

计算流体力学期末大作业

王超艺

2024 年 6 月 17 日

1 题目描述

半无穷大空间均匀来流，来流状态如下

$$p = 99719Pa$$

$$T = 293.15K$$

$$u = 686.47m/s$$

$$v = 0m/s$$

流动方向与 EA 垂直。来流与绝热板 ABC 相互作用。流动忽略粘性作用。

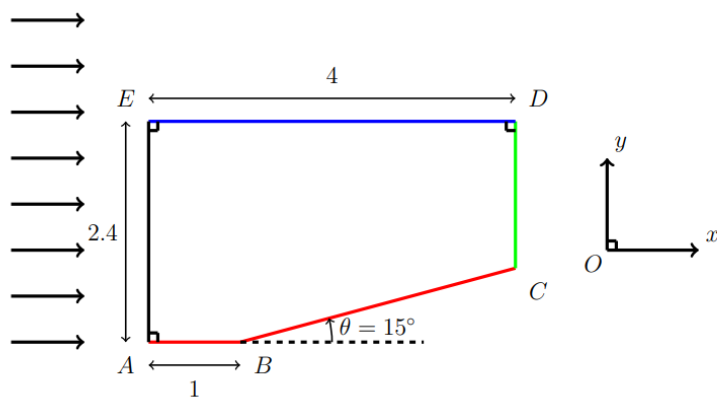


图 1: 压缩折角算例计算域 ABCDE 示意图

在如图所示的计算域 ABCDE 内，针对压缩折角流动求解二维欧拉方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} + \frac{\partial g(U)}{\partial y} = 0,$$

其中：

$$\begin{aligned} U &= [p, pu, pv, E]^T, \\ f(U) &= [pu, pu^2 + p, puv, u(E + p)]^T, \\ g(U) &= [pv, puv, pv^2 + p, v(E + p)]^T, \\ E &= pe + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2), \\ e &= c_v T. \end{aligned}$$

假设满足理想气体状态方程 $p = \rho RT$ ，且物性参数为：

$$R = 287.14$$

$$\gamma = 1.4$$

求数值解。

2 解题思路

2.1 网格生成

对于压缩折角的网格生成，可以按照以下步骤进行：

1. 设置区域的边长和角度；
2. 计算区域顶点的坐标，包括点 B 和点 C 的坐标；
3. 确定网格的分辨率，即网格点的数量；
4. 使用线性插值生成底部和顶部边界的 x 和 y 坐标；
5. 使用循环生成整个二维网格的 x 和 y 坐标，网格点的坐标根据底部和顶部边界进行线性插值。

生成网格效果如图：

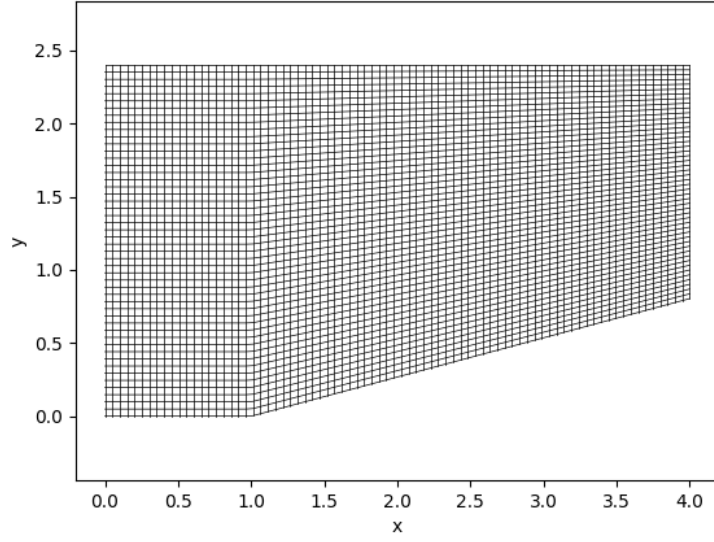


图 2: 网格生成

2.2 初边值条件

边值条件如下:

