

---

# Elektromagnetismus auf planaren Graphen

---

*Author:*  
Oliver SKOČEK

# Inhaltsverzeichnis

1	Planare Graphen	3
2	Funktionenräume und Operatoren	10
3	Das Poisson Problem	14
4	Die Maxwell-Gleichungen	20
5	Potentialformulierung der Maxwellgleichungen	23
6	Kanonische Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	25

# Einführung

Die Absicht dieser Arbeit ist es ausgehend von der Theorie elektrischer Netzwerke eine Theorie elektromagnetischer Phänomene in der Ebene zu entwickeln. Dabei soll kein Kontinuumsübergang gemacht werden sondern allein mit planaren Graphen gearbeitet werden. Zu diesem Zwecke werden einige grundlegende Begriffe der Graphentheorie eingeführt. Darauf aufbauend werden dann im zweiten Kapitel Funktionenräume auf diesen Graphen definiert und analog zur mehrdimensionalen Analysis wird eine Theorie mit Analogien zum gewohnten Gradienten, der Divergenz und dem Rotor vorgestellt. Abgeschlossen wird diese Theorie durch ein zum de Rham Komplex analoges Theorem.

Im dritten Kapitel wird dann ein verallgemeinertes Poissonproblem vorgestellt, dass direkt verwendet werden kann um Widerstandsnetzwerke zu lösen. Dies zeigt, dass viele Analogien zwischen dem Problem der Widerstandsnetzwerke und dem Poissonproblem der Elektrostatik existieren.

Im vierten Kapitel wird dann eine Version der Maxwell-Gleichungen auf planaren Graphen vorgestellt und zwei wichtige Eigenschaften, Energieerhaltung und Ladungserhaltung behandelt. Im darauffolgenden Kapitel werden die Maxwellgleichungen in Potentialformulierung vorgestellt und ihre Symmetrie die Eichtransformation vorgestellt. Im Kapitel "kanonische Quantisierung" wird dann der Sprung von einer klassischen Theorie in eine Quantentheorie gemacht und die Schrödingergleichung des Photons konstruiert.

# Kapitel 1

## Planare Graphen

Ein Graph besteht aus Ecken  $V$  und Kanten  $E$ . Die Ecken und Kanten stehen in Beziehung zueinander. Man sagt eine Kante *verbindet* zwei Ecken. Wir wollen nur solche Graphen betrachten, deren Kanten jeweils zwei unterschiedliche Ecken verbinden.



Abbildung 1.1: Beispiel Graph.

Die Beziehung zwischen Ecken und Kanten kann durch eine Matrix dargestellt werden. Der vertikale Index der Matrix steht für die Kanten und der horizontale Index steht für die Ecken. Die Matrix ist Eins falls die Kante die Ecke mit einer anderen Ecke verbindet und sonst Null. Diese Matrix nennt man die **Inzidenzmatrix** des Graphen.

Als Beispiel betrachte die Inzidenzmatrix des Graphen in Abbildung 2.1.

1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Im Grunde interessieren wir uns nicht für die spezielle Realisierung von Ecken und Kanten, sondern für die Verbindungsstruktur, die genau durch die Inzidenzmatrix festgelegt wird. Dies legt folgende Definition nahe.

**Definition 1.1.** Ein **Graph** ist eine Matrix (Inzidenzmatrix) deren Zeilen-summe zwei ist. Zwei Graphen mit Inzidenzmatrizen  $X$  und  $Y$  sind gleich falls man  $X$  aus  $Y$  durch Vertauschung von Zeilen und Spalten erhalten kann.

**Bemerkung 1.2.** Alternativ kann ein Graph auch durch eine Adjazenzmatrix definiert werden. Eine solche Matrix ist quadratisch und beide Indizes stehen für die Ecken des Graphen. Die Adjazenzmatrix ist eins falls die Ecken durch eine Kante verbunden sind und sonst Null. Als Beispiel die Adjazenzmatrix unseres Beispielgraphen.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Der Nachteil der Adjazenzmatrix ist, dass sie keine Mehrfachkanten zwischen zwei Ecken zulässt.

Manchmal ist es notwendig über Teile von Graphen zu sprechen. Hierzu dient das Konzept des Teilgraphen. Ein Teilgraph eines Graphen  $G$  ist ein Graph, den man durch entfernen von Ecken und Kanten aus  $G$  erhält. Bedenke dabei, dass mit jeder Ecke auch alle diese Ecke verbindenden Kanten entfernt werden müssen.

**Definition 1.3.** Sei  $G$  ein Graph mit Inzidenzmatrix  $X$  und  $H$  ein Graph mit Inzidenzmatrix  $Y$ , dann ist  $G$  ein **Teilgraph** von  $H$ , falls man die Matrix  $X$  durch entfernen von Zeilen oder Spalten aus der Matrix  $Y$  erhalten kann.

Betrachten wir hierzu einen Teilgraph des Beispielgraphen.



Abbildung 1.2: Teilgraph des Beispielgraphs.

Die zugehörige Inzidenzmatrix erhalten wir indem wir die ersten beiden Spalten entfernen und anschließend alle Zeilen, deren Summe ungleich zwei

ist. Das Resultat ergibt dann für Kanten 4, 7 und 8 folgende Inzidenz mit den Ecken 3, 4 und 5.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Eine spezielle Art von Teilgraph erhält man, wenn man eine Teilmenge  $U$  der Ecken fixiert und alle Kanten aus dem Graphen entfernt, die eine nicht in der Teilmenge  $U$  enthaltene Ecke verbinden. Man nennt so einen Graphen durch die Menge  $U$  **induzierten Teilgraph**. Der Teilgraph in Abbildung 2.2 ist ein solches Beispiel. Es ist der durch  $U = \{3, 4, 5\}$  induzierte Teilgraph des Beispielgraphen.

**Definition 1.4.** Sei  $G$  ein Graph und  $n$  eine natürliche Zahl, dann nennt man eine Folge von Ecken  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  für die gilt, dass aufeinander folgende Ecken immer durch eine Kante verbunden sind, einen **Pfad** auf  $G$ . Falls  $x_0 = x_n$  gilt, nennt man dies einen **geschlossenen Pfad**. Falls zusätzlich bis auf  $x_0$  und  $x_n$  keine Ecke mehrfach vorkommt, nennt man den Pfad **einfach geschlossen**.

Man nennt  $G$  **zusammenhängend**, falls man von jeder Ecke von  $G$  jede andere Ecke über einen Pfad erreichen kann. Sei weiters  $k \in \mathbb{N}$ , dann sagt man ein Graph ist  **$k$ -fach zusammenhängend**, falls man  $k - 1$  beliebige Kanten entfernen könnte und der resultierende Graph immer noch zusammenhängend wäre.

Alle Graphen werden von hier an als zusammenhängend angenommen. Allgemein lässt sich jeder Graph als Ansammlung von zusammenhängenden Teilgraphen darstellen, wodurch diese Annahme im Sinne einer Vereinfachung gerechtfertigt wird.

**Definition 1.5.** Ein Graph hat eine **planare Darstellung** wenn man den Graph auf einem Blatt Papier zeichnen kann, indem man für jede Ecke einen Punkt zeichnet und für jede Kante einen Strich zwischen den Eck-Punkten, die sie verbinden soll, ohne dass sich dabei zwei Striche kreuzen.

Der Graph aus Abbildung 2.1 hat eine planare Darstellung. Um dies zu sehen muss man nur die Position von Ecke Nummer 2 verändern.



Abbildung 1.3: Beispiel Graph (planar).

Im Allgemeinen gibt es mehrere Wege wie ein bestimmter Graph gezeichnet werden kann. Es gibt sogar für ein und denselben Graphen oft mehrere planare Darstellungen.



Abbildung 1.4: Beispiel Graph (planar) alternativ.

Es ist also zusätzliche Information notwendig um eine planare Darstellung eindeutig festzulegen. Diese zusätzliche Information kann über die Flächen aus denen sich die planare Darstellung zusammensetzt gegeben werden.

**Definition 1.6.** Sei  $G$  ein Graph, dann nennt man  $G$  einen **Zyklus** oder **zyklisch**, falls jede Ecke von  $G$  mit genau zwei Kanten verbunden ist.

Betrachten wir eine der planaren Darstellungen des Beispielgraphen. Eine **Fläche** ist hier ein Zyklus, der keine Ecke einschließt.



