x = A^{-1}y$, mens den beregnede løsningen er

$$\tilde{x} := A^{-1}\tilde{y} = A^{-1}y + A^{-1}e = x + A^{-1}e.$$

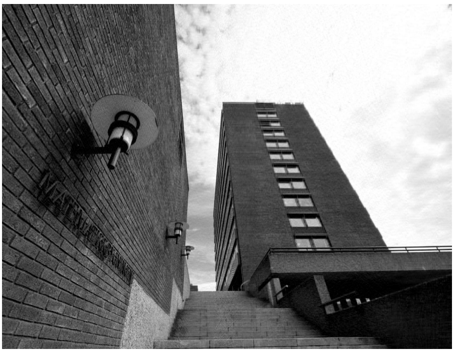
Den relative feilen i “dataen” $\tilde{y}$ er $\frac{\|y-\tilde{y}\|}{\|y\|} = \frac{\|e\|}{\|Ax\|}$, mens den relative feilen i løsningen er

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}e\|}{\|x\|}.$$

(a) $k = 20$, kompresjonsfaktor 33.3

(b) $k = 40$, kompresjonsfaktor 16.7

(c) $k = 80$, kompresjonsfaktor 8.33



(d) $k = 160$, kompresjonsfaktor 4.17

Figur 5.6: Lavrangsapproksimasjoner av bildet i Figur 5.4 med forskjellige verdier av k. Kompresjonsfaktoren sier hvor mye større det opprinnelige bildet var i forhold til det komprimerte bildet.

Kondisjonstallet til A er den største mulig (relative) feilen i løsningen, relativt til (relativ) feil i dataen:

$$\begin{aligned}\kappa(A) &:= \sup_{x,e\neq 0}\left(\frac{\|A^{-1}e\|}{\|x\|}\Big/\frac{\|e\|}{\|Ax\|}\right) = \sup_{x,e\neq 0}\frac{\|A^{-1}e\|\|Ax\|}{\|e\|\|x\|} \\ &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\sup_{e\neq 0}\frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|} = \|A\|_{\mathscr{L}}\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}}.\end{aligned}$$

5.7.5 Oppgave. La $A = CDB^*$ være singulærverdidekomposisjonen av A, der A er en inverterbar matrise. Vis at singulærverdidekomposisjonen av A^{-1} da er

$$A^{-1} = BD^{-1}C^*, \qquad \text{der } D^{-1} = \operatorname{diag}\big(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_n\big).$$

Av Oppgave 5.7.5 får vi da

$$\kappa(A) = \|A\|_{\mathscr{L}}\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}} \overset{\text{Sek. 5.7.1}}{=} \max_{i=1,\dots,n}\sigma_i \max_{j=1,\dots,n} 1/\sigma_j = \frac{\sigma_1}{\sigma_n},$$

forholdet mellom den største og den minste singulærverdien til A. Vi oppsummerer dette som følger.

5.7.6 Proposisjon. *La $A \in M_n(\mathbb{K})$ ha singulærverdier $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n > 0$, og la*

$y, \tilde{y} \in \mathbb{K}^n$. La $x, \tilde{x} \in \mathbb{K}^n$ løse systemene $Ax = y$ og $A\tilde{x} = \tilde{y}$. Da er

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leqslant \kappa(A) \frac{\|y - \tilde{y}\|}{\|y\|}, \tag{5.7.3}$$

der $\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$. Tallet $\kappa(A)$ er det minste tallet som er slik at (5.7.3) *er sant for alle $y, \tilde{y} \in \mathbb{K}^n$.*

5.7.7 Eksempel. Definer $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}$. Siden A er en diagonalmatrise, finner vi singulærverdiene langs diagonalen (se Oppgave 5.6.17). Dermed er $\sigma_1 = 1$ og $\sigma_2 = 10^{-5}$, som gir kondisjonstallet $\kappa(A) = 10^5$. Om vi ønsker å løse systemet $Ax = y$, men gjør en liten feil i y (for eksempel en avrundingsfeil på datamaskin), vil denne feilen dermed kunne bli forstørret med en faktor 10^5 i den resulterende løsningen. □

5.7.8 Eksempel (Polynominterpolasjon)**.** Vi er gitt $n + 1$ ulike punkter $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ og funksjonsverdiene til en funksjon f i disse punktene. Vi ønsker å *interpolere* f i disse punktene, det vil si å finne et polynom p som er slik at

$$p(t_0) = f(t_0), \qquad p(t_2) = f(t_2), \qquad \ldots, \qquad p(t_n) = f(t_n).$$

Et slikt polynom kalles et *interpolasjonspolynom*, eller bare *interpolant*. Som vi så i Seksjon 1.5, finnes et unikt polynom $p \in \mathcal{P}_n$ med denne egenskapen. Videre fant vi tre forskjellige basiser for $\mathcal{P}_n$, og dermed tre forskjellige måter å finne fram til interpolanten p på.

Gitt en basis $(p_0, \ldots, p_n)$ for $\mathcal{P}_n$, uttrykker vi p i basisen,

$$p = \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_n p_n.$$

Problemet blir dermed å løse det lineære systemet

$$\begin{cases} \alpha_0 p_0(t_0) + \cdots + \alpha_n p_n(t_0) = f(t_0) \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \alpha_0 p_0(t_n) + \cdots + \alpha_n p_n(t_n) = f(t_n), \end{cases}$$

eller må matriseform $Ax = y$, der

$$A := \big(p_j(t_i)\big)_{\substack{i=0,\ldots,n, \\ j=0,\ldots,n}} \qquad x := \big(\alpha_j\big)_{j=0,\ldots,n}, \qquad y := \big(f(t_i)\big)_{i=0,\ldots,n},$$

som er et system med $n + 1$ ligninger og $n + 1$ ukjente. Siden $(p_0, \ldots, p_n)$ er en basis, vil dette systemet alltid ha en unik løsning, uansett hvilken basis vi velger (se også Korollar 1.5.5).

For den "kanoniske" basisen $p_j(t) := t^j$ får vi matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}. \tag{5.7.4}$$

Dette er et eksempel på en *Vandermonde-matrise*, som er nettopp matriser på formen ovenfor for ulike tall $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

For Newton-basisen (1.5.1) får vi en nedre triangulær matrise,

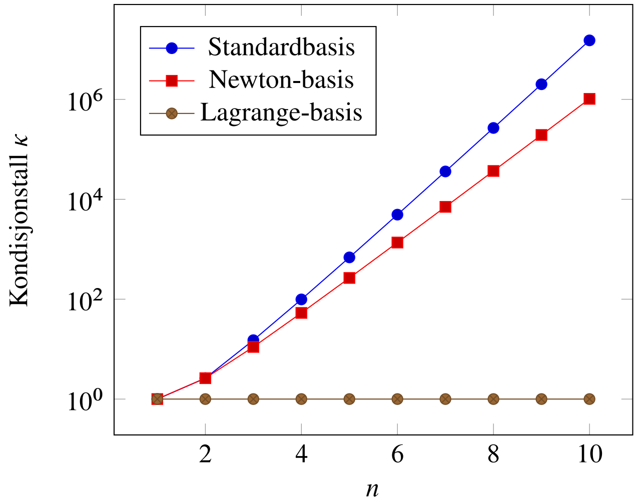
$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & p_1(t_1) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & p_1(t_n) & \cdots & p_n(t_n) \end{pmatrix} \tag{5.7.5}$$

(de tomme feltene er lik 0). Triangulære systemer er spesielt enkle å løse med radreduksjon (se Seksjon 4.11).

For Lagrange-basisen (1.5.2) har vi $L_k(t_j) = \delta_{kj}$, så vi får bare $A = I_{n+1}$.

Vi har nå tre lineære systemer på formen $Ax = y$. Matrisen A er i alle tre tilfeller inverterbar, men om kondisjonstallet er stort, vil små feil i høyresiden y kunne gi store feil i løsningen x. I Figur 5.7 ser vi kondisjonstallet for de tre matrisene for forskjellige valg av n. Vi ser at kondisjonstallene for standardbasisen og Newton-basisen øker veldig raskt når n øker, og for $n = 10$ er de begge i størrelsesorden 10^6–10^7. Lagrange-basisen gir derimot alltid identitetsmatrisen, som har kondisjonstall lik 1, uansett dimensjon.

Vi kan konkludere med at om antall interpolasjonspunkter n er middels stort, vil vi kunne få store avrundingsfeil om vi bruker standardbasisen eller Newton-basisen, men ikke Lagrange-basisen. Vi kaller slike effekter *numerisk ustabilitet*. Du kan lære mer om dette i *MAT3110*.



Figur 5.7: Kondisjonstall for det lineære systemet som bestemmer det interpolerende polynomet over punktene $t_k = k/n$ (for $k = 0, \ldots, n$). Tallet n varierer fra $n = 1$ til $n = 10$. Merk at den vertikale aksen er logaritmisk.

□

6 Fourieranalyse

6.1 Overblikk og generelle ideer

En *ren tone* er et lydsignal der lufttrykket følger en sinusbølge. En sinusbølge karakteriseres ved de to parameterne *frekvens* og *amplitude*. Ved å legge sammen rene toner med ulike parametre kan vi få mer komplekse lydsignaler, og motsatt kan vi dekomponere et lydsignal i rene toner med forskjellige frekvenser og amplituder.

Vi vil i dette kapittelet undersøke om ikke bare lydsignaler, men også *en generell funksjon*, kan uttrykkes ved hjelp av sinusbølger. Vi skal spesielt se på sinusbølger på formen

$$\sin(kt) \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

for et heltall k. (Overalt i dette kapittelet tenker vi på t som *tid*, for eksempel målt i sekunder.) Denne funksjonen har frekvens $|k|/2\pi$. Vi spør nå: Kan vi uttrykke en generell funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \sin(kt) \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

for koeffisienter $c_k \in \mathbb{R}$? Det umiddelbare svaret er nei: Høyresiden er lik 0 i $t = 0$, men det er ikke nødvendigvis venstresiden; og høyresiden har periode 2π (sett inn $t + 2\pi$, så får du samme funksjonsverdi), men det har ikke nødvendigvis venstresiden. Det første løser vi ved å ta med cosinusfunksjoner, som jo ikke er lik 0 i origo:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \sin(kt) + \sum_{k\in\mathbb{N}_0} d_k \cos(kt) \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

(Her tar vi med $\cos(kt)$ for $k = 0$, siden $\cos(0t) \not\equiv 0$.) Men det andre problemet kommer vi ingen vei med, og vi må anta at f er *2π-periodisk*, $f(t + 2\pi) = f(t)$ for alle t. (For ikke-periodiske funksjoner kan man studere *fouriertransformasjoner*, men det skal ikke vi her.)

Vi skal også tillate f å ta komplekse verdier. Vi spør derfor om vi kan uttrykke en generell 2π-periodisk funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \sin(kt) + \sum_{k\in\mathbb{N}_0} d_k \cos(kt) \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

for komplekse koeffisienter $c_k, d_k \in \mathbb{C}$. Dette er et tungt uttrykk å jobbe med, så vi bruker Eulers formel

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

og forenkler uttrykket ovenfor til

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

for koeffisienter $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$.

6.1.1 Oppgave. Vis at de to uttrykkene er ekvivalente om $\hat{f}_k$ velges som

$$\hat{f}_k = \begin{cases} \frac{c_k}{2i} + \frac{d_k}{2} & \text{for } k > 0 \\ d_0 & \text{for } k = 0 \\ -\frac{c_{-k}}{2i} + \frac{d_{-k}}{2} & \text{for } k < 0. \end{cases}$$

Om vi definerer funksjonene $e_k(t) := e^{ikt}$, er spørsmålet altså om vi kan skrive f som en "uendelig lineærkombinasjon" av funksjonene e_k:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k.$$

Som vi har sett i Kapittel 4, er slike spørsmål mye enklere å besvare om f ligger i et indreproduktrom, og om $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal "basis" for dette rommet. Det viser seg at L^2-indreproduktet passer godt:

6.1.2 Definisjon. For $f, g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definerer vi L^2-indreproduktet som

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

(der $\overline{g(t)}$ er den komplekskonjugerte av $g(t)$).

Vi viste i Oppgave 4.1.5 (d) at L^2-indreproduktet faktisk er et indreprodukt. Koeffisienten $\frac{1}{2\pi}$ i definisjonen av indreproduktet er der bare av praktiske årsaker.

6.1.3 Oppgave. Vis at $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ er en ortonormal liste med hensyn på indreproduktet $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$, det vil si

$$\langle e_j, e_k\rangle_{L^2} = \delta_{jk} \qquad \forall\ j, k \in \mathbb{Z}.$$

Siden $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ er ortonormal, kan vi med teorien i Seksjon 4.3 forvente at

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k, \tag{6.1.1}$$

der

$$\hat{f}_k = \langle f, e_k\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

(den komplekskonjugerte av e^{ikt} er e^{-ikt}). Rekken (6.1.1) kalles *fourierrekken til f*, og koeffisientene $\hat{f}_k$ er *fourierkoeffisientene til f*.

Her er det viktig å merke seg at vi har skjøvet mange detaljer under teppet:

(i) Hva mener vi med å summere uendelig mange ledd i (6.1.1)? På hvilken måte konvergerer rekken?

(ii) I hvilket vektorrom ligger funksjonen f?

(iii) Gir integralet $\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ mening når f ligger i dette vektorrommet?

(iv) Teorien i Kapittel 4 gjelder stort sett kun for endeligdimensjonale vektorrom, men vi jobber her med uendeligdimensjonale vektorrom (siden $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ er en uendelig lang liste). Hvilke resultater fra Kapittel 4 gjelder da?

(v) På hvilken måte er $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ en basis for dette vektorrommet?

Du vet fra *MAT1100* at vi tolker rekker som grenseverdier:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k.$$

Vi definerer derfor den trunkerte rekken

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k, \qquad \text{der } \hat{f}_k := \langle f, e_k \rangle_{L^2}. \tag{6.1.2}$$

Spørsmålene vi kommer til å stille er dermed hvorvidt $S_n(f)$ konvergerer når $n \to \infty$; hvorvidt $S_n(f) \to f$ når $n \to \infty$; hva mener vi med konvergensen "$S_n(f) \to f$"; og for hvilke f kan vi bevise konvergens.

6.2 Moduloregning og periodiske funksjoner

La $s, t \in \mathbb{R}$ og $a > 0$ være reelle tall. Vi skriver

$$s = t \mod a$$

(uttales "s er lik t, modulo a") dersom det finnes en $k \in \mathbb{Z}$ slik at $s = t + ak$. Vi skal se spesielt på tilfellet der $a = 2\pi$. Vi har da for enhver s

$$s = s + 2\pi = s + 4\pi = \dots \mod 2\pi.$$

Om vi ser på s som en vinkel uttrykt i radianer, er dette analogt med at en ekstra rotasjon med 2π (eller andre multipler av 2π) bringer oss til samme punkt. Punktene på enhetssirkelen danner mengden $\mathbb{T}$, *enhetssirkelen*, eller bare *sirkelen*. Vi kommer ofte til å utelate "mod 2π" når vi snakker om sirkelen, slik at for eksempel $\pi/2 = 5\pi/2$.

Sirkelen er et eksempel på en *gruppe*, der vi kan addere og subtrahere, men ikke nødvendigvis multiplisere eller dividere, objekter. Om $s = s' \mod 2\pi$ og $t = t' \mod 2\pi$, er $s = s' + 2\pi j$ og $t = t' + 2\pi k$ for $j, k \in \mathbb{Z}$, så

$$s + t = s' + t' + 2\pi(j + k), \qquad \text{så} \qquad s + t = s' + t' \mod 2\pi.$$

Det har dermed ingenting å si hvilken "representasjon" av s og t vi velger når vi adderer dem. Derimot er

$$st = \big(s' + 2\pi j\big)\big(t' + 2\pi k\big) = s't' + 2\pi z, \qquad \text{der } z := s'k + t'j + 2\pi jk,$$

og siden z ikke nødvendigvis er et heltall, er ikke nødvendigvis $st = s't' \mod 2\pi$.

Vi kan beregne avstanden mellom punkter på sirkelen slik:

$$|s - t| := \min\big\{|s - t - 2k\pi| : k \in \mathbb{Z}\big\}. \tag{6.2.1}$$

Vi finner altså den representasjonen av $s - t$ som har minst absoluttverdi.

6.2.1 Definisjon. En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er *periodisk* dersom det finnes en $a > 0$ slik at

$$f(s + a) = f(s) \qquad \text{for alle } s \in \mathbb{R}. \tag{6.2.2}$$

Tallet a er *perioden* til f. Vi sier også at f er *periodisk!a-periodisk*.

6.2.2 Oppgave. Bevis at om f er periodisk med periode a, er også $f(s+ak) = f(s)$ for alle $k \in \mathbb{Z}$.

6.2.3 Oppgave. La $k \in \mathbb{Z}$. Bevis at funksjonene

$$f_k(t) := e^{ikt}, \qquad g_k(t) := \cos(kt), \qquad h_k(t) := \sin(kt)$$

er 2π-periodiske.