变量	Inlet (AE)	Outlet (CD)	Bottom (ABC)	Top (ED)
U	Dirichlet 边界条件	Outflow 边界条件	反射边界条件	Outflow 边界条件
p	Dirichlet 边界条件	Outflow 边界条件	反射边界条件	Outflow 边界条件
T	Dirichlet 边界条件	Outflow 边界条件	反射边界条件	Outflow 边界条件

初始时, 全场统一, 条件设置与来流相同。

2.3 通量分裂

采用 Lax-Friedrichs、Steger-Warming 和 Van Leer 三种通量分裂格式。

2.3.1 Lax-Friedrichs 通量分裂

通量的 Jacobi 矩阵 A ，有若干个特征值 λ_i ，最大特征值的绝对值 $\lambda^* = |V_n| + c$ ，据此，首先将 Jacobi 矩阵做如下分解：

$$A^+ = \frac{1}{2}(A + \lambda^* I), A^- = \frac{1}{2}(A - \lambda^* I).$$

显然， A^+ 和 A^- 的特征值分别为

$$\lambda_i^+ = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda^*), \lambda_i^- = \frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda^*).$$

λ^* 的取法保证了 λ_i^+ 非负， λ_i^- 非正。正负通量为

$$F^+ = A^+ W, F^- = A^- W.$$

左右状态可以分别都给出正负通量 F_ℓ^\pm 和 F_r^\pm ，最终界面上的通量为

$$F_0 = F_\ell^+ + F_r^- = \frac{1}{2}(A_\ell + \lambda_\ell^* I)W_\ell + \frac{1}{2}(A_r - \lambda_r^* I)W_r = \frac{1}{2}(F_\ell + F_r) - (\lambda_r^* W_r - \lambda_\ell^* W_\ell).$$

2.3.2 Steger-Warming 通量分裂

这种分裂方法也是根据特征值 λ_i 来完成的，首先将特征值分解为正负部分：

$$\lambda_i^+ = \frac{1}{2}(\lambda_i + |\lambda_i|), \lambda_i^- = \frac{1}{2}(\lambda_i - |\lambda_i|).$$

进而将矩阵 A 分为正负两部分

$$A = T^{-1} \Lambda T = T^{-1}(\Lambda^+ + \Lambda^-)T = A^+ + A^-,$$

其中 Λ, Λ^\pm 是对角线上是特征值的对角矩阵。于是正负通量为

$$F^+ = A^+ W, F^- = A^- W.$$

2.3.3 Van Leer 通量分裂

Van Leer 通量分裂是基于特征分解给出的，为此，首先计算出界面处法向 Mach 数

$$M_n = \frac{V}{c}$$

其中 V 是界面法向速度， c 是声速。为了给出这些数值，首先，要将流动原始变量插值到界面处，得到左右两个状态。原则上是利用左侧的状态给出正通量，利用右侧状态给出负通量，最后综合给出界面上的状态。

记左右法向 Mach 数分别为 M_l 和 M_r ，那么对 Mach 数来说，左侧状态为

$$M_\ell^+ = \begin{cases} M_\ell, & M_\ell \geq 1, \\ -\frac{1}{4}(M_\ell + 1)^2, & |M_\ell| < 1, \\ 0, & M_\ell \leq -1 \end{cases}$$

右侧状态为

$$M_r^- = \begin{cases} 0, & M_r \geq 1, \\ -\frac{1}{4}(M_r - 1)^2, & |M_r| < 1, \\ M_r, & M_r \leq -1 \end{cases}$$

最终界面 Mach 数为

$$M_n = M_\ell^+ + M_r^-$$

对于 $|M_n| \pm 1$ 的超声速情况，界面处仅有正通量或者负通量，分别就是左通量和右通量

$$F_0^+ = \begin{cases} F_\ell, & M_n \geq +1, \\ 0, & M_n \leq -1 \end{cases}$$

$$F_0^- = \begin{cases} 0, & M_n \geq +1, \\ F_r, & M_n \leq -1 \end{cases}$$

对于 $|M_n| < 1$ 的亚声速情况，界面正负通量为

$$F_0^\pm = \begin{bmatrix} f_{\text{mass}}^\pm \\ f_{\text{mass}}^\pm [n_x (-V \pm 2c) / \gamma + u] \\ f_{\text{mass}}^\pm [n_y (-V \pm 2c) / \gamma + v] \\ f_{\text{mass}}^\pm [n_z (-V \pm 2c) / \gamma + w] \\ f_{\text{energy}}^\pm \end{bmatrix}$$