Abbildung 1.5: Beispiel Graph (planar) mit Flächen.

**Bemerkung 1.7.** Sei  $G$  ein Graph und  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  eine Menge von zyklischen induzierten Teilgraphen, sodass jede Kante von  $G$  in maximal zwei der Zyklen vorkommt und jede Ecke von  $G$  in mindestens einem der Zyklen vorkommt, dann gibt es eine eindeutige planare Darstellung des Graphen  $G$ , dessen Flächen genau die  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  sind.

**Definition 1.8.** Ein planarer Graph  $G = (g, f)$  ist ein Graph  $g$  und eine Menge  $f$  von Zyklen aus  $g$  wie in Bemerkung 1.6. beschrieben. Sei weiters  $e$  eine Kante von  $g$ , dann sagt man  $e$  liegt am **Rand** des Graphen wenn  $e$  genau einmal in einer Fläche vorkommt. Der Teilgraph, der genau die am Rand liegenden Kanten enthält nennt man den **Rand des Graphen**.

Die in Bemerkung 1.6. beschriebene Struktur legt ein mit planaren Graphen eng verknüpft Konzept nahe. Jede Kante des Graphen ist entweder ein Bindeglied zwischen zwei Flächen oder es liegt am Rand des Graphen. Die am Rand liegenden Kanten können wiederum als Bindeglied mit der den Graphen umgebenden Fläche, genannt  $A_\infty$ , angesehen werden und somit haben wir das Konzept des dualen Graphen entdeckt.

**Definition 1.9.** Es sei  $G$  ein planarer Graph, dann kann man einen neuen Graphen, den **dualen Graph**  $G^D$ , konstruieren, dessen Kanten mit denen von  $G$  übereinstimmen, aber dessen Ecken die Flächen von  $G$  zusammen mit der umgebenden Fläche sind, also  $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n, A_\infty\}$ . Für eine gegebene Kante  $e$  und Ecke des dualen Graphen  $v \in V$  ist die Inzidenzmatrix Eins falls  $e$  die Fläche  $v$  begrenzt und sonst Null.

Betrachte den dualen Graph des planaren Graphen aus Abbildung 1.5. Beachte die doppelte Kante zwischen Ecke  $A_4$  und Ecke  $A_\infty$ .



Abbildung 1.6: Dualer Graph des Beispielgraphen.

Die blauen Ecken symbolisieren die Ecken des Ausgangsgraphen, während die roten Ecken die Ecken des dualen Graphen darstellen. Die Platzierung von  $A_\infty$  ist beliebig gewählt. Offensichtlich bestimmt diese Wahl, welcher der Ecken des Ausgangsgraphen die umgebende Fläche des dualen Graphen darstellt.



**Bemerkung 1.10.** Der duale Graph  $G^D$  ist immer auch fast ein planarer Graph, denn jede Ecke von  $G$  kann mit einem Zyklus in  $G^D$  identifiziert werden, somit bleibt aber offen welche dieser Zyklen, die umgebende Fläche ist. Dies ist insbesondere von Bedeutung wenn man den dualen Graphen des dualen Graphen, den so genannten **bidualen Graphen** bildet. Um eine eindeutige Zuordnung zu erzwingen muss immer einer der Ecken ausgezeichnet werden oder man verzichtet auf die planare Darstellung und arbeitet mit Polyedern.

Bislang wurden nur "ungerichtete Graphen" behandelt, also solche deren Kanten keine ausgezeichnete Beziehung mit der einen oder der anderen durch sie verbundenen Ecke haben. Graphen, deren Kanten eine solche Orientierung aufweisen, nennt man "gerichtete Graphen" und eine Adjazenzmatrix ist ein praktisches Weg um solche Strukturen zu beschreiben. Im Gegensatz zur Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen wird im gerichteten Fall, einfach die Forderung nach Symmetrie der Matrix weggelassen.

**Definition 1.11.** Jeder planare Graph kann mit einer **Orientierung** ausgestattet werden, dies ist eine Funktion, die jeder Kante eine der Ecken zuordnet, die durch sie verbunden wird. Man stelle sich vor jede Kante ist ein Pfeil und die Orientierung gibt an auf welche Ecke sie zeigt. Man unterscheidet entsprechend eine **Spitzefunktion**  $x \mapsto p(x)$ , welche die Ecke zuordnet, die an der Pfeilspitze liegt und die **Schaftfunktion**  $x \mapsto q(x)$ , welche die andere Ecke zuordnet.



Abbildung 1.7: Graph mit Orientierung.

Zu einem gegebenen Graph gibt es  $2^{|E|}$  Möglichkeiten, wobei  $E$  die Kantenmenge ist, einen gegebenen Graph mit einer Orientierung auszustatten und ihn hierdurch zu einem gerichteten Graphen zu erheben.

**Bemerkung 1.12.** Jede Orientierung auf einem planaren Graph  $G$ , bestimmt eindeutig eine zu ihr **duale Orientierung** auf dem dualen Graph. Sei hierzu  $A$  eine Fläche des planaren Graphen  $G$ , also ein induzierter Teilgraph, der ein Zyklus ist, und  $e$  eine Kante des Graphen, die auch in  $A$  liegt, dann setzen wir die Spitzenfunktion  $p_D$  der dualen Orientierung  $p_D(e) = A$ , falls  $e$  im planaren Graph  $G$  im Uhrzeigersinn bezüglich zu  $A$  orientiert ist.



Abbildung 1.8: Orientierung und duale Orientierung.

## Kapitel 2

# Funktionenräume und Operatoren

Im letzten Kapitel wurden Graphen mit zusätzlicher Struktur beschrieben, nämlich planare Graphen und das Konzept des dualen Graphen. In diesem Kapitel sollen die drei Arten von Funktionen auf planaren Graphen und Operatoren, die diese Funktionen aufeinander abbilden vorgestellt werden.

**Definition 2.1.** Sei  $G$  ein planarer Graph und  $G^D$  sein dualer Graph, des weiteren sei  $V$  die Menge der Ecken,  $E$  die Menge der Kanten und  $A$  die Menge der Flächen (inklusive umgebende Fläche), dann unterscheiden wir drei verschiedene (endlichdimensionale) Funktionenräume auf dieser Struktur, den Raum der Kantenfunktionen  $\mathfrak{K} = \{f|f : E \rightarrow \mathbb{R}\}$ , den Raum der Eckfunktionen  $\mathfrak{E} = \{f|f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$  und den Raum der Flächenfunktionen  $\mathfrak{F} = \{f|f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$ .

Es gibt eine natürliche Beziehung zwischen diesen drei Räumen.

**Definition 2.2.** Sei  $G$  ein Graph,  $f \in \mathfrak{E}(G)$  eine Eckfunktion auf  $G$ , seien weiters  $p$  und  $q$  die Spitzefunktion und Schaftfunktion einer Orientierung auf  $G$ , dann nennt man  $\text{grad}(f) \in \mathfrak{K}(G)$  definiert durch

$$\text{grad}(f)(e) = f(p(e)) - f(q(e))$$

für eine beliebige Kante  $e$  den Gradienten von  $f$ .

**Definition 2.3.** Sei  $G$  ein Graph,  $f \in \mathfrak{K}(G)$  eine Kantenfunktion auf  $G$ , seien weiters  $p$  und  $q$  die Spitzefunktion und Schaftfunktion einer Orientierung auf  $G$ , dann nennt man  $\text{div}(f) \in \mathfrak{E}(G)$ , definiert durch:

$$\text{div}(f)(x) = \sum_{\acute{e} \in E, q(\acute{e})=x} f(\acute{e}) - \sum_{e \in E, p(e)=x} f(e)$$

für eine beliebige Ecke  $x$  die Divergenz von  $f$ .

Der Gradient hebt eine Eckfunktion auf die Kanten, und die Divergenz eine Kantenfunktion auf die Ecken. Der Graph  $G$  und der duale Graph  $G_D$  haben dieselben Kantenfunktionen, daher bildet dieser Raum eine Verbindung zwischen Gradient und Divergenz des Graphen und des dualen Graphen. Der Gradient und die Divergenz des dualen Graphen werden durch  $\text{grad}_D$  respektive  $\text{div}_D$  symbolisiert. Falls eine Kantenfunktion als Fluss interpretiert wird, entspricht die Divergenz der Kantenfunktion dem Nettofluss von den Ecken weg.