Hint: For g_k og h_k kan du bruke at

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Om $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er en 2π-periodisk funksjon, kan vi se på F som en funksjon på sirkelen ved å definere $f(t) := F(t)$. Om $t = t' \mod 2\pi$, vil

$$f(t) = F(t) = F(t' + 2k\pi) \overset{\text{(periodisitet)}}{=} F(t') = f(t')$$

(der $k \in \mathbb{Z}$ er slik at $t = t' + 2k\pi$), så $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ er veldefinert. Motsatt vil enhver funksjon $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ gi opphav til en 2π-periodisk funksjon $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gitt ved $F(t) := f(t)$. Funksjonen F er den *2π-periodiske utvidelsen* av f.

6.2.4 Definisjon. En funksjon $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ er *kontinuerlig* om det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$s, t \in \mathbb{T} \text{ og } |s - t| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(s) - f(t)| < \varepsilon. \tag{6.2.3}$$

(Med $|s-t|$ mener vi avstanden (6.2.1).) Vi lar $C^0(\mathbb{T})$ være mengden av alle kontinuerlige funksjoner $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. For $f \in C^0(\mathbb{T})$ definerer vi *supremumsnormen*

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|. \tag{6.2.4}$$

Vi sier at en følge av funksjoner $f_1, f_2, \ldots \in C^0(\mathbb{T})$ *konvergerer uniformt* mot $f \in C^0(\mathbb{T})$ dersom

$$\|f_k - f\|_{\sup} \to 0 \qquad \text{når } k \to \infty.$$

(Fra *MAT1100* husker du kanskje at egenskapen (6.2.3) egentlig er *uniform kontinuitet*. Men vi kan se på $\mathbb{T}$ som den lukkede, begrensede mengden $[0, 2\pi]$, og fra *MAT1100* vet vi at en kontinuerlig funksjon på en lukket, begrenset mengde også er uniformt kontinuerlig. Vi kan dermed uten videre anta *uniform* kontinuitet.)

6.2.5 Oppgave. Vis at funksjonene i Oppgave 6.2.3 ligger i $C^0(\mathbb{T})$.

6.2.6 Teorem (Ekstremalverdisetningen)**.** *For enhver $f \in C^0(\mathbb{T})$ finnes $t_0, t_1 \in \mathbb{T}$ slik at*

$$f(t_0) \leqslant f(t) \leqslant f(t_1) \qquad \forall\, t \in \mathbb{T}. \tag{6.2.5}$$

Dermed er $\|f\|_{\sup} < \infty$ for alle $f \in C^0(\mathbb{T})$.

Bevis. Om $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er gitt ved $F(t) := f(t)$, vil F være en 2π-periodisk, kontinuerlig funksjon. Av ekstremalverdisetningen fra *MAT1100* vet vi at en kontinuerlig funksjon oppnår et maksimum og et minimum på en lukket, begrenset område, så det finnes $t_0, t_1 \in [0, 2\pi]$ slik at $F(t_0) = \inf_{t\in[0,2\pi]} F(t)$ og $F(t_1) = \sup_{t\in[0,2\pi]} F(t)$. Men da vil også $f(t_0) \leqslant f(t) \leqslant f(t_1)$ for enhver $t \in \mathbb{T}$.

For å vise det siste utsagnet bruker vi (6.2.5) og får

$$\|f\|_{\sup} = \sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)| \leqslant \max\big(|f(t_0)|, |f(t_1)|\big) < \infty. \qquad \blacksquare$$

Vi kan integrere kontinuerlige funksjoner på sirkelen. Om F er den 2π-periodiske utvidelsen av f, skriver vi

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} F(t)\,dt,$$

der høyresiden er Riemann-integralet av f over $[0, 2\pi]$. Siden F er 2π-periodisk, har det ingenting å si for integralet hvilket intervall av lengde 2π vi velger i denne definisjonen. For å se dette, la $[a, a + 2\pi]$ være et annet intervall av lengde 2π, og la $b \in [0, 2\pi)$ og $k \in \mathbb{Z}$ være slik at $a = b + 2k\pi$. Da er

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2\pi} F(t)\,dt &= \int_{b+2k\pi}^{b+2(k+1)\pi} F(t)\,dt \\
&= \int_{b+2k\pi}^{2(k+1)\pi} F(t)\,dt + \int_{2(k+1)\pi}^{2(k+1)\pi+b} F(t)\,dt \\
&\overset{\text{(variabelskifte)}}{=} \int_b^{2\pi} F\big(t + 2k\pi\big)\,dt + \int_0^b F\big(t + 2(k+1)\pi\big)\,dt \\
&\overset{\text{(periodisitet)}}{=} \int_b^{2\pi} F(t)\,dt + \int_0^b F(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} F(t)\,dt.
\end{aligned}$$

6.2.7 Definisjon. For $k \in \mathbb{Z}$ definerer vi funksjonene $e_k \in C^0(\mathbb{T})$ som

$$e_k(t) := e^{ikt} \quad \forall\, t \in \mathbb{T}.$$

Et *trigonometrisk polynom* er en lineærkombinasjon av disse funksjonene, altså en funksjon $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ på formen

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{T} \tag{6.2.6}$$

for skalarer $\alpha_{-n}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. *Graden* til et trigonometrisk polynom f er det minste heltallet n slik at f kan skrives på formen (6.2.6). Merk at ethvert trigonometrisk polynom er kontinuerlig.

Merk at vi kan skrive $e_k(t) = (e^{it})^k$. Dermed kan trigonometriske polynomer også skrives som

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k z^k, \qquad \text{der } z = e^{it}.$$

Dette rettferdiggjør begrepet “polynom” i “trigonometrisk polynom”. Videre har vi Eulers identitet, $e^{it} = \cos t + i \sin t$, som forklarer hvor “trigonometrisk” kommer fra.

6.2.8 Definisjon. Om $f, g \in C^0(\mathbb{T})$ definerer vi *L^2-indreproduktet* som

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

der $\overline{g(t)}$ er den komplekskonjugerte av $g(t)$.

Fra Seksjon 6.1 husker vi at L^2-indreproduktet er et indreprodukt på $C^0(\mathbb{T})$, og at listen $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ er ortonormal med hensyn på L^2-indreproduktet. Dersom f er et trigonometrisk polynom på formen (6.2.6), er

$$\langle f, e_j\rangle_{L^2} = \left\langle \textstyle\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k, e_j\right\rangle_{L^2} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \underbrace{\langle e_k, e_j\rangle_{L^2}}_{=\delta_{jk}} = \alpha_k.$$

Altså kan vi skrive

$$f = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k,$$

der $\hat{f}_k := \langle f, e_k\rangle_{L^2}$ er fourierkoeffisientene til f.

Følgende resultat skal vise seg å være nyttig i både analyse av fourierrekker og i anvendelser.

6.2.9 Lemma. *La $f \in C^0(\mathbb{T})$ være en kontinuerlig deriverbar funksjon, det vil si at $\frac{df}{dt}$ eksisterer og ligger i $C^0(\mathbb{T})$. Da vil*

$$\widehat{\left(\tfrac{df}{dt}\right)}_k = ik\hat{f}_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{6.2.7}$$

Mer generelt: Om $f \in C^0(\mathbb{T})$ er n ganger kontinuerlig deriverbar, er

$$\widehat{\left(\tfrac{d^n f}{dt^n}\right)}_k = (ik)^n\hat{f}_k \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{6.2.8}$$

Bevis. Vi beregner fourierkoeffisientene til $\frac{df}{dt}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\left(\tfrac{df}{dt}\right)}_k &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{df}{dt}(t)e^{-ikt}\,dt \\
&\overset{\text{(delvis integrasjon)}}{=} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\Big[f(t)e^{-ikt}\Big]_{t=0}^{2\pi}}_{=0,\text{ siden } f \text{ og } e_k \text{ er periodiske}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\underbrace{\frac{d}{dt}e^{-ikt}}_{=-ike^{-ikt}}\,dt \\
&= ik\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt \\
&= ik\hat{f}_k.
\end{aligned}$$

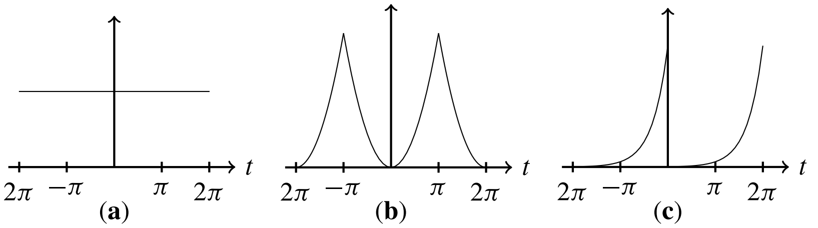
Vi overlater beviset for (6.2.8) til leseren. ∎

6.2.10 Oppgave. Finn fourierrekken til følgende funksjoner.

(a) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(t) \equiv 1$.

(b) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ som oppfyller $f(t) = t^2$ for $t \in [-\pi, \pi)$.

(c) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ som oppfyller $f(t) = e^t$ for $t \in [0, 2\pi)$.



6.3 Approksimasjon med trigonometriske polynomer

I denne seksjonen skal vi vise at for enhver $f \in C^0(\mathbb{T})$ finnes trigonometriske polynomer $f_1, f_2, \ldots$ som konvergerer mot f. Dette er første steg i å vise at fourierrekken (6.1.1) konvergerer.

6.3.1 Definisjon. En *approksimasjon av enheten* er en følge av funksjoner $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C^0(\mathbb{T})$ som er slik at

(i) $\varphi_k(t) \in [0, \infty)$ for alle $t \in \mathbb{T}$ og $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \varphi_k(t)\, dt = 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$,

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_k(t)\, dt \to 0$ når $k \to \infty$ for alle $\delta \in (0, \pi)$.

6.3.2 Definisjon. For $f, g \in C^0(\mathbb{T})$ definerer vi $f * g \in C^0(\mathbb{T})$, *konvolusjonen av f og g*, som

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{T}} f(s) g(t-s)\, ds \qquad \forall\, t \in \mathbb{T}.$$

6.3.3 Lemma. *La $f \in C^0(\mathbb{T})$ og la $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en approksimasjon av enheten. Da vil $\varphi_k * f \to f$ uniformt når $k \to \infty$, det vil si $\|\varphi_k * f - f\|_{\sup} \to 0$ når $k \to \infty$.*

Bevis. La $\varepsilon > 0$ være vilkårlig. Siden f er kontinuerlig, finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ når $s, t \in \mathbb{T}$ er slik at $|s - t| < \delta$. La videre $n \in \mathbb{N}$ være slik at $\int_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_k(t)\, dt < \varepsilon$ for alle $k \geqslant n$ (en slik n finnes ifølge Definisjon 6.3.1 *(iii)*). Vi får da for enhver $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
|\varphi_k * f(t) - f(t)| &= \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi_k(s) f(t-s)\, ds - f(t) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi_k(s) f(t-s)\, ds - f(t) \underbrace{\int_{\mathbb{T}} \varphi_k(s)\, ds}_{=1} \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi_k(s) \big(f(t-s) - f(t) \big)\, ds \right| \leqslant \int_{\mathbb{T}} \varphi_k(s) \big| f(t-s) - f(t) \big|\, ds \\
&= \int_{[-\delta,\delta]} \varphi_k(s) \underbrace{\big| f(t-s) - f(t) \big|}_{\leqslant \varepsilon}\, ds + \int_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_k(s) \underbrace{\big| f(t-s) - f(t) \big|}_{\leqslant 2\|f\|_{\sup}}\, ds \\
&\leqslant \varepsilon \int_{[-\delta,\delta]} \varphi_k(s)\, ds + 2\|f\|_{\sup} \underbrace{\int_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_k(s)\, ds}_{\leqslant \varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{T}} \varphi_k(s)\, ds}_{=1} + 2\|f\|_{\sup}\varepsilon$$
$$= \varepsilon\big(1 + 2\|f\|_{\sup}\big).$$

Siden t var vilkårlig kan vi ta supremum over $t \in \mathbb{T}$ og få $\|\varphi_k * f - f\|_{\sup} \leqslant c\varepsilon$ for alle $k \geqslant n$, der $c := 1 + 2\|f\|_{\sup}$. Dette beviser at $\|\varphi_k * f - f\|_{\sup} \to 0$ når $k \to \infty$. ∎

6.3.4 Teorem. *La $f \in C^0(\mathbb{T})$. Da finnes trigonometriske polynomer $f_1, f_2, \ldots$ slik at $f_k \to f$ uniformt når $k \to \infty$. Funksjonen f_k har grad høyst k (se Definisjon 6.2.7).*

Bevis. La $\varphi_k \in C^0(\mathbb{T})$ være gitt ved $\varphi_k(t) := c_k\big(1 + \cos t\big)^k$ for $k \in \mathbb{N}$ og $t \in \mathbb{T}$, der $c_k > 0$ er en konstant som vi bestemmer senere. La $f_k := \varphi_k * f$. Vi påstår at φ_k og f_k er trigonometriske polynomer av grad k, og at $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en approksimasjon av enheten. Resultatet vil da følge av Lemma 6.3.3.

Funksjonen φ_k et trigonometrisk polynom, for $1 + \cos t$ kan skrives som $e_0(t) + (e_1(t) + e_{-1}(t))/2$, og en potens av et trigonometrisk polynom er også et trigonometrisk polynom. Siden $1 + \cos t$ har grad 1, vil φ_k ha grad k. Funksjonen φ_k tar opplagt reelle, ikke-negative verdier. Velg så c_k slik at $\int_{\mathbb{T}} \varphi_k(t)\, dt = 1$. Beviset for at φ_k oppfyller Definisjon 6.3.1 *(iii)* er noe teknisk, og vi overlater det som en oppgave til de interesserte. Vi konkluderer med at $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en approksimasjon av enheten.

Siden φ_k er et trigonometrisk polynom av grad k, finnes $\hat{\varphi}_{-k}, \ldots, \hat{\varphi}_k \in \mathbb{C}$ slik at

$$\varphi_k = \sum_{j=-k}^{k} \hat{\varphi}_j e_j.$$

Da er

$$\begin{aligned}
f_k(t) = (\varphi_k * f)(t) &= \int_{\mathbb{T}} \varphi_k(s) f(t-s)\, ds = \sum_{j=-k}^{k} \hat{\varphi}_j \int_{\mathbb{T}} e^{ijs} f(t-s)\, ds \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \hat{\varphi}_j e^{ijt} \int_{\mathbb{T}} e^{ij(s-t)} f(t-s)\, ds \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \hat{\varphi}_j e_j(t) \int_{\mathbb{T}} e_{-j}(t-s) f(t-s)\, ds \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \hat{\varphi}_j e_j(t) \int_{t-2\pi}^{t} e_{-j}(t-s) f(t-s)\, ds \\
&\overset{\text{(variabelskifte)}}{=} \sum_{j=-k}^{k} \hat{\varphi}_j e_j(t) \underbrace{\int_{0}^{2\pi} e_{-j}(u) f(u)\, du}_{=:\beta_j} \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \hat{\varphi}_j \beta_j e_j(t),
\end{aligned}$$

som også er et trigonometrisk polynom av grad høyst k. ∎

6.4 Konvergens av fourierrekker i L^2

6.4.1 Definisjon. *L^2-normen* er normen tilhørende L^2-indreproduktet,

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f\rangle_{L^2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

6.4.2 Lemma. *Om $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en følge av funksjoner slik at $f_k \to f$ uniformt når $k \to \infty$, vil også $f_k \to f$ i L^2 når $k \to \infty$.*

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned}\|f - f_k\|_{L^2} &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t) - f_k(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sup_{s\in\mathbb{T}} |f(s) - f_k(s)|^2\, dt\right)^{1/2} = \|f - f_k\|_{\sup},\end{aligned}$$

og siden høyresiden går mot 0 når $k \to \infty$, vil også $\|f - f_k\|_{L^2} \to 0$ når $k \to \infty$. ∎

6.4.3 Teorem. *La $f \in C^0(\mathbb{T})$. Da vil fourierrekken til f konvergere mot f i L^2-normen, det vil si*

$$\lim_{k\to\infty} \|f - S_k(f)\|_{L^2} = 0.$$

Bevis. Av Teorem 6.3.4 finnes trigonometriske polynomer $f_1, f_2, \ldots$ slik at f_k er av grad k, og $\|f - f_k\|_{\sup} \to 0$ når $k \to \infty$. Av Lemma 6.4.2 vil da også $\|f - f_k\|_{L^2} \to 0$ når $k \to \infty$.

La nå $U_k := \operatorname{span}(e_{-k}, \ldots, e_k)$, som er et underrom av $C^0(\mathbb{T})$. Merk at $S_k(f) = \operatorname{proj}_{U_k} f$, ortogonalprojeksjonen av f ned på U_k (se Definisjon 4.5.6). Av Proposisjon 4.5.9 er

$$\big\|f - S_k(f)\big\|_{L^2} = \big\|f - \operatorname{proj}_{U_k} f\big\|_{L^2} \leqslant \|f - g\|_{L^2}$$

for alle $g \in U_k$. Setter vi $g = f_k$ får vi dermed

$$\big\|f - S_k(f)\big\|_{L^2} \leqslant \|f - f_k\|_{L^2} \to 0 \qquad \text{når } k \to \infty,$$

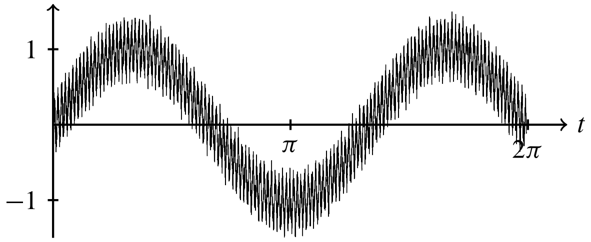
som var det vi ønsket. ∎

6.5 Uniform konvergens

Det viser seg at vi ikke kan håpe på uniform konvergens av fourierrekker for generelle kontinuerlige funksjoner:

6.5.1 Teorem. *Det eksisterer en funksjon $f \in C^0(\mathbb{T})$ som er slik at $S_k(f)$ ikke konvergerer uniformt mot f.*

Konstruksjonen og analysen av en slik funksjon er noe teknisk, og vi hopper derfor over beviset, men nøkkelen ligger i å konstruere en kontinuerlig, men svært oscillerende, funksjon.



