FOURIER' KIIRTEISENDUS

LOTI.05.064 DIGITAALNE SIGNAALITÖÖTLUS TARTU|2021 (6 EAP)

Janno Jõgeva

TÄNASED TEEMAD

TÄNASED TEEMAD

- Eelmisel nädalal

TÄNASED TEEMAD

- Eelmisel nädalal
- Organisatoorne info

TÄNASED TEEMAD

- Eelmisel nädalal
- Organisatoorne info
- FFT

TÄNASED TEEMAD

- Eelmisel nädalal
- Organisatoorne info
- FFT
- Cooley–Tukey algoritm

KORRALDUSLIK INFO

VAHEARVESTUS

8. aprill

Kuuenda praktilise töö ülesanne nr 4 ei kuulu vahearvestuse alla ja võib esitada järgmisel nädalal.

7. PRAKTILINE TÖÖ

Juhend tuleb välja T3 praktikumiks

KOMPLEKSARVUD

IMAGINAARÜHIK

Siin kursuses kasutame $j^2 = -1$

KOMPLEKSTASAND (RISTKOORDINAADID)

Tasandi punktid on esitatavad algrbralisel kujul $a1 + bj$

Kus $a, b \in \mathbb{R}$ ja $j = \sqrt{-1}$

Enamast tähistatakse $c \in \mathbb{C}$

KOMPLEKSTASAND (POLAARKOORDINAADID)