其中的质量和能量通量为

$$f_{\text{mass}}^+ = \rho_\ell c_\ell \frac{(M_\ell + 1)^2}{4}, \quad f_{\text{mass}}^- = -\rho_r c_r \frac{(M_r - 1)^2}{4},$$

$$f_{\text{energy}}^\pm = f_{\text{mass}}^\pm \left[\frac{(\gamma - 1)V \pm 2c)^2}{2(\gamma^2 - 1)} + \frac{u^2 + v^2 + w^2 - V^2}{2} \right]_{\ell r}.$$

最后，利用 F_l^+ 和 F_r^- 给出界面处的通量。

2.4 激波捕捉格式

采用 5 阶 WENO 作为激波捕捉格式。

WENO 的全称为加权本质无振荡方法，是 ENO 方法的衍生形态。通过将所有的 ENO 重构模板进行凸组合，获得较为逼近的参数空间分布。假设 k 个模板的表达式如下所示，

$$S_r(i) = \{x_{i-r}, x_{i-r+1}, \dots, x_{i-r+k-1}\}$$

其中 r 的取值如下所示，

$$r = 0, 1, \dots, k - 1.$$

那么可以获得 $Q_{i+1/2}^L$ 的 k 种重构方式，具体数学表达式如下所示，

$$Q_{i+1/2}^{(r)} = \sum_{j=0}^{k-1} \text{Const}_{rj} \cdot Q_{i-r+j}$$

可能使用到的格心点参数组合有如下三种形式,

$$S_0 = \{Q_{i-2}, Q_{i-1}, Q_i\} S_1 = \{Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}\} S_2 = \{Q_i, Q_{i+1}, Q_{i+2}\}$$

进一步地, $U_{i+1/2}^{(r)}$ 的三种拟合情况如下所示,

$$\begin{cases} Q_{i+1/2}^{(0)} &= \frac{1}{3}Q_{i-2} - \frac{7}{6}Q_{i-1} + \frac{11}{6}Q_i \\ Q_{i+1/2}^{(1)} &= \frac{1}{6}Q_{i-1} + \frac{5}{6}Q_i + \frac{1}{3}Q_{i+1} \\ Q_{i+1/2}^{(2)} &= -\frac{1}{3}Q_i + \frac{5}{6}Q_{i+1} - \frac{1}{6}Q_{i+2} \end{cases}$$

加权重构公式如下所示,

$$Q_{i+1/2}^L = w_0 Q_{i+1/2}^{(0)} + w_1 Q_{i+1/2}^{(1)} + w_2 Q_{i+1/2}^{(2)}$$

权重因子 ω_k 的表达式如下所示,

$$\begin{cases} w_k &= \frac{\alpha_k}{\sum_{i=0}^2 \alpha_k} \\ \alpha_k &= \frac{d_k}{(\beta_k + \epsilon)^2} \end{cases}$$

其中权系数 d_k 有如下表达式

$$d_0 = 0.3, d_1 = 0.6, d_2 = 0.1$$

参数 ϵ 的作用是避免分母为零,

$$\epsilon = 1 \times 10^{-6}$$

此外光滑度度量系数 β_k 的表达式为,

$$\begin{cases} \beta_2 &= \frac{13}{12}(Q_i - 2Q_{i+1} + Q_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3Q_i - 4Q_{i+1} + Q_{i+2})^2 \\ \beta_1 &= \frac{13}{12}(Q_{i-1} - 2Q_i + Q_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(Q_{i-1} - Q_{i+1})^2 \\ \beta_0 &= \frac{13}{12}(Q_{i-2} - 2Q_{i-1} + Q_i)^2 + \frac{1}{4}(Q_{i-2} - 4Q_{i+1} + 3Q_i)^2 \end{cases}$$