**Satz 2.1.** *Sei  $G$  ein planarer Graph mit Orientierung, dann sind der Gradient und die Divergenz lineare Operatoren und es gilt:*

$$\text{div} = -\text{grad}^T$$

wobei sich die Adjunktion auf das Standardskalarprodukt bezieht.

*Beweis.* Sei  $u \in \mathfrak{E}(G)$  und  $v \in \mathfrak{K}$ , dann schreiben wir das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \langle v, \text{grad}(u) \rangle_{\mathfrak{K}} &= \sum_{x \in E} v(x) * (u(p(x)) - u(q(x))) = \\ &= \sum_{x \in E} v(x) * u(p(x)) - \sum_{x \in V} v(x) * u(q(x)) = \\ &= \sum_{e \in V} u(e) * \sum_{j \in E, p(j)=e} v(j) - \sum_{e \in V} u(e) * \sum_{j \in E, q(j)=e} v(j) = \\ &= -\langle \text{div}(v), u \rangle_{\mathfrak{E}} \end{aligned}$$

□

**Definition 2.4.** *Sei  $G$  ein planarer Graph mit Orientierung und  $f \in \mathfrak{K}(G)$ ,  $(x_i)_{i=1}^n$  ein Pfad auf  $G$ ,  $(e_i)_{i=1}^{n-1}$  die Folge der Kanten, die für jedes  $1 \leq i \leq n-1$   $x_i$  und  $x_{i+1}$  verbinden und es sei  $\sigma_i$  für jedes  $1 \leq i \leq n-1$  gleich  $-1$  falls  $p(e_i) = x_i$  ist und sonst  $+1$ , dann nennt man die Summe*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i f(e_i)$$

die **Pfadsumme**.

**Satz 2.2.** *Sei  $G$  ein planarer Graph mit Orientierung,  $f \in \mathfrak{K}(G)$  sodass  $\text{div}_D(f) = 0$ , dann gilt dass für jeden geschlossenen Pfad in  $G$  die Pfadsumme gleich Null ist.*

*Beweis.* Zu allererst reicht es einfach geschlossene Pfade zu betrachten. Diese Einschränkung ist zulässig weil sich für alle anderen geschlossenen Pfade die Pfadsumme sich als Summe solcher einfach geschlossenen Pfade schreiben lässt.

Jeder einfach geschlossene Pfad zerteilt den Graph in zwei Teilgraphen, sodass die Vereinigung der Teilgraphen ganz  $G$  ist und der Durchschnitt nur den geschlossenen Pfad enthält. Jener Teilgraph, der keinen Teil des Randes von  $G$  enthält ist der innere Graph.

Sei  $f \in \mathfrak{K}(G)$ , dann gilt für jeden Zyklus in  $G$ , dass falls er als Pfad gegen den Uhrzeigersinn orientiert geschrieben wird, die Pfadsumme gleich dem Wert von  $\text{div}_D$  ist.

Sei nun  $(x_i)_{i=1}$  ein einfach geschlossener Pfad, dann können wir die Pfadsumme als Summe über alle Zyklen des zugehörigen inneren Graphen schreiben, da die Pfade über die Zyklen immer als gegen den Uhrzeigersinn orientiert angenommen werden, heben sich alle Kantenwerte auf, die nicht zum Pfad  $(x_i)_{i=1}$  gehören. Da  $\text{div}_D(f) = 0$  ist, ist somit auch die Pfadsumme gleich Null.  $\square$

Es besteht eine Analogie der hier definierten Operatoren zu den Differentialoperatoren der Vektoranalysis. Interessanterweise entspricht die duale Divergenz der Rotation. Die Analogie untermauernd kann man folgendes Theorem formulieren.

**Theorem 2.5** (Der de Rham Komplex). *Die Operatoren  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{grad}_D$  und  $\text{div}_D$  erfüllen folgende exakte Sequenzen, daher das Bild der Abbildungen entspricht dem Kern der nachfolgenden Abbildung. Beachte, dass  $\mathbb{R}$  in den Formeln für die dem entsprechenden Raum zugehörigen konstanten Funktionen steht.*

$$(2.1) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{E}(G) \xrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{K}(G) \xrightarrow{\text{div}_D} \mathfrak{F}(G)/\mathbb{R} \longrightarrow 0$$

$$(2.2) \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{F}(G) \xrightarrow{\text{grad}_D} \mathfrak{K}(G) \xrightarrow{\text{div}} \mathfrak{E}(G)/\mathbb{R} \longrightarrow 0$$

*Beweis de Rham Komplex.* Es genügt Gleichung 2.1 in Theorem 2.4 zu beweisen, da 2.2 durch Anwendung von 2.1 auf den dualen Graphen folgt.

**Erste zu beweisende Aussage:** Der Kern von  $\text{grad}$  ist genau der Raum der konstanten Eckfunktionen.

Da  $G$  zusammenhängend ist und da  $\text{grad}$  an einer Kante nur Null sein kann wenn beide Ecken, welche die Kante verbindet, den selben Wert haben, ist  $\text{grad}(f)$  genau dann Null wenn  $f$  konstant ist.

**Zweite zu beweisende Aussage:** Das Bild von  $\text{grad}$  ist genau der Kern von  $\text{div}_D$ .

Sei  $a$  ein Zyklus von  $G$ , und  $(x_i)_{i=1}^k$  ein Pfad der die Ecken des Zyklus gegen den Uhrzeigersinn durchläuft und  $f \in \mathfrak{E}$ , dann gilt:

$$\operatorname{div}_D(\operatorname{grad}(f)) = \sum_{i=1}^{k-1} \sigma(i) * \overbrace{\sigma(i) * (f(x_{(i+1) \bmod k}) - f(x_{i \bmod k}))}^{\operatorname{grad}}$$

Da ja  $k \bmod k = 0$  gilt, kommt in der Summe jeder Wert von  $f$  genau einmal mit positiven und einmal mit negativen Vorzeichen vor. Daher die Summe ist gleich Null.

Es fehlt noch zu zeigen, dass jedes Element im Kern von  $\operatorname{div}_D$  auch im Bild von  $\operatorname{grad}$  ist.

Sei  $f$  eine Kantenfunktion, sodass gilt  $\operatorname{div}_D(f) = 0$ , dann gilt wegen dem Satz 2.2, dass für beliebige Ecken  $a, b \in V$  gilt, dass die Pfadsummen für alle Pfade, die in  $a$  starten und in  $b$  enden, gleich sind.

Wählen wir nun eine beliebige Ecke  $x_0$ , weil  $G$  zusammenhängend ist, können wir von  $x_0$  zu jeder Ecke in  $G$  einen Pfad bilden um  $F \in (E)(G)$  zu definieren, sodass für jede Ecke  $x$   $F(x)$  gleich der Pfadsumme eines Pfades von  $x_0$  nach  $x$  hat. Dies ist ja eindeutig. Es gilt nun  $\operatorname{grad}(F) = f$ .

**Die letzte zu beweisende Aussage:** Das Bild von  $\operatorname{div}_D$  ist genau das orthogonale Komplement der konstanten Flächenfunktionen.

Wegen des Satzes 2.1 und der ersten Aussage in diesem Beweis folgt die Aussage.  $\square$

## Kapitel 3

# Das Poisson Problem

Ein klassisches Problem der Theorie elektrischer Netzwerke sowie der Elektrostatik ist das (verallgemeinerte) Poissonproblem. Dieses Problem wird hier in einigen seiner Facetten vorgestellt und basierend auf der bisher behandelten Graphentheorie formuliert und gelöst.

**Das verallgemeinerte Poisson Problem** Sei  $G$  ein Graph,  $\partial$  eine Teilmenge der Ecken,  $r$  eine positive Kantenfunktion und  $f$  und  $g$  Eckfunktionen, dann wird eine Eckfunktion  $u$  gesucht sodass gilt:

$$(3.1) \quad -\operatorname{div}(r * \operatorname{grad}(u))(x) = f(x) \text{ falls } x \notin \partial$$

$$(3.2) \quad u(x) = g(x) \text{ falls } x \in \partial$$

Die Bedingung 3.2 ist motiviert durch Randwertprobleme aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

**Definition 3.1.** Sei  $G$  ein planarer Graph mit Orientierung,  $r$  eine positive Kantenfunktion, dann nennt man  $\Delta_r$ , definiert durch

$$\Delta_r(u) = -\operatorname{div}(r * \operatorname{grad}(u)) \text{ falls } u \in \mathfrak{E}(G)$$

den  *$r$ -gewichteten Laplace Operator*

**Die Formulierung für elektrische Netzwerke** Gegeben ein Netzwerk(Graph) bestehend aus Spannungsquellen, Stromquellen und linearen Komponenten (elektrische Widerstände), finde die elektrische Spannung zwischen beliebigen zwei Punkten im Netzwerk, und für jeden Leiter im Netzwerk, den durchfließenden elektrischen Strom.