Eksempel på kontinuerlig funksjon der fourierrekken ikke konvergerer uniformt.

Det finnes likevel ekstrabetingelser vi kan legge på f som garanterer uniform konvergens av fourierrekken:

6.5.2 Lemma. *La $f \in C^0(\mathbb{T})$ være slik at $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k| < \infty$. Da konvergerer fourierrekken til f uniformt mot f.*

Bevis. La $\varepsilon_n := \sum_{|k|>n} |\hat{f}_k|$. Siden $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k| < \infty$, vil $\varepsilon_n \to 0$ når $n \to \infty$. For alle $m, n \in \mathbb{N}$ og $t \in \mathbb{T}$ er da

$$\begin{aligned}\big|S_m(f)(t) - S_n(f)(t)\big| &= \Bigg|\sum_{|k|\leqslant m} \hat{f}_k e^{ikt} - \sum_{|k|\leqslant n} \hat{f}_k e^{ikt}\Bigg| \\ &\leqslant \sum_{\min(m,n)<|k|\leqslant\max(m,n)} \big|\hat{f}_k e^{ikt}\big| \\ &\leqslant \varepsilon_{\min(m,n)},\end{aligned}$$

som konvergerer mot 0 når $m, n \to \infty$. Følgen $\big(S_n(f)(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ er dermed en Cauchyfølge i $\mathbb{C}$, så den konvergerer mot et tall, la oss si $g(t)$, når $n \to \infty$. Da er

$$\|S_n(f) - g\|_{\sup} = \sup_{t\in\mathbb{T}} |S_n(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon_n \to 0$$

når $n \to \infty$, så $S_n(f) \to g$ uniformt. Av Lemma 6.4.2 vil da også $S_n(f) \to g$ i L^2. Men av Teorem 6.4.3 vet vi at $S_n(f) \to f$ i L^2, så da må $g = f$, og vi konkluderer med at $S_n(f) \to f$ uniformt. ■

6.5.3 Lemma. *La $f \in C^0(\mathbb{T})$ være n ganger kontinuerlig deriverbar for en $n \in \mathbb{N}$. Da finnes en $c > 0$ slik at*

$$|\hat{f}_k| \leqslant \frac{c}{|k|^n} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0.$$

Bevis. Vi bruker (6.2.8) i Lemma 6.2.9 og får for alle $k \neq 0$

$$|\hat{f}_k| = \left|\frac{1}{(ik)^n}\widehat{\left(\tfrac{d^n f}{dt^n}\right)}_k\right| = \frac{1}{|k|^n}\left|\widehat{\left(\tfrac{d^n f}{dt^n}\right)}_k\right|.$$

Siden $\frac{d^n f}{dt^n}$ er en kontinuerlig funksjon er den begrenset (av ekstremalverdisetningen, Teorem 6.2.6), så det finnes en $c > 0$ slik at $\left|\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right| \leqslant c$ for alle $t \in \mathbb{T}$. Dermed er

$$\left|\widehat{\left(\tfrac{d^n f}{dt^n}\right)}_k\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{d^n f}{dt^n}(t) e^{-ikt}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left|\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right|}_{\leqslant c} \underbrace{\left|e^{-ikt}\right|}_{=1} dt \leqslant c.$$

Resultat følger nå direkte. ■

6.5.4 Teorem. *La $f \in C^0(\mathbb{T})$ være to ganger kontinuerlig deriverbar. Da konvergerer fourierrekken til f uniformt mot f.*

Bevis. Av Lemma 6.5.3 finnes en $c > 0$ slik at $|\hat{f}_k| \leqslant c/k^2$ for alle $k \neq 0$. Da er

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k| \leqslant |f_0| + \sum_{k\neq 0} \frac{c}{k^2} < \infty.$$

Resultatet følger nå av Lemma 6.5.2. ■

Teorem 6.5.4 er ikke "skarpt" — det er mulig å bevise uniform konvergens med svakere antagelser. For eksempel er det sant at om f bare er én gang kontinuerlig deriverbar, konvergerer fourierrekken fremdeles uniformt. Siden dette og lignende resultater er en god del mer tekniske, skal vi ikke gå inn på dem her.

A DIFFERENSIALLIGNINGER

A.0.1 Oppgave. Vis at hvis $B \in M_n(\mathbb{C})$ er diagonaliserbar med diagonalisering $B = RDR^{-1}$, er

$$\exp(B) = R\exp(D)R^{-1}, \qquad \text{der } \exp(D) = \operatorname{diag}\bigl(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\bigr)$$

(der $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er egenverdiene til B).

Bevis for Teorem 5.4.3. ■

B Pseudoinvers

B.1 Pseudoinvers

B.1.1 Lemma. *La U og V være indreproduktrom og anta at U er endeligdimensjonalt. La $T \in \mathcal{L}(U,V)$. Da er restriksjonen $T\big|_{(\ker T)^\perp} : (\ker T)^\perp \to \operatorname{im} T$ en isomorfi.*

Bevis. La $U_0 := (\ker T)^\perp$. Vi må vise at $T\big|_{U_0} : U_0 \to \operatorname{im} T$ er injektiv og surjektiv.

Vi viser først at $T\big|_{U_0}$ er injektiv; av Lemma 2.3.3 holder det å vise at $\ker T\big|_{U_0} = \{0\}$. Om $u \in \ker T\big|_{U_0}$ er også $u \in \ker T \overset{4.5.7\,(i)}{=} U_0^\perp$, så $u \in U_0 \cap U_0^\perp \overset{4.5.4\,(ii)}{=} \{0\}$.

For å se at $T\big|_{U_0}$ er surjektiv lar vi $v \in \operatorname{im} T$ være vilkårlig. Da finnes en $u \in U$ slik at $Tu = v$. La $u_0 \in U_0$ og $u_1 \in U_0^\perp \overset{4.5.7\ 4.5.7}{=} \ker T$ være slik at $u = u_0 + u_1$ (se Teorem 4.5.5). Da er

$$T\big|_{U_0} u_0 = T(u - u_1) = Tu - \underbrace{Tu_1}_{=0} = v.$$

Altså er $T\big|_{U_0}$ surjektiv. ■

B.1.2 Definisjon. La U og V være indreproduktrom og anta at U er endeligdimensjonalt. La $T \in \mathcal{L}(U,V)$. *Pseudoinversen* til T er den lineære avbildningen $T^\dagger : V \to U$ gitt ved

$$T^\dagger := \left(T\big|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1} \operatorname{proj}_{\operatorname{im} T}.$$

B.1.3 Lemma. *La U og V være indreproduktrom og anta at U er endeligdimensjonalt. La $T \in \mathcal{L}(U,V)$.*

(i) *Om T er en isomorfi, er $T^\dagger = T^{-1}$*

(ii) $TT^\dagger = \operatorname{proj}_{\operatorname{im} T}$

(iii) $T^\dagger T = \operatorname{proj}_{(\ker T)^\perp}$.

Bevis.

(i) $\boxed{\text{Oppgave til leseren.}}$

(ii) Det holder å vise at om $v \in \operatorname{im} T$ er $TT^\dagger v = v$, og om $v \in (\operatorname{im} T)^\perp$ er $TT^\dagger v = 0$. I det første tilfellet finnes (av Lemma B.1.1) en unik $u \in (\ker T)^\perp$ slik at $Tu = v$. Dermed blir

$$TT^\dagger v = T\left(T\big|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1} \operatorname{proj}_{\operatorname{im} T} v = T\left(T\big|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1} v = Tu = v.$$

På den annen side, om $v \in (\operatorname{im} T)^\perp$ er $\operatorname{proj}_{\operatorname{im} T} v = 0$, så $TT^\dagger v = 0$.

(iii) På samme måte holder det å se på $u \in \ker T$ og $u \in (\ker T)^\perp$. Om $u \in \ker T$ er $T^\dagger Tu = 0$. Om $u \in (\ker T)^\perp$ lar vi $v := Tu$. Da er $T^\dagger v = u$, så $T^\dagger Tu = T^\dagger v = u$.

■

B.1.4 Teorem. *La U og V være indreproduktrom og anta at U er endeligdimensjonalt. La $T \in \mathscr{L}(U, V)$ og $v \in V$.*

(i) Om T er injektiv, men ikke surjektiv, er $u := T^{\dagger} v$ den unike løsningen av

$$\text{finn } u \in U \text{ som minimerer } \|Tu - v\|.$$

(ii) Om T er surjektiv, men ikke injektiv, er $u := T^{\dagger} v$ den unike løsningen av

$$\text{finn } u \in U \text{ slik at } Tu = v \text{ og som minimerer } \|u\|.$$

Bevis.

(i) Av Proposisjon 4.5.9, er $w := \operatorname{proj}_{\operatorname{im} T} v$ den unike vektoren i $\operatorname{im} T$ som minimerer $\|w - v\|$. Av Lemma B.1.3 *(ii)* er $Tu = TT^{\dagger} v = \operatorname{proj}_{\operatorname{im} T} v = w$, så u minimerer faktisk $\|Tu - v\|$. Om $u' \in U$ er en annen vektor som minimerer $\|Tu' - v\|$, må nødvendigvis $Tu' = w$. Men T er injektiv, og $Tu = Tu'$, så $u = u'$. Altså er u unik.

(ii) På samme måte som over vil $Tu = \operatorname{proj}_{\operatorname{im} T} v$, og siden $\operatorname{im} T = V$ får vi $Tu = v$. La $u' \in U$ være en annen vektor slik at $Tu' = v$. Da er

$$u = T^{\dagger} v = T^{\dagger} T u' \overset{B.1.3\,(iii)}{=} \operatorname{proj}_{(\ker T)^{\perp}} u'.$$

Dermed er $u \perp u' - u$, så av Pythagoras' setning (4.2.5) er

$$\|u'\|^2 = \|u + (u' - u)\|^2 = \|u\|^2 + \|u' - u\|^2 \geqslant \|u\|^2.$$

Det er likhet i uttrykket ovenfor hvis og bare hvis $u' = u$.

■

B.2 Pseudoinvers med SVD

B.2.1 Teorem. *La U og V være indreproduktrom over enten $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ med dimensjon henholdsvis n og m, og la $T \in \mathscr{L}(U, V)$. La $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathscr{C} = (v_1, \ldots, v_m)$ og $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ være som i Teorem 5.6.9. Da vil den pseudoinverse $T^{\dagger}$ til T være gitt ved*

$$[T^{\dagger}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \operatorname{diag}_{n \times m}\big(1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_r\big).$$

Bevis. Fra Seksjon 5.7.2 er

$$T^{\dagger} := \big(T\big|_{(\ker T)^{\perp}}\big)^{-1} \operatorname{proj}_{\operatorname{im} T}.$$

Vi vet av Lemma B.1.1 at $T\big|_{(\ker T)^{\perp}}$ er en isomorfi fra $(\ker T)^{\perp}$ til $\operatorname{im}(T)$. Videre er $\mathscr{C}_r := (v_1, \ldots, v_r)$ en basis for $\operatorname{im} T$, så

$$[\operatorname{proj}_{\operatorname{im} T}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}} = \operatorname{diag}_{m \times m}\big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ ganger}}\big)$$

og $(u_{r+1}, \dots, u_n)$ er en basis for $\ker T$, så $\mathscr{B}_r := (u_1, \dots, u_r)$ er en basis for $(\ker T)^\perp$. Vi får dermed

$$\big[T|_{(\ker T)^\perp}\big]_{\mathscr{C}_r}^{\mathscr{B}_r} = \operatorname{diag}\big(\sigma_1, \dots, \sigma_r\big).$$

Siden $\sigma_1, \dots, \sigma_r > 0$, er denne matrisen inverterbar, og vi får

$$\big[\big(T|_{(\ker T)^\perp}\big)^{-1}\big]_{\mathscr{B}_r}^{\mathscr{C}_r} = \operatorname{diag}\big(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r\big).$$

Vi får dermed

$$\begin{aligned}\big[T^\dagger\big]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} &= \operatorname{diag}_{n\times n}\big(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ ganger}}\big) \operatorname{diag}\big(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r\big) \operatorname{diag}_{m\times m}\big(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ ganger}}\big) \\ &= \operatorname{diag}_{n\times m}\big(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_r\big).\end{aligned}$$

■

C KONVEKSITET

C.1 Konvekskonjugert

La $f\colon E \to \mathbb{R}$ være en gitt funksjon, der $E \subseteq \mathbb{R}$ er et intervall. Da er den *konvekskonjugerte* av f (også kalt *Legendre-transformasjonen* av f) funksjonen f^* gitt ved

$$f^*(s) := \sup_{r\in E}\bigl(sr - f(r)\bigr). \tag{C.1.1}$$

Funksjonen f^* er definert i alle $s \in \mathbb{R}$ der denne supremumen er endelig.

C.1.1 Oppgave. La $p \in (1,\infty)$.

(**a**) Vis at

$$q = \frac{p}{p-1} \tag{C.1.2}$$

er det samme som

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{C.1.2'}$$

Forklar hvorfor $q \in (1,\infty)$.

(**b**) La $f(t) := \frac{t^p}{p}$ for $t \in [0,\infty)$. Vis at den konvekskonjugerte av f er $f^*(s) = \frac{s^q}{q}$ for $s \in [0,\infty)$.

Hint: For å finne maksimum i (C.1.1)*, deriver uttrykket i parentesen med hensyn på r og sett den deriverte lik* 0.

Med den konvekskonjugerte får vi følgende nyttige ulikhet: Om $s,t \in [0,\infty)$, er

$$st = \bigl(st - f(t)\bigr) + f(t) \leqslant \sup_{r\in[0,\infty)}\bigl(sr - f(r)\bigr) + f(t) = f^*(s) + f(t).$$

For funksjonen $f(t) = t^p/p$ for en $p \in (1,\infty)$ får vi *Youngs ulikhet*:

$$st \leqslant \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q} \qquad \forall\, s,t \geqslant 0 \tag{C.1.3}$$

C.2 ℓ^p-normen

Vi skal her bevise at ℓ^p-normen, definert i Eksempel 3.1.2, er en norm på $\mathbb{K}^n$ for $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Det første steget er å vise *Hölders ulikhet*. For en $p \in [1,\infty]$ definerer vi *konjugateksponenten* $q \in [1,\infty]$ ved

$$q = \begin{cases} \infty & \text{om } p = 1 \\ \frac{p}{p-1} & \text{om } 1 < p < \infty \\ 1 & \text{om } p = \infty \end{cases}$$

(sammenlign med (C.1.2)). Merk at

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{C.2.1}$$

(der vi bruker konvensjonen $1/\infty = 0$). Merk også at $p = 2$ er det eneste tallet som er lik sin egen konjugateksponent.

C.2.1 Teorem (Hölders ulikhet)**.** *La $p \in [1, \infty]$ og la q være dens konjugateksponent. For enhver $n \in \mathbb{N}$ er da*

$$\|uv\|_{\ell^1} \leqslant \|u\|_{\ell^p} \|v\|_{\ell^q} \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{K}^n \tag{C.2.2}$$

der uv er vektoren $uv = (u_1 v_1, \ldots, u_n v_n) \in \mathbb{K}^n$.