2.5 时间推进格式

采用三阶荣格-库塔方法作为时间推进格式。

对于二维欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$$

其中， \mathbf{u} 是状态向量， $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ 是通量函数。

RK3 方法通过以下步骤进行时间推进：

1. 初步估计（第一步）：

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^n)$$

其中， $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u})$ 。

2. 中间修正（第二步）：

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{u}^n + \frac{1}{4}(\mathbf{u}^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(1)}))$$

3. 最终修正（第三步）：

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{u}^n + \frac{2}{3}(\mathbf{u}^{(2)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{u}^{(2)}))$$

3 程序实现

3.1 文件说明

程序主要包含以下文件：

Weno5_p.m: 用 WENO 方法对正向通量作重构。

Weno5_n.m: 用 WENO 方法对负向通量作重构。

visualization.m: 可视化，包括绘制密度、压强等高线图和水平速度的剖面图。

TimeIteration.m: 时间迭代，三用三阶荣格库塔方法推进时间。

MaxEigY.m: Y 方向的通量雅可比矩阵的最大特征值，用于 Lax-Friedrichs

通量分裂和确定时间增量。

MaxEigX.m: X 方向的通量雅可比矩阵的最大特征值, 用于 Lax-Friedrichs 通量分裂和确定时间增量。

main.m: 主程序。

Jacobi.m: 坐标变换的雅可比矩阵。

Initial.m: 初始条件设置。

GridGeneration.m: 网格生成。

FluxVL_Y.m: Y 方向的 Van Leer 通量分裂。

FluxVL_X.m: X 方向的 Van Leer 通量分裂。

FluxSW_Y.m: Y 方向的 Steger-Warming 通量分裂。

FluxSW_X.m: X 方向的 Steger-Warming 通量分裂。

Flux_Splitting.m: 通量分裂和重构。

BoundaryCondition.m: 设置边界条件。

3.2 程序实现流程

1. 首先作网格生成, 并计算物理网格到计算网格的雅可比矩阵。设置初始条件后进入三阶荣格库塔的时间推进。
2. 在荣格库塔发给的每一步中, 计算 X、Y 方向的通量 F、G, 并据此计算当前步的 U。
3. 计算通量时, 首先在物理网格上设置边界条件, 然后根据用户运行程序时输入的参数选择相应的格式作通量分裂。之后将通量转换到计算网格上作通量重构。重构的通量用于时间推进。
4. 每次循环中将计算得到的下一时刻的 U 转换到物理网格上, 作为下一步时间推进的起点, 并作可视化。
5. 时间推进至收敛或者达到最大时间后, 退出循环。