Abbildung 3.1: Beispiel Stromkreis.

**Die Formulierung in der Elektrostatik** Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  mit glatten Rand  $\partial\Omega$  und  $\rho$  die elektrische Ladungsdichte in  $\Omega$ . Gesucht ist das Potential  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sodass:

$$(3.3) \quad \Delta\phi(x) = \rho(x) \text{ falls } x \in \Omega$$

$$(3.4) \quad \phi(x) = 0 \text{ falls } x \in \partial\Omega$$

Physikalisch wird  $\Omega$  ein Hohlraum in einem guten elektrischen Leiter, wie etwa einem Metall, sein, da ein Solcher das Potential am Rand des Hohlraumes auf einen konstanten Wert zwingt.

Die Elektrostatik lebt im  $\mathbb{R}^3$ , daher ist die bisher entwickelte Theorie nur in Grenzfällen anwendbar. Dieser Spezialfall tritt ein falls  $\rho$  und  $\Omega$  o.B.d.A entlang der z-Achse konstant sind, daher das Problem effektiv zwei Dimensional wird. Für genau diesen Fall wird eine Theorie der zweidimensionalen Maxwell-Gleichungen im nächsten Kapitel entwickelt.

**Satz 3.1.** *Sei  $G$  ein Graph,  $r$  eine positive Kantenfunktion und  $\Delta_r$  der  $r$ -gewichtete Laplace Operator, dann gilt:*

- *Die Form der Matrix  $\Delta_r$  ist unabhängig von der gewählten Orientierung auf  $G$ .*
- *$\Delta_r$  ist symmetrisch.*
- *$\Delta_r$  ist positiv semidefinit.*
- *Der Kern von  $\Delta_r$  ist der Raum der konstanten Eckfunktionen.*

*Beweis.* Seien  $p_0$  und  $p_1$  Orientierungen auf  $G$  und  $\text{grad}_0$  und  $\text{grad}_1$  die zugehörigen Gradienten, dann gilt:

$$\text{grad}_0 = D * \text{grad}_1$$



wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge  $\pm 1$  sind. Wegen Satz 2.1 folgt die erste Aussage.

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition von  $\Delta_r$  und Satz 2.1. Seien hierzu  $u$  und  $v \in \mathfrak{E}$ , dann gilt:

$$\langle u, \Delta_r(v) \rangle_{\mathfrak{E}} = \langle \sqrt{r} * \text{grad}(u), \sqrt{r} * \text{grad}(v) \rangle_{\mathfrak{K}}$$

Analog zeigt man die dritte Aussage, indem man  $u = v$  setzt.

$$\langle \sqrt{r} * \text{grad}(u), \sqrt{r} * \text{grad}(u) \rangle_{\mathfrak{K}} \geq 0$$

Die letzte Aussage:  $u \in \text{kern}(\Delta_r)$  gilt genau dann wenn für jedes  $v \in \mathfrak{E}$

$$\langle v, \Delta_r(u) \rangle_{\mathfrak{E}} = 0$$

also genau dann wenn

$$\langle \sqrt{r} * \text{grad}(u), \sqrt{r} * \text{grad}(v) \rangle_{\mathfrak{K}} = 0$$

Da  $r > 0$  gilt, ist dies equivalent zu der Aussage  $u \in \text{kern}(\text{grad})$ . Der Gradient ist genau dann Null wenn  $u$  konstant ist, da unser Graph zusammenhängend ist.  $\square$

In der kontinuierlichen Theorie des Poissonproblems sind Sobolevräume und die Poincare Ungleichung von zentraler Bedeutung. Ein Analogon gibt es natürlich auch in der diskreten oder graphischen Theorie.

**Satz 3.2** (Poincare Ungleichung). *Sei  $G$  ein Graph,  $\partial$  eine Teilmenge der Ecken,  $r > 0$  eine Kantenfunktion und  $u \in \mathfrak{E}$ , sodass  $u|_{\partial} = 0$  dann gilt:*

$$\langle u, u \rangle_{\mathfrak{E}} \leq \frac{|V|}{\min_{e \in E} r(e)} \langle u, \Delta_r(u) \rangle_{\mathfrak{E}}$$

*Beweis.* Sei  $x \in \partial^c$  und  $(x_i)_{i=1}^n$  ein Pfad von  $\partial$  nach  $x$ , dann gilt für die Pfadsumme:

$$\begin{aligned} u(x)^2 &= \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i * \text{grad}(u)(e_i) \right)^2 \leq \\ & \left( \max_{e \in E} \frac{\sum_{s=1}^{n-1} \sqrt{r}(e_s)}{\sqrt{r}(e)} \right)^2 * \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i * \frac{\sqrt{r}(e_i)}{\sum_{s=1}^{n-1} \sqrt{r}(e_s)} \text{grad}(u)(e_i) \right)^2 \end{aligned}$$

Wende die Jensen Ungleichung an und fasse zusammen:

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\leq \left( \max_{e \in E} \frac{\sum_{s=1}^{n-1} \sqrt{r}(e_s)}{\sqrt{r}(e)} \right)^2 * \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\sqrt{r}(e_i)}{\sum_{s=1}^{n-1} \sqrt{r}(e_s)} \text{grad}(u)(e_i) \right)^2 = \\ & \left( \max_{e \in E} \frac{1}{r(e)} \right) * \sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt{r} \text{grad}(u)(e_i))^2 \leq \left( \max_{e \in E} \frac{1}{r(e)} \right) * \sum_{k \in E} (\sqrt{r}(k) \text{grad}(u)(k))^2 = \end{aligned}$$

$$\left(\max_{e \in E} \frac{1}{r(e)}\right) * \langle \sqrt{r} \text{grad}(u), \sqrt{r} \text{grad}(u) \rangle_{\mathfrak{K}} = \left(\max_{e \in E} \frac{1}{r(e)}\right) * \langle u, \Delta_r(u) \rangle_{\mathfrak{E}}$$

Summieren wir nun über  $V$ :

$$\langle u, u \rangle_{\mathfrak{E}} \leq \frac{|V|}{\min_{e \in E} r(e)} \langle u, \Delta_r(u) \rangle_{\mathfrak{E}}$$

□

Es wurde nun genug Vorarbeit geleistet um das zentrale Existenz Theorem dieses Kapitels zu beweisen.

**Theorem 3.2.** *Sei  $G$  ein Graph,  $r$  eine Kantenfunktion,  $\partial$  eine Teilmenge der Ecken und  $f$  sowie  $g$  Eckfunktionen, dann ist das Poissonproblem genau dann lösbar wenn entweder  $\partial$  nicht leer ist oder  $f$  im orthogonalen Komplement der konstanten Funktionen ist.*

*Beweis.* Falls  $\partial$  leer ist, folgt da der Kern von  $\Delta_r$  durch die konstanten Funktionen gebildet wird und weil die Abbildung symmetrisch ist, dass der Bildraum das orthogonale Komplement der konstanten Funktionen ist.

Falls aber  $\partial$  nicht leer ist, aber  $\partial \neq V$  ist, sollen gilt:

Sei  $A$  die Untermatrix die man durch streichen der zu  $\partial$  gehörenden Zeilen und Spalten erhält.