Tasandi punktid on esitatavad trigonomeetrilisel kujul r, θ

Kus $r \in \mathbb{R}$ ja $\theta \in [0, 2\pi)$

IMAGINAARÜHIKU ASTMED

IMAGINAARÜHIKU ASTMED

$$j = \sqrt{-1}$$

IMAGINAARÜHIKU ASTMED

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

IMAGINAARÜHIKU ASTMED

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = ?$$

IMAGINAARÜHIKU ASTMED

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = ?$$

$$j^4 = ?$$

IMAGINAARÜHIKU ASTMED

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = ?$$

$$j^4 = ?$$

$$j^5 = ?$$

IMAGINAARÜHIKU ASTMED

$$j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1$$

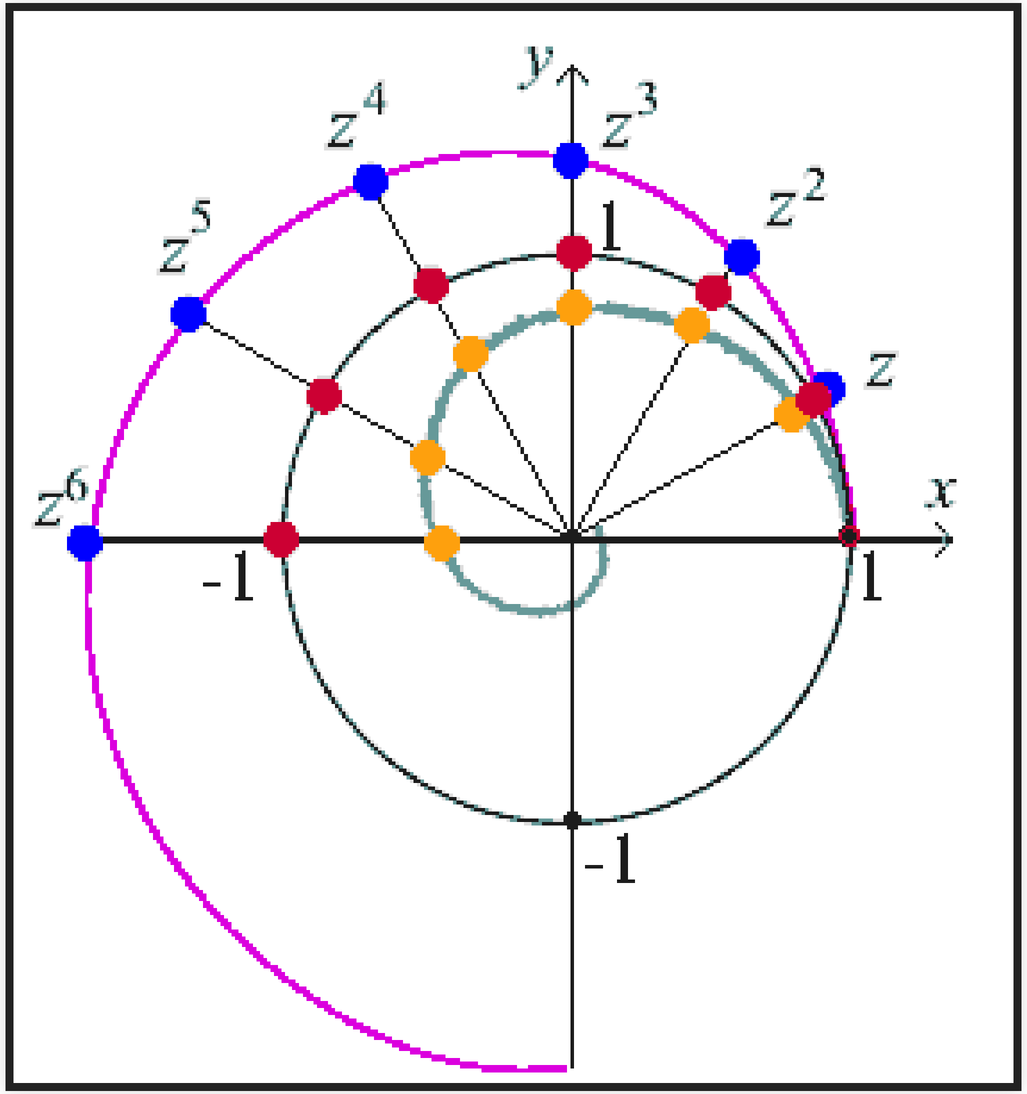
$$j^3 = ?$$

$$j^4 = ?$$

$$j^5 = ?$$

$$j^6 = ?$$

KOMPLEKSARVUDE KORRUTAMINE



KAS OLETE LOENGUSSE KIRJA PANDUD?

DFT

ARVUTUSVALEM

ARVUTUSVALEM

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

ARVUTUSVALEM

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

↓ ↓

ARVUTUSVALEM

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

$$\downarrow \; \downarrow$$

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$$

PROBLEEM

- Iga pöörde jaoks on vaja teha
  - $N \cdot N$ kompleksarvulist korrutamist
  - $N \cdot (N - 1)$ kompleksarvulist liitmist
- Pikemate aegridade korral läheb see kiirelt raskeks

FFT

MÕISTE

FFT (***F**ast **F**ourier **T**ransform*)

Algoritmide perekond, vabaneb N^2 tehte vajadusest