4 计算结果

4.1 结果展示

以下结果在网格数为 400×250 的情况下计算得到。

4.1.1 Lax-Friedrichs 通量分裂

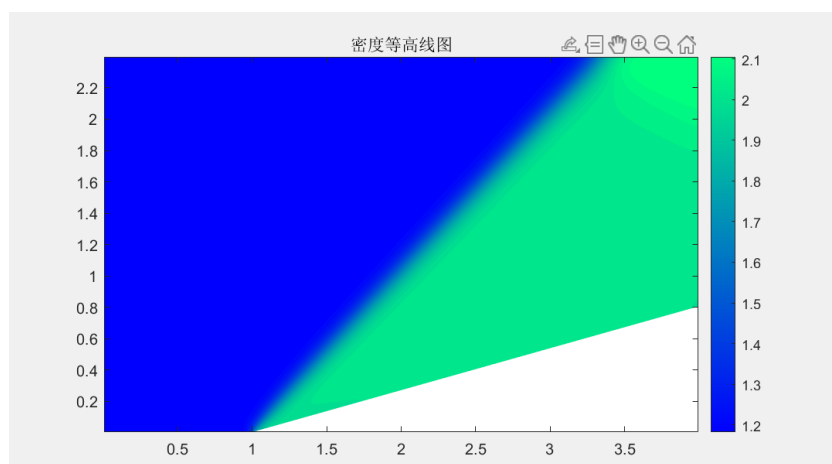


图 3: 单位: kg/m^3

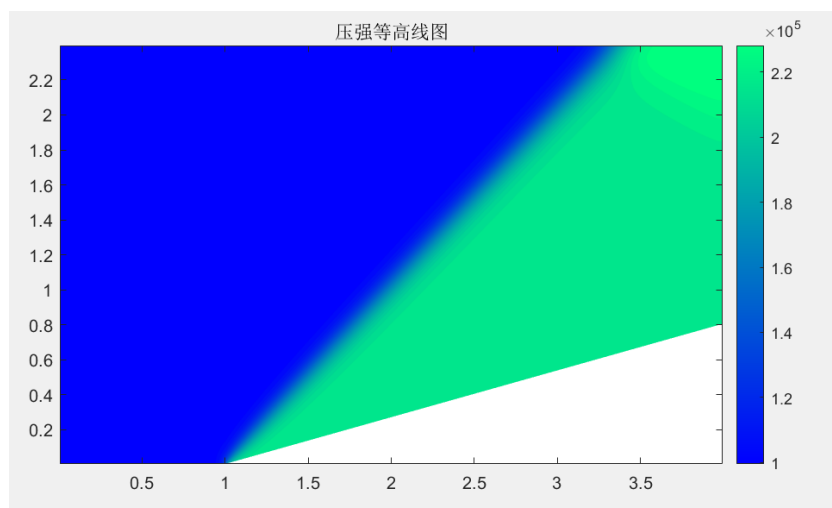


图 4: 单位: Pa

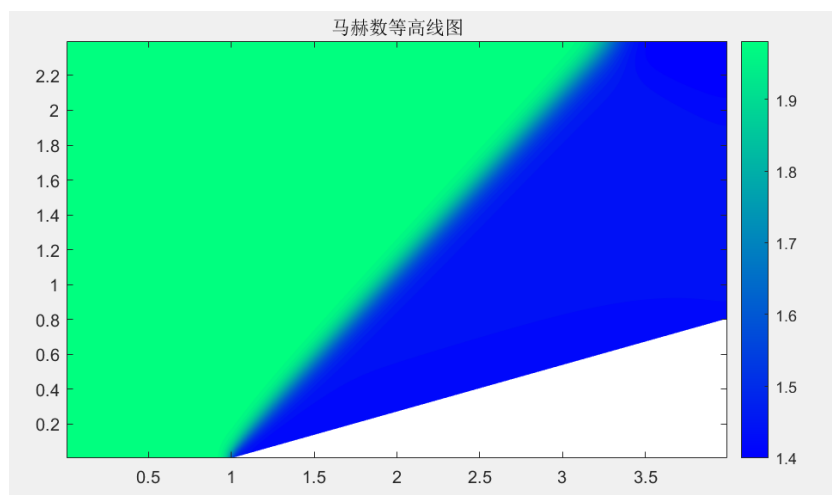


图 5: 单位: 无