Zwei alternative Wege die Trivialität des Kernes von  $A$  zu zeigen:

**1. Alternative:** Die Poincare Ungleichung zeigt bereits, dass der Kern trivial sein muss.

**2. Alternative:** Sei  $x$  ein Element von  $\text{kern}(A)$ , daher  $A(x) = 0$ . Wir können ein Element  $\hat{x}$  von  $\mathfrak{E}$  konstruieren, sodass  $\hat{x}$  an den Ecken die zu  $\partial$  gehören Null gesetzt wird und sonst den Wert annimmt den  $x$  an der entsprechenden Ecke hat. Es gilt dann:

$$\Delta_r(\hat{x})|_{E-\partial} = 0$$

und somit

$$\langle \sqrt{r} * \text{grad}(\hat{x}), \sqrt{r} * \text{grad}(\hat{x}) \rangle_{\mathfrak{K}} = \langle \hat{x}, \Delta_r(\hat{x}) \rangle_{\mathfrak{E}} = 0$$

Damit muss aber  $\hat{x}$  zum Kern von  $\Delta_r$  gehören, also eine konstante Funktion sein. Die einzige Möglichkeit wie  $\hat{x}$  eine konstante Funktion ist, ist wenn es identisch Null ist. Es wurde somit gezeigt, dass der Kern von  $A$  trivial ist und somit  $A$  invertierbar ist.

Das Setzen der Randbedingung entspricht aber genau dem Streichen dieser

Zeilen sowie Spalten und der Konstruktion einer zugehörigen im Allgemeinen von Null verschiedenen Inhomogenität.

Der Fall  $\partial = V$  ist trivialerweise erfüllt.  $\square$

Wandeln wir zur Untermauerung der theoretischen Arbeit an einem Beispiel den elektrischen Stromkreis in Abbildung 3.1 in einen Graphen in dem bisher entwickelten Formalismus um.

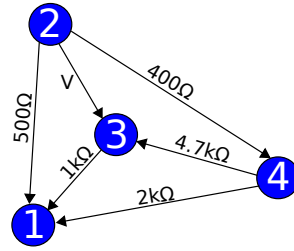


Abbildung 3.2: Beispiel Stromkreis (Graph).

An den elektrischen Widerständen jeder Kante können wir in Abbildung 3.2 die Korrespondenz zu Abbildung 3.1 erkennen. Die Kehrwerte der Widerstände entsprechen der Kantenfunktion  $r$  und  $\partial = \{2, 3\}$ ,  $g(2) = 5$ ,  $g(3) = 0$  und  $f \equiv 0$ . Das  $V$  steht für die Spannungsquelle beziehungsweise die Randbedingung.

$$\Delta_r = \text{grad}.T * r * \text{grad} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{500} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1000} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2000} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4700} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{400} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{500} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} & -\frac{1}{500} & -\frac{1}{1000} & -\frac{1}{2000} \\ -\frac{1}{500} & \frac{1}{500} + V + \frac{1}{400} & -V & -\frac{1}{400} \\ -\frac{1}{1000} & -V & \frac{1}{1000} + V + \frac{1}{4700} & -\frac{1}{4700} \\ -\frac{1}{2000} & -\frac{1}{400} & -\frac{1}{4700} & \frac{1}{400} + \frac{1}{4700} + \frac{1}{2000} \end{pmatrix}$$

Anschließend wendet man die Randbedingung an, daher man setzt die zweite Komponente des gesuchten Vektors 5 und die Dritte Komponente 0, dies entspricht dem streichen der mit  $V$  markierten Ecken und bilden der passenden Inhomogenität.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{500} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} & -\frac{1}{500} & -\frac{1}{1000} & \frac{5}{500} \\ -\frac{1}{500} & \frac{1}{500} + \frac{1}{400} & -\frac{1}{400} & 0 \\ -\frac{1}{1000} & -V & \frac{1}{1000} + V + \frac{1}{4700} & 0 \\ -\frac{1}{2000} & -\frac{1}{400} & -\frac{1}{4700} & \frac{1}{400} + \frac{1}{4700} + \frac{1}{2000} \end{array} \right)$$

Dies entspricht genau der Matrixgleichung, die man mit den gebräuchlichen Methoden in der Physik zu diesem Problem erhält.

Die Lösung des Poissonproblems ermöglicht es uns ein weiteres Analogon zu einem Theorem der klassischen Vektoranalysis zu formulieren.

**Folgerung 3.3** (Helmoltz Zerlegung). *Sei  $G$  ein planarer Graph mit Orientierung dann gilt:*

$$\mathfrak{K}(G) = \text{im}(\text{grad}) \bigoplus \text{im}(\text{grad}_D)$$

*Beweis.* Eine Anwendung des de’Rham Komplexes und etwas elementare lineare Algebra liefert:

$$\mathfrak{K}(G) = \text{kern}(\text{div}_D) \bigoplus \text{kern}(\text{div}_D)^\perp = \text{im}(\text{grad}) \bigoplus \text{kern}(\text{div}_D)^\perp$$

Die Abbildung  $\text{div}_D$  ist ein Isomorphismus zwischen  $\text{kern}(\text{div}_D)^\perp$  und  $\text{im}(\text{div}_D)$ . Wir wissen auch bereits wegen des Theorems 3.2 dass der Laplace Operator des dualen Graphen  $\Delta_D = \text{div}_D \circ \text{grad}_D$  ein Isomorphismus zwischen  $\mathfrak{F}(G)$  und  $\text{im}(\text{div}_D)$ . In Kombination zeigt dies, dass  $\text{grad}_D$  ein Isomorphismus zwischen  $\mathfrak{F}(G)$  und  $\text{kern}(\text{div}_D)^\perp$  ist.  $\square$

## Kapitel 4

# Die Maxwell-Gleichungen

Die Elektrodynamik beschreibt elektromagnetische Phänomene als durch Felder vermittelte Wechselwirkung von Materie. Diese Felder gehorchen vier Gleichungen, Maxwell-Gleichungen, die im neunzehnten Jahrhundert durch den Schotten James Clerk Maxwell formuliert wurden. Diese partiellen Differentialgleichungen beschreiben wie sich elektromagnetische Felder in Abhängigkeit eines Materialstrom zeitlich entwickeln. Die Diskretisierung jener Differentialgleichungen führt im zweidimensionalen Fall zu einer Variante der Maxwell-Gleichungen für planare Graphen.

**Definition 4.1.** Sei  $G$  ein planarer Graph,  $r > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $e_0$  Kantenfunktionen,  $j \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$  eine Kurve,  $\mu > 0$  und  $b_0$  Flächenfunktionen und  $q_0$  eine Eckfunktion, dann nennt man eine Kurve  $e \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$ , eine Kurve  $b \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$  und eine Kurve  $e \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{E})$ , sodass für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(4.1) \quad \operatorname{div}(r * \epsilon * e(t)) = q(t)$$

$$(4.2) \quad \operatorname{div}_D(r^{-1} * e(t)) = -b'(t)$$

$$(4.3) \quad -r^{-1} * \operatorname{grad}_D(b(t)/\mu) = \epsilon * e'(t) + j(t)$$

und die Anfangsbedingungen

$$(4.4) \quad e(0) = e_0$$

$$(4.5) \quad b(0) = b_0$$

$$(4.6) \quad q(0) = q_0$$

erfüllt sind, eine Lösung der Maxwell-Gleichungen.

**Bemerkung 4.2.** (4.1) nennt man das Gaußsche Gesetz und beschreibt wie das elektrische Feld  $e$  mit seinen Quellen den elektrischen Ladungen zusammenhängt. Betrachtet man es von der Perspektive eines Flusses ist die elektrische Ladung der Nettofluß aus der Ecke.

(4.2) nennt man das Faradaysche Gesetz und es beschreibt die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes  $b$  in Abhängigkeit des elektrischen Feldes. Die Kantenfunktion  $r$  ist die Länge der Kante.  $\epsilon$  und  $\mu$  sind der elektrische und der magnetische Leitwert, respektive. Diese beiden Funktionen geben an wie gut die Kanten das Feld durchlassen.

(4.3) nennt man das Amperesche Gesetz und beschreibt analog zum Faradayschen Gesetz wie die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes vom magnetischen Feld, aber auch vom elektrischen Strom  $j$  abhängig ist. Wenn wir das Ohmsche Gesetz  $j(t) = \sigma e(t)$  annehmen, verhält sich der elektrische Strom hier wie ein Reibungsterm. Wir werden sehen, dass dies tatsächlich für Energieverlust ins Wärmebad verantwortlich ist.

Aus den Maxwell-Gleichungen ergeben sich die Erhaltungsgrößen elektrische Ladung und Energie. Die Energie teilt sich in magnetische und elektrische Energie, die über die Zeit innereinander umgewandelt werden.