Ei ole üks kindel algoritm

COOLEY–TUKEY ALGORITM

- 1965 ajakirjas "Mathematics of Computation" avaldatud artikkel
- Tasuta kättesaadav: https://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/
- Hiljem selgus, et Carl Friedrich Gauss teadis sellest algoritmist juba aastal 1805

COOLEY–TUKEY ALGORITM (JÄTK)

Meie vaatame kõige lihtsamat *radix-2* versiooni

Eeldame, et signaali pikkus $N \Leftrightarrow 2^m$

COOLEY–TUKEY ALGORITM (JÄTK)

Meie vaatame kõige lihtsamat *radix-2* versiooni

Eeldame, et signaali pikkus $N \Leftrightarrow 2^m$

Eraldiseisvalt on olemas ka *radix-4*, kus $N \Leftrightarrow 4^m$, ning *mixed-radix*

DFT KOMPAKTSEM KUJU

DFT KOMPAKTSEM KUJU

Seni oleme kasutanud

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \rightarrow x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

DFT KOMPAKTSEM KUJU

Seni oleme kasutanud

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \rightarrow x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Täna kasutame mugavuse huvides sellist valemite paari kus järjendi pikkusega jagame pöördteisenduse juures

DFT KOMPAKTSEM KUJU

Seni oleme kasutanud

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \rightarrow x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Täna kasutame mugavuse huvides sellist valemite paari kus järjendi pikkusega jagame pöördteisenduse juures