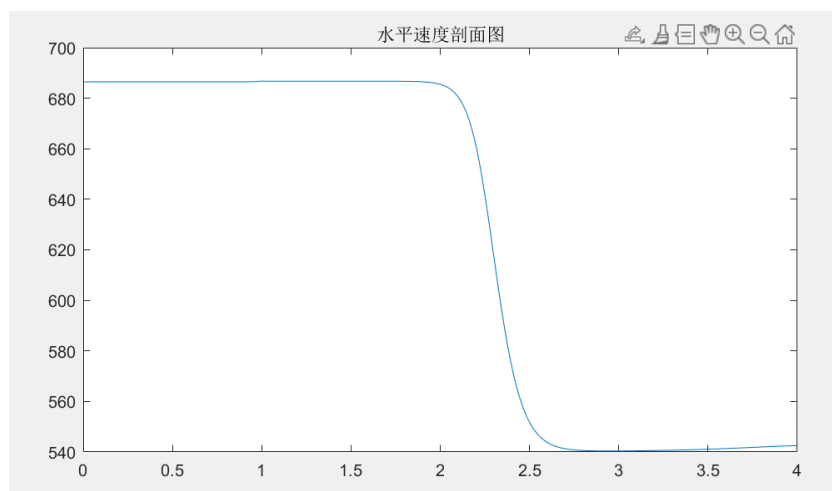


图 6: 单位: m/s

4.1.2 Steger-Warming 通量分裂

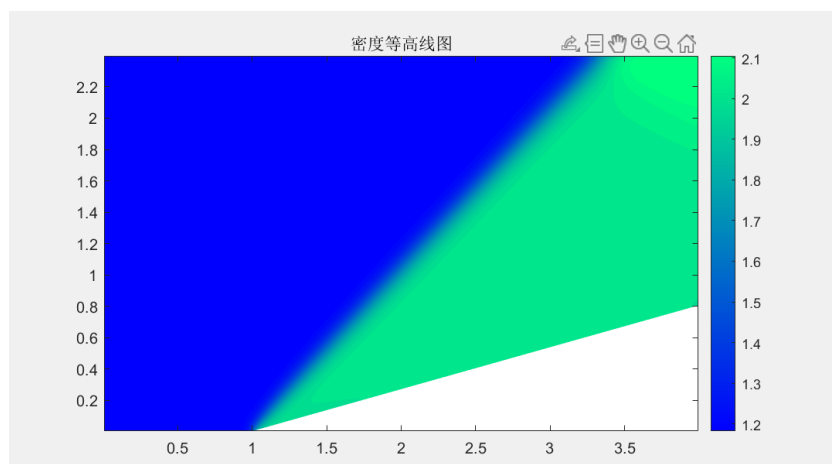


图 7: 单位: kg/m^3

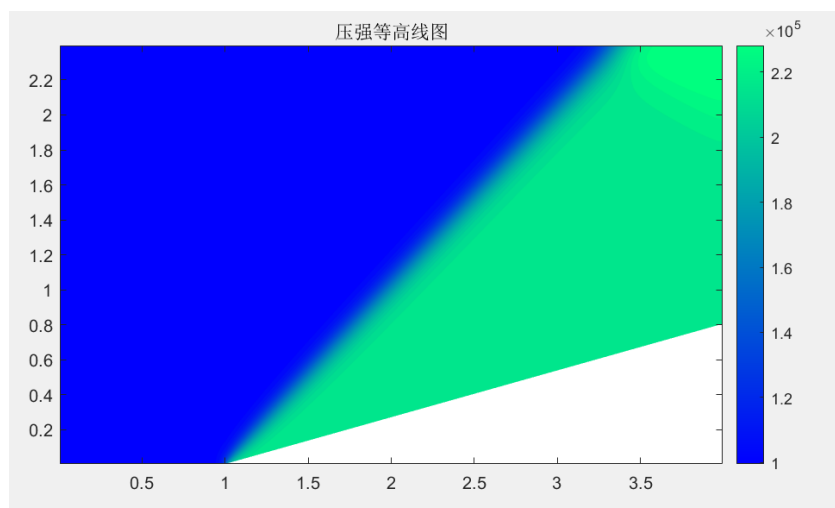


图 8: 单位: Pa

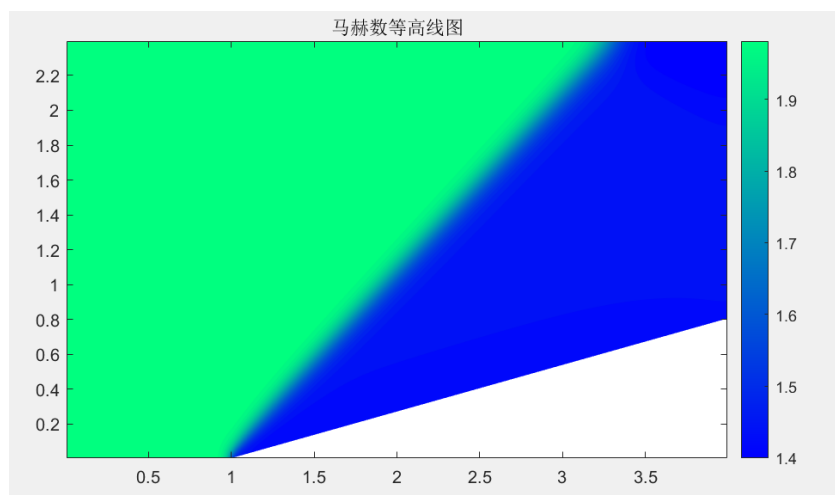


图 9: 单位: 无