Bevis. Om $u = 0$ eller $v = 0$ er (C.2.2) automatisk sant. Vi antar derfor at $u, v \neq 0$. Om $p = 1$ er $q = \infty$, og

$$\|uv\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} |v_j| \sum_{i=1}^n |u_i| = \|u\|_{\ell^1} \|v\|_{\ell^\infty}.$$

Det samme argumentet kan brukes i tilfellet $p = \infty$, $q = 1$. Det gjenstår dermed å bevise tilfellet $p, q \in (1, \infty)$. Vi får

$$\begin{aligned}
\frac{\|uv\|_{\ell^1}}{\|u\|_{\ell^p} \|v\|_{\ell^q}} &= \frac{1}{\|u\|_{\ell^p} \|v\|_{\ell^q}} \sum_{i=1}^n |u_i v_i| = \sum_{i=1}^n \frac{|u_i|}{\|u\|_{\ell^p}} \frac{|v_i|}{\|v\|_{\ell^q}} \\
&\overset{\text{Youngs ulikhet}}{\leqslant} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|u_i|^p}{p\|u\|_{\ell^p}^p} + \frac{|v_i|^q}{q\|v\|_{\ell^q}^q} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n |u_i|^p}{p\|u\|_{\ell^p}^p} + \frac{\sum_{i=1}^n |v_i|^q}{q\|v\|_{\ell^q}^q} \\
&= \frac{\|u\|_{\ell^p}^p}{p\|u\|_{\ell^p}^p} + \frac{\|v\|_{\ell^q}^q}{q\|v\|_{\ell^q}^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \overset{\text{(C.2.1)}}{=} 1.
\end{aligned}$$

Multipliser nå begge sider med $\|u\|_{\ell^p} \|v\|_{\ell^q}$ for å få (C.2.2). ■

C.2.2 Teorem. *For enhver $p \in [1, \infty]$ og $n \in \mathbb{N}$ er $\|\cdot\|_{\ell^p}$ en norm på $\mathbb{K}^n$.*

Bevis. Det er klart at $\|u\|_{\ell^p} > 0$ for alle $u \neq 0$, og at $\|u\|_{\ell^p} = 0$ impliserer $u = 0$. La $u \in \mathbb{K}^n$ og $\alpha \in \mathbb{K}$. Om $p < \infty$ er $\|\alpha u\|_{\ell^p} = \big(\sum_{i=1}^n |\alpha u_i|^p\big)^{1/p} = |\alpha|\big(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\big)^{1/p} = |\alpha| \|u\|_{\ell^p}$. For $p = \infty$ får vi $\|\alpha u\|_{\ell^\infty} = \max_{i=1,\ldots,n} |\alpha u_i| = |\alpha| \max_{i=1,\ldots,n} |u_i| = |\alpha| \|u\|_{\ell^\infty}$.

Det gjenstår å vise trekantulikheten. Om $u, v \in \mathbb{K}^n$ og $p = 1$, er

$$\|u + v\|_{\ell^1} = \sum_{i=1}^n |u_i + v_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |u_i| + |v_i| = \|u\|_{\ell^1} + \|v\|_{\ell^1}.$$

Om $p = \infty$ er

$$\|u + v\|_{\ell^\infty} = \max_{i=1,\ldots,n} |u_i + v_i| \leqslant \max_{i=1,\ldots,n} \big(|u_i| + |v_i|\big)$$

$$\leqslant \max_{i=1,\dots,n} |u_i| + \max_{i=1,\dots,n} |v_i| = \|u\|_{\ell^\infty} + \|v\|_{\ell^\infty}.$$

Til slutt, for $p \in (1, \infty)$ er

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_{\ell^p} &= \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i| \cdot |u_i + v_i|^{p-1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |u_i + v_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |v_i| \cdot |u_i + v_i|^{p-1} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

der vi har brukt Hölders ulikhet (C.2.2). Siden $q = \frac{p}{p-1}$ får vi $(p-1)q = p$. Del begge sider på $\left(\sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$ for å få

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^p \right)^{1-1/q} \leqslant \|u\|_{\ell^p} + \|v\|_{\ell^p}.$$

Siden $1 - 1/q = 1/p$ er venstresiden lik $\|u + v\|_{\ell^p}$, så vi er ferdige. ■

D Sirkelen

I dette appendikset utdyper vi og gjør mer rigorøst diskusjonen fra Seksjon 6.2.

D.1 Ekvivalensrelasjoner og kvotientrom

D.1.1 Definisjon. La G være en mengde. En *ekvivalensrelasjon* på G er et predikat $\sim$ (det vil si: for ethvert par $s, t \in G$ er "$s \sim t$" enten sant eller usant) slik at

(i) $t \sim t$ for alle $t \in G$

(ii) om $s \sim t$, er også $t \sim s$

(iii) om $s \sim t$ og $t \sim u$, er også $s \sim u$.

Uttrykket "$s \sim t$" uttales "s er ekvivalent med t".

D.1.2 Oppgave. La $a > 0$. Vis at relasjonen $s \sim t$ definert som at $s = t \mod a$ (se Seksjon 6.2) er en ekvivalensrelasjon.

D.1.3 Definisjon. Om $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på en mengde G, definerer vi *ekvivalensklassen* til $t \in G$ som mengden

$$[t] := \{s \in G : s \sim t\}.$$

Kvotientrommet til G med hensyn på $\sim$ (eller bare "G modulo $\sim$") er mengden av alle ekvivalensklasser,

$$G/\sim := \{[t] : t \in G\}.$$

D.1.4 Oppgave. La $\sim$ være ekvivalensrelasjonen fra Oppgave D.1.2. Vis at

$$[t] = \{t + ak : k \in \mathbb{Z}\}$$

for enhver $t \in \mathbb{R}$.

D.2 Sirkelen

Som vist i Oppgave D.1.2, er $s = t \mod a$ en ekvivalensrelasjon på $\mathbb{R}$, for enhver $a > 0$. Vi velger nå verdien $a = 2\pi$.

D.2.1 Definisjon. *Enhetssirkelen*, også kalt *den endimensjonale torusen* er mengden

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/\sim,$$

der $\sim$ er ekvivalensrelasjonen definert ved at $s \sim t$ hvis og bare hvis $s = t \mod 2\pi$. Med andre ord er

$$\mathbb{T} := \big\{\{t + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} : t \in \mathbb{R}\big\}.$$

For $[s], [t] \in \mathbb{T}$ definerer vi

$$[s] + [t] := [s + t] \qquad \text{og} \qquad [s] - [t] := [s - t].$$

Vi skriver $-[s] := [0] - [s] = [-s]$.

Det er ikke opplagt at $[s] + [t]$ og $[s] - [t]$ er veldefinert. Anta at $s, s', t, t' \in \mathbb{R}$ er slik at $[s] = [s']$ og $[t] = [t']$. Da finnes $j, k \in \mathbb{Z}$ slik at $s = s' + 2j\pi$ og $t = t' + 2k\pi$, så

$$s + t = s' + t' + 2\pi(j + k).$$

Dermed er $[s + t] = [s' + t']$, og vi har bevist at uttrykket $[s] + [t]$ er veldefinert (det vil si, definisjonen avhenger ikke av hvilken representant for $[s]$ eller $[t]$ vi velger). På samme måte finner vi at $[s] - [t]$ er veldefinert.

Vi definerer lengden av $[t] \in \mathbb{T}$ som

$$|[t]| := \min\{|t + 2k\pi| : k \in \mathbb{Z}\} = \min\{|s| : s \in [t]\}.$$

Avstanden mellom to punkter $[s]$ og $[t]$ på sirkelen er da gitt ved

$$|[s] - [t]| = |[s - t]| = \min\{|s - t + 2k\pi| : k \in \mathbb{Z}\}.$$

D.3 Periodiske funksjoner

Vi husker fra Seksjon 6.2 at en funksjon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er *2π-periodisk* om $F(t + 2\pi) = F(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Alle 2π-periodiske funksjoner svarer til en funksjon på sirkelen,

$$f([t]) := F(t).$$

Om $[t] = [t']$ er to representasjoner av samme ekvivalensklasse, er $t = t' + 2k\pi$ for en $k \in \mathbb{Z}$, så $f([t]) = F(t) = F(t + 2k\pi) = F(t') = f([t'])$ (der vi i andre steg brukte periodisitet). Dermed er f veldefinert.

Motsatt gir enhver funksjon $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ opphav til en 2π-periodisk funksjon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved tilsvarende definisjon,

$$F(t) := f([t]).$$

Funksjonen F kalles da den *2π-periodiske utvidelsen* av f.

E Løsning på enkelte oppgaver

Kapittel 1

Løsning på oppgave 1.1.2. Først merker vi oss at om α og β er enten i $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, vil også $\alpha\beta$ og $\alpha + \beta$ ligge i henholdsvis $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. De assosiative, kommutative og distributivene lovene *(i)–(iii)* vet vi holder for alle rasjonale, reelle og komplekse tall. (Et fullstendig bevis for disse egenskapene tar oss langt utenfor pensum; se kurset *MAT1140* om du er interessert i slikt.) De additive og multiplikative identitetene er tallene 0 og 1, og vi vet at $\alpha + 0 = \alpha$ og $\alpha \cdot 1 = \alpha$ for alle α. Videre er tallet $-\alpha$ alltid i henholdsvis $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, og om $\alpha \neq 0$ vil også tallet $\alpha^{-1} = 1/\alpha$ ligge i $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

Hverken $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{Z}$ er kropper: For eksempel er 2 et element i begge, men 2 har ingen multiplikativ invers i $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{Z}$. Sagt på en annen måte: $1/2$ er ikke et naturlig tall eller et heltall.

Bevis for 1.1.4.

(ii) Om $w \in U$ også er slik at $u + w = 0_U$, er

$$\begin{aligned} w &\overset{(vii)}{=} w + 0_U \overset{(viii)}{=} w + (u + (-u)) \overset{(i)}{=} (w + u) + (-u) \overset{(ii)}{=} (u + w) + (-u) \\ &= 0_U + (-u) \overset{(ii)}{=} (-u) + 0_U \overset{(vii)}{=} -u. \end{aligned}$$

(iii)

$$w - v = (u + v) - v \overset{(i)}{=} u + (v - v) \overset{(viii)}{=} u + 0_U \overset{(vii)}{=} u.$$

(v)

$$\begin{aligned} 0 \cdot u &\overset{(vii)}{=} 0 \cdot u + 0_U \overset{(vii)}{=} 0 \cdot u + \big(0 \cdot u - (0 \cdot u)\big) \overset{(i)}{=} \big(0 \cdot u + 0 \cdot u\big) - (0 \cdot u) \\ &\overset{(iv)}{=} (0 + 0) \cdot u - (0 \cdot u) = 0 \cdot u - (0 \cdot u) \overset{viii}{=} 0_U. \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} -u &\overset{(vii)}{=} -u + 0_U \overset{1.1.4\,(v)}{=} -u + 0 \cdot u = -u + (1 - 1) \cdot u \\ &\overset{(iv)}{=} -u + \big(1 \cdot u + (-1) \cdot u\big) \overset{(i)}{=} \big(-u + 1 \cdot u\big) + (-1) \cdot u \\ &\overset{(vi)}{=} \big(-u + u\big) + (-1) \cdot u \overset{(viii)}{=} 0_U + (-1) \cdot u \overset{(ii)}{=} (-1) \cdot u + 0_U \\ &\overset{(vii)}{=} (-1) \cdot u. \end{aligned}$$

Løsning på oppgave 1.1.5. Vi beviser kun noen av punktene.

(d) Vi må sjekke at $\alpha \cdot u \in U$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$ og $u \in U$, og at betingelsene *(iii)–(v)* og *(vi)* i Definisjon 1.1.3 stemmer for alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ethvert reelt tall $\alpha \in \mathbb{R}$ er også et komplekst tall, og siden $\alpha u \in U$ for alle $\alpha \in \mathbb{C}$ og $u \in U$, vil det samme gjelde også for alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Betingelsene *(iii)–(v)* holder for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fordi de holder for $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Den multiplikative enheten $1 \in \mathbb{C}$ er også en multiplikativ enhet i $\mathbb{R}$, så *(vi)* holder også. Vi konkluderer dermed med at U er et vektorrom over $\mathbb{R}$.

(**e**) Dersom $f, g \in C^0(I, \mathbb{R})$ vil den punktvise summen $f + g$ også være en funksjon fra I til $\mathbb{R}$ som er kontinuerlig, så $f + g \in C^0(I, \mathbb{R})$. Likeledes vil $\alpha f \in C^0(I, \mathbb{R})$ om $\alpha \in \mathbb{R}$ og $f \in C^0(I, \mathbb{R})$. Vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon er derfor veldefinerte operasjoner. Siden addisjon og skalarmultiplikasjon er definert punktvis, følger egenskapene *(i)–(vi)* automatisk. Nullelementet er nullfunksjonen $0(x) = 0$ for alle $x \in I$, så *(vii)* holder. Til slutt, for en vilkårlig $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ lar vi $-f$ være funksjonen $(-f)(x) := -(f(x))$; da er opplagt $f + (-f) = 0$.

(**g**) Som for C^0, definerer vi vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon punktvis. La $f, g \in \mathcal{P}$ være polynomer på formen $f(x) = a_0 + \cdots + a_j x^j$ og $g(x) = b_0 + \cdots + b_k x^k$. Skriv $a_i = 0$ for $i > j$ og $b_i = 0$ for $i > k$, og la $m = \max(j, k)$. Da er

$$\begin{aligned}(f + g)(x) = f(x) + g(x) &= \big(a_0 + \cdots + a_j x^j\big) + \big(b_0 + \cdots + b_k x^k\big) \\ &= \big(a_0 + \cdots + a_m x^m\big) + \big(b_0 + \cdots + b_m x^m\big) = c_0 + \cdots + c_m x^m,\end{aligned}$$

der $c_i := a_i + b_i$. Dermed er også $f + g$ et polynom, så $f + g \in \mathcal{P}$. På samme måte viser man at $\alpha f \in \mathcal{P}$ for enhver $\alpha \in \mathbb{R}$. Beviset for egenskap *(i)–(vi)* følger som for C^0. For *(vii)* er det nok å bemerke at nullfunksjonen $0 \mapsto 0$ er et polynom, så den ligger i $\mathcal{P}$, og for *(viii)* er det nok å bemerke at funksjonen $x \mapsto -f(x)$ også er et polynom når f er det.

(**i**) Gitt hva vi har vist for C^0 og $\mathcal{P}$, holder det å observere at om f og g er polynomer av grad høyst m, er

- $f + g, \alpha f$ og $-f$ også polynomer av grad høyst m
- nullfunksjonen et polynom av grad høyst m.

(**j**) Vi definerer vektoraddisjon $0 + 0 := 0$, skalarmultiplikasjon $\alpha 0 := 0$ for enhver $\alpha \in \mathbb{K}$, og den additive inversen $-0 := 0$. Alle egenskapene vi må sjekke blir da på formen “$0 = 0$”, som er sant uansett hva “0” er.

(**k**) Om $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ og $\alpha \in \mathbb{K}$, definerer vi $\alpha (a_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\alpha a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, og om $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ definerer vi $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} + (b_k)_{k\in\mathbb{N}} := (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Vi får da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha a_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^p |a_k|^p = |\alpha|^p \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty,$$

så $\alpha (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Vi viser at summen av to følger også ligger i ℓ^p kun for tilfellet $p = 1$. Vi får da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty,$$

der vi i første steg brukte trekantulikheten. Dermed ligger også summen av følgene i ℓ^p. Resten av betingelsene bevises veldig likt som for C^0.

Bevis for 1.1.7. La $u, v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{R}$; vi skal vise at $u + v \in V$ og $\alpha u \in V$.

Siden u og v ligger i V, finnes reelle tall r og s slik at

$$u = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad v = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}.$$

Da er

$$u + v = \begin{pmatrix} 2r + 2s \\ r + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

der $t := r + s \in \mathbb{R}$. Altså er $u + v \in V$. Videre er

$$\alpha u = \begin{pmatrix} 2\alpha r \\ \alpha r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

der $t := \alpha r \in \mathbb{R}$. Altså er også $\alpha u \in V$.

Løsning på oppgave 1.1.8.

(**a**) Av antagelsene i Definisjon 1.1.6, er vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon lukkede operasjoner i V, det vil si at $+$ er en funksjon fra $V \times V$ til V og $\cdot$ er en funksjon fra $\mathbb{K} \times V$ til V. Egenskapene *(i)–(vi)* for V følger direkte fra at de holder for U. For å bevise egenskap *(vii)* lar vi $u \in V$ være vilkårlig, og får av Proposisjon 1.1.4 at $0_U = 0 \cdot u \in V$, av antagelse 1.1.6 *(ii)*. Altså er $0_U \in V$, så V har et nullelement. For egenskap *(viii)* lar vi $u \in V$ og får av Proposisjon 1.1.4 *(vi)* at $-u = (-1) \cdot u \in V$, igjen av Definisjon 1.1.6 *(ii)*. Dermed oppfyller V alle aksiomene for vektorrom.

(**b**) Om $u, v \in W$ er både $u, v \in V_1$ og $u, v \in V_2$, så da ligger $u + v$ både i V_1 og V_2, og altså også i W. Tilsvarende vil αu ligge i både V_1 og V_2 for enhver $\alpha \in \mathbb{K}$ og $u \in W$, så $\alpha u \in W$.

Løsning på oppgave 1.3.2. La $u, v \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$ og $a \in \mathbb{K}$. La $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ og $\beta_1, \dots, \beta_n$ være slik at

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \qquad \text{og} \qquad v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Da er

$$u + v = \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_n u_n, \qquad \text{der } \gamma_k := \alpha_k + \beta_k,$$

og

$$a u = \delta_1 u_1 + \cdots + \delta_n u_n, \qquad \text{der } \delta_k := a\alpha_k.$$

Dermed er også $u + v \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$ og $au \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$.

Løsning på oppgave 1.3.4.

(**a**) La $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ være slik at $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$. Ganger vi inn skalarene, får vi

$$0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Siden nullvektoren på venstre side er $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, må derfor både $\alpha_1 = 0$ og $\alpha_2 = 0$, som var det vi ønsket.

(**b**) Om $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$, er

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \big(\alpha_j \delta_{jk}\big)_{k=1}^{n} = \big(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{jk}\big)_{k=1}^{n} = \big(\alpha_k\big)_{k=1}^{n}.$$

Altså må hver komponent α_k være lik 0, som var det vi ønsket.