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} \rightarrow x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

COOLEY–TUKEY RADIX-2

ALLIKAS

Toetun järgmises selgituses Rich Radke tööle

Töötab Rensselaeri Polütehnilises Instituudis

ETALONSIGNAALI KOMPAKTSEM KUJU

ETALONSIGNAALI KOMPAKTSEM KUJU

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

ETALONSIGNAALI KOMPAKTSEM KUJU

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

↓ ↓

ETALONSIGNAALI KOMPAKTSEM KUJU

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

$$\downarrow \; \downarrow$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

ETALONSIGNAALI KOMPAKTSEM KUJU (JÄTK)

ETALONSIGNAALI KOMPAKTSEM KUJU (JÄTK)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

ETALONSIGNAALI KOMPAKTSEM KUJU (JÄTK)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

Kus, $W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$

JAGAME PROBLEEMI POOLEKS

JAGAME PROBLEEMI POOLEKS

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} = \sum_{n-paaris}^{N-1} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n-paaritu}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$$

JAGAME PROBLEEMI POOLEKS

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n-paaris}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n-paaritu}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

Eeldame, et N on paaris ja tähistame $n = 2r$

JAGAME PROBLEEMI POOLEKS

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n-paaris}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n-paaritu}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

Eeldame, et N on paaris ja tähistame $n = 2r$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k}$$

JAGAME PROBLEEMI POOLEKS (JÄTK)

JAGAME PROBLEEMI POOLEKS (JÄTK)

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

JAGAME PROBLEEMI POOLEKS (JÄTK)

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

$$\downarrow \ \downarrow$$

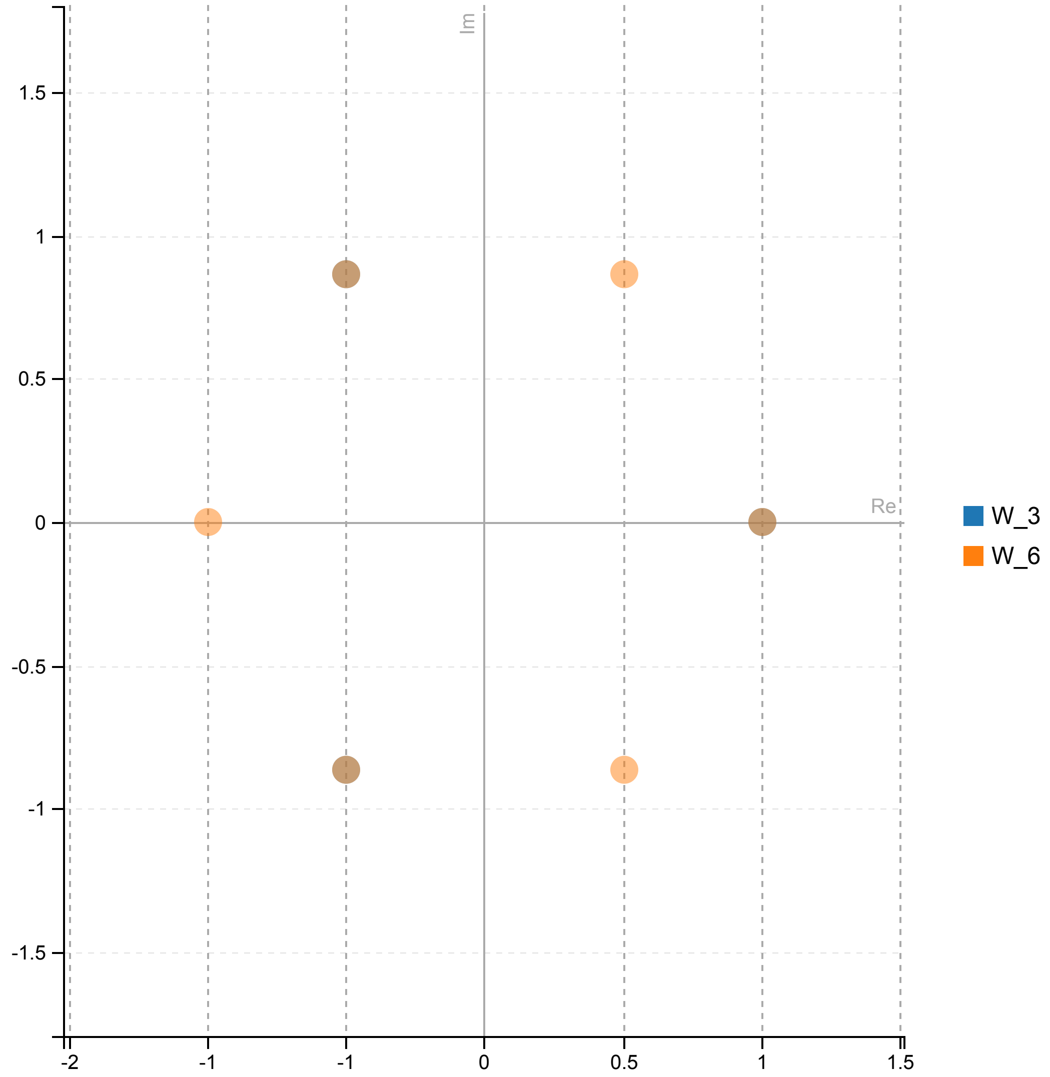
JAGAME PROBLEEMI POOLEKS (JÄTK)