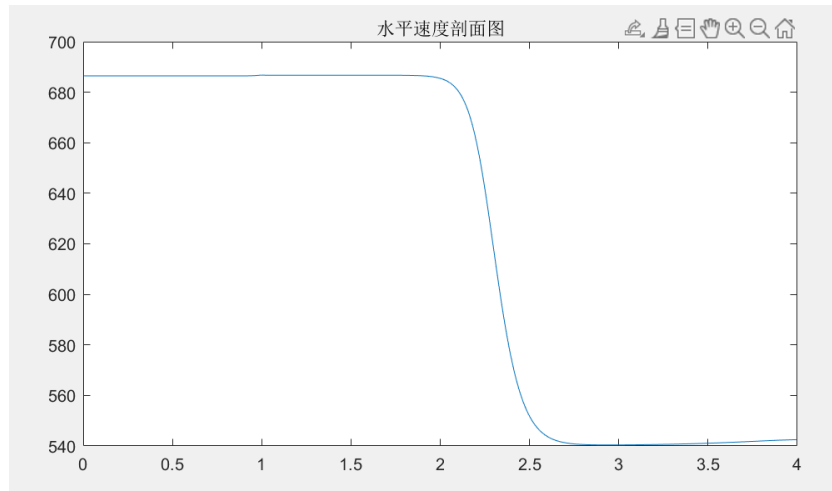


图 10: 单位: m/s

4.1.3 Van Leer 通量分裂

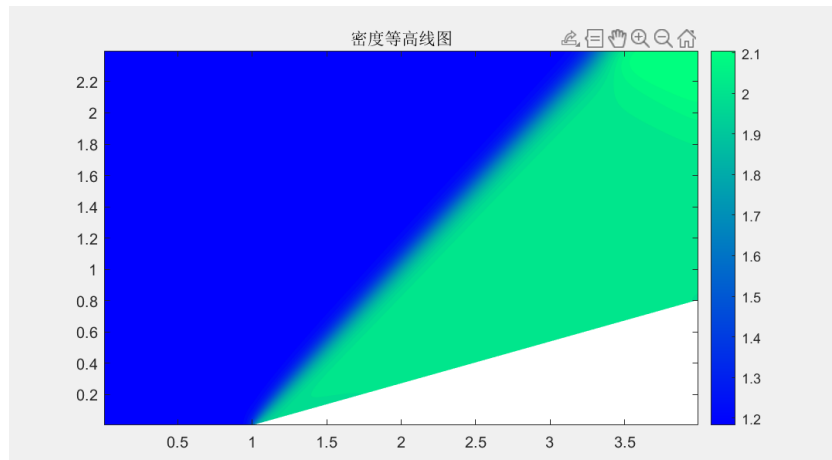


图 11: 单位: kg/m^3

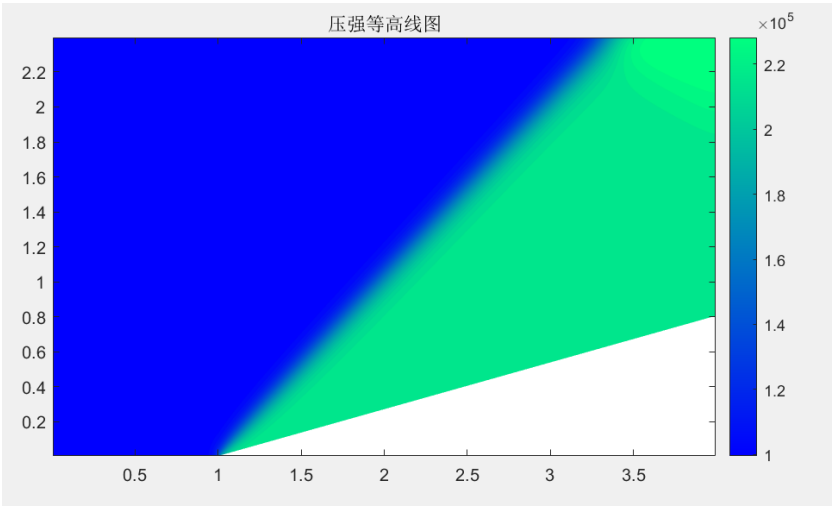


图 12: 单位: Pa

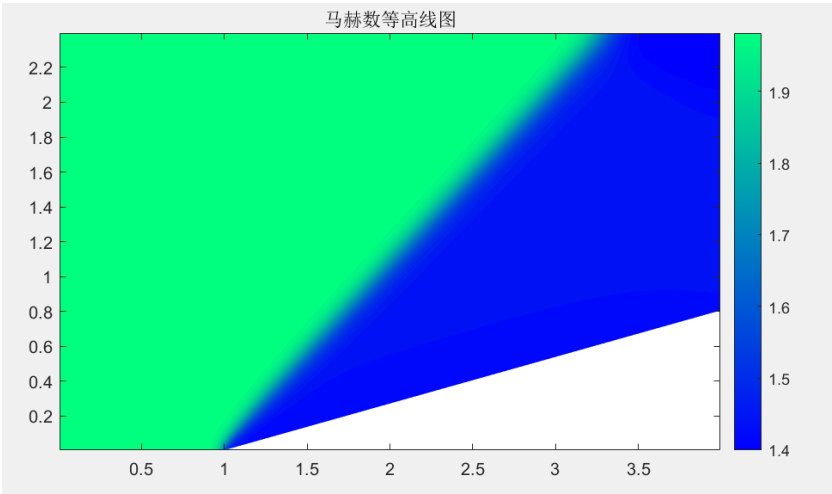


图 13: 单位: 无