**Satz 4.1. Energieerhaltung** Sei  $G$  ein planarer Graph,  $r > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $e_0$  Kantenfunktionen,  $\mu > 0$  und  $b_0$  Flächenfunktionen,  $q_0$  eine Eckfunktion und  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{K}(G)$  das elektrische Feld und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{F}(G)$  das magnetische Feld Lösungen der Maxwell-Gleichungen, dann nennt man

$$E = \sum_{a \in f} b(a)^2 / \mu(a) + \sum_{k \in E} \epsilon(k) * e(k)^2$$

die **Energie** und solange der elektrische Strom  $j \equiv 0$  gilt, bleibt die Energie unverändert.

*Beweis.* Sei  $e$  und  $b$  wie in der Voraussetzung des Satzes dann gilt für die Ableitung der magnetischen Energie:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{a \in f} b(a)^2 / \mu(a) \right)' &= \sum_{a \in f} 2 * b(a) * b(a)' / \mu(a) = - \sum_{a \in f} 2 * b(a) * \operatorname{div}_D(r^{-1} * e)(a) / \mu(a) = \\ &= -2 * \langle b / \mu, \operatorname{div}_D(r^{-1} * e) \rangle_{\mathfrak{F}} \end{aligned}$$

und für die Ableitung der elektrischen Energie:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k \in E} \epsilon(k) * e(k)^2 \right)' &= \sum_{k \in E} 2 * \epsilon(k) * e(k) * e(k)' = \\ &= - \sum_{k \in E} 2 * e(k) * (r^{-1} * \operatorname{grad}_D(\mu * b) + j)(k) = -2 * \langle e, (r^{-1} * \operatorname{grad}_D(\mu * b) + j) \rangle_{\mathfrak{K}} = \\ &= 2 * (\langle \operatorname{div}_D(r^{-1} * e), b / \mu \rangle_{\mathfrak{F}} - \langle e, r^{-1} * j \rangle_{\mathfrak{K}}) \end{aligned}$$

Fassen wir zusammen:

$$E' = -2 * \langle e, r^{-1} * j \rangle_{\mathfrak{K}}$$

□

**Satz 4.2. Kontinuitätsgesetz** Sei  $G$  ein planarer Graph,  $r > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $e_0$  Kantenfunktionen,  $\mu > 0$  und  $b_0$  Flächenfunktionen,  $q_0$  eine Eckfunktion und  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{K}(G)$  das elektrische Feld und  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{F}(G)$  das magnetische Feld. Lösungen der Maxwell-Gleichungen, dann gilt das Kontinuitätsgesetz:

$$q' = -\operatorname{div}(r * j)$$

Dies zeigt, dass die Gesamtladung erhalten bleibt.

*Beweis.* Dividiere (4.3) in Definition 4.1 durch  $\epsilon$  und dann wende  $\operatorname{div}(r * \epsilon * .)$  auf (4.3) an:

$$\operatorname{div}(r * \epsilon * (-\epsilon^{-1} * r^{-1} * \operatorname{grad}_D(b(t)/\mu))) = \operatorname{div}(r * \epsilon * (\frac{\partial e}{\partial t} + j/\epsilon))$$

$$0 = \operatorname{div}(r * \epsilon * e)' + \operatorname{div}(r * j)$$

$$0 = q' + \operatorname{div}(r * j)$$

Summieren wir nun die obige Gleichung über alle Ecken, dann heben sich die Beiträge der Kanten in  $\operatorname{div}(r * j)$  gegenseitig auf, da jede Kante einmal in dem  $\operatorname{div}$ -Term der Ecke von der er wegzeigt und einmal im Term der Ecke auf die er zeigt vorkommt. Folglich gilt:

$$\sum_{v \in V} q' = 0$$

□

Die Maxwell-Gleichungen sind ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen und als solches gibt es keine Probleme wegen Existenz und Eindeutigkeit für jeden Zeitpunkt. Dies lässt sich in jedem guten Buch über gewöhnliche Differentialgleichungen nachlesen.

**Theorem 4.3.** Die Maxwellgleichungen sind eindeutig lösbar, solange die Anfangsbedingung (4.1) erfüllt ist.

*Beweis.*

□

## Kapitel 5

# Potentialformulierung der Maxwellgleichungen

Analog zum kontinuierlichen Fall lassen sich die Maxwellgleichungen auf planaren Graphen über Potentiale ausdrücken.

**Definition 5.1.** Sei  $G$  ein planarer Graph mit Orientierung dann nennt man eine Kurve  $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$  ein Vektorpotential und eine Kurve  $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{E})$  ein Skalarpotential.

Sei weiters  $r > 0$  eine Kantenfunktion auf  $G$ , dann definieren wir eine Transformation  $T$ , die Potentiale  $(\phi, a) \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{E}) \times C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$  in Felder  $(e, b) \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K}) \times C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$  überführt, durch

$$(5.1) \quad \begin{pmatrix} b(t) \\ e(t) \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} \phi(t) \\ a(t) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{div}_D(r^{-1}a(t)) \\ -a'(t) - r \operatorname{grad}(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Es ist hierbei zu bedenken, dass  $\operatorname{div}_D$  nicht surjektiv ist, sondern nur Flächenfunktionen darstellen kann, die orthogonal zu den konstanten Funktionen sind. Dies scheint auf den ersten Blick eine Einschränkung zu sein, aber eine kurze Betrachtung der Maxwellgleichungen zeigt uns, dass der konstante Anteil des Magnetfeldes keine Auswirkung auf das elektrische Feld hat, solange  $\mu$  konstant ist. Viel wichtiger noch findet die einzige Änderung des Magnetfeldes, die unter Gültigkeit der Maxwellgleichungen passieren darf im orthogonalen Komplement der konstanten Flächenfunktionen statt. Wir fordern nun zusätzlich zu den Maxwellgleichungen, dass das Magnetfeld  $b$  für jeden Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  orthogonal zu den konstanten Flächenfunktionen ist:

$$b(t) \in \mathbb{R}^\perp$$

Wenn wir planare Graphen als Polyeder auffassen, ist dies einfach das im dreidimensionalen gültige Gaußsche Gesetz für Magnetfelder.



Die Wahl der Potential Definition kam nicht von ungefähr, sondern aus der Theorie im Kontinuum. Die Definition des Magnetfeldes in (5.1) abgeleitet ergibt durch Einsetzen der Definition des elektrischen Feldes sofort das Faradaysche Gesetz. Nachdem das Gaußsche Gesetz als Definition der elektrischen Ladung gesehen werden kann, reduzieren sich die Maxwellgleichungen in Potentialformulierung auf das Amperesche Gesetz:

$$(5.2) \quad r^{-1} \text{grad}_D(\text{div}_D(r^{-1}a(t))/\mu) = \epsilon * (a'' + r \text{grad}(\phi')) - j(t)$$

Der Vorteil der Potentialdarstellung liegt zum Einen in der Vereinfachung des Gleichungssystems und zum Anderen in der größeren Flexibilität.

Es ist leicht zu sehen, dass die Operation aus Definition 5.1, die Potentiale in Felder um wandelt nicht injektiv ist.

Die Charakterisierung des Kerns dieser Operation führt uns nun zu den so genannten Eichtransformationen.

**Definition 5.2.** Seien  $\phi$  und  $a$  Potentiale wie in Definition 5.1, und  $\xi \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{E})$ , dann nennt man die Transformation  $T$  definiert durch

$$(5.3) \quad \gamma_\xi \left( \begin{pmatrix} \phi \\ a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \phi - \xi' \\ a + r \text{grad}(\xi) \end{pmatrix}$$

die zu  $\xi$  gehörende **Eichtransformation**.

Die Potentiale werden immer genau bis auf eine Eichtransformation eindeutig durch die Felder bestimmt.

**Satz 5.1.** Sei  $T$  die lineare Operation aus Definition 5.1, die Potentiale  $(\phi, a) \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{E}) \times C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$  in Felder  $(e, b) \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{R}) \times C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{F})$  überführt, dann gilt:

$$(5.4) \quad \text{kern}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -\xi' \\ r \text{grad}(\xi) \end{pmatrix} \mid \xi \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{E}) \right\}$$

*Beweis.* ( $\supset$ )

□

## Kapitel 6

# Kanonische Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts wurde zur Erklärung einer Reihe von Phänomenen, die innerhalb der damals etablierten/klassischen physikalischen Theorien nicht erklärbar waren, die Quantentheorie entwickelt. Die Objekte der klassischen Theorien sind Kurven, Kräfte und Felder und in der Quantenmechanik sind es Zustandsvektoren, Operatoren und Distributionen. Die messbaren Größen bleiben dieselben, allerdings werden die mathematischen Objekte, die ihr Verhalten beschreiben etwas komplizierter.