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

$$\downarrow \downarrow$$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_N^2\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_N^2\right)^{rk}$$

W_N



W_6^1 - ei kattu

$$W_6^2 = W_3^1$$

W_6^3 - ei kattu

$$W_6^4 = W_3^2$$

W_6^5 - ei kattu

$$W_6^6 = W_3^3$$

AVALDAME KAHE DFT KAUDU

AVALDAME KAHE DFT KAUDU

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_N^2\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_N^2\right)^{rk}$$

AVALDAME KAHE DFT KAUDU

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_N^2\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_N^2\right)^{rk}$$

↓ ↓

AVALDAME KAHE DFT KAUDU

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_N^2\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_N^2\right)^{rk}$$

$$\downarrow \ \downarrow$$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk}$$

TÄHISTAME LÜHEMALT

TÄHISTAME LÜHEMALT

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk}$$

TÄHISTAME LÜHEMALT

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk}$$

$$\downarrow \;\; \downarrow$$

TÄHISTAME LÜHEMALT

$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk}$$

$$\downarrow \; \downarrow$$

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k]$$

TÄHISTAME LÜHEMALT

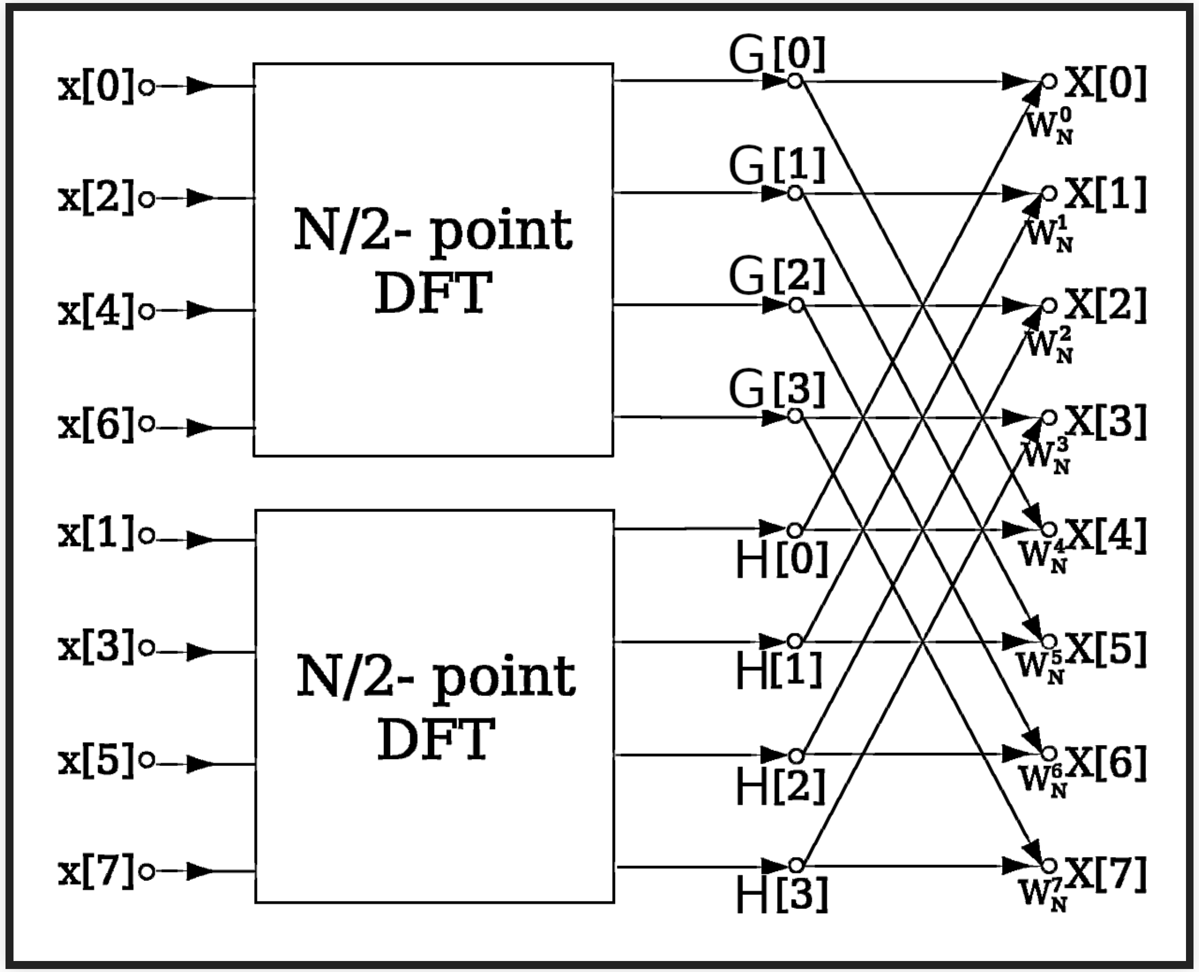
$$X[k] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]\left(W_{\frac{N}{2}}\right)^{rk}$$