Løsning på oppgave 1.3.5.

(**a**) Dersom $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ er slik at $\alpha_1 p + \alpha_2 q = 0$, er

$$\alpha_1 + \alpha_2 t = 0 \qquad \text{for alle } t \in \mathbb{R}.$$

Setter vi $t = 0$ får vi da $\alpha_1 = 0$. Setter vi så $t = 1$ får vi $\alpha_2 = 0$. Altså er (p, q) lineært uavhengig.

(**b**) Om $\alpha_1 p + \alpha_2 q = 0$, er

$$0 = \alpha_1(t+3) + \alpha_2(t-3) = (\alpha_1 + \alpha_2)t + 3(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Sett $t = 0$ og få $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, og sett $t = 1$ og få $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Dette gir ligningssystemet

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

som kun har løsningen $\alpha_1, \alpha_2 = 0$.

(**c**) Vi må vise at ligningen $\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = 0$ har andre løsninger enn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$. Ligningen sier at

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1(t+1) + \alpha_2(3t+5) + \alpha_3(2t-4) \\ &= t(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3) + (\alpha_1 + 5\alpha_2 - 4\alpha_3). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Sett $t = 0$ og $t = 1$ som i forrige oppgave, og få ligningssystemet

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \end{cases}$$

Setter vi for eksempel $\alpha_3 = 1$ får vi $\alpha_1 = -11$ og $\alpha_2 = 3$. For dette valget av koeffisienter (og for de uendelig mange andre løsningene av systemet) ser vi at $(*)$ er sann for alle $t \in \mathbb{R}$, så vi har funnet en ikke-triviell løsning av ligningen $\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = 0$.

Løsning på oppgave 1.3.6. Anta at for eksempel $u = \alpha v$. Da er

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v = 0, \tag{$*$}$$

der $\alpha_1 = 1$ og $\alpha_2 = -\alpha$. Siden ikke begge skalarene er lik 0, betyr dette at (u, v) er lineært avhengig.

Anta motsatt at (u, v) er lineært avhengig, slik at det finnes skalarer α_1, α_2 som ikke begge er lik 0, og som er slik at $(*)$ er sant. Anta at for eksempel $\alpha_1 \neq 0$. Da kan vi løse $(*)$ for u og få

$$u = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v,$$

så u er en multippel av v.

Løsning på oppgave 1.3.7.

(**a**) Anta motsatt at for eksempel $u_k = 0_U$. Sett $\alpha_j = \delta_{jk}$ for $j = 1, \ldots, n$. Da er

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 1 \cdot u_k = 0_U,$$

selv om ikke alle skalarene $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ er lik 0 — en motsigelse.

(**b**) Utsagnet i oppgaven er bare det kontrapositive av utsagnet i definisjonen, så de to er ekvivalente. (Husk fra *MAT1105* at

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

for utsagn P og Q.)

(**c**) Om $(u_1, \dots, u_n)$ er lineært avhengig, finnes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ som ikke alle er lik 0, og som er slik at

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0. \tag{$*$}$$

La k være slik at $\alpha_k \neq 0$. Da er

$$u_k = \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j \neq k}} \beta_j u_j \tag{$**$}$$

der $\beta_j = -\alpha_j / \beta_k$, så u_k er en lineærkombinasjon av de andre.

Motsatt, om u_k er en lineærkombinasjon av de andre vektorene, kan vi skrive u_k som $(**)$ for $\beta_j \in \mathbb{K}$, så om vi setter $\alpha_j = -\beta_j$ for $j \neq k$ og $\alpha_k = 1$, får vi $(*)$. Siden ikke alle koeffisientene $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ er lik 0, må listen være lineært avhengig.

Løsning på oppgave 1.4.4. Om U er endeligdimensjonalt, finnes en liste $(u_1, \dots, u_n)$ som utspenner U, og siden U er ikke-triviell, er spennet av listen ikke-trivielt. Av Proposisjon 1.3.9 kan vi finne en mindre liste $(v_1, \dots, v_m) \subseteq (u_1, \dots, u_n)$ som er lineært uavhengig og som også utspenner U. Men da er $(v_1, \dots, v_m)$ en basis for U.

Motsatt, om U har en basis er det per definisjon endeligdimensjonalt.

Bevis for 1.4.5. Listen $\mathscr{B}$ er en basis, så den er lineært uavhengig og utspenner U, det vil si $\operatorname{span} \mathscr{B} = U$. For enhver $u \in U$ er da $u \in \operatorname{span} \mathscr{B}$, så det eksisterer $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ slik at (1.4.1) holder. Om nå $x_1', \dots, x_n' \in \mathbb{K}$ er en annen slik liste av skalarer, er

$$0 = u - u = (x_1 - x_1')u_1 + \cdots + (x_n - x_n')u_n.$$

Men $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig, så nødvendigvis må $(x_1 - x_1') = \cdots = (x_n - x_n') = 0$, det vil si $x_j' = x_j$ for $j = 1, \dots, n$. Altså er representasjonen (1.4.1) unik.

Bevis for 1.4.8. La $(u_1, \dots, u_n)$ og $(v_1, \dots, v_m)$ være to basiser for U. Av Lemma 1.4.7 er da $m \leqslant n$. Om vi bytter om på rollen til de to listene, finner vi at $n \leqslant m$. Altså er $m = n$.

Løsning på oppgave 1.4.10.

(**a**) I Oppgave 1.4.2 så vi at $(e_1, \dots, e_n)$ er en basis for $\mathbb{K}^n$. Siden denne listen inneholder n vektorer, blir $\dim \mathbb{K}^n = n$.

(**b**) La $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen i $\mathbb{C}^n$. Vi påstår at

$$\mathscr{C} := (e_1, \dots, e_n, i e_1, \dots, i e_n)$$

er en basis for $\mathbb{C}^n$ over $\mathbb{R}$, som da viser at dimensjonen over $\mathbb{R}$ er $2n$.

For enhver $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ kan vi skrive

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n \big(\Re(x_j) e_j + \Im(x_j) i e_j\big) = \sum_{j=1}^n \Re(x_j) e_j + \sum_{j=1}^n \Im(x_j) i e_j,$$

så x ligger i spennet til $\mathscr{C}$. Altså spenner $\mathscr{C}$ hele $\mathbb{C}^n$, når vi ser på $\mathbb{C}^n$ som et vektorrom over $\mathbb{R}$. For å se at $\mathscr{C}$ er lineært uavhengig, lar vi $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ være slik at

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j i e_j = 0.$$

Men da er

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \big(\alpha_j e_j + \beta_j i e_j\big) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j$$

der $\gamma_j := \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$. Siden $\mathscr{B}$ er en basis for $\mathbb{C}^n$ over $\mathbb{C}$, må da $\gamma_1, \dots, \gamma_n = 0$, som impliserer at $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n = 0$. Vi konkluderer at $\mathscr{C}$ er lineært uavhengig.

(**c**) Den korrekte generaliseringen er:

> Om U er et vektorrom over $\mathbb{C}$ med dimensjon n, har U dimensjon $2n$ over $\mathbb{R}$.

Beviset går på samme måte som i forrige deloppgave: La $(e_1, \dots, e_n)$ være en vilkårlig basis for U over $\mathbb{C}$, og vis at $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ er en basis for U over $\mathbb{R}$.

Bevis for utsagn på s. 12.

(i) Når $t_0, \dots, t_n$ er forskjellige, vil $t_k - t_j$ aldri være 0 når $k \neq j$, og dermed vil heller aldri produktet av disse tallene være 0.

(ii) Nevneren er bare en konstant. I telleren har vi produktet av n førsteordens polynomer, som blir et n-teordens polynom. Altså er Lagrange-polynomene polynomer av grad n.

(iii) Om $t = t_\ell$ for en $\ell \neq k$, vil nøyaktig ett av tallene $t_\ell - t_j$ (for $j \neq k$) være lik 0, og dermed vil produktet deres alltid være 0. Dermed blir $L_k(t_\ell) = 0$. Om derimot $\ell = k$, får vi

$$L_k(t_k) = \frac{\prod_{j\neq k}(t_k - t_j)}{\prod_{j\neq k}(t_k - t_j)} = 1$$

siden teller og nevner er like.

Bevis for 1.5.5. Funksjonen

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(t)$$

er et n-teordens polynom som er lik y_k i $t = t_k$ (for $k = 0, \dots, n$). Det eksisterer dermed minst ett slikt polynom. Om q er et annet polynom slik at $q(t_k) = y_k$ for $k = 0, \dots, n$, kan vi ifølge Proposisjon 1.5.4 finne skalarer $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ slik at $q = \alpha_0 L_0 + \cdots + \alpha_n L_n$. Da er

$$y_k = q(t_k) = \alpha_k L_k(t_k) = \alpha_k \qquad \forall\, k = 0, \dots, n.$$

Altså er $q = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k = p$, så vi har vist unikhet.

Bevis for 1.5.6. Nullfunksjonen $q(t) := 0$ ligger også i $\mathscr{P}_n$ og oppfyller $q(t_0), \dots, q(t_n) = 0$. Av Korollar 1.5.5 finnes det ett og bare ett polynom i $\mathscr{P}_n$ med denne egenskapen, så $p = q$. Altså er $p = 0$.

Løsning på oppgave 1.5.7. De to første, p_0 og p_1, er gitt per definisjon. Videre er

$$p_2(t) := \frac{2 \cdot 2 - 1}{2} t p_{2-1}(t) - \frac{2-1}{2} p_{2-2}(t) = \frac{3}{2} t \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}$$

og

$$p_3(t) := \frac{2 \cdot 3 - 1}{3} t p_{3-1}(t) - \frac{3-1}{3} p_{3-2}(t) = \frac{5}{3} t \left(\tfrac{3}{2} t^2 - \tfrac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} t = \frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t.$$

Løsning på oppgave 1.6.2.

(**a**) Om $u, u' \in V + W$ kan vi, per definisjon, skrive $u = v + w$ og $u' = v' + w'$ for $v, v' \in V$ og $w, w' \in W$. Da er $u + u' = v'' + w''$, der $v'' = v + v' \in V$ og $w'' = w + w' \in W$, så $u + u'$ ligger dermed i $V + W$. Om $u \in V + W$ og α er en skalar, skriver vi $u = v + w$ for $v \in V$ og $w \in W$ og får $\alpha u = \alpha v + \alpha w \in V + W$.

(**b**) Siden 0 ligger i både V og W, er

$$V = \{v + 0 : v \in V\} \subseteq V + W,$$

og tilsvarende for W.

(**c**) Dersom V eller W er uendeligdimensjonale, er det ingenting å vise. Anta derfor at V har basis $(v_1, \dots, v_n)$ og W basis $(w_1, \dots, w_m)$. Da kan alle elementer i $V + W$ skrives som en lineærkombinasjon av $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$ — med andre ord, $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$ utspenner $V + W$. Denne listen har $n + m = \dim V + \dim W$ elementer, og av Lemma 1.4.7 har enhver basis for $V + W$ dette antallet vektorer i en basis. Dette beviser påstanden.

Løsning på oppgave 1.8.1. For mengdene $\mathscr{P}_m$, $\mathscr{P}$ og $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ er vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon definert på samme måte. Det eneste vi behøver å sjekke i hvert tilfelle er derfor at den ene mengden er en delmengde av den andre.

(**a**) Mengden $\mathscr{P}_m$ består av alle reelle polynomer av grad høyst m. Når $m \leqslant n$ er alle $p \in \mathscr{P}_m$ også reelle polynomer av grad høyst n, så $p \in \mathscr{P}_n$.

(**b**) Mengden $\mathscr{P}$ inneholder alle reelle polynomer, så spesielt også alle reelle polynomer av grad høyst m.

(**c**) Ethvert polynom er kontinuerlig, så alle polynomer i $\mathscr{P}_m$ eller $\mathscr{P}$ ligger også i $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Kapittel 2

Løsning på oppgave 2.1.2. Om $T \in \mathscr{L}(U, V)$, er

$$T(0_U) = T(0 \cdot 0_U) = 0 \cdot T(0_U) = 0_V,$$

der vi har brukt at $0 \cdot u = 0_U$ og $0 \cdot v = 0_V$ for alle $u \in U$ og $v \in V$.

Bevis for 2.1.4. Som alltid med funksjoner, definerer vi addisjon mellom lineære avbildninger og multiplikasjon med skalarer *punktvis*:

$$(S+T)(u) := Su + Tu, \qquad (\alpha T)(u) = \alpha(Tu).$$

Det er da lett å sjekke at aksiom *(i)–(vi)* for vektorrom er oppfylt. For aksiom *(vii)* definerer vi nullelementet som nullfunksjonen $0_{\mathscr{L}}(u) := 0_V$. For aksiom *(viii)* lar vi $-T$ være den lineære avbildningen $(-T)u = -(Tu)$.

Bevis for 2.2.2. Det gjenstår å vise at $\ker(T)$ og $\operatorname{im}(T)$ er underrom. Om $u, v \in \ker(T)$ og α er en skalar, er

$$\begin{aligned} T(u+v) = Tu + Tv = 0 + 0 = 0 &\qquad \Longrightarrow \qquad u + v \in \ker(T), \\ T(\alpha u) = \alpha Tu = \alpha 0 = 0 &\qquad \Longrightarrow \qquad \alpha u \in \ker(T). \end{aligned}$$

Altså er $\ker(T)$ et underrom av U. Om $u, v \in \operatorname{im}(T)$ finnes $u', v' \in U$ slik at $T(u') = u$ og $T(v') = v$. Da er

$$u + v = T(u') + T(v') = T(u' + v') \in \operatorname{im}(T).$$

På samme måte får vi for enhver skalar α at

$$\alpha u = \alpha T(u') = T(\alpha u') \in \operatorname{im}(T).$$

Altså er $\operatorname{im}(T)$ et underrom.

Løsning på oppgave 2.2.5.

(**a**) Vi har $T(p) \in \mathbb{R}$ for alle p, så $\operatorname{im} T \subseteq \mathbb{R}$. Om $\alpha \in \mathbb{R}$ er vilkårlig og p er nulltegradspolynomet $p(x) := \alpha$, er $T(p) = \alpha$, så $\operatorname{im} T = \mathbb{R}$.

(**b**) Om $U := \mathscr{P}_n$ og $V := \mathbb{R}$, er $\dim U = n + 1$ og $\dim V = 1$. Videre er $\dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R} = 1$. Av dimensjonssatsen er dermed $\dim \ker T = (n+1) - 1 = n$. Kjernen til T rommer dermed "mesteparten" av definisjonsområdet $\mathscr{P}_n$, så den kan kalles "stor".

Bevis for 2.3.2. Anta at T er surjektiv. Vi vet allerede at $\operatorname{im} T \subseteq V$, så vi må vise $\operatorname{im} T \supseteq V$. La $v \in V$. Da finnes en $u \in U$ slik at $Tu = v$. Men $Tu \in \operatorname{im} T$, så $v \in \operatorname{im} T$.

Motsatt, om $\operatorname{im} T = V$ vil alle $v \in V$ også ligge i $\operatorname{im} T$, som er det samme som at $v = Tu$ for en $u \in U$. Altså er T surjektiv.

Løsning på oppgave 2.3.4.

(**a**) Om p er et tredjegradspolynom, er p deriverbar, og dp/dt er et andregradspolynom. Avbildningen T er derfor veldefinert fra $\mathscr{P}_3$ til $\mathscr{P}_2$. Den er lineær på grunn av de vanlige regnereglene for derivasjon:

$$T(\alpha p + \beta q) = \frac{d(\alpha p + \beta q)}{dt} = \alpha \frac{dp}{dt} + \beta \frac{dq}{dt} = \alpha Tp + \beta Tq.$$

(**b**) Avbildningen T er ikke injektiv (og derfor heller ikke bijektiv) fordi $Tp_0 = 0$, så kjernen er ikke-triviell. Den er surjektiv, for om $p = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ (der (p_0, p_1, p_2) er den kanoniske basisen — se Seksjon 1.5.1) er et vilkårlig polynom i $\mathscr{P}_2$, vil

$$T\big(\alpha_0 p_1 + \tfrac{\alpha_1}{2} p_2 + \tfrac{\alpha_2}{3} p_3\big) = p.$$

En annen måte å se at T er surjektiv på, er å observere at $\operatorname{im} T$ inneholder p_0, $2p_1$ og $3p_2$, og dermed også p_0, p_1 og p_2. Bildet inneholder dermed også alle lineærkombinasjoner av (p_0, p_1, p_2), og dermed hele $\mathscr{P}_2$.

(**c**) Om p er et vilkårlig polynom av grad høyst n, er dp/dt et polynom av grad høyst $n-1$. Generaliseringen T er dermed veldefinert. Den er lineær av samme grunn som før.

Avbildningen T er ikke injektiv (og derfor heller ikke bijektiv), men er surjektiv. Beviset er som i forrige deloppgave.

Bevis for 2.3.5.

(i) Om $T \in \mathscr{L}(U, V)$ er surjektiv, er $\dim \operatorname{im} T = \dim V$, så av dimensjonssatsen er

$$\dim V = \dim \operatorname{im} T \leqslant \dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim U.$$

(ii) Om $T \in \mathscr{L}(U, V)$ er injektiv, er $\ker T = \{0\}$, så

$$\dim U = \dim \operatorname{im} T + \dim \ker T = \dim \operatorname{im} T \leqslant \dim V.$$

(iii) Anvend *(i)* og *(ii)*.

