Oblig 1

Oliver Ekeberg

August 31, 2025

Contents

1 1.4

1.1 1.4.2

Vis at standardbasisen $(e_1, ..., e_n)$ er en basis for $\mathbb{K}^n$

pf:

En

Først viser jeg at $(e_1, ..., e_n)$ er lineært uavhengig. Dette skjer når likningen

$$0 = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$$

har eneste løsning at $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Vi vet videre at

$$e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^n$$

hvor j er da posisjonen til vektoren inne i listen, og k er da den k´te posisjonen i n-tuppelen.

I nesten enhver situasjon så har vi en liste med n-tupler

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j * e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j * (\delta_{jk})_{k=1}^n \\
&= (\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{jk})_{k=1}^n \\
&= (\alpha_k)
\end{aligned}$$

hvis og bare hvis $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$

Så $(e_1, ...e_n)$ er lineært uavhengig

Deretter må jeg vise at listen $(e_1, ...e_n)$ utspenner heel $\mathbb{K}^n$

Definisjonen på spennet av en liste med vektorer er definert som

$$span(\mathbb{K}^n) = \{\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n : \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

Siden $(e_1, ..., e_n)$ er lineært uavhengig, så vet vi at det finnes n uavhengige vektorer, og de må av den grunn utspenne hele $\mathbb{K}^n$

1.2 1.4.6

1.4.6 a)

La $C = (e_1, ..., e_n)$ være standardbasisen til $\mathbb{K}^n$. Vis at $[x]_C = x, \forall x \in \mathbb{K}^n$.

pf:

Vi vet at $e_j = (\delta_{jk})$ som er den j-te n-tuppelen, som er 0 overalt enn i den k-te posisjonen.

Da er enhver $x \in \mathbb{K}^n$ en lineær kombinasjon av standardbasisen, og kan skrives som

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j(\delta_{jk})$$
$$= (x_k)$$

Da vil av teorem 1.4.5, som sier at hvis $u = x_1 u_1 + ... + x_n u_n => [u]_B = (x_1, ..., x_n)$ gitt at basisen til et vektorrom U over $\mathbb{K}$ er gitt ved at $B = (u_1, ..., u_n)$, kunne si at $[x]_C = x, \forall x \in \mathbb{K}^n$

1.4.6 b)

La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$ med en basis $B = (u_1, ..., u_n)$. Vis at

$$[u_j]_B = e_j, \forall j = 1, ..., n$$

Vi vet at vi kan uttrykke u_j som $0 * u_1 + ... + 1 * u_j + ... + 0 * u_n$.

Da vet vi fra teorem 1.4.5 at $[u_j]_B = (0, ..., 1, ..., 0)$. Dette er det samme som å skrive $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$ hvor 1 er i den j-te plassen, som viser at

$[u_j]_B = e_j, \forall j = 1, ..., n$