Wir wollen nun den klassischen Weg der Quantisierung einer physikalischen Theorie am Beispiel der Maxwellgleichungen auf planaren Graphen erkunden.

Der Ausgangspunkt dieser so genannten kanonischen Quantisierung ist die Lagrangefunktion der Theorie.

**Theorem 6.1.** *Sei  $G$  ein planarer Graph,  $r > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , Kantenfunktionen,  $j \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$ ,  $\mu > 0$  eine Flächenfunktion dann sind  $a$  und  $\phi$  Lösungen der Maxwellgleichung in Potentialform (5.2), genau dann wenn alle Richtungsableitungen des Wirkungsfunktional verschwinden auf dem Raum der  $f_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{E})$  und  $f_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$  für die gilt, dass  $f_1$  und  $\phi$  sowie  $f_2$  und  $a$  zu den Zeitpunkten  $r$  und  $s$  übereinstimmen*

$$(6.1) \quad S(f_1, f_2) = \int_r^s W(f_1, f_2, f'_1, f'_2) dt$$

Die Funktion unter dem Integral nennt man die **Lagrangefunktion** der

*Maxwellgleichung. Sie ist dabei gegeben durch:*

$$L(q_1, q_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2} (\langle \epsilon(v_2 + r \operatorname{grad}(q_1)), v_2 + r \operatorname{grad}(q_1) \rangle_{\mathfrak{K}} - \langle \operatorname{div}_D(r^{-1}q_2), \operatorname{div}_D(r^{-1}q_2)/\mu \rangle_{\mathfrak{K}}) + \langle q_2, j \rangle_{\mathfrak{K}}$$

*Beweis.* □

Im nächsten Schritt wollen wir diese Lagrangefunktion über eine Legendre Transformation in die zugehörige **Hamiltonfunktion** umgewandelt.

**Definition 6.2.** Sei  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion auf einem Skalarproduktraum  $X$ , dann ist die **Legendretransformation**  $f^*$  definiert durch:

$$(6.2) \quad f^*(y) = \sup_{x \in X} (\langle x, y \rangle - f(x))$$

Zuvor sollte aber noch eine kleine Modifikation an der Lagrangefunktion vorgenommen werden um eine schöne geschlossene Darstellung der Hamiltonfunktion zu erhalten.

**Satz 6.1.** Sei  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  eine strikt konvexe stetig differenzierbare Funktion auf einem Skalarproduktraum  $X$ , sodass die Abbildung  $x \mapsto Df(x)$  invertierbar ist, dann ist die Legendretransformation gegeben durch:

$$(6.3) \quad f^*(y) = \langle (Df)^{-1}(y), y \rangle - f((Df)^{-1}(y))$$

*Beweis.* Die Funktion  $g_y(x) = \langle x, y \rangle - f(x)$  ist streng konkav und hat daher ein eindeutiges Maximum  $x_0 \in X$ .

$$Dg_y(x_0) = y - Df(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = (Df)^{-1}(y)$$

Eingesetzt in  $g_y$  erhalten wir dann

$$f^*(y) = g_y(x_0) = \langle (Df)^{-1}(y), y \rangle - f((Df)^{-1}(y))$$

□

Um diese Darstellung ausnutzen zu können müssen wir das Skalarpotential  $\phi$  aus der Lagrangefunktion entfernen.

Dies ist möglich, da es zu jeder Paarung eines Skalarpotentials und eines Vektorpotentials eine Eichtransformation gibt, die diese in ein Paar umwandelt, dessen Skalarpotential gleich Null ist.

Die resultierende Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$(6.4) \quad L(q, v) = \frac{1}{2} (\langle \epsilon v, v \rangle_{\mathfrak{K}} - \langle \operatorname{div}_D(r^{-1}q), \operatorname{div}_D(r^{-1}q)/\mu \rangle_{\mathfrak{K}}) + \langle q, j \rangle_{\mathfrak{K}}$$

Das übrige Vektorpotential (hier  $q$ ) ist immer noch nicht eindeutig bestimmt, und die Eichtransformationen die diese Form der Eichung erhalten sind genau jene, die laut Definition (5.2) zu einem konstanten  $\xi$  korrespondieren.

Die Hamiltonfunktion erhalten wir durch eine Anwendung der Legendretransformation auf die Lagrangefunktion (6.4) bezüglich der Variablen  $v$ .

$$(6.5) \quad H(\pi, q) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\pi}{\epsilon}, \pi \right\rangle_{\mathfrak{K}} + \frac{1}{2} \langle \operatorname{div}_D(r^{-1}q), \operatorname{div}_D(r^{-1}q)/\mu \rangle_{\mathfrak{K}} - \langle q, j \rangle_{\mathfrak{K}}$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung können wir nun die **Hamiltonschen Bewegungsgleichungen** herleiten.

**Satz 6.2.** *Sei  $G$  ein planarer Graph,  $r > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , Kantenfunktionen,  $j \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$ ,  $\mu > 0$  eine Flächenfunktion dann sind  $a$  und  $\phi$  Lösungen der Maxwellgleichung in Potentialform (5.2), genau dann wenn die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erfüllt sind:*

$$(6.6) \quad q' = \frac{\partial H}{\partial \pi}$$

$$(6.7) \quad \pi' = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

*Beweis.* Inhalt... □

An diesem Punkt entfernen wir uns von der klassischen Theorie und folgen Heisenberg in die Quantenmechanik. Die Kurven  $\pi$  und  $q$  aus  $C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{K})$  sind von nun an Kurven  $\hat{\pi}$  und  $\hat{q}$  in einem Raum von Operatoren auf einem Hilbertraum.

**Definition 6.3.** *Sei  $G$  ein planarer Graph und  $r > 0$  eine Kantenfunktion, dann ist der Hilbertraum unserer Theorie gegeben durch*

$$(6.8) \quad \mathfrak{H} = L^2(\mathfrak{K}(G), \mathbb{C}; \lambda)$$

*Der Raum der komplexen Funktionen auf  $\mathfrak{K}(G)$  deren Quadrate ein endliches Integral bezüglich dem Maß  $\lambda^1$  hat.*

*Das Skalarprodukt auf  $\mathfrak{H}$  ist dabei definiert durch:*

$$(6.9) \quad \langle \phi, \xi \rangle_{\mathfrak{H}} = \int_{\mathfrak{K}} \bar{\phi}(q) \xi(x) d\lambda(x)$$

---

<sup>1</sup> $\lambda$  wird zu einem späteren Zeitpunkt festgelegt.

### Interpretation

- Jedes Element  $\psi \in \mathfrak{H}$  stellt einen möglichen Zustand des quantisierten elektromagnetischen Feldes dar.
- Jeder Messgröße  $\Omega$  des klassischen elektromagnetischen Feldes entspricht ein korrespondierender Operator  $\hat{\Omega}$  auf  $\mathfrak{H}$ .
- Der Ausgang einer Messung der Größe  $\Omega$  ist zufällig und der Mittelwert der Messungen ist gleich  $\frac{\langle \psi, \hat{\Omega} \psi \rangle_{\mathfrak{H}}}{\langle \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{H}}}$ .

Widmen wir uns nun der Konstruktion der korrespondierenden Operatoren. Nach Heisenberg wird für jede Kante  $e \in E$  die kanonische Vertauschungsrelation:

$$(6.10) \quad [\hat{q}(e), \hat{\pi}(e')] = i\delta_{e,e'}$$

gefordert.

Eine mögliche Darstellung dieser Operatoren  $\hat{q}(k)$  und  $\hat{\pi}(k)$ , die (6.10) erfüllt ist gegeben durch:

$$(6.11) \quad \hat{\pi}(k) : (q \mapsto \psi(q)) \mapsto (q \mapsto i \frac{\partial \psi}{\partial q_k}(q)) \text{ für } k \in E$$

$$(6.12) \quad \hat{q}(k) : (q \mapsto \psi(q)) \mapsto (q \mapsto q_k \psi(q)) \text{ für } k \in E$$

Hierbei ist  $q_k$  der Wert der Kantenfunktion  $q$  an der Stelle  $k \in E$  und  $\frac{\partial}{\partial q_k}$  ist die Ableitung nach demselben Wert.