Bevis for 2.3.6. Det gjenstår å bevise at T^{-1} er homogen, det vil si $T^{-1}(\alpha u) = \alpha T^{-1} u$. Siden

$$\alpha u = \alpha T(T^{-1}u) = T(\alpha T^{-1}u),$$

får vi når vi anvender T^{-1} på begge sider at

$$T^{-1}(\alpha u) = T^{-1}\big(T(\alpha T^{-1}u)\big) = \alpha T^{-1}u,$$

som var det vi ønsket.

Løsning på oppgave 2.4.2. La $T : \mathbb{R}^2 \to V$ være gitt ved $T((x_1, x_2)) := (x_1, x_2, 0)$. Da er T lineær, for om $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ og $\alpha \in \mathbb{R}$, er

$$T(x+y) = ((x+y)_1, (x+y)_2, 0) = (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = T(x) + T(y)$$

og

$$T(\alpha x) = ((\alpha x)_1, (\alpha x)_2, 0) = \alpha(x_1, x_2, 0) = \alpha T(x).$$

Om $y = (y_1, y_2, 0) \in V$ er $T((y_1, y_2)) = y$, så T er surjektiv, og om $T(x) = 0$ er $(x_1, x_2, 0) = 0$, så $x_1 = x_2 = 0$, det vil si $x = 0$, så T er injektiv. Altså er T en isomorfi, som viser at $\mathbb{R}^2 \cong V$.

Løsning på oppgave 2.4.3.

(i) Identitetsavbildningen $\mathrm{id} \colon U \to U$, $\mathrm{id}(u) := u$, er en isomorfi fra U til U.

(ii) Siden $U \cong V$ finnes en isomorfi $T : U \to V$. Men da er $T^{-1} : V \to U$ også en isomorfi, så $V \cong U$.

(iii) La $T : U \to V$ og $S : V \to W$ være isomorfier. Da er $S \circ T : U \to W$ en isomorfi.

Løsning på oppgave 2.4.5. Om $A \in M_n(\mathbb{K})$ er en kvadratisk matrise, er følgende ekvivalent:

(i) A er inverterbar.

(ii) Dersom $x \in \mathbb{K}^n$ er slik at $Ax = 0$, må $x = 0$.

(iii) Om $x \neq y$, er også $Ax \neq Ay$.

(iv) For enhver $b \in \mathbb{K}^n$ finnes en $x \in \mathbb{K}^n$ slik at $Ax = b$.

Bevis for 2.4.6. Operatoren $T : \ell^1 \to \ell^1$ er veldefinert fordi formelen for Ta definerer en entydig følge i $\mathbb{R}$ for enhver $a \in \ell^1$, og

$$\|Ta\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |(Ta)_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \|a\|_{\ell^1} < \infty,$$

så $Ta \in \ell^1$ for alle $a \in \ell^1$. Vi hopper over beviset for at T er lineær.

At *(ii)* og *(iii)* er ekvivalente følger av Lemma 2.3.3. Dersom $Ta = 0$ er

$$(0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots),$$

så da må $a_1, a_2, \dots = 0$, og dermed er $\ker T = \{0\}$.

T er ikke surjektiv fordi det for eksempel ikke finnes noen $a \in \ell^1$ slik at $Ta = (1, 0, 0, \dots)$. Dermed er hverken *(i)* eller *(iv)* sanne.

Bevis for 2.5.7. Vi vet at $[\cdot]_{\mathscr{C}}$ er lineær, så for alle $u \in U$ er

$$\begin{aligned} [T + S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}} &= [(T + S)u]_{\mathscr{C}} = [Tu]_{\mathscr{C}} + [Su]_{\mathscr{C}} = [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}} + [S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}} \\ &= \big([T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} + [S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\big)[u]_{\mathscr{B}}. \end{aligned}$$

Siden $[\cdot]_{\mathscr{B}} : U \to \mathbb{K}^n$ er en isometri er dermed $[T + S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} + [S]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$. Argumentet for at $[\alpha T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \alpha[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er helt analogt.

Bevis for 2.6.1. Ligning (2.6.1) følger direkte fra Teorem 2.5.4 ved å sette $T = \mathrm{id}$.

Bevis for 2.8.1.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Det gjenstår å vise at T er lineær og surjektiv. Om $(v, w), (v', w') \in V \oplus W$ og α er en skalar, er

$$\begin{aligned} T\big((v, w) + (v', w')\big) &= T\big((v + v', w + w')\big) = (v + v') + (w + w') \\ &= (v + w) + (v' + w') = T\big((v, w)\big) + T\big((v', w')\big) \end{aligned}$$

og

$$T\big(\alpha(v, w)\big) = T\big((\alpha v, \alpha w)\big) = \alpha v + \alpha w = \alpha(v + w) = \alpha T\big((v, w)\big).$$

Altså er T lineær. Om $u \in V + W$ finnes det, per definisjon, $v \in V$ og $w \in W$ slik at $u = v + w$, så da er $T((v, w)) = v + w = u$. Altså er T surjektiv.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) La $u \in V + W$, og anta at $u = v + w = v' + w'$ for $v, v' \in V$ og $w, w' \in W$. Da er

$$(v, w) = T^{-1}(v + w) = T^{-1}(u) = T^{-1}(v' + w') = (v', w'),$$

så $v = v'$ og $w = w'$. Altså er representasjonen unik.

(iii) $\Rightarrow$ (i) La $u \in V \cap W$. Vi kan da skrive u både som $v + w$, der $v = u$ og $w = 0$, og som $v' + w'$, der $v' = 0$ og $w' = u$. Av *(iii)* må da $v = v'$ og $w = w'$, det vil si $u = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Om V og W er endeligdimensjonale, er også $V + W$ og $V \oplus W$ det. Siden $V + W$ og $V \oplus W$ er isomorfe, vet vi av Proposisjon 2.3.5 *(iii)* at de har lik dimensjon. Men av Oppgave 1.6.5 vet vi at $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$, så resultatet følger.

Kapittel 3

Løsning på oppgave 3.1.3. Lengden til x i hver av de tre normene er

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\ell^1} &= |0| + |3| = 3,\\
\|x\|_{\ell^2} &= \sqrt{0^2 + 3^2} = 3,\\
\|x\|_{\ell^\infty} &= \max(|0|, |3|) = 3.
\end{aligned}$$

Lengden til y i hver av de tre normene er

$$\begin{aligned}
\|y\|_{\ell^1} &= |1| + |1| = 2,\\
\|y\|_{\ell^2} &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\\
\|y\|_{\ell^\infty} &= \max(|1|, |1|) = 1.
\end{aligned}$$

Avstanden mellom x og y i hver av de tre normene er

$$\begin{aligned}
\|x-y\|_{\ell^1} &= |-1| + |2| = 3,\\
\|x-y\|_{\ell^2} &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},\\
\|x-y\|_{\ell^\infty} &= \max(|-1|, |2|) = 2.
\end{aligned}$$

(Du vil få samme svar om du beregner normen til $y - x$ i stedet for $x - y$.)

Løsning på oppgave 3.1.4.

(i) *(Positiv definitt)* Av definisjonen er $\|u\|$ aldri negativ. Om $\|u\| = 0$ er $\big\|[u]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} = 0$, og siden $\|\cdot\|_{\ell^2}$ er en norm, må da $[u]_{\mathscr{B}} = 0$. Men da må også $u = 0$ (siden avbildningen $u \mapsto [u]_{\mathscr{B}}$ er en isomorfi).

(ii) *(Positivt homogen)* La $u \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$. Da er

$$\|\alpha u\| = \big\|[\alpha u]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} = \big\|\alpha[u]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} = |\alpha|\big\|[u]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} = |\alpha|\|u\|.$$

(iii) *(Trekantulikheten)* La $u, v \in U$. Siden $\|\cdot\|_{\ell^2}$ er en norm, er da

$$\|u+v\| = \big\|[u+v]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} = \big\|[u]_{\mathscr{B}}+[v]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} \leqslant \big\|[u]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2}+\big\|[v]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2} = \|u\|+\|v\|.$$

Løsning på oppgave 3.2.3. Egenskap *(i)* kan skrives som

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}, k \geqslant N \Rightarrow \|u_k - u\| < \varepsilon.$$

Egenskap *(ii)* kan skrives på akkurat samme måte. De er altså ekvivalente.

Løsning på oppgave 3.2.4. Det ser ut som at følgen konvergerer mot vektoren $u := \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$, det vil si vektoren som har komponenter $(u)_j = 2^{1-j}$. Vi sjekker først at u faktisk ligger i $\ell^1(\mathbb{R})$. Vi har

$$\|u\|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^{\infty} |(u)_k| = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{1-j},$$

som er endelig (rekken konvergerer mot tallet 2). Altså ligger u i $\ell^1(\mathbb{R})$.

Vi sjekker så at $u_k \to u$. Vi har

$$\begin{aligned}\|u-u_k\|_{\ell^1} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left|(u)_j-(u_k)_j\right| = \sum_{j=1}^{k}\left|2^{1-j}-2^{1-j}\right| + \sum_{j=k+1}^{\infty}\left|2^{1-j}-0\right| \\ &= \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{1-j} = 2^{1-k}.\end{aligned}$$

Siden $2^{1-k} \to 0$ når $k \to \infty$, konvergerer $\|u-u_k\|_{\ell^1}$ mot 0 når $k \to \infty$, som bekrefter at $u_k \to u$.

Løsning på oppgave 3.2.7.

(**a**) Vi beviser påstanden for lukkede kuler; det samme beviset fungerer for åpne kuler. La $\overline{B}_r(u)$ være en lukket kule, og definer $R := r + \|u\| + 1$. Vi påstår at $\overline{B}_r(u) \subseteq B_R(0)$, som ville bevist at $\overline{B}_r(u)$ er begrenset. La $v \in \overline{B}_r(u)$, det vil si $v \in U$ og $\|u-v\| \leqslant r$. Vi påstår at også $v \in B_R(0)$, det vil si $\|v-0\| < R$. Da er

$$\begin{aligned}\|v-0\| = \|v\| = \|(v-u)+u\| &\overset{\text{(trekantulikheten)}}{\leqslant} \|v-u\| + \|u\| \leqslant r + \|u\| \\ &< r + \|u\| + 1 = R.\end{aligned}$$

Altså er $v \in B_R(0)$.

(**b**) La $v \in B_r(u)$, og la $s := r - \|u-v\|$. Om $w \in B_s(v)$ er da

$$\|u-w\| \leqslant \|u-v\| + \|v-w\| < \|u-v\| + s = \|u-v\| + r - \|u-v\| = r$$

så $w \in B_r(u)$. Altså er $B_s(v) \subseteq B_r(u)$.

(**c**) La $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge i $\overline{B}_r(u)$ som konvergerer mot $v \in U$. For enhver $k \in \mathbb{N}$ er da

$$\|u-v\| \leqslant \|u-v_k\| + \|v_k - v\| \leqslant r + \|v_k - v\|.$$

Siden $\|v_k - v\| \to 0$ når $k \to \infty$, får vi $\|u-v\| \leqslant r$, så $v \in \overline{B}_r(u)$, som vi ønsket.

Løsning på oppgave 3.2.8. U er opplagt en delmengde av U.

(**a**) Om $u \in U$, består $B_r(u)$ utelukkende av vektorer i U, uansett hva $r > 0$ er, så $B_r(u) \subseteq U$, som vi ønsket.

(**b**) Om $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en følge i U som konvergerer, ligger nødvendigvis grensen i U, som vi ønsket.

(**c**) Anta at U er begrenset, så $U \subseteq B_r(0)$ for en $r > 0$. Om det finnes en $u \in U$ som er ulik 0, er også $\|u\| \neq 0$ (egenskap *(i)* i Definisjon 3.1.1). For enhver $k \in \mathbb{N}$ er da også $ku \in U$, og $\|ku\| = k\|u\|$. For stor nok $k \in \mathbb{N}$ vil derfor $ku \neq B_r(0)$ — en motsigelse. Altså inneholder ikke U noe annet enn 0.

Løsning på oppgave 3.3.2. La $u \in U$ og $\varepsilon > 0$. Om $\|u - v\|_U < \delta$ for en $\delta > 0$ er da

$$\|f(u) - f(v)\|_V \leqslant L\|u - v\|_U < L\delta.$$

Om vi velger $\delta := \varepsilon/L$ får vi $\|f(u) - f(v)\|_V < \varepsilon$, og vi er ferdige.

Løsning på oppgave 3.3.4.

(**a**) Anta at $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en følge i U som konvergerer mot u. Av Proposisjon 3.3.3 får vi at $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot $f(u)$. Av samme proposisjon igjen får vi at $(g(f(u_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mot $g(f(u))$. Av samme proposisjon finner vi dermed at $g \circ f$ er kontinuerlig.

(**b**) La $\varepsilon > 0$. Om $u, v \in U$, er

$$|f(u) - f(v)| = \big|\|u\| - \|v\|\big| \leqslant \|u - v\|,$$

der vi har brukt den omvendte trekantulikheten (Proposisjon 3.1.5). Om vi velger $\delta = \varepsilon$ vil dermed $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$ når $\|u - v\| < \delta$, som var det vi ønsket.

(**c**) La $u \in f^{-1}(F)$. Siden F er åpen, finnes en $\varepsilon > 0$ slik at $B_\varepsilon(f(u)) \subseteq F$. La $\delta > 0$ være slik at $v \in U$ og $\|v - u\|_U < \delta$ impliserer at $\|f(v) - f(u)\|_V < \varepsilon$. Satt sammen får vi da at om $v \in B_\delta(u)$ vil $f(v) \in B_\varepsilon(f(u)) \subseteq F$. Siden $f(v) \in F$ er ekvivalent med $v \in f^{-1}(F)$, får vi at $B_\delta(u) \subseteq F$, som var det vi ønsket.

(**d**) La $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge i $f^{-1}(F)$ som konvergerer mot $u \in U$. Siden f er kontinuerlig, vil $f(u_n) \to f(u)$. Følgen $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ er en konvergent følge i den lukkede mengden F, så grensen $f(u)$ ligger også i F. Men dette er det samme som at u ligger i $f^{-1}(F)$, som var det vi ønsket.

Bevis for 3.4.2. Det gjenstår å vise ulikhetene $|(u)_j| \leqslant \|u\|_{\ell^1}$ og $|(u)_j| \leqslant \|u\|_{\ell^\infty}$. Vi har

$$|(u)_j| \leqslant |(u)_j| + \sum_{\substack{k=1,\dots,n \\ k\neq j}} |(u)_k| = \sum_{k=1,\dots,n} |(u)_k| = \|u\|_{\ell^1}$$

og

$$|(u)_j| \leqslant \max_{k=1,\dots,n} |(u)_k| = \|u\|_{\ell^\infty}.$$

Løsning på oppgave 3.4.3.

(**a**) Vi har $|u_k| \leqslant \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \|u\|_{\ell^2}$ for $k = 1, 2$, så

$$\|u\|_{\ell^1} = |u_1| + |u_2| \leqslant \|u\|_{\ell^2} + \|u\|_{\ell^2} = 2\|u\|_{\ell^2}.$$

Motsatt kan vi skrive $u = v + w$, der $v = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $w = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Av trekantulikheten er

$$\|u\|_{\ell^2} = \|v + w\|_{\ell^2} \leqslant \|v\|_{\ell^2} + \|w\|_{\ell^2} = |u_1| + |u_2| = \|u\|_{\ell^1}.$$

(**b**) Siden du har løpt 1100 meter i horisontal retning, må du nødvendigvis ha løpt minst 1100 meter totalt.

Vi setter deg inn i et koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ der $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ er startposisjonen din, $u_N = \begin{pmatrix} 1100 \\ 145 \end{pmatrix}$ er sluttposisjonen din, og u_k (for $k = 0, 1, \ldots, N$) er posisjonen din etter k skritt. Da vil den totale løpeavstanden være tallet A gitt ved

$$A := \|u_1 - u_0\|_{\ell^2} + \|u_2 - u_1\|_{\ell^2} + \cdots + \|u_N - u_{N-1}\|_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{N} \|u_k - u_{k-1}\|_{\ell^2}$$

(summen av de euklidske avstandene mellom hvert skritt). Med estimatet $\|\cdot\|_{\ell^2} \leqslant \|\cdot\|_{\ell^1}$ fra forrige oppgave, kan vi begrense

$$A \leqslant B := \sum_{k=1}^{N} \|u_k - u_{k-1}\|_{\ell^1}$$

Gitt at vi for hvert skritt løper framover og oppover (i koordinatsystemet vårt), kan vi anta at $(u_k)_1 \geqslant (u_{k-1})_1$ og $(u_k)_2 \geqslant (u_{k-1})_2$ for hver $k = 1, 2, \ldots, N$. Dermed er

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^{N} \Big(\big|\underbrace{(u_k)_1 - (u_{k-1})_1}_{\geqslant 0}\big| + \big|\underbrace{(u_k)_2 - (u_{k-1})_2}_{\geqslant 0}\big| \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (u_k)_1 - (u_{k-1})_1 + \sum_{k=1}^{N} (u_k)_2 - (u_{k-1})_2 \\ &= (u_N)_1 - (u_0)_1 + (u_N)_2 - (u_0)_2 = 1100 - 0 + 145 - 0 = 1245 \end{aligned}$$

(der vi har brukt at alle leddene i summen, bortsett fra første og siste ledd, kansellerer).