$$\downarrow \ \downarrow$$

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k]$$

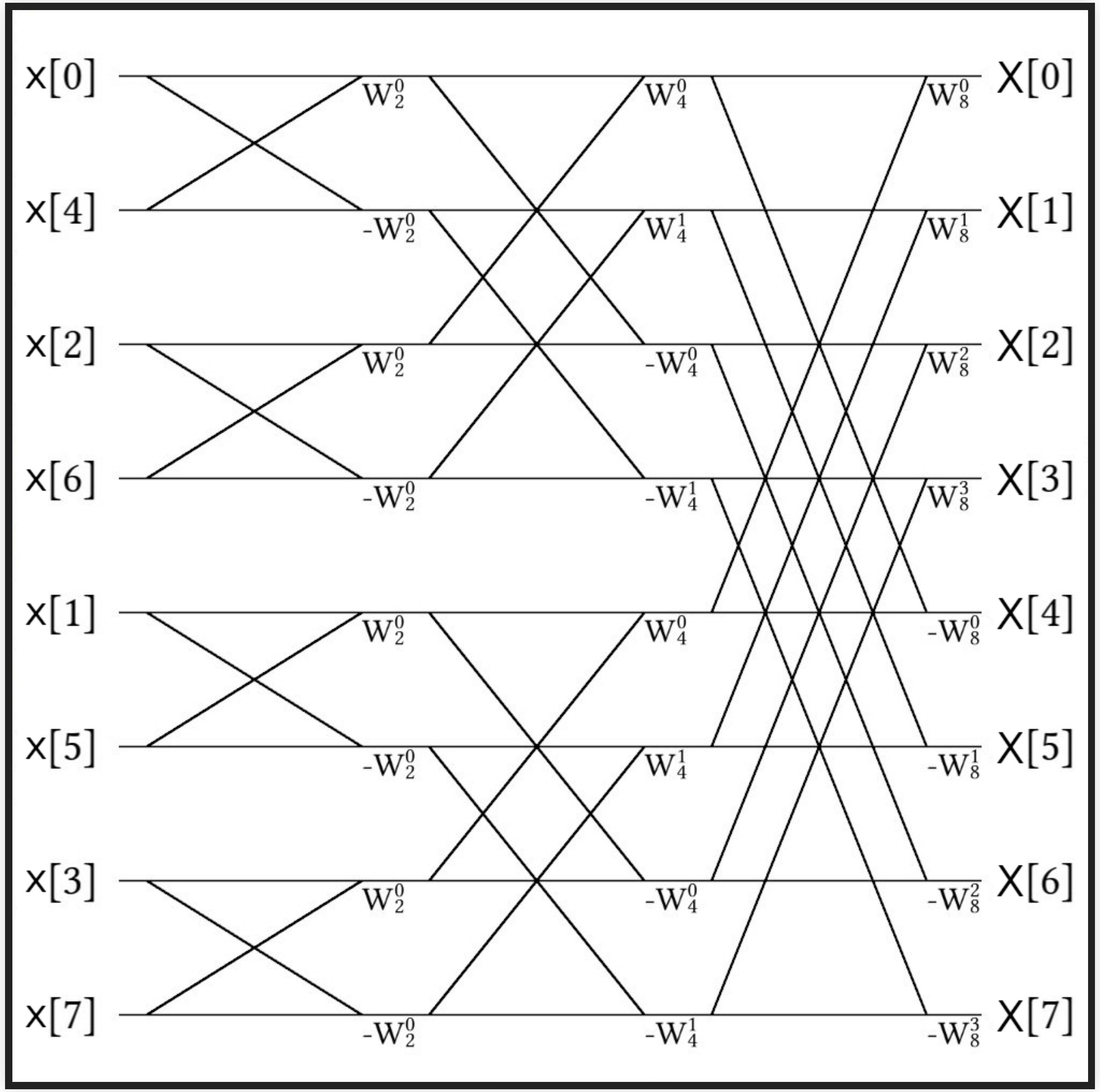
$G[k]$ ja $H[k]$ on tsükilised

KORRUTISTE ARV



- Ülemine DFT $\left(\frac{N}{2}\right)^2$
- Alumine DFT $\left(\frac{N}{2}\right)^2$
- Kokku $\approx \frac{N^2}{2}$