Eine kurze Betrachtung der Hamiltonfunktion (6.4) zeigt die Äquivalenz dieses Problems zu der Bewegung von  $|E|$  Punktmaßen mit Massen  $\epsilon(k)$  für jedes  $k \in E$  in einem Potential. Der Hamiltonoperator des elektromagnetischen Feldes auf dem planaren Graphen  $G$  lässt sich daher schreiben als:

$$(6.13) \quad \hat{H} = - \sum_{k \in E} \frac{1}{2\epsilon(k)} \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} + \left( \frac{1}{2} \langle \text{div}_D(r^{-1}q), \text{div}_D(r^{-1}q)/\mu \rangle_{\mathfrak{K}} - \langle q, j \rangle_{\mathfrak{K}} \right)$$

Die Schrödingergleichung ist dann gegeben durch:

$$(6.14) \quad \hat{H}\psi = i\psi'$$

Es wird Zeit einen Gang runter zu schalten und zu analysieren was wir gewonnen haben. Hierzu gehört es im ersten Schritt zu zeigen, dass die durch die Schrödingergleichung vermittelte Dynamik im Mittel mit jener der Maxwellgleichungen übereinstimmt.

**Theorem 6.4** (Ehrenfest Theorem). *Sei  $G$  ein planarer Graph,  $\epsilon > 0$  und  $r > 0$  Kantenfunktionen,  $\mu > 0$  eine Flächenfunktion und  $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{H}$  eine Lösung der Schrödingergleichung (6.14) auf  $G$ , dann gilt:*

$$(6.15) \quad \epsilon \langle \psi, \hat{e}\psi \rangle'_{\mathfrak{H}} = -r^{-1} \text{grad}_D(\langle \psi, b\psi \rangle_{\mathfrak{H}}/\mu) - \langle \psi, j\psi \rangle_{\mathfrak{H}}$$

$$(6.16) \quad \langle \psi, (\hat{b}\psi) \rangle'_{\mathfrak{H}} = -\text{div}_D(r^{-1} \langle \psi, \hat{e}\psi \rangle_{\mathfrak{H}})$$

wobei der elektrische und magnetische Feldoperator gegeben sind durch:

$$(6.17) \quad \hat{e} = \frac{-\hat{\pi}}{\epsilon}$$

$$(6.18) \quad \hat{b} = \text{div}_D(r^{-1} \hat{q})$$

*Beweis.* □

Wir sehen also, dass die Schrödingergleichung (6.14) tatsächlich eine Quantisierung der Maxwellgleichungen (4.1) darstellt. Bislang haben wir noch keine Bestätigung, dass die Schrödingergleichung (6.14) lösbar ist oder der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  selbstadjungiert im Sinne der Theorie unbeschränkter linearer Operatoren ist. Dies wollen wir für den Fall  $\epsilon \equiv 1$  und  $\mu \equiv 1$  nachholen.

**Theorem 6.5.** *Sei  $G$  ein planarer Graph,  $\epsilon \equiv 1$  und  $r > 0$  Kantenfunktionen,  $\mu \equiv 1$  eine Flächenfunktion, dann existiert eine unitäre Abbildung  $\hat{U}$  auf  $\mathfrak{H}$  und  $(\omega_j)_{j=1}^{|f|-1} > 0$  sodass für den Hamiltonoperator  $\hat{H}$  (6.13) mit  $\hat{j} \equiv 0$  gilt:*

$$(6.19) \quad \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \sum_{j=1}^{|E|} h_j$$

Wobei die  $h_j$  gegeben sind durch:

$$h_j = \begin{cases} -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} & j \leq |V| - 1 \\ -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \omega_j x_j^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Der Hamiltonoperator lässt sich folgendermaßen zerlegen:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -\frac{1}{2} \sum_{k \in E} \frac{\partial^2}{\partial q_k^2} \\ \hat{V} &= \frac{1}{2} \langle \text{div}_D(r^{-1} q), \text{div}_D(r^{-1} q) \rangle_{\mathfrak{K}} \end{aligned}$$

Wir formen nun  $\hat{V}$  um

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \operatorname{div}_D(r^{-1}q), \operatorname{div}_D(r^{-1}q) \rangle_{\mathfrak{K}} = \\ & \frac{1}{2} \langle q, (-r^{-1} \operatorname{grad}_D \operatorname{div}_D)(r^{-1}q) \rangle_{\mathfrak{K}} = \end{aligned}$$

und führen einen linearen Operator  $Q = -r^{-1} \operatorname{grad}_D \operatorname{div}_D r^{-1}$  ein

$$(6.20) \quad \frac{1}{2} \langle q, Q(q) \rangle_{\mathfrak{K}}$$

$Q$  ist positiv semidefinit und symmetrisch. Die Dimension des Kerns von  $Q$  ist nach der Helmholtz Zerlegung (3.3) gleich  $|V| - 1$ . Das orthogonale Komplement desselben Kerns ist entsprechend  $|f| - 1$  dimensional.<sup>2</sup> Nach dem Spektralsatz linearer Operatoren auf endlich dimensionalen komplexen Vektorräumen lässt sich  $Q$  schreiben als:

$$Q = U^\dagger R U$$

Die Diagonalmatrix  $R$  ist nicht-negativ und hat genau  $|f| - 1$  positive Einträge. Ein wenig umformen von (6.20) liefert dann

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle q, Q(q) \rangle_{\mathfrak{K}} = \\ & \frac{1}{2} \langle q, U^\dagger R U(q) \rangle_{\mathfrak{K}} = \\ & \frac{1}{2} \langle U(q), R U(q) \rangle_{\mathfrak{K}} \end{aligned}$$

Wir können  $U$  und  $r$  so wählen, dass die ersten  $|V| - 1$  Einträge Null sind und definieren

$$\omega_j = R_{|V|-1+j} \text{ für } 1 \leq j \leq |f| - 1$$

Wir konstruieren nun den unitären Operator  $\hat{U}$ . Sei  $\phi \in \mathfrak{H}$  und  $x \in \mathfrak{K}$

$$\hat{U}(\phi)(x) = \phi(U(x))$$

Der Operator  $\hat{U}$  ist offensichtlich invertierbar und weil  $U$  unitär auf  $\mathfrak{K}$  ist nach dem Transformationssatz für Integrale auch unitär.

Für den Operator  $\hat{V}$  ist die gesuchte Transformationseigenschaft (6.19) bereits erfüllt.

$$\begin{aligned} & (\hat{U}^\dagger \hat{V} \hat{U})(\phi)(x) = \\ & \hat{U}^\dagger \left( \frac{1}{2} \langle U(q), R U(q) \rangle_{\mathfrak{K}} \phi \right)(U(x)) = \\ & \frac{1}{2} \langle U^\dagger U(q), R U^\dagger U(q) \rangle_{\mathfrak{K}} \phi(U^\dagger U(x)) \\ & \frac{1}{2} \langle q, R q \rangle_{\mathfrak{K}} \phi(x) \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Der eulersche Polyedersatz ist eine Folgerung der Helmholtz Zerlegung.

Der Operator  $\hat{T}$  ist der Laplaceoperator und somit invariant unter orthogonaler Transformation.  $\square$

Wir haben nun gezeigt, dass sich der freie Hamiltonoperator (6.13), daher mit  $\hat{j} \equiv 0$ , zerlegen lässt in eine endliche Summe von selbstadjungierten Operatoren mit bekannten Spektra.



# Abschluss

Es hat mich sehr gefreut diese Arbeit zu schreiben. Ich weiß nicht wirklich ob sie jemals jemandem nützlich sein wird, aber falls ja würde mich das sehr freuen. Im dreidimensionalen ist alles eine Spur komplizierter, aber in einigen Punkten auch wieder nicht. Elektromagnetismus passt halt recht gut zu drei Raumdimensionen. Besonders wichtig am Schluss war es mir zu zeigen, warum Widerstandsnetzwerke so nett lösbar sind, und aber auch das man von der Intuition von elektrischen Netzwerken die dicht den Raum erfüllen alle elektromagnetischen Phänomene beschreiben kann. Eine Diskretisierung (Finite Differenzen) der Maxwellgleichungen der Ebene entspricht genau den Maxwellgleichungen die im letzten Kapitel entwickelt wurden.

Es war sehr schön, es hat mich sehr gefreut!