Løsning på oppgave 3.4.4.

(i) La $c_1 = c_2 = 1$ i definisjonen.

(ii) Dette ser vi ved å bytte om på konstantene c_1 og c_2.

(iii) La $c_1, \tilde{c}_1 > 0$ være slik at

$$\|u\|_1 \leqslant c_1 \|u\|_2 \qquad \text{og} \qquad \|u\|_2 \leqslant \tilde{c}_1 \|u\|_3 \qquad \forall\, u \in U.$$

Da er

$$\|u\|_1 \leqslant c_1 \|u\|_2 \leqslant c_1 \tilde{c}_2 \|u\|_3 = c \|u\|_3 \qquad \forall\, u \in U$$

der $c := c_1 \tilde{c}_1$. Ulikheten motsatt vei følger på samme måte.

Løsning på oppgave 3.4.5.

(**a**) La $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ være en følge slik at $\|u_k - u\|_1 \to 0$. Da er $\|u_k - u\|_2 \leqslant c_2 \|u_k - u\|_1 \to 0$, så $\|u_k - u\|_2 \to 0$. Den motsatte implikasjonen følger på samme måte.

(**b**) La $v \in B_r(u)$, det vil si $v \in U$ og $\|v-u\|_1 < r$. Vi har $\|v-u\|_1 \geqslant \|v-u\|_2/c_2$, så $\|v-u\|_2 < rc_2$. Sistnevnte er det samme som å si at $v \in B'_{rc_2}(u)$. Altså er $B_r(u) \subseteq B'_{rc_2}(u)$. Den andre inklusjonen vises på samme måte.

(**c**) La E være åpen med hensyn på $\|\cdot\|_1$. Da finnes for enhver $u \in E$ en $r > 0$ slik at $B_r(u) \subseteq E$. Om $s := r/c_1$ vil $B'_s(u) \subseteq B_r(u)$ (av Oppgave (b)), så $B'_s(u) \subseteq E$. Altså er E også åpen med hensyn på $\|\cdot\|_2$.

La E være lukket med hensyn på $\|\cdot\|_1$. La $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge i E som konvergerer med hensyn på $\|\cdot\|_2$ mot en $u \in U$. Av Oppgave (a) konvergerer $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ også med hensyn på $\|\cdot\|_1$ mot u. Men E er lukket med hensyn på $\|\cdot\|_1$, så $u \in E$ — som var det vi ønsket.

La E være begrenset med hensyn på $\|\cdot\|_1$, så det finnes en $r > 0$ slik at $E \subseteq B_r(0)$. Siden $B_r(0) \subseteq B'_s(u)$, der $s := rc_2$, vil også $E \subseteq B'_s(0)$. Altså er E også begrenset med hensyn på $\|\cdot\|_2$.

Bevis for 3.5.3.

(i) Av Teorem 3.3.6 er T kontinuerlig hvis og bare hvis

$$\text{det finnes et tall } c \geqslant 0 \text{ slik at } \|Tu\|_V \leqslant c\|u\|_U \text{ for alle } u \in U. \qquad (*)$$

Dersom $(*)$ er sann, er

$$\|T\|_{\mathscr{L}} := \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} \leqslant \sup_{u\neq 0} \frac{c\|u\|_U}{\|u\|_U} = c,$$

så $\|T\|_{\mathscr{L}} < \infty$. Motsatt, om $\|T\|_{\mathscr{L}} := \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} < \infty$, finnes nødvendigvis en øvre skranke $c > 0$ slik at $\frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} \leqslant c$ for alle $u \neq 0$, det vil si $\|Tu\|_V \leqslant c\|u\|_U$ for alle $u \neq 0$. Siden denne siste ulikheten opplagt er sann for $u = 0$, gjelder den for alle $u \in U$, som er nettopp $(*)$.

(ii) Av punkt *(i)* er $\|T\|_{\mathscr{L}} := \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} < \infty$. Et supremum er en minste øvre skranke, så

$$\frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}} \qquad \forall\, u \in U,\ u \neq 0, \qquad (**)$$

og $\|T\|_{\mathscr{L}}$ er det minste tallet med denne egenskapen. Utsagnet $(**)$ er ekvivalent med

$$\|Tu\|_V \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}}\|u\|_U \qquad \forall\, u \in U,\ u \neq 0,$$

og siden $\|Tu\|_V \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}}\|u\|_U$ opplagt er sant for $u = 0$, er dette igjen ekvivalent med

$$\|Tu\|_V \leqslant \|T\|_{\mathscr{L}}\|u\|_U \qquad \forall\, u \in U,$$

som var det vi ville vise.

(iii) Denne ulikheten kan vises direkte fra definisjonen med supremum, eller ved hjelp av punkt *(ii)*. Vi gjør sistnevnte.

For enhver $u \in U$ er

$$\|STu\|_W = \|S(Tu)\|_W \leqslant \|S\|_{\mathscr{L}(V,W)}\|Tu\|_V \leqslant \|S\|_{\mathscr{L}(V,W)}\|T\|_{\mathscr{L}(U,V)}\|u\|_U.$$

Om vi deler på $\|u\|_U$ på begge sider, får vi $\frac{\|STu\|_W}{\|u\|_U} \leqslant \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)}\|T\|_{\mathcal{L}(U,V)}$, og om vi tar supremum over $u \neq 0$ får vi derfor

$$\|ST\|_{\mathcal{L}(U,W)} := \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|STu\|_W}{\|u\|_U} \leqslant \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)}\|T\|_{\mathcal{L}(U,V)}.$$

Løsning på oppgave 3.5.7. Tallet $\|A\|_\infty$ ligger opplagt i $[0,\infty)$ for alle A. Om $\|A\|_\infty = 0$ må $|(A)_{ij}| = 0$ for alle i, j, så A er nullmatrisen $0_{m\times n}$. Om $\alpha \in \mathbb{K}$ er

$$\|\alpha A\|_\infty = \max_{i,j} |(\alpha A)_{ij}| = \max_{i,j} |\alpha||A_{ij}| = |\alpha| \max_{i,j} |A_{ij}| = |\alpha|\|A\|_\infty.$$

Om $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ er

$$\begin{aligned}\|A+B\|_\infty &= \max_{i,j} |(A+B)_{ij}| \leqslant \max_{i,j}\big(|(A)_{ij}| + |(B)_{ij}|\big)\\ &\leqslant \big(\max_{i,j} |(A)_{ij}|\big) + \big(\max_{i,j} |(B)_{ij}|\big) = \|A\|_\infty + \|B\|_\infty.\end{aligned}$$

Kapittel 4

Bevis for 4.2.3. Betingelse *(i)* følger direkte fra betingelse *(i)* i Definisjon 4.1.1. Hvis $\alpha \in \mathbb{K}$ og $u \in U$, er

$$\|\alpha u\|^2 = \langle \alpha u, \alpha u\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle u,u\rangle = |\alpha|^2\langle u,u\rangle = |\alpha|^2\|u\|^2,$$

og tar vi kvadratrot på begge sider får vi betingelse *(ii)*.

Løsning på oppgave 4.3.5. Ingen av polynomene p_0, p_1, p_2 er lik nullfunksjonen. Vi har

$$\begin{aligned}\langle p_0, p_1\rangle_{L^2} &= \int_{-1}^1 1\cdot t\,dt = \big[t^2/2\big]_{t=-1}^1 = 0,\\ \langle p_0, p_2\rangle_{L^2} &= \int_{-1}^1 1\cdot\big(\tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}\big)\,dt = \big[\tfrac{1}{2}t^3 - \tfrac{1}{2}t\big]_{t=-1}^1\\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\big(1^3-1\big) - \big((-1)^3 - (-1)\big)\Big) = 0,\\ \langle p_1, p_2\rangle_{L^2} &= \int_{-1}^1 t\cdot\big(\tfrac{3}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}\big)\,dt = \big[\tfrac{3}{8}t^4 - \tfrac{1}{4}t^2\big]_{t=-1}^1\\ &= \Big(\big(\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4}\big) - \big(-\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{4}\big)\Big) = 0.\end{aligned}$$

Indreproduktene mellom forskjellige elementer i listen er altså lik 0, så listen er ortogonal.

Løsning på oppgave 4.3.7. Om $(u_1,\dots,u_n)$ er ortogonal, er $(v_1,\dots,v_n)$ ortonormal, der $v_k := u_k/\|u_k\| = u_k/\sqrt{\langle u_k,u_k\rangle}$. Vi får da

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, v_k\rangle v_k = \sum_{k=1}^n \Big\langle u, \frac{v_k}{\sqrt{\langle u_k,u_k\rangle}}\Big\rangle \frac{v_k}{\sqrt{\langle u_k,u_k\rangle}} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle u, v_k\rangle}{\langle u_k,u_k\rangle} v_k.$$

Bevis for 4.3.9. Vi lar $V = U$ og $T = \mathrm{id}$ i Teorem 4.3.8.

Bevis for 4.3.11. Vi har

$$\|u\|_U^2 = \langle u, u\rangle \overset{\text{Lem. 4.3.10}}{=} [u]_{\mathscr{B}} \cdot [u]_{\mathscr{B}} = \big\|[u]_{\mathscr{B}}\big\|_{\ell^2}^2.$$

Resultatet følger nå ved å ta kvadratrøtter.

Løsning på oppgave 4.3.12. For hver $u \in U$ og $v \in V$ gir Parsevals identitet at $\|u\|_U = \|[u]_{\mathscr{B}}\|_{\ell^2}$ og $\|v\|_V = \|[v]_{\mathscr{C}}\|_{\ell^2}$. Dermed er

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathscr{L}(U,V)} &= \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\big\|[Tu]_{\mathscr{C}}\big\|_{\ell^2}}{\|[u]_{\mathscr{B}}\|_{\ell^2}} \overset{2.5.4}{=} \sup_{\substack{u\in U\\ u\neq 0}} \frac{\big\|[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{C}}\big\|_{\ell^2}}{\|[u]_{\mathscr{B}}\|_{\ell^2}} \\ &= \sup_{\substack{x\in \mathbb{K}^n\\ x\neq 0}} \frac{\big\|[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}x\big\|_{\ell^2}}{\|x\|_{\ell^2}} = \big\|[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\big\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}.\end{aligned}$$

Løsning på oppgave 4.4.2.

(a) Vi har $\|u_1\| = \sqrt{2^2+0^2} = 2$, så $v_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$. Vi får da

$$\begin{aligned}v_2' = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 &= \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} - (5\cdot -1 + 7\cdot 0)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} - (-5)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dermed er $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Vi sjekker nå lett at $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ og at $v_1 \perp v_2$.

(b) Vi har $\|u_1\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, så $v_1 = \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$. Vi får

$$\begin{aligned}v_2' = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 &= \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} - (8\tfrac{3}{5} + 2\tfrac{4}{5})\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} - \tfrac{32}{5}\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}8\cdot 25 - 96\\ 2\cdot 25 - 128\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}104\\-78\end{pmatrix} = \frac{26}{25}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dermed får vi $\|v_2'\| = \frac{26}{25}\sqrt{4^2+3^2} = \frac{26}{5}$ og

$$v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|}v_2' = \begin{pmatrix}4/5\\-3/5\end{pmatrix}.$$

Bevis for 4.4.3. Siden rommet er endeligdimensjonalt, har det en basis. Bruk Gram–Schmidt-ortogonalisering på denne basisen.

Løsning på oppgave 4.4.4. La u_1 være vektoren i oppgaven. Vi velger vektorer $u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at (u_1, u_2, u_3) er lineært uavhengig, og gjør Gram–Schmidt på denne.

Dersom $u_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ og $u_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, er (u_1, u_2, u_3) lineært uavhengig (hvorfor det?). Vi utfører Gram–Schmidt og får

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = u_1,$$

$$
\begin{aligned}
v_2' &= u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\\
v_2 &= \frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\\
v_3' &= u_3 - \underbrace{\langle u_3, v_1\rangle}_{=0} v_1 - \underbrace{\langle u_3, v_2\rangle}_{=0} v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\\
v_3 &= \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Løsning på oppgave 4.5.2.

(**a**) Det er enkelt å vise at P_1, P_2, P_3 er lineære operatorer på $\mathbb{R}^2$, så vi hopper over den delen. La $y := P_1 x = (x_1 - x_2, 0)$. Da er

$$P_1^2 x = P_1 y = (y_1 - y_2, 0) = ((x_1 - x_2) - 0, 0) = (x_1 - x_2, 0) = P_1 x,$$

så P_1 er en projeksjon. For P_2 får vi $y := P_2 x = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, så

$$
\begin{aligned}
P_2^2 x = P_2 y &= \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2}}{2}, \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2}}{2}\right)\\
&= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) = P_2 x,
\end{aligned}
$$

så P_2 er en projeksjon. For P_3 får vi bare $P_3^2 x = (0,0) = P_3 x$, så P_3 er også en projeksjon.

(**b**) P_1 er avbildet i figur *(ii)*, P_2 i figur *(iii)* og P_3 i figur *(i)*.

(**c**) I den virkelige verden kan vi tenke på "projeksjon" som å kaste en skygge (eller et lys) på en flate. Hvert punkt x avbildes til punktet Px der skyggen treffer flaten. Et objekt som allerede ligger på skyggen, altså som kan skrives for Px for et annet punkt x, vil kaste skyggen sin til det samme punktet, altså Px, så $P^2 x = P(Px) = Px$.

Bevis for 4.5.4.

(i) Om $u, v \in V^\perp$ og α er en skalar, er

$$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = 0 \qquad \forall\ w \in V,$$

så $u + v \in V^\perp$, og

$$\langle \alpha u, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle = 0 \qquad \forall\ w \in V,$$

så $\alpha u \in V^\perp$.

(ii) La $u \in V \cap V^\perp$. Da er $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = 0$, så $u = 0$.

(iii) For enhver $v \in U$ vil $\langle 0, v\rangle = 0$, så $v \in U$ for alle $v \in \{0\}^\perp$ — med andre ord, $\{0\}^\perp = U$.

(iv) Om $u \in U^{\perp}$ er $\langle u, v\rangle = 0$ for alle $v \in U$. Dermed er $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = 0$, så $u = 0$.

Løsning på oppgave 4.5.10.

(**a**) Dette følger av Proposisjon 4.5.9 med $U = C([-1, 1], \mathbb{R})$ med L^2-indreproduktet $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ og med $V = \mathscr{P}_2$.

(**b**) Vi viste i Oppgave 4.3.5 at $(p_0, \ldots, p_2)$ er ortogonal i L^2-indreproduktet på intervallet $[-1, 1]$. Resultatet følger dermed av Oppgave 4.3.7.

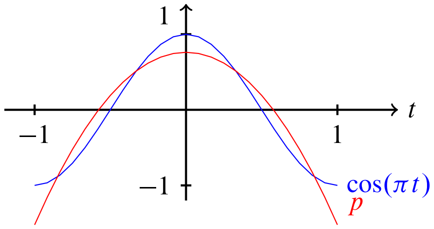
(**c**) Ved å bruke Wolfram Alpha får man

$$\langle p_0, p_0\rangle_{L^2} = 2, \qquad \langle p_1, p_1\rangle_{L^2} = \frac{2}{3}, \qquad \langle p_2, p_2\rangle_{L^2} = \frac{2}{5},$$
$$\langle f, p_0\rangle_{L^2} = 0, \qquad \langle f, p_1\rangle = 0, \qquad \langle f, p_2\rangle = -\frac{6}{\pi^2}.$$

Vi får dermed

$$p(t) = 0 + 0 + \frac{-\frac{6}{\pi^2}}{\frac{2}{5}}\frac{1}{2}(3t^2 - 1) = \frac{15}{2\pi^2}(1 - 3t^2).$$

Funksjonene p og f er tegnet i figuren under.



Bevis for 4.7.1. Det gjenstår å vise at $S_v \in U'$, og at T^* er veldefinert og lineær. Funksjonen S_v går opplagt fra U til $\mathbb{K}$. Om $u_1, u_2 \in U$ og $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, er

$$\begin{aligned} S_v(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= \langle T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle = \langle \alpha_1 T u_1 + \alpha_2 T u_2, v\rangle \\ &= \alpha_1\langle T u_1, v\rangle + \alpha_2\langle T u_2, v\rangle = \alpha_1 S_v u_1 + \alpha_2 S_v u_2, \end{aligned}$$

så S_v er lineær.

T^*v er veldefinert for alle $v \in V$ fordi S_v er unikt bestemt av v, og u_v er unikt bestemt av S_v (av unikhet i Teorem 4.6.1). Avbildningene $v \mapsto S_v$ og $S_v \mapsto u_v$ er lineære, så $T^*v := u_v$ er også lineær.

Løsning på oppgave 4.7.3.

$$\langle v, Tu\rangle_V = \overline{\langle Tu, v\rangle_V} = \overline{\langle u, T^*v\rangle_U} = \langle T^*v, u\rangle_U.$$

Løsning på oppgave 4.7.4.