PROTSESS ON KORRATAV



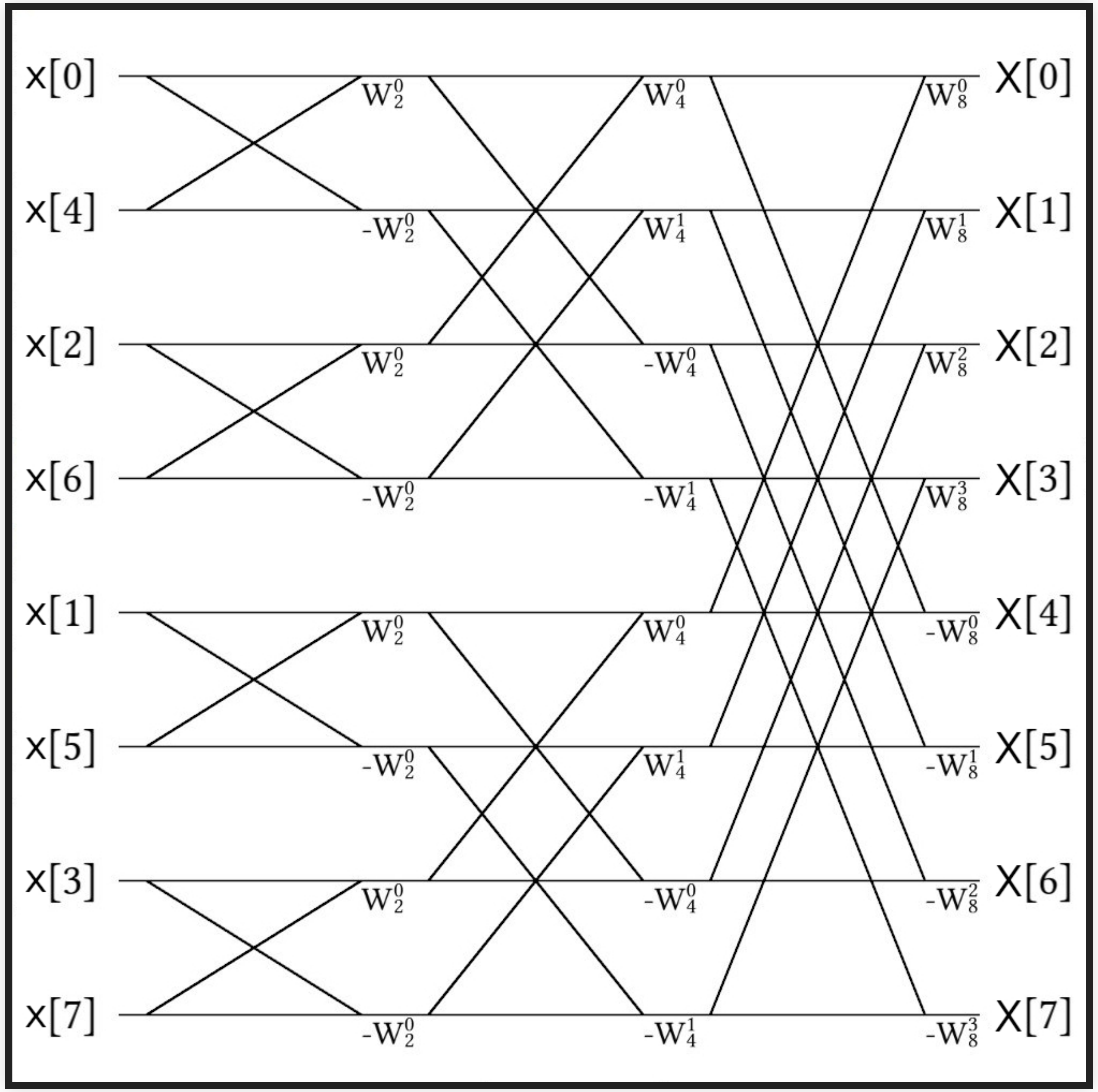
Lõpuks tuleb meil teha ~$N\log_2(N)$ kompleksarvulist korrutist

6. PRAKTILINE TÖÖ

Kasutame rekursiivset implementatsiooni

Ka mitterekursiivne algoritm on teada

BIT-REVERSAL PERMUTATION



0 - 000|000 - 0

1 - 001|100 - 4

2 - 010|010 - 2

3 - 011|110 - 6

4 - 100|001 - 1

5 - 101|101 - 5

6 - 110|011 - 3

7 - 111|111 - 7

KONVOLUTSIOON

KONVOLUTSIOON AEGRUUMIS

KONVOLUTSIOON AEGRUUMIS

Oli pikemate signaalide korral aeglane operatsioon

KONVOLUTSIOON AEGRUUMIS

Oli pikemate signaalide korral aeglane operatsioon

Kolmandas praktilises töös arvutasite välja liitmis - ja korrutamistehete arvu

KONVOLUTSIOON SAGEDUSRUUMIS

Saab sooritada lineaarse keerukusega

Aga meie signaalid ei ole tihti algselt sagedusruumis

OVERLAP-ADD ALGORITM

1. Viime sisendsignaalid osade kaupa sagedusruumi
2. Sooritame konvolutsiooni asemel korrutise
3. Viime saadud tulemuse tagasi algsele kujule ja sobitame jupid kokku

KOKKUVÕTVALT

MIS ON VAJA TEIL ÄRA TEHA?

- Esitada 6. praktiline töö
- Esitada 6. kodutöö

FOURIER' KIIRTEISENDUS: LOTI.05.064 DIGITAALNE SIGNAALITÖÖTLUS TARTU|2021 (6 EAP)

Janno Jõgeva