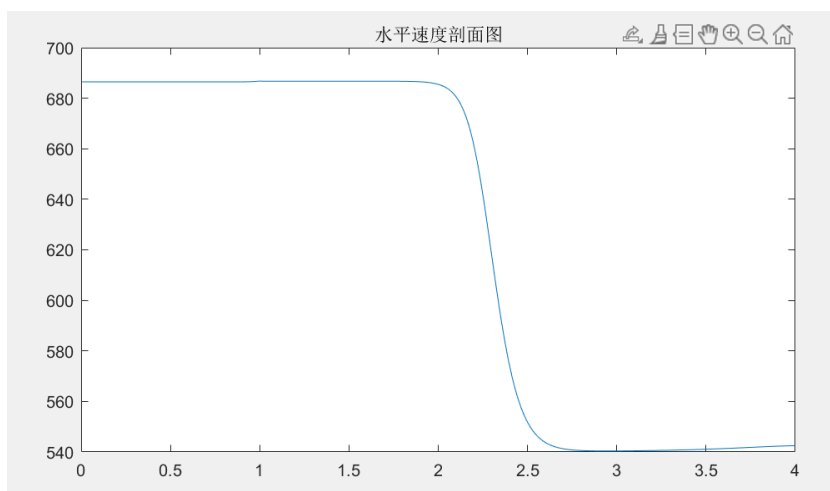


图 14: 单位: m/s

4.2 结果分析

可以看到，在折角处，流体的速度、压强和密度都发生了剧烈的变化，即产生了激波。激波前的流体处于较低的压力和温度状态，而通过激波后，流体的压力、温度和密度都会显著增加。这种剧烈的变化会导致空气分子紧密地挤压在一起，形成一个薄而尖锐的压力界面。

此外，三种通量分裂格式的计算结果基本相同，并且不同的通量分裂格式下，WENO 都较好地捕捉了激波，相比于一般的格式缓解了激波附近的振荡和耗散。