(**a**) Alle funksjoner $f \in U$ er deriverbare, så df/dt er en veldefinert funksjon. Da er $d^n(Tf)/dt^n = d^{n+1}f/dt^{n+1} \in C_0^0([a, b], \mathbb{R})$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så Tf ligger også i U. Siden derivasjon er en lineær operator, konkluderer vi med at T er en veldefinert lineær operator.

(**b**) Vi bruker delvis integrasjon og får

$$
\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_a^b \frac{df}{dt}(t)g(t)\,dt = \underbrace{\big[f(t)g(t)\big]_{t=a}^b}_{=0} - \int_a^b f(t)\frac{dg}{dt}(t)\,dt \\
&= -\int_a^b f(t)\frac{dg}{dt}(t)\,dt = \big\langle f, -\tfrac{dg}{dt}\big\rangle.
\end{aligned}
$$

Altså er $T^*g = -\frac{dg}{dt}$.

Bevis for 4.7.6.

(ii) For alle $u \in U$ og $v \in V$ er

$$\langle v, (T^*)^*u\rangle_V = \langle T^*v, u\rangle_U = \overline{\langle u, T^*v\rangle_U} = \overline{\langle Tu, v\rangle_V} = \langle v, Tu\rangle_V.$$

Altså er T en kandidat til den adjungerte til T^*. Siden den adjungerte er unik, må $(T^*)^* = T$.

(iv) For $u \in U$ og $w \in W$ er

$$\langle STu, w\rangle_W = \langle Tu, S^*w\rangle_V = \langle u, T^*S^*w\rangle_U.$$

Siden dette også skal være lik $\langle u, (ST)^*w\rangle_U$, må $(ST)^* = T^*S^*$.

(vi) Vi har

$$\operatorname{im} T^* \overset{4.5.7\,(i)}{=} \big(\operatorname{im} T^*\big)^{\perp\perp} \overset{(v)}{=} \big(\ker(T^*)^*\big)^{\perp} \overset{(ii)}{=} \big(\ker T\big)^{\perp}.$$

Løsning på oppgave 4.8.2.

(**a**) Om $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ er $A^* = A$, så $AA^* = AA = A^*A$.

(**b**) Om A er unitær er

$$AA^* = AA^{-1} = I_n = A^{-1}A = A^*A.$$

Løsning på oppgave 4.8.4. Vi fant i Oppgave 4.7.4 at $T^* = -\frac{d}{dt}$. Dermed er

$$TT^* = \tfrac{d}{dt}\Big(-\tfrac{d}{dt}\Big) = -\tfrac{d^2}{dt^2} = \Big(-\tfrac{d}{dt}\Big)\tfrac{d}{dt} = T^*T,$$

så T er normal.

Bevis for 4.8.5. Det gjenstår å vise følgende:

(iii) Av (i) og (ii) er

$$\operatorname{im} T = (\operatorname{im} T)^{\perp\perp} = (\ker T)^{\perp} = (\ker T^*)^{\perp} = \operatorname{im} T^*.$$

(iv) Bruker vi (ii), får vi $U = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp} = \ker T \oplus \operatorname{im} T$.

(v) La $S := T - \alpha\,\mathrm{id}$. Da er $S^* = T^* - \overline{\alpha}\,\mathrm{id}$, så

$$
\begin{aligned}
SS^* &= (T - \alpha\,\mathrm{id})(T^* - \overline{\alpha}\,\mathrm{id}) = TT^* - \overline{\alpha}T - \alpha T^* + \alpha\overline{\alpha} \\
&= T^*T - \overline{\alpha}T - \alpha T^* + \alpha\overline{\alpha} = (T^* - \overline{\alpha}\,\mathrm{id})(T - \alpha\,\mathrm{id}) = S^*S.
\end{aligned}
$$

Løsning på oppgave 4.9.2.

(**a**) I_3 og A er selvadjungerte. $0_{4\times 2}$ er ikke selvadjungert fordi den ikke er kvadratisk, og B er ikke selvadjungert fordi $(B)_{12} = 1 \neq \overline{-1} = \overline{(B)_{21}}$.

(**b**) Om T er selvadjungert, er

$$TT^* \overset{(T=T^*)}{=} T^*T^* \overset{(T^*=T)}{=} T^*T,$$

så T er normal.

Løsning på oppgave 4.10.2. En liste $(a_1, \ldots, a_n)$ er ortonormal hvis og bare hvis $\langle a_j, a_k\rangle = \delta_{jk}$, det vil si

$$I_n = \big(\langle a_j, a_k\rangle\big)_{j,k=1,\ldots,n} = A^*A,$$

som igjen er ekvivalent med at $A^* = A^{-1}$.

Bevis for 4.10.3.

(i) $T^*T = T^{-1}T = \mathrm{id} = TT^{-1} = TT^*$.

(ii) Av Proposisjon 4.7.6 *(iii)* er T^* bijektiv og $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* = (T^*)^*$. Likeledes er T^{-1} bijektiv med invers $(T^{-1})^{-1} = (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(iii) Siden T er normal, er $\|T^*u\| = \|Tu\|$ (se Oppgave 4.8.3), og siden T er unitær, er $\|T^{-1}u\| = \|T^*u\|$.

(iv) Vi har $\|T\|_{\mathscr{L}} = \sup_{u\neq 0} \|Tu\|/\|u\| = 1$, av *(iii)*. Det samme gjelder for T^* og T^{-1}.

Bevis for 4.10.5. Vi sjekker at den påståtte inversmatrisen faktisk er en invers:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Altså er den gitte matrisen en høyreinvers. På samme måte sjekker man at matrisen er en venstreinvers.

Løsning på oppgave 4.11.3. Dersom $Ly = b$ og $Ux = y$, er

$$Ax = (LU)x = L(Ux) = Ly = b,$$

som vi ønsket.

Løsning på oppgave 4.12.1.

(**a**) For eksempel kan vi observere at nullelementet $0_{n\times n}$ ikke ligger i $\mathrm{SO}(n)$. Vi kan også observere at om $A \in \mathrm{SO}(n)$ vil for eksempel $2A \notin \mathrm{SO}(n)$, fordi $\det(2A) = 2^n \det(A) = 2^n \neq 1$.

(**b**) *(i)* Om $A, B \in \mathrm{SO}(n)$ vil

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}} = (AB)^{\mathsf{T}},$$

så AB er ortogonal, og

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1.$$

Altså er $AB \in \mathrm{SO}(n)$.

(ii) Identitetsmatrisen er opplagt ortogonal og har determinant 1. Videre er $AI_n = I_n A = A$ for alle $A \in \mathrm{SO}(n)$.

(iii) Vi lærte i *MAT1105* at matrisemultiplikasjon er assosiativ — $(AB)C = A(BC)$ for alle kvadratiske matriser A, B, C.

(iv) Om $A \in \mathrm{SO}(n)$ er

$$(A^{-1})^{-1} = (A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}},$$

så A^{-1} er ortogonal, og

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1.$$

Altså er også $A^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$.

Kapittel 5

Løsning på oppgave 5.1.2.

(**a**) Om (λ, u) er et egenpar og $\alpha \neq 0$, er $\alpha u \neq 0$, og $T(\alpha u) = \alpha(Tu) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$, så αu er også en egenvektor tilhørende λ.

(**b**) Om u og v er egenvektorer tilhørende λ og $u + v \neq 0$, er $T(u + v) = Tu + Tv = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$, så $u + v$ er også en egenvektor.

Løsning på oppgave 5.1.3.

(i) $\Leftrightarrow$ **(ii)** Skalaren λ er en egenverdi for T hvis og bare hvis det eksisterer en ikke-null vektor u slik at $Tu = \lambda u$, det vil si $(Tu - \lambda\,\mathrm{id})u = 0$, det vil si $u \in \ker(T - \lambda\,\mathrm{id})$.

(ii) $\Leftrightarrow$ **(iii)** Dette følger av ekvivalensen *(iii)* $\Leftrightarrow$ *(i)* i Lemma 2.3.3.

Løsning på oppgave 5.1.7. Underrommet $E_T(\lambda) \subseteq U$ består av alle egenvektorer tilhørende λ (i tillegg til origo). Av Lemma 1.4.7 har enhver lineært uavhengig liste av vektorer i $E_T(\lambda)$ lengde høyst $\dim(E_T(\lambda))$, med likhet nettopp når listen er en basis for $E_T(\lambda)$.

Bevis for 5.2.2. Av Teorem 2.5.1 er (5.1.1) sant hvis og bare hvis $[Tu]_{\mathscr{B}} = [\lambda u]_{\mathscr{B}}$. Vi har $[\lambda u]_{\mathscr{B}} = \lambda[u]_{\mathscr{B}}$ og (av Teorem 2.5.4) $[Tu]_{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}}$. Vi har altså funnet at (λ, u) oppfyller (5.1.1) hvis og bare hvis

$$[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}[u]_{\mathscr{B}} = \lambda[u]_{\mathscr{B}}.$$

Videre er $u = 0$ hvis og bare hvis $[u]_{\mathscr{B}} = 0$. Vi har dermed bevist utsagnet.

Løsning på oppgave 5.2.8. Vi skal vise at $A := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ har egenverdier

$$\lambda_1 = \cos\theta - i\sin\theta, \qquad \lambda_2 = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Det karakteristiske polynomet til A er

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_2) = \cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1,$$

der vi har brukt identiteten $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Dette annengradspolynomet har røtter

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\underbrace{\cos^2\theta - 1}_{=-\sin^2\theta}} = \cos\theta \pm i\sin\theta,$$

som var det vi ville vise.

Løsning på oppgave 5.3.5. Vi bruker induksjon på n. Om $n = 1$ er utsagnet opplagt sant. Anta derfor at utsagnet er sant for alle m-dimensjonale vektorrom, for en $m \in \mathbb{N}$, og la $n = m+1$. La $u_1, \ldots, u_{m+1}$ være egenvektorer til de $m+1$ forskjellige egenverdiene $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$. Anta at $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ er skalarer slik at

$$\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j u_j = 0. \tag{$*$}$$

Anvender vi T på begge sider av denne ligningen, får vi

$$0 = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j T u_j = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \lambda_j u_j,$$

og setter vi inn $\alpha_{m+1}u_{m+1} = -\sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$ får vi

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha'_j u_j = 0, \qquad \text{der } \alpha'_j := \alpha_j(\lambda_j - \lambda_{m+1}). \tag{$**$}$$

Om vi ser på T som en operator på det m-dimensjonale rommet $U' := \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_m)$, vet vi av induksjonshypotesen at $(u_1, \ldots, u_m)$ er lineært uavhengig, så av $(**)$ får vi at $\alpha'_1 = \cdots = \alpha'_m = 0$, som impliserer at $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Av $(*)$ må da også $\alpha_{m+1} = 0$, og vi er ferdig.

Bevis for 5.5.1. Av Teorem 4.8.5 *(v)*, er $T - \lambda\,\mathrm{id}$ normal. Av Teorem 4.8.5 *(i)* er da

$$E_T(\lambda) = \ker(T - \lambda\,\mathrm{id}) = \ker((T - \lambda\,\mathrm{id})^*) = \ker(T^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) = E_{T^*}(\overline{\lambda}).$$

Løsning på oppgave 5.5.5. En matrise er diagonaliserbar hvis og bare hvis den kan skrives som $A = RDR^{-1}$ for en diagonalmatrise D. Matrisen R i spektralteoremet er unitær, det vil si $R^{-1} = R^*$, så vi får $A = RDR^* = RDR^{-1}$. Videre er kolonnene i R egenvektorene til A, og at $R^* = R^{-1}$ er det samme som at kolonnene er ortonormale.

Bevis for 5.6.7. Det gjenstår å vise *(iii)*. Siden det totale antall singulærverdier er $n := \dim U$, følger resultatet av Dimensjonssatsen:

$$\#\{j : \sigma_j = 0\} = n - \#\{j : \sigma_j \neq 0\} \overset{(ii)}{=} n - \dim\operatorname{im} T \overset{2.2.3}{=} \dim\ker T.$$

Løsning på oppgave 5.6.8. Om $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ er egenverdiene til T, er $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ egenverdiene til T^2. Vi har $T^*T = T^2$, slik at singulærverdiene er kvadratrøttene av tallene $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, som altså blir $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|$.

Bevis for 5.6.11.

(iii) Av *(ii)* har $\operatorname{im} T$ en basis med r elementer, så $\operatorname{rank} T = \dim\operatorname{im} T = r$.

Bevis for 5.7.3. Det gjenstår å bevise utsagnet om basisskiftematriser. Av Proposisjon 2.6.3 vet vi at basisskiftematrisen fra $\mathscr{B}$ til standardbasisen er B. Basisskiftematrisen fra $\mathscr{B}$ til standardbasisen er derfor $B^{-1} = B^*$. Det samme argumentet gjelder for $\mathscr{C}$ og C.

Bevis for 5.7.4. Beviset for at T_k er en lineær avbildning fra U til V, følger de samme argumenter vi har brukt tidligere. Ved å sammenligne (5.7.2) med uttrykket (5.6.2) for singulærverdidekomposisjonen av T, ser vi at (5.7.2) faktisk er singulærverdidekomposisjonen av T_k; spesielt har T_k nøyaktig k ikke-null singulærverdier. Det følger da av Korollar 5.6.11 *(iii)* at $\operatorname{rank} T_k = k$.

Kapittel 6

Løsning på oppgave 6.2.5. Siden g_k og h_k er lineærkombinasjoner av forskjellige f_k-funksjoner, holder det å vise at $f_k \in C^0(\mathbb{T})$. Om $\varepsilon > 0$ og om $s, t \in \mathbb{T}$ med $|s - t| < \delta$ (for et lite tall $\delta > 0$), finnes det $j \in \mathbb{Z}$ slik at

$$s - t - 2j\pi \in (-\delta, \delta).$$

Dermed er

$$|f_k(s) - f_k(t)| = \big|e^{iks}\underbrace{e^{-2ij\pi}}_{=1} - e^{ikt}\big| = \underbrace{|e^{ikt}|}_{=1}\big|e^{iks-ikt-2ijk\pi} - 1\big| = \big|e^{ik(s-t-\pi j)} - 1\big|$$

Siden $\lim_{r\to 0} x^r \to 1$ for alle $x \in \mathbb{C}$ ulik 0, finnes en $\delta > 0$ slik at $|(e^{ik})^r - 1| < \varepsilon$ når $|r| < \delta$. Med denne verdien av δ får vi $|f_k(s) - f_k(t)| < \varepsilon$, som vi ønsket.

Bevis for 6.3.4. Det gjenstår å vise at $\int_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_k(t)\,dt \to 0$ når $k \to \infty$ for alle $\delta \in (0, \pi)$. Vi har

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{T}} \varphi_k(t)\,dt &\geqslant \int_{[-\delta/2,\delta/2]} \varphi_k(t)\,dt = c_k \int_{-\delta/2}^{\delta/2} (1 + \underbrace{\cos t}_{\geqslant \cos(\delta/2)})^k\,dt \\ &\geqslant c_k \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \big(1 + \cos(\delta/2)\big)^k\,dt = \delta c_k \big(1 + \cos(\delta/2)\big)^k, \end{aligned}$$

slik at $c_k \leqslant \big(1 + \cos(\delta/2)\big)^{-k}/\delta$. Vi får dermed

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}\setminus[-\delta,\delta]} \varphi_k(t)\,dt &= 2c_k \int_\delta^\pi (1 + \underbrace{\cos t}_{\leqslant \cos\delta})^k\,dt \leqslant 2c_k \int_\delta^\pi (1 + \cos\delta)^k\,dt \\ &= 2c_k(\pi - \delta)(1 + \cos\delta)^k \leqslant \frac{2(\pi - \delta)}{\delta} \underbrace{\left(\frac{1 + \cos\delta}{1 + \cos(\delta/2)}\right)}_{<1}^k, \end{aligned}$$

som konvergerer mot 0 når $k \to \infty$.

Kapittel C

Løsning på oppgave C.1.1.

(**a**) Å komme fra (C.1.2) til (C.1.2') og tilbake er enkel regning. Om $p \in (1, \infty)$ er både p og $p - 1$ positive, så

$$p - 1 < p \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \frac{p}{p-1} = q.$$

(**b**) Vi vet fra *MAT1100* at maksimum av en funksjon $g \colon E \to \mathbb{R}$ oppnås enten på randen av E eller i et kritisk (der g' er null). Randen av $E := [0, \infty)$ er $\{0\}$, der

$$(sr - f(r))\big|_{r=0} = 0 - f(0) = 0.$$

Kritiske punkter finner vi slik:

$$\frac{d}{dr}(sr - f(r)) = s - r^{p-1} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = s^{1/(p-1)}.$$

(Merk at $r \in [0, \infty)$ når $s \in [0, \infty)$.) I det kritiske punktet får vi dermed funksjonsverdien

$$(sr - f(r))\big|_{r=s^{1/(p-1)}} = s^{1+\frac{1}{p-1}} - \frac{s^{\frac{p}{p-1}}}{p} = \frac{p-1}{p} s^{\frac{p}{p-1}} = \frac{s^q}{q}$$

der q er gitt ved (C.1.2). Siden denne verdien alltid er større enn verdien i $r = 0$, må dette være supremumsverdien.

Register