

# Oblig 1

Oliver Ekeberg

August 28, 2025

## 1 1.4

### 1.1 1.4.2

Vis at standardbasisen  $(e_1, \dots, e_n)$  er en basis for  $\mathbb{K}^n$

pf:

En

Først viser jeg at  $(e_1, \dots, e_n)$  er lineært uavhengig. Dette skjer når likningen

$$0 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

har eneste løsning at  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Vi vet videre at  $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^n$  hvor j er da posisjonen til vektoren inne i listen, og k er da den k'te posisjonen i n-tuppelen.

I nesten enhver situasjon så har vi en liste med n-tupler

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j * e_j \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j * (\delta_{jk})_{k=1}^n \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{jk} \right)_{k=1}^n \\ &= (\alpha_k) \end{aligned}$$

hvis og bare hvis  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Så  $(e_1, \dots, e_n)$  er lineært uavhengig

Deretter må jeg vise at listen  $(e_1, \dots, e_n)$  utspenner heel  $\mathbb{K}^n$

Definisjonen på spennet av en liste med vektorer er definert som

$$\text{span}(\mathbb{K}^n) = \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

Siden  $(e_1, \dots, e_n)$  er lineært uavhengig, så vet vi at det finnes n uavhengige vektorer, og de må av den grunn utspenne hele  $\mathbb{K}^n$

## 1.2 1.4.6

### 1.2.1 a)

La  $C = (e_1, \dots, e_n)$  være standardbasisen til  $\mathbb{K}^n$ . Vis at  $[x]_C = x, \forall x \in \mathbb{K}^n$ .

pf:

Vi vet at  $e_j = (\delta_{jk})$  som er den j-te n-tuppleen, som er 0 overalt enn i den k-te posisjonen.

Da er enhver  $x \in \mathbb{K}^n$  en lineær kombinasjon av standardbasisen, og kan skrives som

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n x_j e_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (\delta_{jk}) \\ &= (x_k) \end{aligned}$$

Da vil av teorem 1.4.5, som sier at hvis  $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \Rightarrow [u]_B = (x_1, \dots, x_n)$  gitt at basisen til et vektorrom  $U$  over  $\mathbb{K}$  er gitt ved at  $B = (u_1, \dots, u_n)$ , kunne si at  $[x]_C = x, \forall x \in \mathbb{K}^n$

### 1.2.2 b)

La  $U$  være et vektorrom over  $\mathbb{K}$  med en basis  $B = (u_1, \dots, u_n)$ . Vis at

$$[u_j]_B = e_j, \forall j = 1, \dots, n$$

Vi vet at vi kan uttrykke  $u_j$  som  $0 * u_1 + \dots + 1 * u_j + \dots + 0 * u_n$ .

Da vet vi fra teorem 1.4.5 at  $[u_j]_B = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Dette er det samme som å skrive  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  hvor 1 er i den j-te plassen, som viser at

$$[u_j]_B = e_j, \forall j = 1, \dots, n$$

$$x + y = z$$